星形边界上离散时间一致性的充要条件 ⋆

Galina Sidorenko [a]、Johan Thunberg [a]

[a] *Department of Electrical and Information Technology, Faculty of Engineering, Lund University*

arXiv:2602.03508v1 [math.OC] 3 Feb 2026

摘要

众所周知，如果多智能体系统中的智能体在欧几里得空间中迭代地将状态更新为邻居状态的凸组合，那么只要交互图具有足够的连通性，所有状态最终都会收敛到同一个值（一致性）。然而，实践中似乎也存在这样的情形：将状态的凸组合映射或径向投影到任意单位球面，甚至投影到星形凸集的边界上（本文称为星形边界），也能得到同样的结果。本文通过给出强连通有向图下归一化状态（方向）实现渐近一致性的充要条件，对此进行了深入探讨。当所有智能体的星形边界相同时，这一条件等价于状态实现渐近一致性的条件。此外，我们证明，当渐近一致性发生时，状态呈线性收敛，且收敛点关于初始状态连续。与例如基于梯度的一致性协议所采用的对称图假设相比，假设交互图为有向强连通图，适用范围更广。说明性示例和大量数值仿真展示了理论结果。

Key words: 一致性；多智能体系统；离散时间系统；收敛。

1 引言

多智能体系统中的一个关键问题是一致性问题，即智能体通常只能有限地了解全局坐标系统，却必须就共同决策达成一致（Olfati-Saber and Murray, 2004; Olfati-Saber, Fax and Murray, 2007; Ren and Beard, 2005; Ren, Beard and Atkins, 2005; Garin and Schenato, 2010）。这一问题的性质很大程度上取决于具体情境：它可能涉及数值达成一致（Schenato and Fiorentin, 2011; Savazzi, Nicoli and Rampa, 2020）、物理状态对齐（Thunberg, Gonçalves and Hu, 2016; Olfati-Saber, 2006），或行为协调（Cao, Yu, Ren and Chen, 2012; Ren et al., 2005; Reynolds, 1987; Vicsek, Czirok, Eshel, Cohen and Shochet, 1995）。

本文研究一大类星形凸集边界（即星形边界）上的离散时间一致性。这些形状与 d 维欧几里得空间中的单位二球面同胚。当然，这也包括作为特例的 l_p 球面。当 $p = 2$ 时，该问题涵盖 d 维单位球面上的一致性（D¨orfler 和 Bullo，2014；Scar- dovi、Sarlette 和 Sepulchre，2007；Sarlette 和 Sepul- chre，2009；Thunberg 等，2016；Markdahl、Thun- berg 和 Gonçalves，2017）。单位向量（相对于欧几里得范数）的一致性是正交矩阵一致性的一个特例（Tron、Afsari 和 Vidal，2012a；Markdahl、Thunberg 和 Gonçalves，2020；Thunberg 等，2016；Thunberg、Markdahl 和 Gonçalves，2018）；更一般地说，它也是黎曼流形上一致性的特例（Tron、Afsari 和 Vidal，2012b；Shah，2017）。

然而，对于单位球面以及所考虑的这些更一般曲面，一些重要问题仍未得到解答。类似于在欧几里得空间中演化的多智能体系统的非线性一致性（Moreau，2004；Lin、Francis和Maggiore，2005；Wu和Rantzer，2024；Thunberg、Hu和Gonçalves，2017年），当使用类投影梯度下降算法时，一致性似乎（至少几乎）总是能够全局达成，即使多智能体系统的交互图并不对称。我们通过引入一致性的一个充要条件，朝着理解这一现象迈出了一步，该条件为这种行为提供了更多直观认识。我们证明，初始状态的一个连续函数必须等于零，才能

⋆ 本文未曾在任何 IFAC 会议上发表。通讯作者为 Johan Thunberg。

Email addresses: galina.sidorenko@eit.lth.se (Galina Sidorenko), johan.thunberg@eit.lth.se (Johan Thunberg)。

一致性不发生，这意味着未达成一致性的初始条件集合是一个闭集。

我们考虑系统中智能体之间的交互，该系统由一个有向强连通图描述，其中图的边权作为一致性算法/协议中的系数出现。基于图的方法已被广泛用于描述和分析分布式多智能体协调（Mesbahi 和 Egerstedt，2010年）。如果图是连通且对称的，并且考虑欧几里得单位球面，则本文中的算法可化为投影梯度上升（或下降，具体取决于我们如何表述目标函数）。在此背景下，它属于流形优化一阶方法的范畴（Diaconis 和 Stroock，1991年；Absil 和 Malick，2012；Boumal、Absil 和 Cartis，2019；Balashov 和 Kamalov，2021年；Karimi、Nutini 和 Schmidt，2016；Scutari 和 Sun，2019；Yuan、Ling 和 Yin，2016）。在这类背景下，通常会施加一些限制性假设，例如要求邻接矩阵或混合矩阵为双随机矩阵（Shi、Ling、Wu 和 Yin，2015；Nedic、Olshevsky 和 Shi，2017年）。

最近，针对与本文所考虑系统具有相似性的动态系统，已发表了许多关于收缩理论及其推广的新结果。其中包括弱收缩与半收缩理论的介绍与结果（Jafarpour、Cisneros-Velarde 和 Bullo，2021年；De Pasquale、Smith、Bullo 和 Valcher，2023年）、多面体锥上的收缩（Jafarpour 和 Coogan，2025年）与耦合振荡器（Jafarpour 等人，2021年），以及一致性（Deplano、Franceschelli 和 Giua，2023年）。我们针对一致性算法中状态的更新方程，包含将相邻状态的锥组合径向投影到星形边界上。该运算不要求可微，且状态域既非凸也非测地凸。这使我们无法使用经典收缩结果，以及关于微分正离散时间确定性系统收缩分析的较新结果（Kawano 和 Hosoe，2025年）。与这些工作中的许多类似，我们分析一个在正锥中演化的系统。这可视为用于展示原系统主要结果的一种工具。然而，推导主要贡献时并未使用收缩理论。

