arXiv:2602.03500v1 [math.AG] 3 Feb 2026

n 阶热带 Nevanlinna 理论

RistoKorhonen[1] 和 Chengliang Tan*[1,2]

[1]东芬兰大学物理与数学系，邮政信箱 111，FI-80101 约恩苏，芬兰[2]北京国际数学研究中心，北京大学，100871 北京，中国。

摘要

本文将热带 Nevanlinna 理论推广到分段多项式连续函数。通过构造第 n 阶泊松-詹森公式，引入了第 n 阶热带计数函数、接近函数和特征函数，它们与经典热带背景相比具有一些不同的性质。随后，不仅得到了热带齐次多项式的第 n 阶第二主定理，还获得了普通费马型多项式的热带第二主定理。此外，在增长假设下逐点估计热带对数导数，证明了一个强等式。该等式阐明了 $\sum_{i=0}^{m} N(r, 1_0 \oslash f_i)$ 与分歧项 $N(r, C_0(f_0, \cdots, f_m))$ 之间的关系，从而表明对于移位算子不存在自然的第二主定理热带截断版本。

1 引言

内万林纳理论在复分析中发挥着非常重要的作用，其中对数导数引理在证明第二主定理时起着关键作用。这些理论在复微分方程中有许多应用。Halburd 和第一作者首先引入了差分算子的类比理论 [11], 证明了第二主定理的差分版本 [10], 得到了截断第二主定理的一个类似结果，并且

*通讯作者。电子邮箱：risto.korhonen@uef.fi（R. Korhonen），chengliangtan@pku.edu.cn（C.L. Tan）2020 年数学主题分类。主要分类：14T90；次要分类：30D35，32H30。关键词：分段多项式函数；逐点估计；截断第二主定理；费马型多项式。第二作者谨此感谢国家留学基金管理委员会的资助（资助编号 202206020078）

将该理论应用于对一类二阶差分方程进行完整分类 [12], 并将有限阶解的存在性视为 Painlev´é 性质的良好类比 [1]。迄今为止，已有大量关于差分方程的研究 [13, 24]。随后，Halburd、第一作者和 Tohge 将该理论推广到复射影空间，证明了超平面第二基本定理，并得到了 Picard 定理的差分版本 [15]。

热带数学是在热带半环中进行的，热带半环由实数（有时扩充为 $-\infty$）构成，并分别配备取最大值和求和这两种运算。自 20 世纪 70 年代以来，热带数学吸引了大量研究 [3] ，并有多种应用，例如统计推断 [28], 、群论 [2], 、超热带形式 [18–20], 以及代数几何 [17, 27]。此外，带有移位算子的热带函数也引起了广泛关注 [8]。在 [21], 中，有人提出了一种方法，用以证明超离散方程的可积性等价于差分方程的奇点约束性质。在 [9], 中，研究者通过奇点约束讨论了超离散方程可积性的检测方法。

2009 年，Halburd 和 Southall 首次提出热带 Nevanlinna 理论 [16], ，并发现有限阶 max-plus 亚纯解的存在也能有效地检测超离散方程的可积性。在这一发现的基础上，Laine 和 Tohge 探讨了热带第二主定理，以及 Valiron 定理和 Clunie引理的热带类比 [25, 26]。随后，第一作者和 Tohge 将第二主定理推广到热带射影空间 [23]。在本文中，作者发现术语 $N(r, 1_0 \oslash C_0(f_0, \cdots, f_m))$ 的一些明显性质，旨在利用这种关系作为突破口，获得热带截断第二基本定理的一个类比。然而，目前尚无法给出相应的证明。同样，Cao 和 Zheng 证明了热带超曲面上的热带第二主定理，并基于分歧项的性质提出了关于热带截断第二主定理的两个猜想 [5]。在 [14], 中，Halonen、第一作者和 Filipuk 摒弃了经典连续分段线性函数中的连续性，并推广了相应特征函数的定义。他们随后发现，增长假设可以舍弃；这一点在经典亚纯函数域中无法做到。最后，他们考察了热带反问题。

本文的主要目的是将热带 Nevanlinna 理论从分段线性函数推广到分段多项式函数。

本文的结构如下：在下一节中，我们研究有理函数的超离散化，并提出 n 阶热带亚纯函数的概念。在第三节中，我们首先证明关于 n 阶热带亚纯函数的泊松–延森公式（定理 3.3），随后提出特征函数的类比概念。接下来，在第 4 节中，我们采用一种新方法得到热带差商的逐点估计（定理 4.7），并针对多项式版本推导出对数导数引理的热带类比（推论 4.8）。在第 5 节中，我们得到含热带齐次多项式的 n 阶热带第二主定理（定理5.6）；由于我们已将线性函数推广为多项式，还得到含通常费马多项式的热带第二主定理（定理 5.8）。最后，通过应用热带对数导数的逐点估计，而非传统的热带对数导数引理，我们证明了 [23] 中提出的关系（定理 6.2 和推论 6.4）。这表明，对于涉及差分算子的热带截断第二基本定理，不存在自然的类比。

2 n阶热带亚纯函数

在经典热带代数中，我们以往研究有理函数

$$f(x)=\frac{a_px^p+a_{n-1}x^{p-1}+\cdots+a_0}{b_qx^q+b_{q-1}x^{q-1}+\cdots+b_0}\not\equiv 0,\infty$$

其中 $p,q\in\mathbb{N}\cup\{0\}$（我们假设 $\mathbb{N}$不包含0），x,a_i与 b_j对于 $i=0,\cdots p$和 $j=0,\cdots q$均为非负。在重新定义 $x=e^{\frac{X}{\epsilon}}$、 $a_i=e^{\frac{A_i}{\epsilon}}$和 $b_j=e^{\frac{B_j}{\epsilon}}$之后，特别是 $0=e^{\frac{-\infty}{\epsilon}}$，当 $\epsilon\to 0^+$时我们可以取极限，该过程称为去量子化 [8,9] 或超离散化 [16], ，然后由此导出热带乘积

$$F(X):=\lim_{\epsilon\to 0^+}\epsilon\log f(X,\epsilon)=\max_{0\le i\le p}\{iX+A_i\}-\max_{0\le j\le q}\{jX+B_j\}$$

它是一个分段线性连续函数。

在本文中，我们将研究函数 $f(x)\not\equiv 0,\infty$，其满足

$$\log f(x)=\prod_{k=1}^{n}\log\left(\frac{\sum_{i=0}^{p}a_{ki}x^i}{\sum_{j=0}^{q}b_{kj}x^j}\right)=:\prod_{k=1}^{n}\log f_k(x)$$

其中 $n\in\mathbb{N},p,q\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，并假设 x,a_{ki}和 b_{kj}对于 $k=1,\cdots,n,\ i=0,\cdots,p$ 以及 $j=0,\cdots,q$均为非负数。照例，我们定义 $x=e^{\frac{X}{\epsilon}}$，

$a_{ki}=e^{\frac{A_{ki}}{\epsilon}}$和 $b_{kj}=e^{\frac{B_{kj}}{\epsilon}}$，然后定义热带乘积为

$$\begin{aligned}F(X) &:= \lim_{\epsilon\to 0^+}\epsilon^n\log f(X,\epsilon)=\prod_{k=1}^{n}\lim_{\epsilon\to 0^+}\epsilon\log f_k(X,\epsilon)\\ &= \prod_{k=1}^{n}\left(\max_{0\le i\le p}\{iX+A_{ki}\}-\max_{0\le j\le q}\{jX+B_{kj}\}\right).\end{aligned}$$

由此可见，$F(X)$ 是一个分段多项式连续函数。现在我们来确定这类函数的运算。假设 $F(X)$ 和$G(X)$ 分别是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的热带乘积，那么 $f(x)+g(x)$、$f(x)g(x)$ 和 $f(x)/g(x)$ 的热带乘积定义如下

$$\begin{aligned}F(X)\oplus G(X) &:= \lim_{\epsilon\to 0^+}\epsilon^n\log(f(X,\epsilon)+g(X,\epsilon))\\ &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\epsilon^n\left(\max\{\log f(X,\epsilon),\log g(X,\epsilon)\}+\log(1+h(X,\epsilon))\right)\\ &= \max\{F(X),G(X)\},\\ F(X)\otimes G(X) &:= \lim_{\epsilon\to 0^+}\epsilon^n(\log f(X,\epsilon)+\log g(X,\epsilon))=F(X)+G(X),\\ F(X)\oslash G(X) &:= \lim_{\epsilon\to 0^+}\epsilon^n(\text{对数 } f(X,\epsilon)-\text{对数 } g(X,\epsilon))=F(X)-G(X),\end{aligned}$$

其中 $0\le h(X,\epsilon)=\frac{\min\{f(X,\epsilon)g(X,\epsilon)\}}{\max\{f(X,\epsilon)g(X,\epsilon)\}}\le 1$。

为简化记号，从现在起，我们将采用记号 $f(x)$ 代替 $F(x)$ 来表示分段多项式函数。一般而言，连续函数 $f(x)$ 具有如下形式

$$f(x)=f_i(x),\quad x\in[x_{i-1},x_i],$$

其中，$f_i(x)$ 是次数为 $n_i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 的多项式，$i\in\mathbb{Z}$ 是递增序列。我们还假设 $\{x_i\}$ 不存在有限聚点，并且

$$\sup_i n_i =: n<\infty.$$

在本文下文中，我们将满足上述条件的函数 $f(x)$ 称为第 n–**阶热带亚纯函数**（对于具体的 n，我们也将 n 阶分别写作一阶、二阶、三阶、四阶等），并且始终假设 $n\in\mathbb{N}$，除非另有明确说明。这意味着，除非特别说明，我们假设 $f(x)$ 不是常值函数。特别地，一阶热带亚纯函数就是我们所研究的经典非恒定对象。

对于每个多项式 $f_i(x)=\sum_{j=0}^{n}a_{i,j}x^j$ 以及给定点 $x_0\in\mathbb{R}$，我们可以在 x_0 处对 $f_i(x)$ 进行泰勒展开

$$f_i(x)-f_i(x_0)=\sum_{j=1}^{n}\frac{f_i^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$$

其中

$$\frac{f_i^{(j)}(x_0)}{j!} = \sum_{k=j}^{n} C_k^j a_{i,k} x_0^{k-j} \tag{1}$$

且 $C_k^j = \frac{k!}{1!\,j!(k-j)!}$ 是二项式系数。因此

$$\begin{pmatrix} \frac{f_i^{(1)}(x_0)}{1!} \\ \frac{f_i^{(2)}(x_0)}{2!} \\ \vdots \\ \frac{f_i^{(n)}(x_0)}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & C_2^1 x_0 & \cdots & C_n^1 x_0^{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & C_n^2 x_0^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i,1} \\ a_{i,2} \\ \vdots \\ a_{i,n} \end{pmatrix} =: \mathcal{C}_n(x_0) \begin{pmatrix} a_{i,1} \\ a_{i,2} \\ \vdots \\ a_{i,n} \end{pmatrix},$$

其中矩阵 $\mathcal{C}_n(x_0)$ 是非退化的。

为了定义 n 阶热带亚纯函数 $f(x)$ 的极点、根及其重数，我们需要引入一个辅助函数

$$\omega_f^{(j)}(x) = \frac{sgn^{j+1}(x^+)f^{(j)}(x^+) - sgn^{j+1}(x^-)f^{(j)}(x^-)}{j!}, \tag{2}$$

其中 $1 \le j \le n$ 且 $sgn(x)$ 是符号函数。这里提醒一下，$sgn(0^{\pm}) = \pm 1$。如果 $\omega_f^{(j)}(x) > 0\ (< 0)$，那么我们称 x 为 f 的 **j阶根（极点）**，其重数为 $|\omega_f^{(j)}(x)|$，并将 f 的所有 f 根和极点称为奇点。当 $j = 1$ 时，这正是热带亚纯函数的根、极点及其重数的定义。通常，j 阶极点或根是满足 $f^j(x^+) - f^j(x^-) \neq 0$ 的点；但如果 j 是偶数，那么当 $f^j(x^+) + f^j(x^-) \neq 0$ 时出现的 $x = 0$ 是一个 j 阶根或极点。根据此定义，x 可以同时是 f 的根和极点，如例 3.4 中的表 1 所示。这与经典结果显著不同。不过，如果假设 x 有 n 个重数各异的克隆，那么每个克隆只有在重数非零时，才能成为 f 的根或极点。

现在，我们通过对 $\mathcal{C}_n(x)$ 稍作修改来定义一个新的矩阵。

$$\mathcal{D}_n(x_0) := \begin{pmatrix} 1 \times sgn^2(x_0) & C_2^1 x_0 \times sgn^2(x_0) & \cdots & C_n^1 x_0^{n-1} \times sgn^2(x_0) \\ 0 & 1 \times sgn^3(x_0) & \cdots & C_n^2 x_0^{n-2} \times sgn^3(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \times sgn^{n+1}(x_0) \end{pmatrix}.$$

对于任意 $x_0 \in \mathbb{R}$，设 $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ 和 $f(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ 分别是 x_0 右侧和左侧的表达式。那么我们得到

$$\begin{pmatrix} \omega_f^{(1)}(x_0) \\ \omega_f^{(2)}(x_0) \\ \vdots \\ \omega_f^{(n)}(x_0) \end{pmatrix} = \mathcal{D}_n(x_0^+) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} - \mathcal{D}_n(x_0^-) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{3}$$

我们称 n 阶热带亚纯函数 f 为 n **阶热带整函数**，如果它没有任何极点。此外，如果它没有任何根，我们称 f n **阶热带无零整函数**。值得注意的是，对于某些 n 阶热带整函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 以及 $c \in \mathbb{R}$， $f(x+c)$ 和 $f(x) \oplus g(x)$ 可能不是热带整函数，这与经典热带整函数的情形不同。例如

例2.1。 定义两个热带整函数 $f(x) = sgn(x)x^2$ 和 $g(x) = x$。那么

$$f(x) \oplus g(x) = \begin{cases} x, & x \leq -1, \\ -x^2, & -1 < x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq 1, \\ x^2, & 1 < x, \end{cases}$$
$$f(x+1) = sgn(x+1)(x+1)^2,$$

由此可见， $f(x) \oplus g(x)$ 和 $f(x+1)$ 分别在 $x = 0$ 和 $x = -1$ 处有二阶极点，重数分别为 1 和 2 。

此外， $f(x) = sgn(x)x^2$ 意味着 n阶热带整函数不一定是凸的。然而，它们仍然具有一些有用的性质。

命题 2.2。 设 $n \in \mathbb{N}$，那么对于任意 n阶热带整函数 $f(x)$，有

$$\frac{f(r) + f(-r)}{2} \geq f(0) \tag{4}$$

对所有 $r > 0$均成立。特别地，当 $f(x)$ 是热带无零整函数时，等式成立。

然而，反向命题并不成立。事实上，令 $f(x) = 0$ 当$|x| < 1$时，且 $f(x) = -x + sgn(x)$ 当 $|x| > 1$时，则 $f(x)$ 显然不是热带整函数，但对所有 $r > 0$, $f(r) + f(-r) = 2f(0)$ 均成立。

证明。 对于 $x > 0$，我们假设 $f(x) = f_i(x)$ $x \in [x_{i-1}, x_i]$，其中 $i = 1, 2, \cdots$，$\{x_i\}_{i>0}$ 都是 f 和 $x_0 = 0$的正根。于是，对于任意 $r > 0$，我们可以找到$i^* \in \mathbb{N}$ 使得 $r \in [x_{i^*-1}, x_{i^*})$，然后

$$\begin{aligned} f(r) - f_1(r) &= \sum_{i=1}^{i^*-1} (f_{i+1}(r) - f_i(r)) \\ &= \sum_{i=1}^{i^*-1} \sum_{j=1}^{n} \frac{f_{i+1}^{(j)}(x_i) - f_i^{(j)}(x_i)}{j!} (r - x_i)^j \\ &= \sum_{i=1}^{i^*-1} \sum_{j=1}^{n} \omega_f^{(j)}(x_i)(r - |x_i|)^j \geq 0 \end{aligned} \tag{5}$$

其中我们在 x_i 处对 $f_i(r)$ 和 $f_{i+1}(r)$ 进行泰勒展开，对所有 $i=1,\ \cdots,$ i^*-1 均如此，并利用事实 $f_i(x_i)=f_{i+1}(x_i)$。

对于 $x<0$，我们假设 $f(x)=f_{-i}(x)$ $x\in[x_{-i},x_{-i+1}]$，其中 $i=1,2,$ $\cdots,\{x_{-i}\}_{i>0}$ 均为 f 和 $x_0=0$ 的全部负根。于是对任意 $r>0$，我们也可以找到 $i_*\in\mathbb{N}$，使得 $-r\in[x_{-i_*},x_{-i_*+1})$，然后

$$\begin{aligned}
f(-r)-f_{-1}(-r) &= \sum_{i=1}^{i_*-1}(f_{-i-1}(-r)-f_{-i}(-r))\\
&= \sum_{i=1}^{i_*-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{f_{-i-1}^{(j)}(x_{-i})-f_{-i}^{(j)}(x_{-i})}{j!}(-r-x_{-i})^j\\
&= \sum_{i=1}^{i_*-1}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\frac{f_{-i-1}^{(j)}(x_{-i})-f_{-i}^{(j)}(x_{-i})}{j!}(r-|x_{-i}|)^j\\
&= \sum_{i=1}^{i_*-1}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\frac{f_{-i}^{(j)}(x_{-i})-f_{-i-1}^{(j)}(x_{-i})}{j!}(r-|x_{-i}|)^j\\
&= \sum_{i=1}^{i_*-1}\sum_{j=1}^{n}\omega_f^{(j)}(x_{-i})(r-|x_{-i}|)^j\geq 0. \qquad (6)
\end{aligned}$$

因此，对所有 $r>0$，有 $f(r)+f(-r)\geq f_1(r)+f_{-1}(-r)$。另一方面

$$\begin{aligned}
f_1(r)+f_{-1}(-r) &= \sum_{j=0}^{n}\frac{f_1^{(j)}(0)}{j!}r^j+\sum_{j=0}^{n}\frac{f_{-1}^{(j)}(0)}{j!}(-r)^j\\
&= 2f(0)+\sum_{j=1}^{n}\frac{f_1^{(j)}(0)-(-1)^{j+1}f_{-1}^{(j)}(0)}{j!}r^j\\
&= 2f(0)+\sum_{j=1}^{n}\omega_f^{(j)}(0)r^j\\
&\geq 2f(0). \qquad (7)
\end{aligned}$$

由此可知 (4) 成立。若 $f(x)$ 没有任何奇点，则对所有 $x>0$ 有 $f(x)=f_1(x)$，对所有 $x<0$ 有 $f(x)=f_{-1}(x)$，且对 $j=1,\cdots,n$ 有 $\omega_f^{(j)}(0)=0$，因此该断言由上面最后一个等式得出。 □

此外，与所有热带亚纯函数都可以表示为两个没有公共根的热带整函数之商这一结果相对应，在我们的设定下也可以得到类似的命题。

命题 2.3。设 $n\in\mathbb{N}$，则对于任意 n 阶热带亚纯函数f，存在 n_1 阶和 n_2 阶热带整函数 g 和 h，使得 $f=h\oslash g$(最大值$\{n_1,n_2\}=n$)，其中 h 和 g 没有任何公共的 j 阶根和极点，$j=1$、$\cdots$、n。

证明。 我们将分别构造 $h(x)$和 $g(x)$来证明该结论。首先考虑 $x > 0$，并假设

$$f(x) = f_i(x) = \sum_{j=0}^{n} a_{i,j} x^j, \quad x \in [x_{i-1}, x_i],$$

其中 $i = 1$、2、 $\cdots$、 $x_0 = 0$和 $\{x_i\}_{i>0}$都是 f的正奇点，且所有f_i 都是次数不超过 n的多项式。我们假设

$$g(x) = g_i(x) = \sum_{j=0}^{n} b_{i,j} x^j, x \in [x_{i-1}, x_i], \tag{8}$$

then

$$h(x) = f(x) + g(x) = \sum_{j=0}^{n} (a_{i,j} + b_{i,j}) x^j, x \in [x_{i-1}, x_i], \tag{9}$$

并且显然 $\max\{n_1, n_2\} = n$。现在，我们只需确定系数 $\{b_{i,j}\}$、 $j = 0$、 $\cdots$、 n和 $i = 1$、2、 $\cdots$。事实上，所有这些系数都由 $\{b_{1,j}\}_{j=0}^{n}$ 确定，而 $\{b_{1,j}\}_{j=0}^{n}$ 可以任意选取。

给定任意的 $\{b_{1,j}\}_{j=0}^{n} \subset \mathbb{R}$，如果对所有 i =2、3、 $\cdots$都能确定 $\{b_{i,j}\}_{j=1}^{n}$ ，那么由于$g(x)$的连续性， $\{b_{i,0}\}$ 也能被唯一确定。因此，只需找到 $\{b_{i,j}\}_{j=1}^{n}$。

定义

$$Q_i = \{q : x_i \text{ is a q-th root of } f\} \subset \{1, \cdots, n\}$$

and

$$P_i = \{p : x_i \text{ is a p-th pole of } f\} \subset \{1, \cdots, n\},$$

因此，对所有 $i = 1$、2、 $\cdots$， $Q_i \cap P_i = \varnothing$ 均成立。令

$$\omega_g^{(j)}(x_i) = \begin{cases} -\omega_f^{(j)}(x_i) > 0, & j \in P_i, \\ 0, & j \notin P_i, \end{cases} \tag{10}$$

then

$$\omega_h^{(j)}(x_i) = \omega_f^{(j)}(x_i) + \omega_g^{(j)}(x_i) = \begin{cases} \omega_f^{(j)}(x_i) > 0, & j \in Q_i, \\ 0, & j \notin Q_i. \end{cases}$$

其中 $j = 1, \cdots, n$与 $i = 1, 2, \cdots$。因此 x_i既不是 h与 g的极点，也不是 h 与 g 的公共 j次根。

另一方面，为了简便起见，令$\mathbf{b}_i = (b_{i,1}, \cdots, b_{i,n})^T$和 $\boldsymbol{\omega}_g(x_i) = (\omega_g^{(1)}(x_i) \cdots, \omega_g^{(n)}(x_i))^T$，其中$\mathbf{a}^T$表示向量$\mathbf{a}$的转置。由于$x_i$ 非负，因此 $\mathcal{D}(x_i^{\pm}) = \mathcal{D}(x_i)$。由 (3) 可得

$$\boldsymbol{\omega}_g(x_i) = \mathcal{D}(x_i)(\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i)$$

对所有 $i = 1,2,\cdots$ 均成立。由于 $\mathcal{D}_n(x_i)$ 是非退化的，因此迭代可得

$$\mathbf{b}_{i+1} = \mathbf{b}_1 + \sum_{k=1}^{i} \mathcal{D}^{-1}(x_k)\boldsymbol{\omega}_g(x_k), \tag{11}$$

其中 $i = 1$、2、$\cdots$。因此，结合 (8)、(9)、(10) 和 (11)，我们可以看到，当 $x > 0$ 时，$g(x)$ 和 $h(x)$ 可由 g_1 确定。当 $x < 0$ 时，$g(x)$ 和 $h(x)$ 可由 g_{-1} 确定这一结论也可通过类似分析得到，其中 $g(x) = g_{-1}(x) =: \sum_{j=0}^{n} b_{-1}$，当 $x \in [x_{-1}, 0]$ 时，且 x_{-1} 是 $f(x)$ 的最大负奇点。此外，通过类似分析，g_{-1} 也可由 g_1 确定。具体而言，对于 $j = 1$、$\cdots$、n，我们有 $b_{-1,j} = (-1)^{j+1}(b_{1,j} - \omega_g^{(j)}(0))$，其中 $\omega_g^{(j)}(0)$ 的定义与 (10) 类似，并且 $b_{-1,0} = b_{1,0}$，因为 $g(x)$ 应在 $x = 0$ 处连续。至此，证明完成。

□

3 n 阶热带内万林纳理论

泊松–延森公式是构建内万林纳理论的基石。在给出该公式之前，我们需要做一些准备。

引理 3.1. 设 $n \in \mathbb{N}$ 和 f 是某个 $r > 0$上的 n 阶热带亚纯函数。对于任意 $x \in (-r, r)$，我们将由所有满足以下条件的点组成的两个递增序列记为 $\{x_i\}_{i=1}^{\nu} \subset (x, r)$ 和 $\{x_{-i}\}_{i=1}^{\mu} \subset (-r, x)$：对于某个 $j \in \{1, \cdots, n\}$，$f^{(j)}(x_{\pm i})$ 不存在。于是有

$$f(r) - f(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{f^{(j)}(x^+)}{j!}(r - x)^j + \sum_{i=1}^{\nu} \tau_f^{(j)}(x_i)(r - x_i)^j \right) \tag{12}$$

and

$$f(x) - f(-r) = \sum_{j=1}^{n} \left((-1)^{j+1} \frac{f^{(j)}(x^-)}{j!}(r + x)^j + (-1)^j \sum_{i=1}^{\mu} \tau_f^{(j)}(x_{-i})(r + x_{-i})^j \right) \tag{13}$$

其中 $\tau_f^{(j)}(x) = \frac{f^{(j)}(x^+) - f^{(j)}(x^-)}{j!}$。

证明。这里只证明 (12)；(13) 的证明类似。设 $r = x_{\nu+1}, x = x_0$ 并记

$$f(x) = f_i(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

其中 $i = 1$、2、$\cdots \nu + 1$ 和 $f_i(x)$ 都是次数不超过 n 的多项式。因此，对于所有 $i = 1$、$\cdots$、ν，有 $f_{(j)}(x_i^+) = f_{(j)i+1}(x_i)$，且 $f^{(j)}(x_i^-) = f_{(j)i}(x_i)$

以及 $j=1$、$\cdots$、n。由于 $f(x)$ 连续，因此对所有$i=1$、$\cdots$、ν，$f_{i+1}(x_i)=f_i(x_i)$ 成立，于是

$$\begin{aligned}
f(r)-f(x) &= \sum_{i=0}^{\nu}\left(f_{i+1}(x_{i+1})-f_{i+1}(x_i)\right)\\
&= f_1(x_1)-f_1(x)+\sum_{i=1}^{\nu}\left(f_{i+1}(x_{i+1})-f_{i+1}(x_i)\right)\\
&= f_1(x_1)-f_1(x)+\sum_{i=1}^{\nu}[(f_{i+1}(r)-f_{i+1}(x_i))-(f_i(r)-f_i(x_i))]\\
&\quad+\sum_{i=1}^{\nu}[-(f_{i+1}(r)-f_{i+1}(x_{i+1}))+(f_i(r)-f_i(x_i))]\\
&= f_1(r)-f_1(x)+\sum_{i=1}^{\nu}[(f_{i+1}(r)-f_{i+1}(x_i))-(f_i(r)-f_i(x_i))]\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{f^{(j)}(x^+)}{j!}(r-x)^j+\sum_{i=1}^{\nu}\frac{f_{i+1}^{(j)}(x_i)-f_i^{(j)}(x_i)}{j!}(r-x_i)^j\right).
\end{aligned}$$

在第三个等式中，我们可以定义 $A_i=f_i(r)-f_i(x_i)$，那么由于 $A_{\nu+1}=0$，$\sum_{i=1}^{\nu}(-A_{i+1}+A_i)=A_1$。因此，我们完成了（12）的证明。 □

注：容易验证，当 $x\neq 0$ 时，$\omega_f^{(j)}(x)=sgn^{j+1}(x)\tau_f^{(j)}(x)$。此外，对于任意 $x_0\in\mathbb{R}$，设 $f_1(x)$ 和 $f_{-1}(x)$ 分别是 x_0 的右侧和左侧多项式，我们将采用记号 $f_{x_0^+}(x)=f_1(x)$ 以及 $f_{x_0^-}(x)=f_{-1}(x)$，其中 $x\in\mathbb{R}$。于是，（12）和（13）可以改写为

$$f(r)-f(x)=f_{x^+}(r)-f(x)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{\nu}\omega_f^{(j)}(x_i)(r-|x_i|)^j \tag{14}$$

当 $x\geq 0$ 且

$$f(x)-f(-r)=f(x)-f_{x^-}(-r)-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{\mu}\omega_f^{(j)}(x_{-i})(r-|x_{-i}|)^j \tag{15}$$

当 $x\leq 0$。

接下来，我们需要定义一些辅助函数和记号。在以下定义中，我们假设 $r>0$ 且 $x\in(-r,\ r)$。

在经典泊松-詹森公式的证明中，需要对两个项 $r+x$ and$r-x$ 作差，但在 n 阶情形下这还不够。因此我们需要进行推广。设 $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，令

$$B_k(r,x):=\frac{(r+x)^k+(r-x)^k}{2},\quad D_k(r,x):=\frac{(r+x)^k-(r-x)^k}{2}.$$

特别地，$B_0(r,x)=1, D_0(r,x)=D_k(r,0)=0, B_1(r,x)=r$ 以及 $D_1(r,x)=x$。于是

$$B_k(r,x)+D_k(r,x)=(r+x)^k,\quad B_k(r,x)-D_k(r,x)=(r-x)^k$$

分别是 $r+x$ 和 $r-x$ 的推广。

定义

$$\begin{aligned}E(r,x,x_i) &:= r^2-|x-x_i|r-xx_i\\ &= \begin{cases}(r-x_i)(r+x), & x\le x_i,\\ (r+x_i)(r-x), & x_i\le x,\end{cases}\end{aligned}$$

其中 $x_i\in(-r,r)$，特别地，我们有 $E(r,0,x_i)=r(r-|x_i|)$，且 $E(r,x,x)=r^2-x^2$。

接下来，我们将 $(-r,r)$ 分成九个互不相交部分

$$\begin{aligned}F_1(r,x) &:= \{y\in(-r,r):-r<y<\min\{0,x\}\},\\ F_2(r,x) &:= \{y\in(-r,r):\max\{0,x\}<y<r\},\\ F_3(r,x) &:= \{y\in(-r,r):y=x=0\},\\ F_4(r,x) &:= \{y\in(-r,r):0<y<x\},\\ F_5(r,x) &:= \{y\in(-r,r):x<y<0\},\\ F_6(r,x) &:= \{y\in(-r,r):x<y=0\},\\ F_7(r,x) &:= \{y\in(-r,r):y=0<x\},\\ F_8(r,x) &:= \{y\in(-r,r):0<y=x\},\\ F_9(r,x) &:= \{y\in(-r,r):y=x<0\}.\end{aligned}$$

对于固定的 x，其中一些集合是空集。特别地，对于 $l=4,\cdots,9$，我们有 $F_l(r,0)=\varnothing$。从现在起，在不引起歧义的情况下，我们将写作 $F_l(r,x)=F_l$。

对于任意 n 阶热带亚纯函数 f，在定理 3.3 的证明中，将 (12) 和 (13) 分别乘以 $(r+x)^n$ 和 $(r-x)^n$，再作差后，我们会发现出现以下两个函数

$$\begin{aligned}\Omega_f^{(j)}(x,x_i) &:= \frac{sgn^{j+1}(x_i-x)^+f^{(j)}(x_i^+)-sgn^{j+1}(x_i-x)^-f^{(j)}(x_i^-)}{j!},\\ \Gamma_f^{(j)}(x,x_i) &:= \frac{sgn^{j}(x_i-x)^+f^{(j)}(x_i^+)-sgn^{j}(x_i-x)^-f^{(j)}(x_i^-)}{j!}.\end{aligned}$$

尤其是，$\Omega_f^{(j)}(0,x_i)=\omega_f^{(j)}(x_i)$。由此可见，这两个函数都与重数函数 $\omega_f^{(j)}(x_i)$ 有关，下面的引理将说明它们之间的关系。

引理 3.2. 设 $n \in \mathbb{N}$ 和 f 是一个 n 阶热带亚纯函数， $r > 0$和 $x, x_i \in (-r, r)$。那么对于任意 $j = 1, \cdots, n$，有

$$\Omega_f^{(j)}(x, x_i) = \omega_f(x_i) \times \begin{cases} 1, & x_i \in F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_6 \cup F_8, \\ (-1)^{j+1}, & x_i \in F_4 \cup F_5 \cup F_7 \cup F_9. \end{cases}$$
$$+\frac{f^{(j)}(x_i^-)}{j!} \times \begin{cases} 0, & x_i \in F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4 \cup F_5, \\ (-1)^{j+1} - 1, & x_i \in F_6, \\ 1 - (-1)^{j+1}, & x_i \in F_7 \cup F_8 \cup F_9. \end{cases}$$

and

$$\Gamma_f^{(j)}(x, x_i) = \omega_f(x_i) \times \begin{cases} -1, & x_i \in F_1, \\ 1, & x_i \in F_2 \cup F_3 \cup F_6 \cup F_8, \\ (-1)^j, & x_i \in F_4 \cup F_7, \\ (-1)^{j+1}, & x_i \in F_5 \cup F_9. \end{cases}$$
$$+\frac{f^{(j)}(x_i^-)}{j!} \times \begin{cases} 0, & x_i \in F_1 \cup F_2 \cup F_4 \cup F_5, \\ 2 \times (-1)^{j+1}, & x_i \in F_3, \\ (-1)^{j+1} - 1, & x_i \in F_6 \cup F_7, \\ 1 - (-1)^j, & x_i \in F_8 \cup F_9. \end{cases}$$

证明。 我们只证明 $x_i \in F_9$ 的情形，其他情形可类似证明。根据定义，我们得到

$$\Omega_f^{(j)}(x, x_i) = \frac{f^{(j)}(x_i^+) - (-1)^{j+1} f^{(j)}(x_i^-)}{j!}$$
$$= (-1)^{j+1} \frac{(-1)^{j+1} f^{(j)}(x_i^+) - (-1)^{j+1} f^{(j)}(x_i^-) + (-1)^{j+1} f^{(j)}(x_i^-) - f^{(j)}(x_i^-)}{j!}$$
$$= (-1)^{j+1} \frac{sgn^{j+1}(x_i^+) f^{(j)}(x_i^+) - sgn^{j+1}(x_i^-) f^{(j)}(x_i^-)}{j!} + (1 - (-1)^{j+1}) \frac{f^{(j)}(x_i^-)}{j!}$$
$$= (-1)^{j+1} \omega_f^{(j)}(x_i) + (1 - (-1)^{j+1}) \frac{f^{(j)}(x_i^-)}{j!}$$

and

$$\Gamma_f^{(j)}(x, x_i) = \frac{f^{(j)}(x_i^+) - (-1)^j f^{(j)}(x_i^-)}{j!}$$
$$= (-1)^{j+1} \frac{(-1)^{j+1} f^{(j)}(x_i^+) - (-1)^{j+1} f^{(j)}(x_i^-) + (-1)^{j+1} f^{(j)}(x_i^-) + f^{(j)}(x_i^-)}{j!}$$
$$= (-1)^{j+1} \frac{sgn^{j+1}(x_i^+) f^{(j)}(x_i^+) - sgn^{j+1}(x_i^-) f^{(j)}(x_i^-)}{j!} + (1 - (-1)^j) \frac{f^{(j)}(x_i^-)}{j!}$$
$$= (-1)^{j+1} \omega_f^{(j)}(x_i) + (1 - (-1)^j) \frac{f^{(j)}(x_i^-)}{j!}.$$