本文的主要贡献是给出了方向的渐近一致性的充要条件，即归一化状态向量渐近收敛到同一方向。此外，我们证明，只要方向的渐近一致性发生，归一化状态就会线性收敛。我们给出了一些关于初始状态的直接假设，在这些假设下该条件成立。发生方向的渐近一致性的初始状态区域是一个开集，且一致性点关于初始状态局部连续。最后，大量数值仿真以及对充要条件的考察似乎表明了一个猜想：除零测度集合外，所有初始状态都会发生方向的渐近一致性。

本文其余部分安排如下。第2节给出预备知识后，我们将在第3节介绍算法。第4节给出一类时变矩阵的收敛理论结果，并利用这些结果在第5节证明主要结论。第6节给出的说明性示例为理论结果提供了支持；这些示例源自大量采用随机系统参数进行的仿真，在每次仿真中都观察到了方向的渐近一致性。最后，第7节对全文作简要总结。

2 预备符号与定义

2.1 向量、矩阵与图

本文始终约定使用行向量而非列向量。因此，向量 x 表示行向量，而 x^T 表示列向量。当我们写作 $x \in \mathbb{R}^d$时，这等价于 $x \in \mathbb{R}^{1\times d}$。因此，$x^T \in \mathbb{R}^{d\times 1}$ 是一个含有 d 个元素的列向量。我们将 $(n \times m)$ 维全1矩阵和 $(n \times m)$ 维全 0 矩阵分别记为 $\mathbf{1}_{n,\ m}$ 和 $\mathbf{0}_{n,\ m}$。大小为 $(n \times n)$ 的单位矩阵记为 I_n。对于向量 x，$[x]_i$ 是该向量的第 i 个元素。对于矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times d}$，我们用记号 $[A]_i$ 表示第 i 行，用 $[A]_{ij}$ 表示第 i 行、第 j 列的元素。为简化记号，我们有时为每个 $[A]_{ij}$ 引入符号 a_{ij}，然后写作 $A = [a_{ij}]$。

节点为 $\mathcal{V} = \{1, 2, \ldots, n\}$ 的有向图记作 $\mathcal{G}(n) = (\mathcal{V}(n)$ $\mathcal{E})$，其中 $\mathcal{E} \subset (\mathcal{V}(n) \times \mathcal{V}(n))$ 是有向边的集合。

如果矩阵 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足：对于 $(i, j) \in \mathcal{E}$，$a_{ij} = 0$；对于 $(i, j) \notin \mathcal{E}$，$a_{ij} > 0$，则称其为有向图 $\mathcal{G}(n) = (\mathcal{V}(n)\ \mathcal{E})$ 的非负权重矩阵。

如果 A 是满足以下条件的非负权重矩阵，则称其为图 $\mathcal{G}(n) = (\mathcal{V}(n)\ \mathcal{E})$ 的对角占优非负权重矩阵：

$$[A]_{ii} > \sum_{j\neq i} [A]_{ij}, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{1}$$

如果矩阵 $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的主对角线上的所有元素都是正实数，且所有非对角元素均为零，则称其为正对角矩阵。任意正对角矩阵 D 都可以由一个正向量 $(d_1, \ldots d_n)$，$d_i > 0$定义。在这种情况下，我们写作$D = \mathrm{diag}\,(d_1, \ldots d_n)$。

设 $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为非负矩阵。我们将最小锥定义为由 B 各行的所有锥组合构成的集合：

$$\mathcal{C}(B) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [B]_i : \lambda_i \geq 0, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \right\}. \quad (2)$$

这是包含矩阵 B 的所有行的最小锥。该锥在非负矩阵乘法下保持不变。具体而言，对于任意非负矩阵 $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$，都有 $\mathcal{C}(WB) \subseteq \mathcal{C}(B)$。

对于没有零行的矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times d}$，我们定义以下函数：

$$\phi_{\max}(A) = \max_{1\leq i,j\leq n} \arccos\left(\frac{[A]_i [A]_j^\top}{\|[A]_i\|_2 \|[A]_j\|_2} \right), \quad (3)$$

它是矩阵 A 的归一化行之间的最大角度。

有：

$$\cos(\phi_{\max}(A)) = \min_{1\leq i,j\leq n} \frac{[A]_i [A]_j^\top}{\|[A]_i\|_2 \|[A]_j\|_2}. \quad (4)$$

2.2 星形边界与径向投影

$\mathbb{R}^d$ 中的单位球面是集合

$$\mathbb{S}^{d-1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 = 1 \right\}. \quad (5)$$

我们将 $\mathbb{S}^{d-1}$ 上的方向函数定义为连续函数 $\gamma : \mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{R}^+$，该函数从上方有一个正的有界常数，从下方也有一个正的有界常数。对于这样的方向函数 γ，我们定义

$$\mathbb{S}_\gamma^{d-1} = \{ y \in \mathbb{R}^d : \exists x \in \mathbb{S}^{d-1} \text{ s.t. } y = \gamma(x)x \}. \quad (6)$$

集合 $\mathbb{S}_\gamma^{d-1}$ 是原点处某个星形凸集的边界，或某个星形集的星形边界。如果 $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^d$，则集合 $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^d$ 是原点处的星形集。对于 $0 \leq \alpha \leq 1$，有 $x \in \mathcal{S}$ 蕴含 $\alpha x \in \mathcal{S}$。关于 l_p-范数（或简称 p-范数）的半径为 r 的球面是星形边界的一个特例，其中方向函数为 $\gamma(x) = \frac{r}{\|x\|_p}$，对于 $x \in \mathbb{S}^{d-1}$。对于单位 l_p-球面的特殊情形，我们用记号 γ_{l_p} 表示该方向函数。

现在，对于表示为 $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ 的 n 方向函数，我们定义

$$\mathbb{S}(n, d, \bar{\gamma}) = \{ X \in \mathbb{R}^{n\times d} : [X]_i \in \mathbb{S}_{\gamma_i}^{d-1}, \forall i \in \{1, \ldots, n\} \}. \quad (7)$$

$\mathbb{S}(n, d, \bar{\gamma})$ 中矩阵的第 i 行是 $\mathbb{S}_{\gamma_i}^{d-1}$ 的一个元素。$\mathbb{R}^{n\times d}$ 中每一行相对于欧几里得范数的长度均为单位长度的矩阵集合为 $\mathbb{S}(n, d, \mathrm{id})$，其中 id 是恒等映射。我们引入 $\mathbb{S}(n, d)$ 作为该集合的简写。对于 $p \in \mathcal{N} \cup \infty$，其中 $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots\}$，我们定义 $\bar{\gamma}_{l_p} = (\gamma_{l_p}, \gamma_{l_p}, \ldots, \gamma_{l_p})$。采用此记号，行随机矩阵的集合为$\mathbb{S}(n, d, \bar{\gamma}_{l_1})$。

对于方向函数 γ，我们定义从 $\mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ 到 $\mathbb{S}_\gamma^{d-1}$ 的径向投影：

$$P_{\mathbb{S}_\gamma^{d-1}}(x) = \gamma\left(\frac{x}{\|x\|_2} \right) \frac{x}{\|x\|_2}. \quad (8)$$

图1给出了该投影在若干集合上的示意图。

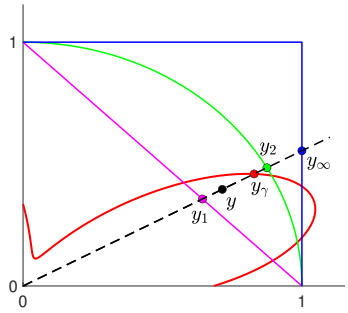


图1. 根据式（8），将点 y 投影到四种不同星形边界上的结果，其中 y_1、y_2、y_∞ 和 y_γ 分别是投影到单位 l_1-球面（洋红色）、单位 l_2-球面（绿色）、单位 l_∞-球面（蓝色）以及一个更复杂的星形边界（红色）上的投影。这里，$d = 2$。

对于每一行都属于 $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ 的矩阵 $X \in \mathbb{R}^{n\times d}$，我们将逐行径向投影 $P_{\mathbb{S}(n,d,\bar{\gamma})}$ 到$\mathbb{S}$（n、d、$\bar{\gamma}$）定义为 $\mathbb{R}^{n\times d}$ 中的矩阵，其中

$$[P_{\mathbb{S}(n,d,\bar{\gamma})}(X)]_i = P_{\mathbb{S}_{\gamma_i}^{d-1}}([X]_i), \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}. \quad (9)$$

因此，$P_{\mathbb{S}(n,d)}$ 根据欧几里得范数对所有行向量进行归一化，而 $P_{\mathbb{S}(n,d,\bar{\gamma}_{l_1})}$ 则根据 l_1-范数对所有行向量进行归一化。

3 算法与问题表述

我们考虑一个包含 n 个智能体的多智能体系统，每个智能体都被赋予集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 中唯一的索引。每个智能体 i 在星形边界 $\mathbb{S}_{\gamma_i}^{d-1}$ 上具有状态 $x_i(t)$，该状态随离散时间步 $t \geq t_0$ 演化，其中 $t - t_0 \in \mathcal{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$。为简化记法，我们通常省略显式的时间依赖关系，用 x_i 代替 $x_i(t)$。令 $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$，并令 $X \in \mathbb{S}(n, d, \bar{\gamma})$ 表示一个矩阵，其第 i 行为 x_i，其中 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.。向量 $x_i(t_0)$ 称为初始

智能体 i 的状态，而 $X(t_0) = X_0$ 称为系统的初始状态。

3.1 算法

设 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为有向图 $\mathcal{G}(n)$ 的非负权重矩阵，用于表示智能体之间的交互。x_i-状态（等价地，X）根据以下算法进行更新

$$X(t+1) = P_{\mathbb{S}(n,d,\bar{\gamma})}(AX(t)), \tag{10}$$

其中 $t \geq t_0 \geq 0$。

算法（10）也可以用一种不那么紧凑的形式表示，从中可以清楚地看到每个智能体的状态更新：

$$x_i(t+1) = P_{\mathbb{S}^{d-1}_{\gamma_i}}([AX(t)]_i), \tag{11}$$

其中 $[AX(t)]_i = [A]_i X(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t)$ 是 $AX(t)$ 的第 i 行。在这种表述中，每个智能体的状态先基于其邻居状态的锥组合进行更新，再投影到由方向函数 γ_i 定义的该智能体专属星形边界上。注意，由于 $\frac{\alpha_i[A]_i X}{\|\alpha_i[A]_i X\|_2} = \frac{[A]_i X}{\|[A]_i X\|_2}$，每个状态锥组合都存在一个关于投影的等价凸组合，其中 $\alpha_i = \frac{1}{[A]_i \mathbf{1}_{n,\ 1}} > 0$。

利用(8)中径向投影的定义，我们将(11)中关于 $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ 的方程表示为

$$x_i(t+1) = \gamma\left(\frac{[AX(t)]_i}{\|[AX(t)]_i\|_2}\right)\frac{[AX(t)]_i}{\|[AX(t)]_i\|_2}. \tag{12}$$

由此可见，需要满足 $[AX(t)]_i \neq \mathbf{0}_{1,d}$。下面的引理1表明，若 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是一个非负矩阵，且其对角元素相对于非对角元素足够大，则对任意$X \in \mathbb{S}(n,d,\bar{\gamma})$，我们有$[AX]_i \neq \mathbf{0}_{1,d}$。因此，若引理1中关于 A 的条件得到满足，则无论我们如何选取$X(t_0) \in \mathbb{S}(n,d,\bar{\gamma})$，都不存在 $t \geq t_0$ 和$i \in \{1,2,\ldots,n\}$ 使得 $[AX(t)]_i = \mathbf{0}_{1,d}$。

引理1 设 $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$，其中对每个 i，γ_i 是 $\mathbb{S}^{d-1}$ 上的方向函数。若非负矩阵 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足

$$a_{ii}\min_{x\in\mathbb{S}^{d-1}}\gamma_i(x) > \sum_{j\neq i} a_{ij}\max_{x\in\mathbb{S}^{d-1}}\gamma_j(x) \quad \forall i\in\{1,2,\ldots,n\}, \tag{13}$$