□

现在我们可以给出基石公式了。

定理 3.3. *(*n阶热带泊松–延森公式*)* 设 $n \in \mathbb{N}$ 和 f是定义在 $[-r,r]$ 上的 n阶热带亚纯函数，其中 $r>0$。对于任意$x \in (-r,r)$，记 $\{x_i\}$ 为由 f在$(-r,r)$中的所有奇点组成的序列，并分别用 $y_{i,j}=x_i$ 和 $z_{i,j}=x_i$ 表示 f的 j阶根和极点。则有

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}[f(r)+f(-r)] + \frac{D_n(r,x)}{2B_n(r,x)}[f(r)-f(-r)] \\
&- \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{x_i\in F_1\cup F_2\cup F_3\cup F_6\cup F_8} + (-1)^{j+1}\sum_{x_i\in F_4\cup F_5\cup F_7\cup F_9}\right) \\
&\quad \times \omega_f^{(j)}(x_i)E^j(r,x,x_i)\frac{B_{n-j}(r,x)}{2B_n(r,x)} \\
&- \sum_{j=1}^{n}\left(-\sum_{x_i\in F_1} + \sum_{x_i\in F_2\cup F_6\cup F_8} + (-1)^j\sum_{x_i\in F_4\cup F_7} + (-1)^{j+1}\sum_{x_i\in F_5\cup F_9}\right) \\
&\quad \times \omega_f^{(j)}(x_i)E^j(r,x,x_i)\frac{D_{n-j}(r,x)}{2B_n(r,x)} \\
&- \left(\frac{(r+x)^n}{2B_n(r,x)}(f_{x^-}(r)-f(x)) + \frac{(r-x)^n}{2B_n(r,x)}(f_{x^-}(-r)-f(x))\right) \\
&- \left(sgn(x^-)\frac{(r-|x|)^n}{2B_n(r,x)}(f_{0^-}(r)+f_{0^-}(-r)-2f(0))\right). \qquad (16)
\end{aligned}
$$

特别地，当 $x=0$ 时，我们有第 n 阶热带詹森公式

$$
\begin{aligned}
f(0) = \ & \frac{1}{2}[f(r)+f(-r)] \\
& -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{|y_{i,j}|<r}|\omega_f^{(j)}(y_{i,j})|(r-|y_{i,j}|)^j \\
& +\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{|z_{i,j}|<r}|\omega_f^{(j)}(z_{i,j})|(r-|z_{i,j}|)^j. \qquad (17)
\end{aligned}
$$

为了更好地理解第 n 阶热带詹森公式，我们在下面给出一个例子。

例 3.4. 将 $(-3,3)$ 中的一个 3 阶热带亚纯函数 f 记为

$$
f(x) = \begin{cases} -2x^3-17x^2-46x-40, & -3<x\le -2, \\ 2x^2+6x+4, & -2<x\le -1, \\ x^2+2x+1, & -1<x\le 1, \\ -x+5, & 1<x\le 2, \\ 3x^3-15x^2+18x+3, & 2<x<3, \end{cases}
$$

f在（-3，3）中的奇点如表 *1* 所示，其中空白处为0。

表 1： f 在 $(-3,\ 3)$ 中的所有奇点

$\lvert\omega_f^{(j)}\ (x)\rvert$	-2	-1	0	1	2
第 1 个根					
第 2 个根		1	2		3
第 3 个根	2				3
第 1 个极点		2		5	5
第 2 个极点	7			1	
第 3 个极点					

于是，当 $2 < r < 3$ 时，我们得到第 3 个热带詹森公式，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}((3r^3 - 15r^2 + 18r + 3) + (2r^3 - 17r^2 + 46r - 40)) \\
-\ &\frac{1}{2}((r-1)^2 + 2r^2 + 3(r-2)^2 + 2(r-2)^3 + 3(r-2)^3) \\
+\ &\frac{1}{2}(2(r-1) + 5(r-1) + 5(r-2) + 7(r-2)^2 + (r-1)^2) \\
=\ &1 = f(0).
\end{aligned}$$

定理 3.3 的证明。由于 r 和 x 是固定的，在下面的证明中，对于所有 $k = 0$、$\cdots$、n，我们将 $B_k(r,x)$、$D_k(r,x)$ 和 $E(r,x,x_i)$ 分别简写为 B_k、D_k 和 $E(x_i)$。值得注意的是，$x = 0$ 可能是奇点，但对于所有 $j = 1$、$\cdots$、n，$f^{(j)}(0)$ 都存在，反之亦然。因此，为应用引理 3.1，我们需要重新定义 $\{x_i\} \cup \{x\} \cup \{0\} =:$ 根据 $\{x_i\}_{i=-\mu}^{\nu}$ 的取值和 $x_0 = x$ 对其进行排序，即 $x_{-\mu} < x_{-\mu+1} < \cdots < x_0 = x < x_1 < \cdots < x_\nu$。于是，$\{x_i\}_{i=1}^{\nu}$ 和 $\{x_{-i}\}_{i=1}^{\mu}$ 包含了所有满足以下条件的点：对于 (x,r) 和 $(-r,x)$ 中的某些 $j = 1$、$\cdots$、n，$f^{(j)}(x)$ 不存在。然后，我们可以分别将 (12) 和 (13) 乘以 $(r+x)^n$ 和 $(r-x)^n$，再作差，

$$\begin{aligned}
&(f(r) - f(x))(r+x)^n - (f(x) - f(-r))(r-x)^n \\
=\ &\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{f^{(j)}(x^+)}{j!}(r^2 - x^2)^j (B_{n-j} + D_{n-j}) \right. \\
&\qquad \left. -(-1)^{j+1} \frac{f^{(j)}(x^-)}{j!}(r^2 - x^2)^j (B_{n-j} - D_{n-j}) \right) \\
+\ &\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{\nu} \tau_f^{(j)}(x_i) E^j(x_i)(B_{n-j} + D_{n-j}) \right. \\
&\qquad \left. -(-1)^j \sum_{i=1}^{\mu} \tau_f^{(j)}(x_{-i}) E^j(x_{-i})(B_{n-j} - D_{n-j}) \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{f^{(j)}(x^+)-(-1)^{j+1}f^{(j)}(x^-)}{j!}(r^2-x^2)^jB_{n-j}\right)\\
&+ \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{f^{(j)}(x^+)-(-1)^{j}f^{(j)}(x^-)}{j!}(r^2-x^2)^jD_{n-j}\right)\\
&+ \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=-\mu,i\neq 0}^{\nu}\left(sgn^{j+1}(x_i-x)\tau_f^{(j)}(x_i)E^j(x_i)B_{n-j}\right)\\
&+ \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=-\mu,i\neq 0}^{\nu}\left(sgn^{j}(x_i-x)\tau_f^{(j)}(x_i)E^j(x_i)D_{n-j}\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=-\mu}^{\nu}\left(\Omega_f^{(j)}(x,x_i)E^j(x_i)B_{n-j}+\Gamma_f^{(j)}(x,x_i)E^j(x_i)D_{n-j}\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{x_i\in F_1\cup F_2\cup F_3\cup F_6\cup F_8}+(-1)^{j+1}\sum_{x_i\in F_4\cup F_5\cup F_7\cup F_9}\right)\omega_f^{(j)}(x_i)E^j(x_i)B_{n-j}\\
&+ \sum_{j=1}^{n}\left(((-1)^{j+1}-1)\sum_{x_i\in F_6}+(1-(-1)^{j+1})\sum_{x_i\in F_7\cup F_8\cup F_9}\right)\frac{f^{(j)}(x_i^-)}{j!}E^j(x_i)B_{n-j}\\
&+ \sum_{j=1}^{n}\left(-\sum_{x_i\in F_1}+\sum_{x_i\in F_2\cup F_6\cup F_8}+(-1)^j\sum_{x_i\in F_4\cup F_7}+(-1)^{j+1}\sum_{x_i\in F_5\cup F_9}\right)\\
&\qquad\times\omega_f^{(j)}(x_i)E^j(x_i)D_{n-j}\\
&+ \sum_{j=1}^{n}\left(((-1)^{j+1}-1)\sum_{x_i\in F_6\cup F_7}+(1-(-1)^{j})\sum_{x_i\in F_8\cup F_9}\right)\frac{f^{(j)}(x_i^-)}{j!}E^j(x_i)D_{n-j}.
\end{aligned}
$$

最后一个等式由引理 3.2 以及当 $x_i\in F_3$ 时对所有 $j=1,\ \cdots,\ n$ 的 $D_{n-j}=0$ 得出。现在我们将最后一个等式中的第二项和第四项合并。如果 $x=0$，那么 $F_6=F_7=F_8=F_9=\varnothing$，因此合并结果为 0。如果 $x\neq 0$，那么

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n}((-1)^{j+1}-1)\sum_{x_i\in F_6}\frac{f^{(j)}(x_i^-)}{j!}E^j(x_i)(r+x)^{n-j}\\
&+\sum_{j=1}^{n}(1-(-1)^{j+1})\sum_{x_i\in F_7}\frac{f^{(j)}(x_i^-)}{j!}E^j(x_i)(r-x)^{n-j}\\
&+\sum_{j=1}^{n}\sum_{x_i\in F_8\cup F_9}\frac{f^{(j)}(x_i^-)}{j!}E^j(x_i)(r+x)^{n-j}\\
&+\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\sum_{x_i\in F_8\cup F_9}\frac{f^{(j)}(x_i^-)}{j!}E^j(x_i)(r-x)^{n-j}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= sgn(x^-)(r-|x|)^n \sum_{j=1}^{n}(1-(-1)^{j+1})\frac{f^{(j)}(0^-)}{j!}r^j \\
&+ (r+x)^n \sum_{j=1}^{n}\frac{f^{(j)}(x^-)}{j!}(r-x)^j \\
&+ (r-x)^n \sum_{j=1}^{n}(-1)^j\frac{f^{(j)}(x^-)}{j!}(r+x)^j \\
&= sgn(x^-)(r-|x|)^n(f_{0^-}(r)+f_{0^-}(-r)-2f(0)) \\
&+ (r+x)^n(f_{x^-}(r)-f(x))+(r-x)^n(f_{x^-}(-r)-f(x)).
\end{aligned}
$$

事实上，我们可以验证，将 $x=0$ 代入上面的最后一个等式后，上述组合仍等于 0。因此，我们无需区分这两种情况。经过化简，我们得到形式 (16)。不过，此时 $\{x_i\}_{i=-\mu}^{\nu}$ 可能包含 f 的一些非奇点 x_i，$\omega_f^{(j)}(x_i)=0$，因此我们可以将 $\{x_i\}$ 恢复为 $(-r,\ r)$ 中的所有 f 奇点。

当 $x=0$ 时，对于 $l=4,\ \cdots,\ 9,\ D_{n-j}=0,\ B_{n-j}=r^{n-j}$，有 $F_l=\varnothing$；对于 $j=1,\ \cdots,\ n$，有 $E(x_i)=r(r-|x_i|)$，于是我们有

$$
f(0)=\frac{1}{2}[f(r)+f(-r)]-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{|x_i|<r}\omega_f^{(j)}(x_i)(r-|x_i|)^j.
$$

将 $\{x_i\}$ 分为第 j 阶极点和根，可得第 n 阶詹森公式 (17)。

□

事实上，将命题 2.2 的证明中 (5)、(6) 和 (7) 诸式相加，即可容易得到 n 阶詹森公式。由 n 阶詹森公式，我们可以定义热带特征函数的类似物。

我们首先定义 n**阶极大加法逼近函数**（按通常方式）

$$
m(r,f)=\frac{f^+(r)+f^+(-r)}{2}
$$

其中 $f^+(x):=\max\{f(x)\ 0\}$，然后将 j–**阶积分极大加法计数函数**记为

$$
\begin{aligned}
N^{(j)}(r,f) &:= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\mu_j}|\omega_f^{(j)}(z_{i,j})|(r-|z_{i,j}|)^j \\
&= \frac{1}{2}\int_0^r\cdots\int_0^r n^{(j)}\left(\min_{1\le s\le j}\{t_s\},f\right)dt_1\cdots dt_j
\end{aligned}
\tag{18}
$$

其中，$\{z_{i,j}\}$ 是区间（$-r,\ r$）内所有 f 的第 j 个极点，而 j **阶 max-plus 计数函数** $n^{(j)}(r,\ f)$ 给出了极点的数量，并计入重数。

第二个等式由此得出

$$\begin{aligned}
&\int_0^r \cdots \int_0^r n^{(j)}\left(\min_{1\le s\le j}\{t_s\}, f\right) dt_1 \cdots dt_j \\
&= \sum_{k=1}^{\mu_j} n^{(j)}(|z_{k+1,j}|, f)\left((r-|z_{k,j}|)^j - (r-|z_{k+1,j}|)^j\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\mu_j}\left(\sum_{i=1}^{k}|\omega_f^{(j)}(z_{i,j})|\right)\left((r-|z_{k,j}|)^j - (r-|z_{k+1,j}|)^j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\mu_j}|\omega_f^{(j)}(z_{i,j})|\sum_{k=i}^{\mu_j}\left((r-|z_{k,j}|)^j - (r-|z_{k+1,j}|)^j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\mu_j}|\omega_f^{(j)}(z_{i,j})|(r-|z_{i,j}|)^j,
\end{aligned}$$

其中我们假设 $\{z_{i,j}\}_{i=1}^{\mu_j}$ 是$(-r,r)$中 f的全部 j阶极点，$z_{\mu_j+1,j} = r$ 且$z_{0,j}=0$ 对所有 $j=1,\cdots,n$成立。在第三个等式中，我们使用了一个双重求和交换阶的公式，即$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} a_k b_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=1}^{k} b_{j,k}$对某些常数 $a_k, b_{j,k} \in \mathbb{R}$成立。

注意，在经典情形中，$N_{(j)}(r,f)$或 $N^{j)}(r,f)$通常记为重数被 j截断的极点的积分计数函数，从而我们可以借助这一记号得到截断第二主定理。然而，由第6节可知，截断第二主定理可能并不存在自然的热带版本，因此我们可以自由采用记号(18)。

此外，我们需要适当地完善计数函数 $N_{(j)}(r, f)$ 的定义。对于任意给定的三个常数 r_1、r_2 和 $r>0$，满足 $-r \le r_1 \le r_2 \le r$，我们假设 $\{z_{i,j}\}_{i=1}^{\mu_j}$ 全部是 (r_1, r_2) 中的 f' j-阶极点，并按其值及重数 $|\omega_f^{(j)}(z_{i,j})|$ 列出。那么，**部分 j–阶积分极大加法计数函数** $N_{(j)(r_1,r_2)}(r, f)$ 定义为

$$N_{(r_1,r_2)}^{(j)}(r,f) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\mu_j}|\omega_f^{(j)}(z_{i,j})|(r-|z_{i,j}|)^j$$

对于 $j=1$、$\cdots n$。特别地，$N_{(j)(-r,r)}(r,f) = N_{(j)}(r,f)$。类似地，$N_{(j)(r_1,r_2)}(r,-f)$、$N_{(j)[r_1,r_2)}(r,\pm f)$、$N_{(j)(r_1,r_2]}(r,\pm f)$ 以及 $N_{(j)[r_1,r_2]}(r,\pm f)$ 均可定义。

那么 n **阶极大加特征函数**记为

$$T(r,f) = m(r,f) + \sum_{j=1}^{n} N^{(j)}(r,f).$$

根据这些记号，我们可以将第 n 个詹森公式改写为

定理 3.5。 *(第 n 个詹森公式)* 设 $n \in \mathbb{N}$ 和 f 是 $\mathbb{R}$ 中的第 n 个热带亚纯函数，则

$$T(r,f) = T\left(r, \frac{1_0}{f}\oslash\right) + f(0) \tag{19}$$

对任意 $r > 0$。

我们还将 f 的阶和超阶定义为

$$\rho(f) := \limsup_{r\to\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r},$$
$$\rho_2(f) := \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r}.$$

在经典热带背景下，Laine 和 Tohge 根据超阶的定义 [25]，定义了所谓的热带超指数函数。

定义 3.6。 [25] 设 α 是满足 $|\alpha| > 1$ 的实数。在 $\mathbb{R}$ 上定义函数 $e_\alpha(x)$:

$$e_\alpha(x) := \alpha^{\lfloor x\rfloor}(x - \lfloor x\rfloor) + \sum_{i=-\infty}^{\lfloor x\rfloor -1} \alpha^i = \alpha^{\lfloor x\rfloor}\left(x - \lfloor x\rfloor + \frac{1}{\alpha - 1}\right)$$

其中 $\lfloor x\rfloor$ 表示 x 的整数部分。

随后，他们证明了 $e_\alpha(x) = \alpha e_\alpha(x)$ [25, 命题 8。3] 以及 $\rho_2(e_\alpha(x)) = 1$, [25, 命题 8。5]。类似地，我们可以定义一种特殊的 n 阶热带亚纯函数，其超阶为 1，且是 $e_\alpha(x)$ 的简单推广。

定义 3.7. 令 α 为一个满足 $\alpha > 1$ 和 $n \in \mathbb{N}$的实数。定义函数 $e_{n,\alpha}(x)$，其定义在 $\mathbb{R}$ 上:

$$e_{n,\alpha}(x) := sgn^{n+1}(x^+)\alpha^{\lfloor x\rfloor}(x^n - \lfloor x\rfloor^n) + \sum_{i=-\infty}^{\lfloor x\rfloor -1} sgn^{n+1}(i^+)\alpha^i((i+1)^n - i^n).$$

显然，$e_{1,\alpha}(x) = e_\alpha(x)$。此外，$e_{n,\alpha}(x)$也具有与$e_\alpha(x)$类似的性质，如下述命题所示。