然后$[AX]_i \neq \mathbf{0}_{1,\ d}$对于 $i \in \{1,2,\ldots,n\}$，$X \in \mathbb{S}$（n，d，$\bar{\gamma}$）。

证明：令 $X \in \mathbb{S}(n,d,\bar{\gamma})$，且对每个$i$，都有 $x_i = [X]_i \in \mathbb{S}^{d-1}_{\gamma_i}$。假设 i 满足 $[AX]_{\tilde{i}} = a_{\tilde{i}\tilde{i}}x_{\tilde{i}} + \sum_{j\neq\tilde{i}} a_{\tilde{i}j}x_j =$ $\mathbf{0}_{1,\ d}$。那么 $a_{\tilde{i}\tilde{i}}\|x_{\tilde{i}}\|_2 = \|\sum_{j\neq\tilde{i}} a_{\tilde{i}j}x_j\|_2 \leq \sum_{j\neq\tilde{i}} a_{\tilde{i}j}\|x_j\|_2$。然而，对每个 i，$\|x_i\|_2 = \gamma_i(x_i)$。因此，$a_{\tilde{i}\tilde{i}}\gamma_{\tilde{i}}(x_{\tilde{i}}) \leq \sum_{j\neq\tilde{i}} a_{\tilde{i}j}\gamma_j(x_j)$，这意味着

$$a_{\tilde{i}\tilde{i}}\min_{x\in\mathbb{S}^{d-1}}\gamma_{\tilde{i}}(x) \leq \sum_{j\neq\tilde{i}} a_{\tilde{i}j}\max_{x\in\mathbb{S}^{d-1}}\gamma_j(x). \tag{14}$$

如果严格不等式 (13) 成立，则不等式 (14) 无法满足。□

请注意，在引理1中，对 A 的要求是其为非负的；我们并不要求它例如是强连通图的非负权重矩阵。如果我们假设 A 是有向图 $\mathcal{G}(n) = (\mathcal{V}(n)\ \mathcal{E})$ 的非负权重矩阵，并且满足 (13)，这意味着对于所有 i，$(i,i) \in \mathcal{E}$，也就是说，所有自环都包含在有向图中。如果所有 n 智能体都被约束在同一个欧几里得球面上运动，即所有 γ_i's 都相等且为常数，则条件 (13) 可化为 $a_{ii} > \sum_{j\neq i} a_{ij}$，也就是说，非负权重矩阵 A 应当是对角占优的。

3.2 问题表述

现在，总体问题是确定在什么条件下，算法 (10) 能够实现渐近一致性，其中 A 是有向图 $\mathcal{G}(n) = (\mathcal{V}(n)\ \mathcal{E})$ 的非负权重矩阵，并且该矩阵与 $\bar{\gamma}$ 一起满足 (13)。更具体地说，这涉及初始状态需满足的条件，在这些条件下可实现以下类型的渐近一致性。

方向的渐近一致性意味着，对于所有 i、j

$$\left\|\frac{x_i(t)}{\|x_i(t)\|_2} - \frac{x_j(t)}{\|x_j(t)\|_2}\right\|_2 \to 0 \text{ as } t\to+\infty. \tag{15}$$

具有逐点收敛的方向的渐近一致性意味着存在 $u \in \mathbb{S}^{d-1}$，使得

$$\left\|\frac{x_i(t)}{\|x_i(t)\|_2} - u\right\|_2 \to 0 \text{ as } t\to+\infty. \tag{16}$$

使用矩阵表示法，具有逐点收敛的方向的渐近一致性意味着存在一个非零元素的行向量 u_c，使得

$$X_\infty = u_c^T u, \tag{17}$$

其中 $X_\infty = \lim_{t\to\infty} X(t)$。当 $\gamma_i = \gamma_j$对所有 i,j均成立时，存在一个标量 $\kappa \neq 0$，使得 $u_c = \kappa\mathbf{1}_{1,\ n}$，因此所有 x_i 都渐近收敛到同一个常数点，该点是 u 的一个缩放值。当所有智能体的状态都位于同一星形边界上时，便是这种情况。此时，我们称该算法表现出具有逐点收敛性的状态渐近一致性。

3.3 仅使用相对信息

算法（10）的一种特殊情况是，当 $\gamma_i(x) = \gamma_j(x) = \frac{1}{\|x\|_p}$ 对所有 i, j均成立时。在这种情况下，（12）可写为

$$x_i(t+1) = \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t)}{\| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t) \|_p}, \tag{18}$$

对每个 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$、 $t \geq t_0 \geq 0$ 均成立。

算法（18）是在全局参考系中提出的。这意味着 x_i 是全局坐标系中的位置。不过，对于欧几里得单位球面（即集合 $\mathbb{S}^{d-1}$），可以仅利用局部和相对信息以分布式方式实现该算法。具体而言，假设在每个时刻 t，每个智能体都能观测到以自身坐标系表示的邻居的单位向量，而每个智能体的坐标系均由全局坐标系经过正交变换得到。智能体 i 的坐标系中的单位向量 x_i 可表示为 $\tilde{x}_i = x_i R_i$，其中 R_i 是将智能体 i 的坐标系旋转至全局坐标系的正交矩阵。单位向量 $\tilde{x}_j$ 可利用公式 $\tilde{x}_{ij} = \tilde{x}_j R_{ij}^T$ 表示为智能体 i 坐标系中的 $\tilde{x}_{ij}$，其中 $R_{ij} = R_i^T R_j$ 是将智能体 j 的坐标系旋转至智能体 i 坐标系的旋转矩阵。

R_i和 R_{ij}相对于全局坐标系可能是静态的，也可能是动态的。仅使用相对信息，算法(18)可表示为

$$\tilde{x}_i(t+1) = \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{x}_{ij}(t)}{\| \sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{x}_{ij}(t) \|_2}, \tag{19}$$

对每个 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$、 $t \geq t_0 \geq 0$均成立。

3.4 与离散时间线性一致性的联系

考虑线性离散时间一致性算法

$$X(t+1) = AX(t), \tag{20}$$

其中， A 使得状态渐近一致性得以保证，且逐点收敛。在（20）中，与（10）不同， $X(t)$ 到 $\mathbb{S}(n, d, \bar{\gamma})$ 的逐行径向投影并未出现，因此无法保证对于所有 t， $X(t) \in \mathbb{S}(n, d, \bar{\gamma})$。如果图 $\mathcal{G}(n)$是对称的（或无向的）且连通，则可取 A 为 $A = I_n - \eta L$，其中 L是 $\mathcal{G}(n)$和 $\eta > 0$的图拉普拉斯矩阵。如果η 取值足够小，则 A 满足引理1中的条件，同时算法（20）可保证状态渐近一致性和逐点收敛。另一方面，如果矩阵 A 满足引理1中的条件，那么 αA 也满足，其中 $\alpha > 0$。此外，在（10）中，我们也可以用等价的 αA 代替 A，

因为 $P_{\mathbb{S}(n,d,\bar{\gamma})}(\alpha A X(t)) = P_{\mathbb{S}(n,d,\bar{\gamma})}(AX(t))$。然而，当 α足够大时，在（20）中用 αA 代替 A 无法保证逐点收敛，因为系统会变得不稳定。

4 预备结果

本节为证明论文第5节中给出的主要结果提供工具。全文假设A 是有向图$\mathcal{G}(n) = (\mathcal{V}(n) \ \mathcal{E})$的非负权重矩阵，并且它与 $\bar{\gamma}$共同满足(13)。

对于这样的 A，如果 $X(t)$ 是由 $t \geq t_0 \geq 0$ 的 (10) 生成的，我们可以写成

$$X(t) = \tilde{A}(k, t_0, X(t_0)) X(t_0), \tag{21}$$

其中 $k = t - t_0$。这种表示 $X(t)$ 的方式将在第5节中正式介绍，用于证明状态或方向的渐近一致性。

˜每个 $A(k, t_0, X(t_0))$-矩阵（其中 $k > 0$）都表示为 k 个矩阵的乘积，而每个矩阵又由一个状态依赖对角矩阵与矩阵 A 的乘积构成。正如第5节将要证明的，˜$A(k, t_0, X(t_0))$-矩阵具有这样的性质：对于任意一对矩阵行，它们的范数之比都被与 k、 t_0 和 $X(t_0)$ 无关的正常数从下方和上方界定。为在第5节中建立这一结果，我们依赖本节的命题1。

本节研究时变的 ˜$A(t)$-矩阵的乘积，其形式为 $A(k, t) = A(t_0 + k - 1)A(t_0 + k - 2) \cdots A(t_0 + 1)A(t_0)$。如图所示，这些乘积不涉及由 (10) 生成的状态。命题1证明，在某些假设下，这类乘积矩阵具有这样的性质：对于任意一对矩阵行，它们的范数之比都被与 k 和 t_0 无关的正常数从下方和上方界定。

接下来我们证明，对于这类乘积矩阵，方向的渐近一致性得以实现，且矩阵行逐点线性收敛，见命题 2。随后，我们在第5节利用这一结果证明了 $A(k, t_0, X(t_0))$-矩阵的一个等价结果，进而可用于证明 $X(t)$-矩阵的方向或状态的渐近一致性。

假设 **1** $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是一个时变矩阵。存在一个强连通图 $\mathcal{G}(n)$，使得对于所有 $t \geq 0$， $A(t)$ 都是具有正对角线的非负权重矩阵。对于所有 $t \geq 0$， $A(t)$ 的正元素均由正常数 σ_l 和 σ_u分别从下方和上方界定。

假设 $A(t)$ 满足假设1。存在一个强连通图，使得每个 $A(t)$

是具有正对角线的非负权重矩阵，这确保 $A(t)$ 对每个 t都是不可约的。这意味着每个 $A(t)$ 都不含零行或零列。此外，由于 $A(t)$ 是非负矩阵，且对所有 i 均有$[A(t)]_{ii} > 0$，因此它是本原的。

定义1 对于时变的 $A(t)$，其中 $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 对于 $t \geq 0$，我们将矩阵 $\tilde{A}(k,t_0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 定义为：

$$\begin{aligned}\tilde{A}(k,t_0) &= \prod_{l=0}^{k-1} A(t_0+l) \\ &= A(t_0+k-1)A(t_0+k-2)\cdots A(t_0),\end{aligned} \tag{22}$$

对于整数 $k \geq 1$ 和 $t_0 \geq 0$。我们进一步定义$\tilde{A}(0,t_0) = I_n$.

假设 $A(t)$ 满足假设1。首先注意到，定义1中的$\tilde{A}(k,t_0)$对所有 k 和 t_0 都是非负矩阵，因为它是非负矩阵的乘积。然而，鉴于假设1成立，我们不能简单地断定 $\|\tilde{A}(k,t_0)\|$ 会随着k 趋于无穷而收敛到某个值，也不能简单地排除 $\lim_{k\to\infty} \|\tilde{A}(k,t_0)\| \in \{0,\infty\}$ 的可能性，其中 $\|\cdot\|$ 表示某种矩阵范数。正如下面的命题1所述，我们能够得出的结论是，对于$\tilde{A}(k,t_0)$的任意两行，其范数之比均由与 k 和 t_0无关的常数所界定。

命题1 假设 $A(t)$ 满足假设1。存在正常数$\delta_{1,\ p}$ 和 $\delta_{2,\ p}$，它们仅取决于 σ_l 和 σ_u （而不取决于 k），使得

$$\delta_{1,p} \leq \frac{\|[\tilde{A}(k,t_0)]_i\|_p}{\|[\tilde{A}(k,t_0)]_j\|_p} \leq \delta_{2,p}, \tag{23}$$

对所有 $t_0 \geq 0$、 $k \geq 1$、 $i \in \{1,2,\ldots,n\}$、 $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ 和 $p \in \mathcal{N} \cup \{\infty\}$，其中 $\mathcal{N} = \{1,2,\ldots\}$。

证明：若 $y \in \mathbb{R}^n$，且 q_1 和 q_2 是正整数或等于 ∞，使得 $1 \leq q_1 \leq q_2$，则 $\|y\|_{q_1} \leq_n (\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2})\|y\|_{q_2}$，其中 $\frac{1}{\infty} := 0$。因此，若命题1中的陈述对 $p = 1$ 成立，则该陈述对任意 $p \in \mathcal{N} \cup \{\infty\}$ 均成立。因此，我们继续证明该陈述对 $p = 1$ 成立。