命题 3.8. $e_{n,\alpha}(x)$ 具有以下性质:

(i) $e_{n,\ \alpha}(x)$ 是一个非负的非递减 n 阶热带整函数，(ii) $\rho_2(e_{n,\ \alpha})=1$。

证明。 (i) 根据定义，我们可以看出，不连续点可能出现在 $m \in \mathbb{Z}$，而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to m^-} e_{n,\alpha}(x) &= sgn^{n+1}(m^-)\alpha^{m-1}(m^n-(m-1)^n)\\ &\quad+\sum_{i=-\infty}^{m-2} sgn^{n+1}(i^+)\alpha^i((i+1)^n-i^n)\\ &=\sum_{i=-\infty}^{m-1} sgn^{n+1}(i^+)\alpha^i((i+1)^n-i^n)\\ &=\lim_{x\to m^+} e_{n,\alpha}(x).\end{aligned}$$

因此$e_{n,\ \alpha}(x)$在 $\mathbb{R}$上连续。此外，对于任意 $x_0 \in \mathbb{R}$，由于$e^{'}_{n,\ \alpha}(x_0^+)$ =$\lim_{x\to x_0^+} sgn^{n+1}(x^+)\alpha^{\lfloor x\rfloor} nx^{n-1} = \lim_{x\to x_0^+} \alpha^{\lfloor x\rfloor}|x|^{n-1} \geq 0$，故其单调不减。另外，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} e_{n,\alpha}(x) &= \lim_{m\in\mathbb{Z},m\to-\infty} e_{n,\alpha}(m)\\ &= \lim_{m\in\mathbb{Z},m\to-\infty}\sum_{i=-\infty}^{m-1} sgn^{n+1}(i^+)\alpha^i((i+1)^n-i^n)\\ &= \lim_{-m\in\mathbb{N},m\to-\infty}\sum_{i=-\infty}^{m-1}\alpha^i(|i|^n-|i+1|^n)\\ &\geq 0,\end{aligned}$$

这意味着它是非负的。此外，

$$\begin{aligned}\omega^{(j)}_{e_{n,\alpha}}(m) &= sgn^{j+1}(m^+)C_n^j sgn^{n+1}(m^+)\alpha^m m^{n-j}\\ &\quad -sgn^{j+1}(m^-)C_n^j sgn^{n+1}(m^-)\alpha^{m-1}m^{n-j}\\ &= C_n^j|m|^{n-j}\alpha^{m-1}(\alpha-1)\\ &\geq 0,\end{aligned}$$

其中我们假设此处有 $0^0=1$，且 $j=1,\ \cdots,\ n$。由此得证。

(ii) 当 $x=0$ 时，我们有

$$\begin{aligned}|e_{n,\alpha}(0)| &= \sum_{i=-\infty}^{-1}(-1)^{n+1}\alpha^i((i+1)^n-i^n)\\ &= \sum_{i=-\infty}^{-1}\alpha^i(|i|^n-|i+1|^n)\\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(i+1)^n-i^n}{\alpha^{i+1}} \leq \sum_{i=1}^{\infty}\frac{i^n}{\alpha^i} < +\infty.\end{aligned}$$

于是由 (i) 和第 n 个詹森公式，我们有

$$\begin{aligned}
T(r, e_{n,\alpha}) &= \sum_{j=1}^{n} N^{(j)}(r, 1_0 \oslash e_{n,\alpha}) + O(1) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=-\lfloor r\rfloor}^{\lfloor r\rfloor} C_n^j |m|^{n-j}\alpha^{m-1}(\alpha-1)(r-|m|)^j + O(1) \\
&= \frac{1}{2}(\alpha-1)\sum_{m=-\lfloor r\rfloor}^{\lfloor r\rfloor}\alpha^{m-1}\sum_{j=1}^{n} C_n^j |m|^{n-j}(r-|m|)^j + O(1) \\
&= \frac{1}{2}(\alpha-1)\sum_{m=-\lfloor r\rfloor}^{\lfloor r\rfloor}\alpha^{m-1}(r^n-|m|^n) + O(1) \\
&= \frac{1}{2}(\alpha-1)\sum_{m=-\lfloor r\rfloor}^{\lfloor r\rfloor}\alpha^{m-1}(r-|m|)\left(\sum_{k=0}^{n-1} r^k|m|^{n-k-1}\right) + O(1).
\end{aligned}$$

一方面，

$$\frac{\alpha^{\lfloor r\rfloor-1}-1}{\alpha-1} \le \sum_{m=-\lfloor r\rfloor+1}^{\lfloor r\rfloor-1}\alpha^{m-1} \le \sum_{m=-\lfloor r\rfloor}^{\lfloor r\rfloor}\alpha^{m-1}(r-|m|) \le \sum_{m=-\lfloor r\rfloor}^{\lfloor r\rfloor}\alpha^{m-1}r \le \frac{r\alpha^{\lfloor r\rfloor}}{\alpha-1},$$

另一方面，

$$r^{n-1} \le \left(\sum_{k=0}^{n-1} r^k|m|^{n-k-1}\right) \le nr^{n-1}.$$

因此

$$\frac{r^{n-1}}{2}(\alpha^{\lfloor r\rfloor-1}-1) + O(1) \le T(r, e_{n,\alpha}) \le \frac{nr^n}{2}\alpha^{\lfloor r\rfloor} + O(1),$$

由此我们可以证明结论。 □

4 n 阶对数导数引理的热带版本

根据定义，我们知道 $T(r,\ f)$ 是 $[0,\infty)$ 上的连续分段多项式函数。然而，经典热带特征函数的单调非减性和凸性在我们的设定下可能不再成立，下面的例子便说明了这一点。

例 4.1。设

$$f(x) = \begin{cases} -(x-m)(x-m-1), & m \le x \le m+1, \\ (x+m)(x+m+1), & -m-1 \le x \le -m, \end{cases}$$

对所有 $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$。则 $m(r,f) = -\frac{1}{2}(r-\lfloor r \rfloor)(r-\lfloor r \rfloor - 1)$ 且 $\sum_{j=1}^{2} N(j)(r,f) = N(1)(r,f) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\lfloor r \rfloor} 2(r-i)$，因此 $T(r,f) = -\frac{1}{2}x^2 + (2\lfloor r \rfloor + \frac{1}{2})r - \lfloor r \rfloor(\lfloor r \rfloor + 1)$，它既不是凸函数，也不是非递减函数。

为了仿照移位算子的热带对数导数引理，我们对一般的 n 阶热带亚纯函数 f 添加一些条件。

定义 4.2。设 $f(x)$ 是一个次数为 $n \in \mathbb{N}$ 的多项式。若 $f(x)$ 具有以下形式，则称其**定义良好**

$$f(x) - f(0) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_{2j-1}x^{2j-1}, & \text{if } n = 2m-1, \\ \sum_{j=1}^{m} a_{2j}x^{2j}, & \text{if } n = 2m, \end{cases}$$

其中，对于 $j = 1, \cdots, m$，a_{2j-1} 和 a_{2j} 均为非负数或非正数。特别地，任何线性函数都是定义良好的。

例 4.1 表明，多项式的波动性会导致特征函数发生波动；在某种程度上，这一定义是消除多项式波动性的最简单方法，并且任意阶导函数都是单调的。此外，对于定义良好的多项式，我们有以下引理。

引理 4.3。设 $n \in \mathbb{N}$、$\delta \in \{1, -1\}$ 和 f 是次数为 n 的定义良好的多项式，则

$$\frac{d^l f(\delta r)}{dr^l} \geq 0 \ (\ or \leq 0\ ) \tag{20}$$

对所有的 $l = 1$、$\cdots$、n 和 $r > 0$。

证明。我们沿用定义 4.2 中的记号。若对于某个 $m \in \mathbb{N}$，$n = 2m$，不失一般性，假设 $a_2 \neq 0$，则

$$\begin{aligned} sgn\left(\frac{d^l f(\delta r)}{dr^l}\right) &= sgn\left(\frac{d^l(\sum_{j=1}^{m} a_{2j}r^{2j})}{dr^l}\right) \\ &= sgn\,(a_2) \geq 0\ (\text{ or} \leq 0\ ) \end{aligned}$$

对所有的 $l = 1, \cdots, n$ 和 $r > 0$。

若对于某个 $m \in \mathbb{N}$，$n = 2m-1$，不失一般性，假设 $a_1 \neq 0$，则

$$\begin{aligned} sgn\left(\frac{d^l f(\delta r)}{dr^l}\right) &= sgn\left(\frac{d^l(\delta^n \sum_{j=1}^{m} a_{2j-1}r^{2j-1})}{dr^l}\right) \\ &= sgn\,(\delta^n a_1) \geq 0\ (\text{ or} \leq 0\ ) \end{aligned}$$

对所有 $l = 1, \cdots, n$ 和 $r > 0$。 □

若$f(x)$在每个区间上均良定义，则我们也称 n阶热带亚纯函数 $f(x)$为**良定义**。例如，$e_{n,\ \alpha}(x)$是一个良定义的n阶热带整函数。

与 f 是一阶热带亚纯函数时， $T(r,\ f)$是非递减凸函数这一结果类似，在 n阶情形下，我们有如下引理。然而，与在 $n=1$ 的证明中使用热带嘉当恒等式 [22, 定理3.8], 不同，我们的论证是直接的，并且避免了这类恒等式。

引理4.4。 设 $n\in\mathbb{N}$，那么对于任意定义良好的 n阶热带亚纯函数 $f(x)$，对任意$l=0$、1、$\cdots$、n，都有 $T_{(l)}(r^-,f)$ 非负且非递减。特别地， $T(r,f)$ 是非负、非递减的凸函数。

证明。 我们首先证明，对于 $l=1,\ \cdots,\ n$ 以及充分小的 $r>0$，使得 $x=0$ 是 f 在 $[-2r,2r]$中的唯一潜在奇点， $T_{(l)}(r^-,\ f)\geq 0$。此外，由于 f的连续性，当 $x\in(-2r,\ 0]$ 时，我们可以令 $f(x)$非负或非正；当 $y\in[0,2r$时，令 $f(y)$非负或非正。在这种情况下

$$T(r,f)=\frac{f^+(r)+f^+(-r)}{2}+\frac{1}{2}\sum_{j=1,\omega_f^{(j)}(0)<0}^{n}|\omega_f^{(j)}(0)|r^j.$$

若 $f(x)\leq 0$属于 $(-2r,2r)$，则显然有 $T_{(l)}(r^-,f)\geq 0$。若 $f(x)\geq 0$属于 $(-2r,2r)$，我们可以令 $g=-f$，然后应用 n 阶詹森公式，也可得出结论。

若 $f(0)=0$，且当 $x\in(0,2r)$ 时， $f(x)\geq 0$ 和 $f(-x)\leq 0$，则存在 $x_0\in(0,2r)$，使得 $f'(x_0)\geq 0$。由引理 4.3 可知 $\frac{d^l f(r)}{dr^l}\geq 0$，因此对于所有~~$l=$~~ 1、$\cdots$、$n$， $T_{(l)}(r^-,f)-\frac{1}{2}\frac{d^l f}{dr^l}(r)\geq 0$成立。若 $f(0)=0$，且当 $x\in(0,2r)$ 时，$f(x)\leq 0$ 和 $f(-x)\geq 0$，我们也可以应用 n 阶詹森公式来证明该结论。

由于当 $r>0$ 足够小时， $T_{(l)}(r^-,f)$ 非负，且若对所有 $r>0$，$T_{(n)}(r^-,f)$ 都是非递减的，那么对所有 $r>0$， $T_{(n)}(r^-,f)$ 都是非负的，进而对所有 $r>0$， $T_{(n-1)}(r^-,f)$ 都是非递减的。因此，由归纳法可得结论。所以，只需证明对所有 $r>0$， $T_{(n)}(r^-,f)$ 都是非递减的。由于 $T_{(n)}(r^-,f)$ 显然是 $(0,\infty)$ 上的分段常数函数，因此现在只需证明对所有 $r>0$， $T_{(n)}(r^+,f)-T_{(n)}(r^-,f)\geq 0$ 成立。

若 $f(x)$，则当 $x\in(r-\varepsilon,\ r+\varepsilon)$ 时， $f(-x)\leq 0$，其中 $\varepsilon>0$ 是一个小量

且 $x=r$ 是 $(r-\varepsilon,\ r+\varepsilon)$ 中的潜在奇点，则有

$$
\begin{aligned}
&T^{(n)}(r^+,f)-T^{(n)}(r^-,f)=\lim_{r_1\to r^+}T^{(n)}(r_1,f)-\lim_{r_2\to r^-}T^{(n)}(r_2,f)\\
&=\lim_{r_1\to r^+}\left(\sum_{j=1}^{n}N^{(j)}_{(-r,r)}(r_1,f)+\frac{1}{2}\sum_{j=1,\omega_f^{(j)}(\pm r)<0}^{n}|\omega_f^{(j)}(\pm r)|(r_1-r)^j\right)^{(n)}\\
&\quad-\lim_{r_2\to r^-}\left(\sum_{j=1}^{n}N^{(j)}(r_2,f)\right)^{(n)}\\
&=\frac{1}{2}\lim_{r_1\to r^+}\left(\sum_{j=1,\omega_f^{(j)}(\pm r)<0}^{n}|\omega_f^{(j)}(\pm r)|(r_1-r)^j\right)^{(n)}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{\omega_f^{(n)}(\pm r)<0}n!|\omega_f^{(n)}(\pm r)|\geq 0.
\end{aligned}
$$

若当 $x\in(r-\varepsilon,\ r+\varepsilon)$ 时，$f(x)$、$f(-x)\geq 0$，且 $\varepsilon>0$ 为小量，则由 n阶詹森公式可得

$$
\begin{aligned}
T^{(n)}(r^+,f)-T^{(n)}(r^-,f)&=T^{(n)}(r^+,-f)-T^{(n)}(r^-,-f)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{\omega_f^{(n)}(\pm r)>0}n!|\omega_f^{(n)}(\pm r)|\geq 0.
\end{aligned}
$$

若当 $x\in(r-\varepsilon,\ r+\varepsilon)$ 时，$f(x)\geq 0$且 $f(-x)\leq 0$，且 $\varepsilon>0$ 为小量，则

$$
\begin{aligned}
&T^{(n)}(r^+,f)-T^{(n)}(r^-,f)\\
&=\lim_{r_1\to r^+}\left(\frac{1}{2}f(r_1)+\sum_{j=1}^{n}N^{(j)}_{(-r,r)}(r_1,f)+\sum_{j=1,\omega_f^{(j)}(\pm r)<0}^{n}|\omega_f^{(j)}(\pm r)|(r_1-r)^j\right)^{(n)}\\
&\quad-\lim_{r_2\to r^-}\left(\frac{1}{2}f(r_2)+\sum_{j=1}^{n}N^{(j)}(r_2,f)\right)^{(n)}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{\omega_f^{(n)}(\pm r)<0}n!|\omega_f^{(n)}(\pm r)|\geq 0.
\end{aligned}
$$

当 $x\in(r-\varepsilon,\ r+\varepsilon)$ 对某个小量 $\varepsilon>0$ 成立时，$f(-x)\geq 0$且 $f(x)\leq 0$ 的情形可用类似的方法证明。

还需证明如下情形： $f(\delta r) = 0$ ，且存在一个小的正量 ε，使得当 $\delta = 1$ 或 -1 时， $f(\delta r+\varepsilon)f(\delta r-\varepsilon) < 0$。如果 $f(\pm r) = 0$，当 $x \in (-r-\varepsilon, -r)\cup(r, r+\varepsilon)$ 时， $f(x) < 0$，且当 $y \in (-r, -r+\varepsilon)\cup(r-\varepsilon, r)$ 时， $f(y) > 0$，那么 $f'(r^{\pm}) < 0$，且 $f'(-r^{\pm}) = -\frac{df}{dr}(-r^{\pm}) > 0$。由引理 4.3 可得 $f_{(n)}(r^{\pm}) < 0$，以及 $\frac{d^n f}{dr^n}(-r^{\pm}) = (-1)^n f_{(n)}(-r^{\pm}) < 0$。因此

$$\begin{aligned} T^{(n)}(r^+, f) - T^{(n)}(r^-, f) &\geq -\frac{1}{2}\lim_{r_2 \to r^-}\left(f(r_2) + f(-r_2)\right)^{(n)} \\ &= -\frac{1}{2}\left(f^{(n)}(r^-) + (-1)^n f^{(n)}(-r^+)\right) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

其他情形也可用同样的方法证明，这里省略细节。

□

众所周知，对数导数引理对于证明经典亚纯函数域中的第二主定理至关重要，因此，人们构造了带有移位算子的热带类比 [16, 22, 23]。然而，我们发现，可以放宽这个热带类比中的条件，从而得到一个逐点估计，帮助我们证明 $\sum_{i=0}^{n} N(r, 1_0 \oslash f_i)$ 与分歧项 $N(r, C_0(f_0, \cdots, f_m))$ 之间的关系（定理 6.2 和推论 6.4）。此外，这一证明比以往得到的证明直接得多。

引理 4.5。设 $n \in \mathbb{N}$ 和 f 是定义良好的 n 阶热带亚纯函数。那么，对于任意 $\alpha > 1$ 和 $c \neq 0$，有

$$|f(\delta r + c) \oslash f(\delta r)| \leq \frac{32|c|}{(\alpha-1)(r+|c|)}\left(T(\alpha(r+|c|), f) + \frac{|f(0)|}{2}\right) \tag{21}$$