根据假设1， $\sigma_l I_n \leq A(t) \leq \sigma_u \mathbf{1}_{n,\ n}$。利用这两个不等式以及 $\tilde{A}(k,t_0)$（22）的定义，我们得到不等式

$$\sigma_l^k \leq \|[\tilde{A}(k,t_0)]_i\|_1 \leq \sigma_u^k n^k \text{ for all } i,k,t_0 \geq 0. \tag{24}$$

因此，

$$\frac{\sigma_l^k}{\sigma_u^k n^k} \leq \frac{\|[\tilde{A}(k,t_0)]_i\|_1}{\|[\tilde{A}(k,t_0)]_j\|_1} \leq \frac{\sigma_u^k n^k}{\sigma_l^k} \text{ for all } i,j,k,t_0 \geq 0. \tag{25}$$

若 $1 \leq k \leq n$，则 $\sigma_l^n/(\sigma_u^n n^n)$ 和 $(\sigma_u^n n^n)/\sigma_l^n$分别是 $\|[\tilde{A}(k,t_0)]_i\|_1/\|[\tilde{A}(k,t_0)]_j\|_1$ 的下界和上界，对所有 $i,\ j,\ t_0 \geq 0$ 均成立。

还需考虑 $k > n$ 这种情况。利用 $\tilde{A}(k,t_0)$ 的定义（22），可得

$$\tilde{A}(k,t_0) = \tilde{A}(n,t_0+k-n)\tilde{A}(k-n,t_0). \tag{26}$$

利用（26）以及 $A(t)$ 对所有 t均为非负这一事实，可得：

$$\begin{aligned}&\|[\tilde{A}(k,t_0)]_i\|_1 = \|[\tilde{A}(n,t_0+k-n)\tilde{A}(k-n,t_0)]_i\|_1 \\ &= \sum_{j=1}^{n} [\tilde{A}(n,t_0+k-n)]_{ij}\|[\tilde{A}(k-n,t_0)]_j\|_1.\end{aligned} \tag{27}$$

Let

$$\beta(k,t_0) = \max_{1\leq j\leq n} \left(\|[\tilde{A}(k-n,t_0)]_j\|_1\right), \tag{28}$$

其中，根据（24），我们知道 $\sigma_l^{k-n} \leq \beta(k,t_0) \leq \sigma_u^{k-n} n^{k-n}$。

设 A 为强连通图 $\mathcal{G}(n)$ 对应的二元非负权重矩阵，且其对角线为正。则有

$$\sigma_l^n \bar{A}^n \leq \tilde{A}(n,t_0+k-n) \leq \sigma_u^n \bar{A}^n. \tag{29}$$

由于 A 是一个非负、不可约的二元矩阵，且对角线上的元素为正， A^n 是一个正矩阵，其最小元素大于或等于 1，详见（Horn 和 Johnson，2013年）。然而， A^n 的元素也必须小于或等于 n^{n-1}，因为 $\bar{A}^n \leq \mathbf{1}_{n,\ n}^n$。结合这些结果与（29），可得

$$\sigma_l^n \leq [\tilde{A}(n,t_0+k-n)]_{ij} \leq \sigma_u^n n^{n-1}, \tag{30}$$

对所有 i、 j。

将式 (28) 和 (30) 代入式 (27)，可得

$$\sigma_l^n \beta(k,t_0) \leq \|[\tilde{A}(k,t_0)]_i\|_1 \leq \sigma_u^n n^n \beta(k,t_0), \tag{31}$$

对所有 i。由 (31) 可得，当 $k > n$ 时，

$$\frac{\sigma_l^n}{\sigma_u^n n^n} \leq \frac{\|[\tilde{A}(k,t_0)]_i\|_1}{\|[\tilde{A}(k,t_0)]_j\|_1} \leq \frac{\sigma_u^n n^n}{\sigma_l^n} \text{ for all } i,j. \tag{32}$$

因此，所有情况 $k \geq 1$ 均已涵盖，从而得到

$$\delta_{1,1} = \frac{\sigma_l^n}{\sigma_u^n n^n}, \quad \text{and} \quad \delta_{2,1} = \frac{\sigma_u^n n^n}{\sigma_l^n}. \tag{33}$$

□

现在我们给出本节的主要结果，可表述如下： $A(k, t_0)$-矩阵的方向存在渐近一致性，且线性收敛速率与 $t_0 \geq 0$ 的选择无关。

命题 2 对于满足假设 1的 $A(t)$，存在

使得每个序列 $\left\{ \frac{[\tilde{A}^v(k\ t_0\ ]_i\ ,)(,)]_i\|_2 : \mathcal{N}_0 \to \mathbb{S}^{n-1},}{\|[\tilde{A}\ k\ t_0} \right\}_{k=1}^{\infty}$ 对所有 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 均线性收敛到同一向量 $v(t_0)$。

证明：对于 $k \geq 1$，我们定义

$$Y(k, t_0) = P_{\mathbb{S}(n,n)}(\tilde{A}(k, t_0)), \tag{34}$$

，它是关于欧几里得范数的行归一化 $A(k, t_0)$-矩阵。于是，对 $l \geq 0$， $Y(k+l, t_0) = P_{\mathbb{S}(n,n)}(A(k+l, t_0))$可表示为

$$Y(k + l, t_0) = P_{\mathbb{S}(n,n)}(B(l, k + t_0)Y(k, t_0)), \tag{35}$$

其中 $B(l, k+t_0) = P_{\mathbb{S}(n,n,\bar{\gamma}_{l_1})}(A(l, k+t_0)V(k, t_0))$，且 $V(k, t_0)$是正对角矩阵，其第 i个对角元素由 $\frac{\|[A\ k\ t_0\ ]_i\|_2}{\|[\tilde{A}\ k\ t_0\ ]_1\|_2}$ $(,)(,)$给出。注意，根据命题1，对所有 $t_0 \geq 0$、 $k \geq 1$， $V(k, t_0)$均为有界矩阵。方程（35）成立，因为

$$\begin{aligned}
&P_{\mathbb{S}(n,n)}(B(l, k + t_0)Y(k, t_0)) \\
&= P_{\mathbb{S}(n,n)}(P_{\mathbb{S}(n,n,\bar{\gamma}_{l_1})}(\tilde{A}(l, k + t_0)V(k, t_0))Y(k, t_0)) \\
&= P_{\mathbb{S}(n,n)}\left(\frac{\tilde{A}(l, k + t_0)\tilde{A}(k, t_0)}{\|[\tilde{A}(k, t_0)]_1\|_2}\right) \\
&= P_{\mathbb{S}(n,n)}(\tilde{A}(k + l, t_0)) = Y(k + l, t_0).
\end{aligned} \tag{36}$$