对所有 $r >$ 最大值$\{2|c|, \frac{3-\alpha}{\alpha-1}|c|\}$ 均成立，其中 $\delta = \pm 1$。

证明。设 $\rho = \frac{1}{2}(\alpha+1)(r+|c|) < \alpha(r+|c|)$，不失一般性，假设 $c > 0$。定义 $\{x_i\}_{i=1}^{\nu}$ 和 $\{x_i\}_{i=1}^{\nu_1}$，它们分别由 f 在 $(r, r+c)$ 和 (r, ρ) 中的所有奇点组成。由于 $r > \frac{3-\alpha}{\alpha-1}c$，因此 $\frac{c}{\rho-r-c} \leq 1$，进而对于 $i = 1, \cdots, \nu$，有 $0 < \frac{c}{\rho-r} \leq \frac{c}{\rho-x_i} \leq \frac{c}{\rho-r-c} \leq 1$；又由于 $r > 2c$，对于所有 $j = 1, \cdots, n$ 和 $i = 1, \cdots, \nu_1$，有 $\tau_f^{(j)}(x_i) = \omega_f^{(j)}(x_i)$。然后应用

两次应用引理 3.1，我们有

$$
\begin{aligned}
&|f(r+c)-f(r)| = \left|\sum_{j=1}^{n}\frac{f^{(j)}(r^+)}{j!}(r+c-r)^j - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{\nu}\omega_f^{(j)}(x_i)(r+c-x_i)^j\right| \\
\leq &\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{f^{(j)}(r^+)}{j!}(\rho-r)^j\left(\frac{c}{\rho-r}\right)^j\right| + \left|\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{\nu}\omega_f^{(j)}(x_i)(\rho-x_i)^j\left(\frac{r+c-x_i}{\rho-x_i}\right)^j\right| \\
\leq &\frac{c}{\rho-r-c}\left(\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{f^{(j)}(r^+)}{j!}(\rho-r)^j\right| + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{\nu}|\omega_f^{(j)}(x_i)|(\rho-x_i)^j\right) \\
\leq &\frac{c}{\rho-r-c}\left(\left|f(\rho)-f(r)-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{\nu_1}\omega_f^{(j)}(x_i)(\rho-x_i)^j\right|\right) \\
&+\frac{2c}{\rho-r-c}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(N^{(j)}_{(r,r+c)}(\rho,f)+N^{(j)}_{(r,r+c)}(\rho,-f)\right)\right) \\
\leq &\frac{c}{\rho-r-c}\left(|f(\rho)|+|f(x)|+2\sum_{j=1}^{n}\left(N^{(j)}_{(r,\rho)}(\rho,f)+N^{(j)}_{(r,\rho)}(\rho,-f)\right)\right) \\
&+\frac{2c}{\rho-r-c}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(N^{(j)}_{(r,r+c)}(\rho,f)+N^{(j)}_{(r,r+c)}(\rho,-f)\right)\right) \\
\leq &\frac{2c}{\rho-r-c}(m(\rho,f)+m(\rho,-f)+m(r,f)+m(r,-f)) \\
&+\frac{4c}{\rho-r-c}\sum_{j=1}^{n}\left(N^{(j)}(\rho,f)+N^{(j)}(\rho,-f)\right) \\
\leq &\frac{16c}{\rho-r-c}\left(T(\rho,f)+\frac{|f(0)|}{2}\right) \\
\leq &\frac{32c}{(\alpha-1)(r+c)}\left(T(\alpha(r+c),f)+\frac{|f(0)|}{2}\right).
\end{aligned}
$$

第二个不等式成立，是因为 $f(x)$ 有定义，这意味着对于所有 $j=1,\cdots,n$，$f^{(j)}(r^+)$ 非负或非正。我们也可以对 $|f(-r+c)-f(-r)|$ 进行类似分析，并得到相同的不等式。因此结论得证。

□

注：例 4.1 表明，在第n种情形下，$T(r,f)$ 在 $r\in(0,\infty)$ 上未必是凸的，但几个例子表明，$T(r,f)$ 在有限测度集之外可能是非递增的，不过我们目前还无法证明这一点。要去掉 f 应当有定义这一假设，另一个问题是证明引理 4.5。

值得注意的是，在证明引理 4.5 时，应用引理 3.1 比应用第 n个泊松–延森公式更容易。

研究带移位算子的特征函数时，增长假设是必要的，以下引理常用于证明对数导数引理的各种差分类比。该引理的一些推广见 [5, 29]。

引理 4.6. *(* *[15,* 引理 *8.3])* 设 $T\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ 为非递减连续函数，且 $c \in (0,\infty)$。若 T 的超阶严格小于 *1*，即，

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log T(r)}{\log r} := \rho_2 < 1 \tag{22}$$

且 $\sigma \in (0, 1-\rho_2)$，则

$$T(r+c) = T(r) + o\left(\frac{T(r)}{r^\sigma}\right)$$

其中，当 r 趋于无穷大时，避开一个有限对数测度集。

结合引理 4.5 和 4.6，可得到以下估计。命题 4.2 [25] 的类似证明同样适用。不过，为方便读者，我们简要回顾一下证明过程。

定理 4.7 (**逐点 n 阶热带对数导数估计**)。设 $n \in \mathbb{N}$ 和 c 为非零实数。若 f 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶良定义热带亚纯函数，且

$$\rho_2(f) := \rho_2 < 1, \tag{23}$$

且 $\sigma \in (0,\ 1-\rho_2)$，则

$$|f(\delta r + c) \oslash f(\delta r)| = o\left(\frac{T(r,f)}{r^\sigma}\right)$$

其中，当 $\delta = \pm 1$ 且 r 趋于无穷时，除一个有限对数测度集外，结论成立。

证明。 对于任意 $\varepsilon > 0$，令

$$\alpha := 1 + \frac{1}{(\log T(r+|c|, f))^{1+\varepsilon}}.$$

于是，根据引理 3.3 中给出的广义博雷尔引理1 [4] 和引理 4.6，我们得到 $T(\alpha(r+|c|)) \le CT(r+|c|, f) = CT(r,f) + o(T(r,f)/r^\sigma)$，其中 C 为正常数，并且对所有不属于某个有限对数测度集合的 r 均成立。

现在我们可以取定 $\varepsilon > 0$，使得 $\sigma = 1 - (\rho_2 + \varepsilon)(1 + \varepsilon)$。在假设（23）下，我们得到

$$\frac{1}{(\alpha-1)(r+|c|)} = \frac{(\log T(r+|c|,f))^{1+\varepsilon}}{r+|c|} = o\left(\frac{1}{(r+|c|)^{\sigma}}\right), \quad (r \to +\infty),$$

因此

$$\frac{(3-\alpha)|c|}{r(\alpha-1)} = \frac{1}{(\alpha-1)(r+|c|)}\frac{(r+|c|)(3-\alpha)|c|}{r} = o\left(\frac{1}{(r+|c|)^{\sigma}}\right), \quad (r \to +\infty)$$

这意味着当 r 足够大时，$r \geq \max\left\{2|c|, \frac{3-\alpha}{\alpha-1}|c|\right\}$。因此，由引理 4.5 可得

$$\begin{aligned} |f(\delta r + c) \oslash f(\delta r)| &\leq 32|c| o\left(\frac{1}{(r+|c|)^{\sigma}}\right)\left(CT(r+|c|,f) + \frac{|f(0)|}{2}\right) \\ &= o\left(\frac{T(r,f)}{r^{\sigma}}\right) \end{aligned}$$

当 r 趋于无穷大且位于有限对数测度集之外时。 □

于是，下面的 n 阶对数导数引理的热带版本是定理 4.7 的一个推论。

推论 4.8 (n**阶对数导数引理的热带版本**)。设 $n \in \mathbb{N}$ 和 c 为非零实数。若 f 是 $\mathbb{R}$ 上定义良好的 n 阶热带亚纯函数，且

$$\rho_2(f) := \rho_2 < 1,$$

且 $\sigma \in (0,\ 1-\rho_2)$，则

$$m(r, f(x+c) \oslash f(x)) = o\left(\frac{T(r,f)}{r^{\sigma}}\right)$$

其中 r 在一个有限对数测度集之外趋于无穷。

证明。由于

$$\begin{aligned} m\left(r, f(x+c) \oslash f(x)\right) &= \frac{(f(r+c)-f(r))^{+} + (f(-r+c)-f(-r))^{+}}{2} \\ &\leq \frac{|f(r+c)-f(r)| + |f(-r+c)-f(-r)|}{2}, \end{aligned}$$

然后，应用定理 4.7 即可立即得到结论。 □

5 n阶热带全纯曲线

现在，我们将 n 次热带背景中的一些记号扩展到热带射影空间。简单来说，热带空间 $\mathbb{TP}^m$ $(m \in \mathbb{N})$ 由 $\mathbb{R}_{\max}^{m+1}/\{0_0\}$ 中的一个等价关系 $\sim$ 给出，该关系记作 $(a_0, \cdots, a_m) \sim (b_0, \cdots, b_m)$，当且仅当对某个 $\lambda \in \mathbb{R}$，有 $(a_0, \cdots, a_m) = \lambda \otimes (b_0, \cdots, b_m)$，且 $[a_0 : \cdots : a_m]$ 表示 $(a_0, \cdots, a_m)$ 的等价类。令 $n \in \mathbb{N}$，记

$$f = [f_0 : \cdots : f_m] : \mathbb{R} \to \mathbb{TP}^m$$

作为 **n阶热带全纯映射（或曲线）**，其中 $f_0, \cdots, f_m$ 是具有 $\max_{0 \le i \le m}\{n_i\} = n$ 和 $\{n_i\} \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$的 n_i阶热带整函数。此外，我们称$\mathbf{f} = (f_0, \cdots, f_m) \in [f_0 : \cdots : f_m]$ 为 f的约化表示，如果 $f_0, \cdots, f_m$ 没有任何对它们全体公共的 j阶根。

我们也遵循 f的经典热带 Cartan 特征函数的定义。

定义 5.1. [23, 定义 4.2] 设 $n, m \in \mathbb{N}$ 与 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{TP}^m$ 是具有约化表示$\mathbf{f} = (f_0, \cdots, f_m)$的 n阶热带全纯曲线，则

$$T_{\mathbf{f}}(r) = \frac{1}{2}(F(r) + F(-r)) - F(0), \quad F(x) = \max_{0 \le i \le m}\{f_i(x)\},$$

称为 f的热带 Cartan 特征函数。

与命题 4.3、4.4 和引理 4.7 类似， [23], 我们有以下三个命题。

命题 5.2. 热带 *Cartan* 特征函数 $T_{\boldsymbol{f}}(r)$ 与 n 阶热带全纯曲线 f 的约化表示无关。

证明。对于任意 n 阶热带全纯曲线 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{TP}^m$，设 $\mathbf{f} = (f_0, \cdots, f_m)$ 和 $\mathbf{g} = (g_0, \cdots, g_m)$ 是 f 的两个任意约化表示，则我们可以找到一个热带函数 $\lambda(x)$，使得对于任意 $x \in \mathbb{R}$ 和 $i = 0, \cdots, m$，$f_i(x) = g_i(x) + \lambda(x)$。由于对于所有 $x \in \mathbb{R}, i = 0, \cdots, m$ 和 $j = 1, \cdots, n$，$\omega_{f_i}^{(j)}(x) \ge 0$ 且 $\omega_{g_i}^{(j)}(x) \ge 0$，如果 $\lambda(x)$ 在某个 $x_0 \in \mathbb{R}$ 处有一个 j_0 阶根或极点，其中 $j_0 \in \{1, \cdots, n\}$，也就是说，$\omega^{(j_0)}{}_{\lambda}(x_0) > 0$ 或 < 0，那么

$$\omega_{f_i}^{(j_0)}(x_0) = \omega_{g_i}^{(j_0)}(x_0) + \omega_{\lambda}^{(j_0)}(x_0) > 0$$

or

$$\omega_{g_i}^{(j_0)}(x_0) = \omega_{f_i}^{(j_0)}(x_0) - \omega_{\lambda}^{(j_0)}(x_0) > 0$$

对于所有 $i = 0, \cdots, m$。但这意味着，对于所有 f_i 或 g_i， z_0 都是 j_0 次根，这与事实矛盾。因此， $\lambda(x)$ 是一个没有任何奇点的热带函数。

根据命题 2.2，我们有 $(\lambda(r)+\lambda(-r))/2=\lambda(0)$，进而 $T_{\mathbf{f}}(r)=T_{\mathbf{g}}(r)$。

□

因此，我们可以像在经典情形中那样，采用记号 $T_f(r)$ 来代替 $T_{\mathbf{f}}(r)$。

命题 5.3. 设 $n\in\mathbb{N}$ 与 $g=g_1\oslash g_0$ 为一个 n 次热带亚纯函数，其中 g_0 与 g_1 为热带整函数且没有任何公共的 j次根，并定义 $f=[g_0:\ g_1]$。则

$$T_f(r)=T(r,g)-g^+(0).$$

证明. 由于 $F(x)=\max\{g_0(x),g_1(x)\}=(g_1-g_0)^+(x)+g_0(x)$，应用 n 次詹森公式可得

$$\begin{aligned}
T_f(r)&=\frac{1}{2}\sum_{\delta=\pm1}\big((g_1-g_0)^+(\delta r)+g_0(\delta r)\big)-(g_1-g_0)^+(0)-g_0(0)\\
&=m(r,g_1-g_0)+m(r,g_0)-m(r,-g_0)-(g_1-g_0)^+(0)-g_0(0)\\
&=m(r,g_1-g_0)+\sum_{j=1}^{n}\Big(N^{(j)}(r,-g_0)-N^{(j)}(r,g_0)\Big)-(g_1-g_0)^+(0)\\
&=m(r,g_1-g_0)+\sum_{j=1}^{n}N^{(j)}(r,g_1-g_0)-(g_1-g_0)^+(0)\\
&=T(r,g_1-g_0)-(g_1-g_0)^+(0).
\end{aligned}$$

□

命题 5.4. 设 n、$m\in\mathbb{N}$ 与 $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{TP}^m$ 为一条非常值的 n 次热带全纯曲线，其约化表示为 $\boldsymbol{f}=(f_0,\cdots,f_m)$。则

$$T\left(r,\frac{f_i}{f_l}\oslash\right)\le T_f(r)+O(1),\tag{24}$$

对任意 i、$l\in\{0,\cdots,m\}$。

证明. 假设 $u(x)$ 是一个 n_1 次 $(n_1\le n)$ 热带整函数，且满足

$$\omega_u^{(j)}(x)=\min\{\omega_{f_i}^{(j)}(x),\omega_{f_l}^{(j)}(x)\}\tag{25}$$

对所有 $x\in\mathbb{R}$ 以及 $j=1$、$\cdots$、n，且 $u(0)=f_l(0)$。令 $h_i(x):=f_i(x)-u(x)$ 以及 $h_l(x)=f_l(x)-u(x)$，由此可得 $h_i(x)$ 与 $h_l(x)$ 没有任何公共的 j 次根。否则，设对某些 $j=1$、$\cdots$、n 以及 $x_0\in\mathbb{R}$，$\omega_{h_i}^{(j)}(x_0)>0$ 与 $\omega_{h_l}^{(j)}(x_0)>0$ 同时成立。则 $\omega_u^{(j)}(x_0)=\omega_{f_i}^{(j)}(x_0)-\omega_{h_i}^{(j)}(x_0)=$

$\omega_{f_l}^{(j)}(x_0) - \omega_{h_l}^{(j)}(x_0) < \min\{\omega_{f_i}^{(j)}(x_0)\ \omega_{f_l}^{(j)}(x_0)\}$ 这与 (25) 矛盾，因此由命题 5.3，我们有

$$\begin{aligned} T\left(r, \frac{f_i}{f_l}\oslash\right) &= T\left(r, \frac{h_i}{h_l}\oslash\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\delta=\pm 1}\max\{h_i(\delta r), h_l(\delta r)\} + O(1) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\delta=\pm 1}(\max\{f_i(\delta r), f_l(\delta r)\} - u(\delta r)) + O(1) \\ &\leq \frac{1}{2}\sum_{\delta=\pm 1}\left(\max_{0\leq k\leq m}\{f_k(\delta r)\} - u(\delta r)\right) + O(1) \\ &\leq T_f(r) - \frac{1}{2}\sum_{\delta=\pm 1}u(\delta r) + O(1) \\ &\leq T_f(r) + O(1). \end{aligned}$$

最后一个不等式由命题 2.2 得出，这是因为 $u(x)$ 是一个热带整函数。因此，证明完毕。 □

次数为 d in $\mathbb{TP}^m$ 的齐次热带多项式定义如下：

$$P(x) = \bigoplus_{I_i\in\mathcal{J}_d}\alpha_{I_i}\otimes x^{I_i} = \bigoplus_{\sum_{k=0}^m i_k=d}\alpha_{i_0,\cdots,i_m}\otimes\bigotimes_{k=0}^m x_i^{\otimes i_k} \tag{26}$$

其中 $x=(x_0,\cdots,x_m)$， $\mathcal{J}_d$ 是所有满足 $\sum_{k=0}^m i_k = d$ 的 $m+1$ 元组 $I_i=(i_0, \cdots, i_m)$ 的集合，并且 $\alpha_{I_i}\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$，使得它们不全等于 0_0 [5]。现在，我们可以令 $P(x)$ 作用于全纯曲线 $f\in\mathbb{TP}^m$，得到一个复合函数

$$P\circ f = \bigoplus_{\sum_{k=0}^m i_k=d}\alpha_{i_0,\cdots,i_m}\otimes\bigotimes_{k=0}^m f_i^{\otimes i_k}.$$

在经典情形下， $P\circ f$ 总是一个热带整函数，即 $N(r, P\circ f)\equiv 0$，这意味着在热带第二主定理中， $T_f(r)$ 只能由 $N(r, 1_0\oslash P\circ f)$ 控制，例如 [25, 定理 5.2], [5, 定理 4.8] 和 [14, 推论 3.5]。然而，在一般的 n 次情形下，这一点可能不成立，甚至可能出现 $T_f(r) = o(\sum_{j=1}^n N_{(j)}(r, P\circ f))$，如下例所示。

例 5.5。 设 $P(x) = x_0\oplus x_1$ 和 $f=[f_0:\ f_1]$ 是一个2 阶全纯

曲线，其中 f_0 和 f_1 定义为 $f_0(x) = sgn(x)x^2$ 和

$$f_1(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & x \le 0, \\ (4k+2)x - 2k(2k+2) - \frac{1}{2}, & x \in [2k, 2k+2), \end{cases}$$
$$= \begin{cases} -\frac{1}{2}, & x \le 0, \\ (4\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 2)x - 2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor (2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 2) - \frac{1}{2}, & x > 0, \end{cases}$$

其中 $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$。显然， $T_f(r) = \frac{1}{2}r^2(1+o(1))$。此外，当$x > 0$时， $f_0(x) = f_1(x)$ 给出 $x = 2k+1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \in [2k, 2k+2)$，于是我们可以得到 $x = 2k+1-\frac{\sqrt{2}}{2}$、 $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 都是 $P \circ f$ 的 2 阶极点，重数为 1。因此

$$\sum_{j=1}^{2} N^{(j)}(r, P \circ f) \ge \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(r-2i)^2 \ge 2\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}\left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - i\right)^2 = \frac{r^3}{12}(1+o(1)),$$

由此可见， $T_f(r) = o\left(\sum_{j=1}^{2} N_{(j)}(r、 P \circ f)\right)$。

在经典热带背景下，第一作者和 Tohge 将 Gondran 和 Minoux 提出的 Gondran-Minoux意义下的线性独立性概念应用于某些热带线性函数 [6,7]，进而定义了经典热带线性组合 [23]，的完备性，并借助该定义，为某些热带线性组合 Q 给出了退化度 $\lambda = ddg(Q)$ 的新记法。最后，他们证明了 Cartan第二主定理的 Nochka扩展的一个热带类比。在该定理中，函数$g_0, \cdots, g_m$应当线性独立，且结论涉及半环 $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ [23, 上的 λ 定理 6.6]。

随后，在 [5], Cao 和 Zheng 运用 Gondran-Minoux意义下的代数（分别为线性）独立性以及某些热带全纯曲线的热带代数（分别为线性）非退化性概念，并借助热带超曲面over $\mathbb{R}_{\max}$证明了第二个主定理。还有一个条件是，该全纯曲线应当是热带代数非退化的，结论还包括 λ。

最近，over $\mathbb{R}_{\max}$Halonen、第一作者和 Filipuk 为齐次热带多项式 P和热带全纯曲线 f [14]引入了两个定义 $\psi(P, f)$ 和 $\Psi(P, f)$，从而使定理 4.8 [5]中的估计更加精确。在该定理中，可以去掉增长假设 [14, 推论 3.5]。然而，他们的下一个结果 [14, 推论 3.6] 包含增长假设，这是 [5, 定理 4.8]中条件的一个类似版本。

事实上，若假设 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{TR}^m$ 是具有约化表示 $\mathbf{f} = (f_0, \cdots, f_m)$ 的全纯曲线，且 $P(x)$ 是一个热带齐次多项式，那么此前已知的热带射影空间中的热带第二主定理—— [23, 定理 6.2 和 6.3] 以及 [5, 定理 4.8] ——可以划分

为两个彼此独立的部分。第一部分是 $T_f(r)$ 与 $N(r,\ 1_0 \oslash P \circ f)$ 之间的关系，本节余下部分将对此进行研究，并将其视为热带第二主定理。第二部分是 $\sum_{i=0}^{m} N(r,\ 1_0 \oslash f_i)$ 与 $N(r,\ 1_0 \oslash C_0(f_0,\ \cdots,\ f_m))$ 之间的关系，其中 $C_0(f_0,\ \cdots,\ f_m)$ 是 $f_0,\ \cdots,\ f_m$ 的热带 Casoratian 行列式，这将在第6节中加以说明。这两种关系都将在第 n 阶热带情形下作为特例加以探讨。将其划分为两部分的好处之一，是可以简化对热带第二主定理的表述，也就是说，可以舍弃 $[23,$ 定理 6.6$]$, 中 $g_0,\ \cdots,\ g_m$ 线性无关的假设，以及 $[5,$定理 4.8$]$ 中全纯曲线必须是热带代数非退化的假设。

由例 5.5可知，在 n阶热带背景下，项 $\sum_{j=1}^{n} N_{(j)}(r, P \circ f)$不能被忽略，因此我们得到如下热带第二主定理。

定理5.6 (n**阶热带齐次多项式第二主定理**)。 设 n、 $m \in \mathbb{N}$ 和 $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{TP}^m$ 是一个非常数 n阶热带全纯曲线，其约化表示为$\boldsymbol{f} = (f_0$、 $\cdots$、 $f_m)$，并设 $P(x)$ 是一个次数为 $d > 0$ 的热带齐次多项式，其形式为

$$P(x) = \left(\bigoplus_{k=0}^{m} \alpha_k \otimes x_k^{\otimes d} \right) \oplus \left(\bigoplus_{\sum_{k=0}^{m} i_k = d, i_k < d} \alpha_{i_0,\cdots,i_m} \otimes \bigotimes_{k=0}^{m} x_i^{\otimes i_k} \right)$$

其中系数为 $\alpha_k \in \mathbb{R}$、 $k = 0$、 $\cdots$、 m 和α_{i_0}、$\cdots$、$_{i_m} \in \mathbb{R}_{\max}$、 $\sum_{k=0}^{m} i_k = d$、$i_k < d$。于是

$$T_f(r) = \frac{1}{d} \left(\sum_{j=1}^{n} N^{(j)} \left(r, \frac{1_0}{P \circ f} \oslash \right) - \sum_{j=1}^{n} N^{(j)} \left(r, P \circ f \right) \right) + O(1). \tag{27}$$

证明。 根据 n阶詹森公式，我们得到

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n} N^{(j)} \left(r, \frac{1_0}{P \circ f} \oslash \right) - \sum_{j=1}^{n} N^{(j)}(r, P \circ f) \\ = \ & m(r, P \circ f) - m \left(r, \frac{1_0}{P \circ f} \oslash \right) + O(1) \\ = \ & \frac{1}{2} \sum_{\delta = \pm 1} P \circ f(\delta r) + O(1). \end{aligned}$$

令 $\beta = \max \left\{ \max_{0 \le k \le m} \{\alpha_k\}, \max_{\sum_{k=0}^{m} i_k = d} \{\alpha_{i_0,\cdots,i_m}\} \right\}$ 以及 $\gamma = \min_{0 \le k \le m} \{\alpha_k\}$。由于$\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \cdots, m$, 可得 $\beta, \gamma > 0_0$ 以及 $\gamma + d \max_{0 \le i \le m} f_i(x) \ \le$

$P \circ f(x) \leq \beta + d \max_{0 \leq i \leq m} f_i(x)$ 对所有 $x \in \mathbb{R}$均成立。由此得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\delta=\pm 1} P \circ f(\delta r) &= \frac{1}{2} \sum_{\delta=\pm 1} d \max_{0 \leq i \leq m} f_i(\delta r) + O(1) \\ &= dT_f(r) + O(1). \end{aligned}$$

因此，结合这两个方程即可得出该断言。 □

我们将次数为 d 、具有常数系数的热带齐次费马多项式记为

$$P(x) = \bigoplus_{i=0}^{m} \alpha_i \otimes x_i^{\otimes d},$$

其中 $\alpha_i \in \mathbb{R}$。若 f 是一个 1 次热带全纯曲线，则显然有$N(r, \ P \circ f) \equiv 0$, 从而得到以下推论。

推论 5.7。设 $m \in \mathbb{N}$ 和 $f: \ \mathbb{R} \to \mathbb{TP}^m$ 是一个 具有约化表示 $\boldsymbol{f} = (f_0, \cdots, f_m)$的1次热带全纯曲线，且 $P(x) = \bigoplus_{i=0}^{m} \alpha_i \otimes x_i^{\otimes d}{}_{i=0}$，其中 $d > 0$ 且 $\{\alpha_i\}_{i=0}^m \subset \mathbb{R}$。则

$$T_f(r) = \frac{1}{d} N\left(r, \frac{1_0}{P \circ f} \oslash\right) + O(1). \tag{28}$$

既然我们已经将分段线性函数扩展为分段多项式函数，也可以将热带齐次多项式扩展为普通齐次多项式。

考虑具有常数系数、次数为 n 的齐次费马多项式，记为

$$\mathcal{P}(x) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i x_i^n$$

其中 $\alpha_i \in \mathbb{R}$。于是我们有如下定理。

定理 5.8（**齐次费马多项式的第二主定理**）。设 $m \in \mathbb{N}$ 与 $f: \ \mathbb{R} \to \mathbb{TR}^m$ 为一条 1 阶热带全纯曲线，其约化表示为 $\boldsymbol{f} = (f_0, \ \cdots, \ f_m)$ ，且 $\mathcal{P}(x) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i x_i^n$其中$n \in \mathbb{N}$以及 $\alpha_i > 0, \ \ i = 0, \ \cdots, \ m$。若

$$\limsup_{r \to +\infty} \frac{r}{T_f(r)} = 0, \tag{29}$$

则我们有

$$\theta T_f^n(r) \leq \sum_{j=1}^{n} N^{(j)}\left(r, \frac{1_0}{\mathcal{P} \circ f} \oslash\right) + o(T_f^n(r)) \leq \Theta T_f^n(r), \tag{30}$$

其中 $\theta = $最小值$_{0 \leq i \leq m}{}^{\alpha_i}$, $\Theta = 2^{n-1} \sum_{i=0}^{m} \alpha_i$ 且 r 趋于无穷大。

证明。对于任意线性函数 $g(x) = kx + b$，我们可以轻易得到

$$\frac{(g^n(x))^{(j)}}{j!} = C_n^j g^{n-j}(x)k^j,$$

对所有的 $j = 0, \cdots, n$, $x \in \mathbb{R}$，假设 $0^0 = 1$。因此我们可以得到

$$\omega_{f_i^n}^{(j)}(x) = C_n^j f_i^{n-j}(x)\left(sgn^{j+1}(x^+)(f_i^{'}(x^+))^j - sgn^{j+1}(x^-)(f_i^{'}(x^-))^j\right), \quad (31)$$

其中 $i = 0, \cdots, m$ 且 $x \in \mathbb{R}$，由此可见

$$\{\text{the singularities of } f_i^n\} \subset \{\text{the singularities of } f_i\} \cup \{0\}.$$

由于 f_i 是 1 阶热带整函数，因此它必满足以下两种性质之一。

(1) 存在一个有限数 $R_i > 0$，使得当 $r > R_i$时，$f_i^{'}(-r^-) < 0$且 $f_i^{'}(r^+) > 0$;

(2) 对任意 $x \in \mathbb{R}$，$f_i^{'}(x^{\pm}) \geq 0$或 ≤ 0成立。

若 f_i 满足 (1)，则存在一个有限值 $R_i^{'} \geq R_i$，使得对于 $r > R_i^{'}$，$f_i(\pm r) > 0$，因此

$$M_{1,i} := \max\left\{\max_{x\in[-R_i^{'},R_i^{'}]}\{|f_i(x)|\}, 1\right\} < +\infty,$$
$$M_{2,i} := \max\left\{\max_{x\in[-R_i^{'},R_i^{'}]}\left\{|f_i^{'}(x^{\pm})|\right\}, 1\right\} < +\infty.$$

那么对于任意 $x \in \mathbb{R}$，若 $|x| > R_i^{'}$，由（31）可得 $\omega_{f_i^n}^{(j)}(x) \geq 0$，这意味着

$$\sum_{j=1}^{n} N^{(j)}_{(-r,-R_i^{'})\cup(R_i^{'},r)}(r, f_i^n) = 0. \quad (32)$$

若 $|x| \leq R_i^{'}$，则由（31）可得 $|\omega_{f_i^n}^{(j)}(x)| \leq C_n^j M_{1,i}^{n-j} 2M_{2,i}^j \leq 2n!(M_{1,i}M_{2,i})^n =: M_i < \infty$对所有 $j = 1, \cdots, n$均成立。设 $\{x_k\}_{k=1}^{\nu_i}$ 是 f_i 在$[-R_i^{'}, R_i^{'}]$中的奇点。由于 f_i的奇点没有有限聚点，因此 $\nu_i < +\infty$。于是

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} N^{(j)}_{[-R_i^{'},R_i^{'}]}(r, f_i^n) &\leq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\nu_i}|\omega_{f_i^n}^{(j)}(x_k)|(r - |x_k|)^j \\ &\leq \frac{1}{2}n\nu_i M_i r^n = o(T_f^n(r)), \end{aligned} \quad (33)$$

其中我们假设 $r > \max\{R_i^{'}, 1\}$。最后一个等式由假设 (29) 得出。

若 f_i 满足 (2)，不失一般性，我们假设 f_i 非常数，且对所有 $x \in \mathbb{R}$， $f_i^{'}(x^{\pm}) \geq 0$。对于足够小的量 ϵ，记

$$I_i =: \{x : f_i(x+\epsilon)f_i(x-\epsilon) < 0, x \in \mathbb{R}\}.$$

那么， I_i中至多有一个点。令

$$x^* = \begin{cases} x, \ x \in I_i, \\ 0, \ I_i = \varnothing. \end{cases}$$

那么， x^* 是一个有限数。如果 $x > \max\{x^*, 0\}$，则 $f_i(x) > 0$，因此对于 $j = 1, \cdots, 0$，有$\omega_{f_i^n}^{(j)}(x) \geq 0$，这意味着

$$\sum_{j=1}^{n} N^{(j)}_{(\max\{x^*,0\},r)}(r, f_i^n) = 0. \tag{34}$$

通过对（33）进行同样的计算，我们还可以得到

$$\sum_{j=1}^{n} N^{(j)}_{[\min\{x^*,0\},\max\{x^*,0\}]}(r, f_i^n) = o(T_f^n(r)). \tag{35}$$

如果 $x < \min\{x^*, 0\}$，我们假设$f_{i,\ x^*}(x) = k_i^* x + b_i^*$，其中 k_i^*， $b_i^* \in \mathbb{R}$是有限值，且 $k_i^* \geq 0$。由于 f_i是非递减且凸的，因此当 $x < \min\{x^*, 0\}$时， $|f(x) - b_i^*| \leq |k_i^* x|$，由此可得

$$|f_i(x)| \leq k_i^*|x| + O(1), \tag{36}$$

其中 $x < \min\{x^*, 0\}$。对于任意 $r > |x^*|$，若 $f(r) \geq 0$，我们用$\{x_{-l}\}_{l=1}^{\mu_i}$ 表示 f_i 在（$-r$，$\min\{x^*, 0\}$）中的根，并定义一个新的 1 阶热带整函数

$$g_i(x) := \begin{cases} k_i^* x + b_i^*, \ x > \min\{x^*, 0\}, \\ f_i(x), \qquad x \leq \min\{x^*, 0\}. \end{cases}$$

那么， $m(r, \pm g_i) \leq k_i^* r + O(1)$ 和 $\{x_{-l}\}_{l=1}^{\mu_i}$都是 g_i 在 $(-r, r)$ 中的根。根据第 1 个詹森公式，我们有

$$\begin{aligned} N(r, 1_0 \oslash g_i) &= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\mu_i}(f_i^{'}(x_{-l}^{+}) - f_i^{'}(x_{-l}^{-}))(r - |x_{-l}|) \\ &= T(r, 1_0 \oslash g_i) - m(r, 1_0 \oslash g_i) \\ &\leq T(r, g_i) + m(r, 1_0 \oslash g_i) + O(1) \\ &= m(r, g_i) + m(r, 1_0 \oslash g_i) + O(1) \\ &\leq 2k_i^* r + O(1). \end{aligned}$$

因此，由（31）可得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} N^{(j)}_{(-r,\min\{x^*,0\})}(r, f_i^n) \\
\leq &\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{\mu_i} n!\left(k_i^* r + O(1)\right)^{n-j}\left((f_i^{'}(x_{-l}^{+}))^j - (f_i^{'}(x_{-l}^{-}))^j\right)(r - |x_{-l}|)^j \\
\leq &\sum_{j=1}^{n} n!\left(k_i^* r + O(1)\right)^{n-j}\sum_{l=1}^{\mu_i}\left((f_i^{'}(x_{-l}^{+}) - f_i^{'}(x_{-l}^{-}))(r - |x_{-l}|)n^2(k^* r)^{j-1}\right) \\
\leq &\sum_{j=1}^{n}(n+2)!\left(k_i^* r + O(1)\right)^{n-1}\left(\sum_{l=1}^{\mu_i}(f_i^{'}(x_{-l}^{+}) - f_i^{'}(x_{-l}^{-}))(r - |x_{-l}|)\right) \\
\leq &\sum_{j=1}^{n}(n+2)!\left(k_i^* r + O(1)\right)^{n-1}\left(4k_i^* r + O(1)\right) \\
\leq &\ 4(n+3)!\left(k_i^* r + O(1)\right)^{n} \\
= &\ o(T_f^n(r))
\end{aligned}
\tag{37}
$$

其中，我们对 $l = 1, \cdots, \mu_i$ 使用了 $0 \leq f_i^{'}(x_{-l}^{\pm}) \leq k^*$，并且在第二个不等式中，对 $0 < b \leq a$ 和 $j = 1, \cdots, n$ 还使用了基本不等式 $a^j - b^j = (a-b)(\sum_{s=0}^{j-1} a^s b^{j-s-1}) \leq n(a-b)a^{j-1}$。对于所有 $x \in \mathbb{R}$，若 $f_i^{'}(x^{\pm}) \leq 0$，我们也可以进行类似的分析。