根据定义，对于所有 t_0， $Y(k, t_0) \in \mathbb{S}(n, n)$ 均为非负。由于 $B(l, k + t_0)$ 是随机矩阵，矩阵 $Y(k + 1, t_0)$ 的最小锥是 $Y(k, t_0)$ 的最小锥的子集，即 $\mathcal{C}(Y(k+1, t_0)) \subset \mathcal{C}(Y(k, t_0))$，这意味着行间最大夹角随 k 增大而减小。

接下来，我们将证明一个更强的结果：当 $k \to \infty$ 时， $Y(k, t_0)$ 各行之间的最大角度会趋于零。因此， $Y(k, t_0)$ 的所有行都收敛到同一个向量。我们的证明针对整数 $s \geq 1$ 考察 $l = n$ 和 $k = sn$。在这些时间步之间，由于上文讨论的锥不变性，各行之间的最大角度不会增大。

下文中，我们令 $l = n$。存在正常数 常数 δ_1 和 δ_2 ，它们仅取决于假设1中的 σ_l 和 σ_u ，使得

$$0 < \tilde{\delta}_1 \leq [B(n, k + t_0)]_{ij} \leq \tilde{\delta}_2 < 1 \tag{37}$$

对于任意 $t_0 \geq 0$、 $k \geq n$以及所有 i、 j，该关系均成立。以下内容保证了这些界。根据命题1，矩阵 $V(k + t_0)$的对角矩阵的对角元素由 σ_l 和 σ_u表示，并且一致地有正常数上下界。 $A(n, k + t_0)$ 的元素也一致地受这些常数界定；参见命题1证明中的式(30)。 因此，对于矩阵 $B(n, k + t_0) = P_{\mathbb{S}(n,n,\bar{\gamma}_{l_1})}(A(n, k + t_0)V(k, t_0))$，我们所需的常数 δ_1 和 δ_2确实存在。

现在考虑 $Z(s) = Y(sn, t_0)$ 的时间演化：

$$Z(s + 1) = P_{\mathbb{S}(n,n)}(\bar{B}(s)Z(s)), \tag{38}$$

其中，对于所有 $s \geq 1$ 和 $t_0 \geq 0$， $B(s) = B(n, sn + t_0)$ 和 $Z(s) = Y(sn, t_0) \in \mathbb{S}(n, n)$ 均为正。矩阵 $B(s)$ 是行随机矩阵，其所有元素均为正，且分别由 δ_1 和 δ_2 从下方和上方有界。

对于矩阵 $Z(s)$ 各行之间的最大角 $\phi_s = \phi_{max}(Z(s))$（定义见(3)），我们定义

$$\mathcal{J}_Z(s) = \{(i, j) : [Z(s)]_i[Z(s)]_j^T = \cos(\phi_s)\}. \tag{39}$$

函数 $\phi_{\max}(\cdot)$ 在 $\mathbb{S}(n, n)$ 上连续。集合 $\mathcal{J}_Z(s)$ 是索引对的集合，其中 $Z(s)$ 中对应单位行向量的内积等于 $\cos(\phi_s)$。现在，考虑任意索引对 $(\bar{i}, \bar{j})$。利用 (38)，我们可以写出

$$\begin{aligned}
&[Z(s + 1)]_{\bar{i}}[Z(s + 1)]_{\bar{j}}^T \\
&= \frac{\sum_{(i,j)}[\bar{B}(s)]_{\bar{i}i}[\bar{B}(s)]_{\bar{j}j}[Z(s)]_i[Z(s)]_j^T}{\|\sum_{i=1}^n[\bar{B}(s)]_{\bar{i}i}[Z(s)]_i\|_2\|\sum_{j=1}^n[\bar{B}(s)]_{\bar{j}j}[Z(s)]_j\|_2}.
\end{aligned} \tag{40}$$

这里，记号 $\sum_{(i,\ j)}$ 表示对索引 i 和 j的所有组合求和。

由于对所有 $s \geq 1$， $Z(s)$ 都是正矩阵，因此

$$0 < \cos(\phi_s) \leq [Z(s)]_i[Z(s)]_j^T \leq 1, \tag{41}$$

对于任意一对指标 (i, j) 。接下来，我们注意到 ，因为 $B(s)$ 是一个随机矩阵，所以有

$\sum_{(i,\ j)}[B(s)]_{\bar{i}i}[B(s)]_{\bar{j}j} = 1$。结合这两个观察结果，我们得出，(40) 右端分子的下界为 $\cos(\phi_s)$。

现在我们仔细考察分母。我们注意到

$$\begin{aligned}&\left\|\sum_{i=1}^{n}[\bar{B}(s)]_{\bar{i}i}[Z(s)]_i\right\|_2^2 \\ &=\sum_{(i,j)}[\bar{B}(s)]_{\bar{i}i}[\bar{B}(s)]_{\bar{i}j}[Z(s)]_i[Z(s)]_j^T.\end{aligned} \tag{42}$$

我们可以将 (42) 中的求和拆分为两部分：一部分是对不属于 $\mathcal{J}_Z(s)$ 的指标对求和，另一部分是对属于 $\mathcal{J}_Z(s)$ 的指标对求和。利用 (41)，我们得到

$$\begin{aligned}&\left\|\sum_{i=1}^{n}[\bar{B}(s)]_{\bar{i}i}[Z(s)]_i\right\|_2^2 \\ &\le\sum_{(i,j)\notin\mathcal{J}_Z(s)}[\bar{B}(s)]_{\bar{i}i}[\bar{B}(s)]_{\bar{i}j}\cdot 1 \\ &\quad+\sum_{(i,j)\in\mathcal{J}_Z(s)}[\bar{B}(s)]_{\bar{i}i}[\bar{B}(s)]_{\bar{i}j}\cos(\phi_s).\end{aligned} \tag{43}$$