结合等式（32）、（33）、（34）、（35）和（37），可得

$$
\sum_{j=1}^{n} N^{(j)}(r, f_i^n) = o(T_f^n(r)). \tag{38}
$$

对于任意 n 次热带亚纯函数 h_1、h_2 以及任意正数 α，我们容易得到

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} N^{(j)}(r, h_1 + h_2) &\leq \sum_{j=1}^{n} N^{(j)}(r, h_1) + \sum_{j=1}^{n} N^{(j)}(r, h_2) \\
\sum_{j=1}^{n} N^{(j)}(r, \alpha h_1) &= \alpha \sum_{j=1}^{n} N^{(j)}(r, h_1).
\end{aligned}
$$

因此

$$
\sum_{j=1}^{n} N^{(j)}(r, \mathcal{P} \circ f) \leq \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} N^{(j)}(r, f_i^n) = o(T_f^n(r)).
$$

由于 $\mathcal{P} \circ f$ 是 n阶热带亚纯函数，因此应用

n阶詹森公式，我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} N^{(j)}\left(r, \frac{1_0}{\mathcal{P}\circ f}\oslash\right) \\
&= m(r, \mathcal{P}\circ f) - m\left(r, \frac{1_0}{\mathcal{P}\circ f}\oslash\right) + \sum_{j=1}^{n} N^{(j)}\left(r, \mathcal{P}\circ f\right) + O(1) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\delta=\pm 1} \mathcal{P}\circ f(\delta r) + o(T_f^n(r)).
\end{aligned} \tag{39}$$

由（36）可知，当 r 充分大时， f_i 满足以下 3 个性质之一

(1) $f_i(\pm r) \geq 0$;

(2) $f_i(r) \geq 0, f_i(-r) < 0$ 和 $|f_i(-r)| \leq kr + O(1)$，其中 k 是有限正常数;

(3) $f_i(-r) \geq 0, f_i(r) < 0$ 和 $|f_i(r)| \leq kr + O(1)$，其中 k 是有限正常数。

令 $F(x) = \max_{0\leq i\leq m}\{f_i(x)\}$，则当 r 足够大时， $F(\pm r)$不可能同时为负，因为所有 f_i 都是热带整函数，且 f 不是常值全纯曲线。现在我们声称

$$\left(\frac{F(r)+F(-r)}{2}\right)^n \leq \frac{F^n(r)+F^n(-r)}{2} + o(T_f^n(r)) \leq \frac{(F(r)+F(-r))^n}{2} \tag{40}$$

当 r 趋于无穷时。

我们首先假设对所有充分大的 r， $F(\pm r) > 0$ 。若对某个 $\delta = \pm 1$， $F(-\delta r) = o(F(\delta r))$，则 (40) 变为 $(F(\delta r)/2)^n \leq F^n(\delta r)/2 \leq F^n(\delta r)/2$，这是成立的。若对某些常数 $a \geq 0$ 和 $\delta = \pm 1$， $F(-\delta r) = aF(\delta r)(1 + o(1))$，不失一般性，假设 $a \geq 1$；否则我们可以考虑$F($ $\delta r = \frac{1}{a}F\ -\delta r\ \ 1 + o\ 1$ 40 $\left(\frac{a+1}{2}\right)^n F^n\ \delta r\ \leq$) ( ) $\frac{1+a^n}{2}F^n\ \delta r\ \leq\ \frac{1+a^{\ n}}{2}F^n\ \delta r$ (( ))。于是 ( ) 可改写为 ( ) ( ) ()( )，这同样成立；第一个不等式可通过考察 $-\eta(t) = (1+(2t-1)^n)/2 - t^n$ 的导数得到，其中 $t = \frac{1+a}{2} \geq 1$ 和 $n \in \mathbb{N}$。

如果对于足够大的 r 和 $\delta = 1$ 或 -1， $F(-\delta r) < 0$，那么根据上述 f_i 的性质，我们知道 $|F(-\delta r)| = o(T_f(r))$ 且 $F(\delta r) = 2T_f(r) + o(T_f(r))$，这意味着 $F(-\delta r) = o(F(\delta r))$。然后通过与上文类似的分析即可得出该结论。

因此，我们完成了该断言的证明。应用（40），可得，

一方面,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{\delta=\pm1}\mathcal{P}\circ f(\delta r) &= \frac{1}{2}\sum_{\delta=\pm1}\sum_{i=0}^{m}\alpha_i f_i^n(\delta r)\\ &\le \frac{1}{2}\sum_{\delta=\pm1}\left(\sum_{i=0}^{m}\alpha_i\right)F^n(\delta r)+o(T_f^n(r))\\ &\le 2^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{m}\alpha_i\right)\left(\frac{F(r)+F(-r)}{2}\right)^n+o(T_f^n(r))\\ &= \Theta T_f^n(r)+o(T_f^n(r)),\end{aligned}\tag{41}$$

而另一方面,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{\delta=\pm1}\mathcal{P}\circ f(\delta r) &= \frac{1}{2}\sum_{\delta=\pm1}\sum_{i=0}^{m}\alpha_i f_i^n(\delta r)\\ &\ge \frac{1}{2}\theta\sum_{\delta=\pm1}F^n(\delta r)+o(T_f^n(r))\\ &\ge \theta\left(\frac{F(r)+F(-r)}{2}\right)^n+o(T_f^n(r))\\ &= \theta T_f^n(r)+o(T_f^n(r)).\end{aligned}\tag{42}$$

因此，结合(39)、(41)和(42)即可得出该断言。 □

现在我们给出几个例子，以说明增长假设(29)不能省略，并且(30)中的下界和上界都是锐利的。

例5.9. 设 $f=[0:2x]$ 且 $\mathcal{P}(x)=x_0^2+2x_1^2$。则 $T_f(r)=r$ 不满足增长假设*(29)*。由于 $\mathcal{P}\circ f=8x^2$，因此 $\sum_{j=1}^{2}N^{(j)}(r,1_0\oslash(\mathcal{P}\circ f))=8r^2$ 也不满足不等式*(30)*。

例5.10. 设

$$f_1(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ (2k-1)x-(2k^2-1), & x\in[2k-1,2k+1),\end{cases}$$

and

$$f_2(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ 2kx-2k(k+1), & x\in[2k,2k+2),\end{cases}$$

其中 $k\in\mathbb{N}$.

(1) 设 $g=[0:f_1(x)]$ 且 $\mathcal{P}_1(x)=x_0+x_1$，则我们容易得到$T_g(r)=N(r,1_0\oslash(\mathcal{P}_1\circ g))=\frac{1}{4}r^2+o(r^2)$，这表明可以取得下界。

(2) 设 $h=[f_1(x):f_2(x)]$ 且 $\mathcal{P}_2(x)=x_0+x_1$，那么我们还可以得到 $T_h(r)=\frac{1}{4}r^2+o(r^2)$ 和 $N(r,1_0\oslash(\mathcal{P}_2\circ h))=T(r,f_1+f_2)+O(1)=m(r,f_1+f_2)+O(1)=\frac{1}{2}r^2+o(r^2)$，这表明可以得到上界。

6 关于热带截断第二主定理的关系

在 [23], 中，第一作者和 Tohge 考察了项 $\sum_{i=0}^{m} N(r, 1_0 \oslash f_i) - N(r, 1_0 \oslash C_0(f_0, \cdots, f_m))$ 中约化的一个例子，其中 f_i是经典的热带整函数，但没有给出关于约化现象的一般性陈述。现在我们首先探讨非恒定热带全纯曲线 f 的情形，它具有约化表示 $\mathbf{f} = (f_0, \ldots, f_m)$，并满足所有 f_i 都有有限个根这一性质；我们将沿用经典记号$\omega_f(x) = \omega_f^{(1)}(x)$ 和 $N(r, f) = N^{(1)}(r, f)$。对于任意固定的 $i = 0, \cdots, m$，我们假设 $\{x_{i,t}\}_{t=1}^{\nu_i}$ 是 f_i 的所有根，其中 $\nu_i \in \mathbb{N}$，并令 $x_i^* := \max_{1 \le t \le \nu_i} \{|x_{i,t}|\}$。

于是存在有限常数 $b_i^-, b_i^+, k_i^-, k_i^+ \in \mathbb{R}$ 和 $k_i^- \le k_i^+$ 使得

$$f_i(x) = \begin{cases} k_i^- x + b_i^-, & x < -x_i^*, \\ k_i^+ x + b_i^+, & x > x_i^*. \end{cases}$$

由此得到 $\sum_{t=1}^{\nu_i} \omega_{f_i}(x_{i,t}) = k_i^+ - k_i^- \ge 0$，然后利用定义 $N(r, f_i) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{\nu_i} \omega_{f_i}(x_{i,t}) (r = |x_{i,t}|)$，可得

$$\begin{aligned} \frac{k_i^+ - k_i^-}{2} r + O(1) &= \frac{1}{2}(r - |x_i^*|) \sum_{t=1}^{\nu_i} \omega_{f_i}(x_{i,t}) \le N(r, f_i) \\ &\le \frac{1}{2} r \sum_{t=1}^{\nu_i} \omega_{f_i}(x_{i,t}) = \frac{k_i^+ - k_i^-}{2} r, \end{aligned}$$

当 r 趋于无穷大时。因此

$$\sum_{i=0}^{m} N(r, f_i) = \left(\sum_{i=0}^{m} \frac{k_i^+ - k_i^-}{2} \right) r + O(1), \tag{43}$$

其中，由于 f 是非常数。此外，设 $\{\pi_0(x) \cdots, \pi_m(x)\}$是一个依赖于 x 的 $\{0, \cdots, m\}$ 的置换，使得 $C_0(f_0, \cdots, f_m)(x) = \sum_{i=0}^{m} f_i^{[\pi(i)(x)]}(x)$。那么存在两个有限常数 b^- 和 b^+，以及一个足够大的 $R > 0$，使得

$$C_0(f_0, \cdots, f_m)(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{m} k_i^- x + b^-, & x < -R, \\ \sum_{i=0}^{m} k_i^+ x + b^+, & x > R. \end{cases}$$

然后，按照与上文 $N(r, f_i)$类似的分析，我们得到

$$N(r, C_0(f_0, \cdots, f_m)) = \frac{\sum_{i=0}^{m} k_i^+ - \sum_{i=0}^{m} k_i^-}{2} r + O(1), \tag{44}$$

当 r趋于无穷大时。因此，结合（43）和（44），可得 $N(r, C_0(f_0, \cdots, f_m)) = (\sum_{i=0}^{m} N(r, f_i))(1 + o(1))$。

对于更一般的情形（即允许 f_i 有无穷多个根），下面给出一个定理，以说明在 n 阶情形下它与增长假设的关系；当 $n=1$时，这也是前述热带第二主定理的第二部分。

在给出这一关系之前，我们先回顾一下 [23, 引理 5.1]。在我们的情形下结论相同，证明也完全一样，因此这里省略详细内容。

引理 6.1. *([23,* 引理 *5.1])* 若 f_0、 $\cdots$、 f_m 和 g 是热带整函数，则

$$C_0(f_0\otimes g,\cdots,f_m\otimes g)=g\otimes\overline{g}\cdots\otimes\overline{g}^{[m]}\otimes C_0(f_0,\cdots,f_m).$$

关于热带 Casoratian 行列式的更多细节，请参见 [22]和 [23] 。

定理 6.2. 设 n、 $m\in\mathbb{N}$ 和 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{TP}^m$ 是 $\mathbb{TP}^m$ 中的 n阶热带全纯曲线，具有约化表示$\boldsymbol{f}=(f_0$、 $\cdots$、 $f_m)$。若存在常数 $l\in\{0,\cdots,m\}$，使得对所有 $i=0$、$\cdots$、 m， $f_i\oslash f_l$都有定义，

$$\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log\log T_f(r)}{\log r}:=\rho_2<1, \tag{45}$$

且 $\sigma\in(0,\ 1-\rho_2)$，则

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{n}N^{(j)}\left(r,\frac{1_0}{f_i}\oslash\right)-\sum_{j=1}^{n}N^{(j)}\left(r,\frac{1_0}{C_0(f_0,\cdots,f_m)}\oslash\right)\right|\\ \le&\sum_{j=1}^{n}\left|N^{(j)}(r,C_0(f_0,\cdots,f_m))-\sum_{i=0}^{m}N^{(j)}(r,\overline{f}_i^{[i]})\right|\\ &+\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\left|N^{(2j)}_{[-2i,0]}\left(r,\frac{1_0}{\overline{f}_i^{[i]}}\oslash\right)-N^{(2j)}_{[-i,i]}\left(r,\frac{1_0}{f_i}\oslash\right)\right|+o\left(\frac{T_f(r)}{r^\sigma}\right),\end{aligned} \tag{46}$$

$> r$ 在有限对数测度的集合之外趋于无穷大。

证明。 我们首先断言

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}\left|N^{(j)}\left(r,\frac{1_0}{\overline{f}_i^{[k]}}\oslash\right)-N^{(j)}\left(r,\frac{1_0}{f_i}\oslash\right)\right|\\ =&\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\left|N^{(2j)}_{[-2k,0]}\left(r,\frac{1_0}{\overline{f}_i^{[k]}}\oslash\right)-N^{(2j)}_{[-k,k]}\left(r,\frac{1_0}{f_i}\oslash\right)\right|+o\left(\frac{T_f(r)}{r^\sigma}\right)\end{aligned} \tag{47}$$

对于所有 $j=1,\ \cdots,\ n$和 $i,\ k=0,\ \cdots,\ m$，当 r趋于无穷且避开一个有限对数测度集时。对于任意固定的 $i,\ j,\ k$和 $r>2k$，我们定义集合

f_i 在 $(-r-k,\ r+k)$ 中的所有 j 次根为

$$\begin{aligned}
\{x_{1,s}\}_{s=1}^{\mu_1} &\subset [-k,k],\\
\{x_{2,s}\}_{s=1}^{\mu_2} &\subset (-r+k,-k),\\
\{x_{3,s}\}_{s=1}^{\mu_3} &\subset (k,r-k),\\
\{x_{4,s}\}_{s=1}^{\mu_4} &\subset (-r,-r+k],\\
\{x_{5,s}\}_{s=1}^{\mu_5} &\subset [r-k,r),\\
\{x_{6,s}\}_{s=1}^{\mu_6} &\subset (-r-k,-r],\\
\{x_{7,s}\}_{s=1}^{\mu_7} &\subset [r,r+k).
\end{aligned}$$

由于对于任意多项式 g 和 ~~$x\in\mathbb{R}$~~，$\left(g^{[k]}\right)^{(j)}(x-k)=\frac{d^j g(t+k}{dt^j}|_{t=x-k}=g^{(j))}(t+k)|_{t=x-k}=g^{(j)}(x)$，因此

$$\omega^{(j)}_{\overline{f}_i^{[k]}}(x-k)=\frac{sgn^{j+1}((x-k)^+)f_i^{(j)}(x^+)-sgn^{j+1}((x-k)^-)f_i^{(j)}(x^-)}{j!}$$

其中 $x\in\mathbb{R}$。因此，当 $|x|>k$ 或 j 为奇数时，$\omega^{(j)}_{f_i^{[k]}}(x-k)=\omega^{(j)}_{f_i}(x)$；而当 $|x|\le k$ 且 j 为偶数时，这一点仍不确定。因此，我们可以将 $(-r-2k,r)$ 中所有 $f_i^{[k]}$ 的 j 次根定义为

$$\begin{aligned}
\{x^{'}_{1,s}\}_{s=1}^{\mu^{'}_1} &\subset [-2k,0],\\
\{x_{2,s}-k\}_{s=1}^{\mu_2} &\subset (-r,-2k),\\
\{x_{3,s}-k\}_{s=1}^{\mu_3} &\subset (0,r-2k),\\
\{x_{4,s}-k\}_{s=1}^{\mu_4} &\subset (-r-k,-r],\\
\{x_{5,s}-k\}_{s=1}^{\mu_5} &\subset [r-2k,r-k),\\
\{x_{6,s}-k\}_{s=1}^{\mu_6} &\subset (-r-2k,-r-k],\\
\{x_{7,s}-k\}_{s=1}^{\mu_7} &\subset [r-k,r).
\end{aligned}$$

$\{x_{1,s}\}$ 和 $\{x^{'}_{1,s}\}$ 在 j 为偶数时可能不是一一对应，但 $\{x_{t,s}\}$和 $\{x_{t,s}-k\}$ 应当是一一对应的，并且恒等式 $\omega_f^{(j)}(x_{t,s})=\omega^{(j)}_{f_i^{[k]}}(x_{t,s}-k)$ 对所有 $t_=2,\cdots,7$ 均成立。此外，如果 j为偶数，我们有

$$\begin{aligned}
N^{(j)}\left(r-k,\frac{1_0}{f_i}\oslash\right)=&\sum_{s=1}^{\mu_2}\omega_f^{(j)}(x_{2,s})(r-k+x_{2,s})^j\\
&+\sum_{s=1}^{\mu_3}\omega_f^{(j)}(x_{3,s})(r-k-x_{3,s})^j\\
&+N^{(j)}_{[-k,k]}\left(r-k,\frac{1_0}{f_i}\oslash\right),
\end{aligned}\tag{48}$$

$$N^{(j)}\left(r+k,\frac{1_0}{f_i}\oslash\right) = \sum_{t=1}^{3}\sum_{s=1}^{\mu_{2t}}\omega_f^{(j)}(x_{2t,s})(r+k+x_{2t,s})^j + \sum_{t=1}^{3}\sum_{s=1}^{\mu_{2t+1}}\omega_f^{(j)}(x_{2t+1,s})(r+k-x_{2t+1,s})^j + N^{(j)}_{[-k,k]}\left(r+k,\frac{1_0}{f_i}\oslash\right), \tag{49}$$

and

$$N^{(j)}\left(r,\frac{1_0}{\overline{f}_i^{[k]}}\oslash\right) = \sum_{s=1}^{\mu_2}\omega^{(j)}_{\overline{f}_i^{[k]}}(x_{2,s}-k)(r+x_{2,s}-k)^j + \sum_{t=1}^{3}\sum_{s=1}^{\mu_{2t+1}}\omega^{(j)}_{\overline{f}_i^{[k]}}(x_{2t+1,s}-k)(r-x_{2t+1,s}+k)^j + N^{(j)}_{[-2k,0]}\left(r,\frac{1_0}{\overline{f}_i^{[k]}}\oslash\right). \tag{50}$$

由于 k 是有限数，且 f_i的奇点不存在有限聚点，因此我们有

$$\begin{aligned} N^{(j)}_{[-k,k]}\left(r\pm k,\frac{1_0}{f_i}\oslash\right) &= N^{(j)}_{[-k,k]}\left(r,\frac{1_0}{f_i}\oslash\right)(1+O(1/r)) \\ &= N^{(j)}_{[-k,k]}\left(r,\frac{1_0}{f_i}\oslash\right)+o\left(\frac{T(r,f)}{r^\sigma}\right), \end{aligned}$$

当 r 趋于无穷大时。通过比较（48）、（49）和（50）中的各项，我们得到

$$\begin{aligned} &N^{(j)}\left(r-k,\frac{1_0}{f_i}\oslash\right) \\ \le\ &N^{(j)}\left(r,\frac{1_0}{\overline{f}_i^{[k]}}\oslash\right)+N^{(j)}_{[-k,k]}\left(r,\frac{1_0}{f_i}\oslash\right)-N^{(j)}_{[-2k,0]}\left(r,\frac{1_0}{\overline{f}_i^{[k]}}\oslash\right)+o\left(\frac{T(r,f)}{r^\sigma}\right) \\ \le\ &N^{(j)}\left(r+k,\frac{1_0}{f_i}\oslash\right). \end{aligned} \tag{51}$$

当 j 为奇数时，$\{x_{1,s}\}$ 和 $\{x'_{1,s}\}$ 也是一一对应的，并且在这种情况下 $\omega_f^{(j)}(x_{1,s})=\omega^{(j)}_{f_i^{[k]}}(x'_{1,s})$，因此

$$N^{(j)}\left(r-k,\frac{1_0}{f_i}\oslash\right)\le N^{(j)}\left(r,\frac{1_0}{\overline{f}_i^{[k]}}\oslash\right)\le N^{(j)}\left(r+k,\frac{1_0}{f_i}\oslash\right). \tag{52}$$

由于 f_i 是 n 阶整函数，因此根据 n 阶詹森公式，

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} N^{(j)}\left(r, \frac{1_0}{f_i}\oslash\right) &= m(r, f_i) - m\left(r, \frac{1_0}{f_i}\oslash\right) + O(1)\\ &= \frac{1}{2}(f_i(r) + f_i(-r)) + O(1)\\ &\leq T_f(r) + O(1).\end{aligned}$$

因此，对于所有 $j = 1, \cdots, n$, $N^{(j)}\left(r, \frac{1_0}{f_i}\oslash\right) \leq T_f(r) + O(1)$，于是由 (45) 可得

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log N^{(j)}\left(r, \frac{1_0}{f_i}\oslash\right)}{\log r} := \rho_{2,j} \leq \rho_2 < 1.$$

因此 $\sigma \in (0, 1 - \rho_{2,\ j})$，再由引理 4.6 可得

$$\begin{aligned}N^{(j)}\left(r \pm k, \frac{1_0}{f_i}\oslash\right) &= N^{(j)}\left(r, \frac{1_0}{f_i}\oslash\right) + o\left(\frac{N^{(j)}(r, 1_0 \oslash f_i)}{r^\sigma}\right)\\ &= N^{(j)}\left(r, \frac{1_0}{f_i}\oslash\right) + o\left(\frac{T_f(r)}{r^\sigma}\right) \qquad (53)\end{aligned}$$

由于当 r 趋于无穷大时，在一个有限对数测度集之外成立，结合 (51)、(52)、(53) 并将所有 j 相加，即可证明该结论。

此外，对于任意 $i = 0, \cdots, m$，不等式 (24) 意味着

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log T\left(r, \frac{f_i}{f_l}\oslash\right)}{\log r} := \rho_2^{'} \leq \rho_2 < 1.$$

这给出 $\sigma \in (0, 1 - \rho_2^{'})$。由于 $f_i \oslash f_l$ 定义良好，再次应用定理 4.7 和不等式 (24)，可得

$$\begin{aligned}&\left|\left(\overline{\frac{f_i}{f_l}\oslash}\right)^{[k_1]} \oslash \left(\overline{\frac{f_i}{f_l}\oslash}\right)^{[k_2]}(\delta r)\right|\\ \leq &\left|\left(\overline{\frac{f_i}{f_l}\oslash}\right)^{[k_1]} \oslash \left(\frac{f_i}{f_l}\oslash\right)(\delta r)\right| + \left|\left(\overline{\frac{f_i}{f_l}\oslash}\right)^{[k_2]} \oslash \left(\frac{f_i}{f_l}\oslash\right)(\delta r)\right|\\ = &\ o\left(\frac{T(r, f_i \oslash f_l)}{r^\sigma}\right) = o\left(\frac{T_f(r)}{r^\sigma}\right)\end{aligned}$$

对所有 $k_1, k_2 \in \{0, \cdots, m\}$ 和 $\delta = \pm 1$，当 r 在一个集合之外趋于无穷时，该集合具有

有限对数测度。因此

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2}\sum_{\delta=\pm1}\left(C_0(f_0,\cdots,f_m)(\delta r)-\sum_{i=0}^{m}\overline{f}_i^{[i]}(\delta r)\right)\right| \\
=&\ \frac{1}{2}\sum_{\delta=\pm1}\left|C_0\left(\frac{f_0}{f_l}\oslash,\cdots,\frac{f_m}{f_l}\oslash\right)(\delta r)-\left(\frac{f_0}{f_l}\oslash+\cdots+\frac{\overline{f}_m^{[m]}}{\overline{f}_l^{[m]}}\oslash\right)(\delta r)\right| \\
\le&\ \frac{1}{2}\sum_{\delta=\pm1}\left|\sum_{i=0}^{m}\left(\overline{\frac{f_i}{f_l}\oslash}\right)^{[\pi_i(\delta r)]}\oslash\left(\overline{\frac{f_i}{f_l}\oslash}\right)^{[i]}(\delta r)\right| \\
\le&\ \frac{1}{2}\sum_{\delta=\pm1}\sum_{i=0}^{m}\left|\left(\overline{\frac{f_i}{f_l}\oslash}\right)^{[\pi_i(\delta r)]}\oslash\left(\overline{\frac{f_i}{f_l}\oslash}\right)^{[i]}(\delta r)\right|=o\left(\frac{T_f(r)}{r^\sigma}\right)
\end{aligned}\tag{54}$$

当 r 在一个具有有限对数测度的集合之外趋于无穷时，其中$\{\pi_0(\delta r)\ \cdots,\pi_m(\delta r)\}$是$\{0,\cdots,m\}$的一个置换，它依赖于 δr，使得$C_0(f_0,\cdots,f_m)(\delta r)=\sum_{i=0}^{m}\overline{f}_i^{[\pi_i(\delta r)]}(\delta r)$。

再次应用第 n个詹森公式，我们得到

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{j=1}^{n}N^{(j)}\left(r,\frac{1_0}{C_0(f_0,\cdots,f_m)}\oslash\right)-\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{n}N^{(j)}\left(r,\frac{1_0}{f_i}\oslash\right)\right| \\
\le&\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|N^{(j)}\left(r,\frac{1_0}{\overline{f}_i^{[i]}}\oslash\right)-N^{(j)}\left(r,\frac{1_0}{f_i}\oslash\right)\right| \\
&+\left|\sum_{j=1}^{n}N^{(j)}\left(r,\frac{1_0}{C_0(f_0,\cdots,f_m)}\oslash\right)-\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{n}N^{(j)}\left(r,\frac{1_0}{\overline{f}_i^{[i]}}\oslash\right)\right| \\
\le&\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|N^{(j)}\left(r,\frac{1_0}{\overline{f}_i^{[i]}}\oslash\right)-N^{(j)}\left(r,\frac{1_0}{f_i}\oslash\right)\right| \\
&+\left|\sum_{j=1}^{n}N^{(j)}\left(r,C_0(f_0,\cdots,f_m)\right)-\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{n}N^{(j)}\left(r,\overline{f}_i^{[i]}\right)\right| \\
&+\left|\frac{1}{2}\sum_{\delta=\pm1}\left(C_0(f_0,\cdots,f_m)(\delta r)-\sum_{i=0}^{m}\overline{f}_i^{[i]}(\delta r)\right)\right|+O(1).
\end{aligned}\tag{55}$$

因此，结合（47）、（54）和（55）即可得出该断言。 □

与 $n=1$的情形不同，当 $n\ge2$时，即使 $f_0,\ \cdots,\ f_m$都是热带整函数，我们也不能保证 $\frac{1_0}{\overline{f}_i^{[k]}}\oslash$和 $C_0(f_0,\ \cdots,\ f_m)$是热带整函数。因此，在一般的 n 阶情形下，(46)右侧不能简化为 $o(T_f(r)/r^\sigma)$，如下例所示。

例6.3. 定义一条2阶热带全纯良定义曲线$\boldsymbol{f}=[f_0:\ f_1]$ 其中

$$f_0(x)=\begin{cases}-x^2,\ x\le 0,\\ x^2,\quad x>0,\end{cases}\qquad f_1(x)=\begin{cases}x^2,\quad x\le 0,\\ -x^2,\ x>0.\end{cases}$$

Then

$$\overline{f}_0(x)=\begin{cases}-(x+1)^2,\ x\le -1,\\ (x+1)^2,\quad x>-1,\end{cases}\qquad \overline{f}_1(x)=\begin{cases}(x+1)^2,\quad x\le -1,\\ -(x+1)^2,\ x>-1,\end{cases}$$

and

$$C_0(f_0,f_1)=\begin{cases}-2x-1, & x\le -1,\\ 2x^2+2x+1, & -1<x\le 0,\\ 2x+1, & 0<x.\end{cases}$$

通过简单计算，我们有 $T_f(r)=r^2$, $\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=1}^{2}N^{(j)}\left(r,\frac{1_0}{f_i}\oslash\right)=0$和$\sum_{j=1}^{2}N^{(j)}(r,1_0\oslash C_0(f_0,f_1))=r^2$，如果将 *(46)* 的右端替换为 $o(T_f(r)/r^{\sigma})$，它们便不满足不等式 *(46)*。

当 $n=1$时，显然，对于所有 $l_1,l_2=0,\cdots,m$， $f_{l_1}\oslash f_{l_2}$都有定义，且 (46) 的右端为 $o(T_f(r)/r^{\sigma})$，于是得到文献 [23]中提出的通常关系。

推论 6.4。设 $m\in\mathbb{N}$ 和 $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{TR}^m$ 是一个具有约化表示的 1 阶热带全纯曲线$\boldsymbol{f}=(f_0,\cdots,f_m)$。若

$$\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log\log T_f(r)}{\log r}:=\rho_2<1,\tag{56}$$

且 $\sigma\in(0,1-\rho_2)$，则

$$\sum_{i=0}^{m}N\left(r,\frac{1_0}{f_i}\oslash\right)=N\left(r,\frac{1_0}{C_0(f_0,\cdots,f_m)}\oslash\right)+o\left(\frac{T_f(r)}{r^{\sigma}}\right)\tag{57}$$

其中， r 在一个对数测度有限的例外集之外趋于无穷大。

增长条件不能省略，这一点可从以下例子看出： $f=[0:\ e_{\alpha}(x)]$，其中某个 $\alpha>1$，因此 $T_f(r)=T(r,e_{\alpha})+O(1)$ 不满足命题 3.8(ii) 中的假设 (56)。由于 $e_{\alpha}(x)=\alpha e_{\alpha}(x)$，所以 $C_0(f_0,f_1)=\alpha e_{\alpha}(x)$。因此 $N(r,\overline{1_0\oslash f_0})+N(r,1_0\oslash f_1)=T(r,e_{\alpha})(1+o(1))$，而 $N(r,1_0\oslash C_0(f_0,f_1))=\alpha T(r,e_{\alpha})(1+o(1))$，这意味着在这种情况下等式 (57) 不成立。

由推论 6.4 可知，如果我们仅通过移位算子来考虑重数的截断概念，那么实际上就没有任何有意义的分歧余地，因此在此背景下，热带背景中可能不存在自然的截断第二定理。

参考文献

[1] M. J. Ablowitz, R. G. Halburd and B. Herbest, 关于将 Painlev ´e 性质推广到差分方程, 《非线性》13(2000), 889-905.[2] R. Bieri, and J.R.J. Groves, 由赋值诱导的特征标集的几何, 《纯粹与应用数学杂志》347(1984), 168–195.[3] R. Cuninghame-Green, 极小极大代数，施普林格出版社，柏林，(1979).[4] W. Cherry, and Z. Ye, Nevanlinna值分布理论（施普林格出版社，柏林）（2001).[5] T. Cao and J. Zheng, 热带超曲面的内万林纳理论, 比萨高等师范学院科学类年刊 (5) Vol. XXVI (2025), 2105-2144.[6] M. Gondran and M. Minoux, 图与算法，法国电力公司研究与开发部丛书（法国电力公司研究与开发部丛书），vol. 37,́Editions Eyrolles, 巴黎, 1979.[7] M. Gondran and M. Minoux, 幂等半环上的线性代数：近期成果综述，载于：运筹学中的代数与组合方法，载于：北荷兰数学研究，vol. 95，北荷兰，阿姆斯特丹，1984, pp. 147-163.[8] B. Grammaticos, Y. Ohta, A. Ramani, D. Takahashi, and K. M. Tamizh- mani., 元胞自动机与超离散 Painlev ´e 方程, 《物理快报A》226(1997), no.1-2, 53–58.[9] B. Grammaticos, A. Ramani, T. Tamizhmani, K. M. Tamizhmani, and A. S. Carstea., 可积元胞自动机是否具有约束性质？, 《物理学杂志A》40(2007), F725–F735.[10] R. G. Halburd and R. J. Korhonen, 对数导数引理的差分类比及其在差分方程中的应用, 《数学分析及其应用杂志》314(2006), no.2, 477-487.[11] R. G. Halburd, and R.J. Korhonen, 差分算子的内万林纳理论, 芬兰科学院数学年刊31(2006), no.2, 463–478.[12] R. G. Halburd and R. J. Korhonen, 有限阶亚纯解与离散 Painlev ´e 方程，伦敦数学会会刊94 (2007), 443-474.

[13] R. G. Halburd 和 R. J. Korhonen，时滞微分方程亚纯解的增长，《美国数学会会刊》**145**（2017），第6期，2513- 2526。[14] H. Halonen、R. J. Korhonen 和 G. Filipuk，热带第二主定理与奈望林纳反问题，（2023）。arXiv:2305.13939。[15] R. G. Halburd、R. J. Korhonen 和 K. Tohge，具有平移不变超平面原像的全纯曲线，《美国数学会汇刊》**366**（2014），第8期，4267-4298。[16] R. G. Halburd 和 N. J. Southall，热带内万林纳理论与超离散方程，Int. Math. Res. Not. IMRN（2009），第5期，887–911。[17] I. Itenberg、G. Mikhalkin 和 E. Shustin，《热带代数几何》第二版，Oberwolfach Semin.，第35卷，Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，（2009）。[18] Z. Izhakian、M. Knebusch 和 L. Rowen，超热带二次型 *I*，J. Pure Appl. Algebra，**220**（2016），第1期，61-93。[19] Z. Izhakian、M. Knebusch、Manfred 和 L. Rowen，超热带二次型 *II*：热带三角学及其应用，Internat. J. Algebra Com- put，**28**（2018），第8期，1633-1676。[20] Z. Izhakian 和 L. Rowen，超热带代数，Adv. Math，**225**（2010），第4期，2222-2286。[21] N. Joshi 和 S. Lafortune，如何检测元胞自动机中的可积性，《物理学杂志A》**38**（2005），L499–L504。[22] R. J. Korhonen、I. Laine 和 K. Tohge，热带值分布论与超离散方程，世界科技出版公司 Pte. Ltd.，哈肯萨克，新泽西州，2015。MR 3444400。[23] R.J. Korhonen 和 K.Tohge，热带射影空间中的第二主定理，Adv. Math. **298**（2016），693-725。[24] R. J. Korhonen 和 Y. Y. Zhang，一阶差分方程亚纯解的存在性，Cons. Appr.**51**（2020），465-504。[25] I. Laine 和 K. Tohge，热带内万林纳理论与第二主定理，《伦敦数学会会刊》**102**（2011），第5期，883–922。[26] I. Laine 和杨重骏，*Clunie* 引理和 *Mohon'ko* 引理的热带版本，Complex Var. Elliptic Equ. **55**（2010），第1-3期，237–248。MR 2599623。

[27]G.Mikhalkin，计数热带代数几何$\mathbb{R}^2$，J.Amer.Math.Soc.**18**（2005），第2期，313-377。[28] L.Pachter 和B.Sturmfels，统计模型的热带几何，《美国国家科学院院刊》101 **46**（2004），16132–16137（电子版）。[29] J. Zheng 和 R. Korhonen，从内万林纳理论的角度研究差分，《美国数学会汇刊》**373**（2020），第6期，4285–4318。