通过加上并减去同一项

$$\sum_{(i,j)\in\mathcal{J}_Z(s)}[\bar{B}(s)]_{\bar{i}i}[\bar{B}(s)]_{\bar{i}j}, \tag{44}$$

我们得到如下结果：

$$\begin{aligned}&\left\|\sum_{i=1}^{n}[\bar{B}(s)]_{\bar{i}i}[Z(s)]_i\right\|_2^2\le\sum_{(i,j)}[\bar{B}(s)]_{\bar{i}i}[\bar{B}(s)]_{\bar{i}j} \\ &+\sum_{(i,j)\in\mathcal{J}_Z(s)}[\bar{B}(s)]_{\bar{i}i}[\bar{B}(s)]_{\bar{i}j}(\cos(\phi_s)-1) \\ &\le 1-\tilde{\delta}_1^2(1-\cos(\phi_s)),\end{aligned} \tag{45}$$

其中 δ_1 是矩阵 $B(s)$中各元素的下界；参见 (37)。因此，我们得到 (40) 的分母满足以下界：

$$\begin{aligned}&\left\|\sum_{i=1}^{n}[\bar{B}(s)]_{\bar{i}i}[Z(s)]_i\right\|_2\left\|\sum_{j=1}^{n}[\bar{B}(s)]_{\bar{j}j}[Z(s)]_j\right\|_2 \\ &\le 1-\tilde{\delta}_1^2(1-\cos(\phi_s)).\end{aligned} \tag{46}$$

由于 $(\bar{i},\bar{j})$ 是任意的，我们现在可以得出

$$\cos(\phi_{s+1})\ge\frac{\cos(\phi_s)}{1-\tilde{\delta}_1^2(1-\cos(\phi_s))}\ge\cos(\phi_s). \tag{47}$$

序列 $\{\cos(\phi_s)\}$ 有界且单调不减。因此，根据单调收敛定理（Rudin 等人，1964年），它收敛于某个极限 L，其中 $0\le L\le 1$。此外，通过对（47）应用“夹逼定理”，我们得出 L 必为 0 或 1。由于在 $s=1$ 处 $\cos(\phi_s)>0$（41），并且对于所有 $s>1$始终为正，因此序列 $\{\cos(\phi_s)\}$在 $s\to\infty$ 时收敛于 $L=1$。这意味着矩阵$Z(s)$的任意两行之间的最大角度收敛于 0。由于 $\mathcal{C}(Y(k+1,t_0))\subset\mathcal{C}(Y(k,t_0))$，因此 $Y(k,t_0)$ 的任意两行之间的角度也在 $k\to\infty$时趋于 0。于是，存在一个单位向量$v(t_0)$，使得 $Y(k,t_0)$ 的所有行都收敛于该向量。

利用（47），我们还可以推导出收敛速率。定义

$$e_s=1-\cos(\phi_s)=\max_{i,j}\frac{\|Z_i(s)-Z_j(s)\|_2^2}{2}. \tag{48}$$

.....的泰勒展开

$$g(e_s)=\frac{1-e_s}{1-\tilde{\delta}_1^2e_s}=\frac{\cos(\phi_s)}{1-\tilde{\delta}_1^2(1-\cos(\phi_s))} \tag{49}$$

在点 0 处为

$$g(e_s)=1-(1-\tilde{\delta}_1^2)e_s+O(e_s^2). \tag{50}$$

因此，必定存在一个 s_0，使得对所有 $s\ge s_0$，都有 $1-g(e_s)\le(1-\frac{\tilde{\delta}_1^2}{2})e_s$。现在，将此结果与（47）结合，我们得出

$$e_{s+1}\le(1-\frac{\tilde{\delta}_1^2}{2})e_s, \tag{51}$$

当 $s\ge s_0$时，$Z(s)$ 的各行之间的最大距离线性收敛至零。此外，由于 $\mathcal{C}(Y(k+1,t_0))\subset\mathcal{C}(Y(k,t_0))$，可知对于 $k\ge n$，$\sqrt{2e_s}$是 $Y(k,t_0)$ 的任意一行与 $v(t_0)$ 之间最大距离的上界。□

5 主要结果

本节将介绍算法（10）收敛性的主要结果。利用命题 2，我们给出方向渐近一致性的充要条件。由于该条件难以显式验证，我们进一步给出若干额外假设，在这些假设下该条件必然成立。

我们首先注意到，式（10）可以写成以下等价形式

$$X(t_0+k)=\tilde{A}(k,t_0,X_0)X_0, \tag{52}$$

其中 $X_0 = X(t_0)$、 $k > 0$，以及

$$\begin{aligned}\tilde{A}(k, t_0, X_0) &= \prod_{m=0}^{k-1} \left(D_{\bar{\gamma}}(AX(t_0+m))A\right) \\ &= D_{\bar{\gamma}}(AX(t_0+k-1))A \cdots D_{\bar{\gamma}}(AX(t_0))A,\end{aligned} \tag{53}$$

其中，对于一个具有非零行的矩阵 B

$$D_{\bar{\gamma}}(B) = \operatorname{diag}\left(\frac{\gamma_1\left(\frac{[B]_1}{\|[B]_1\|_2}\right)}{\|[B]_1\|_2}, \ldots, \frac{\gamma_n\left(\frac{[B]_n}{\|[B]_n\|_2}\right)}{\|[B]_n\|_2}\right). \tag{54}$$

这是成立的，因为 $P_{\mathbb{S}(n,d,\bar{\gamma})}(AX) = D_{\bar{\gamma}}(AX)AX$。

假设 **2** $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ 满足： γ_i 对于每个 i 都是定义在 $\mathbb{S}^{d-1}$ 上的方向函数。 $A = [a_{ij}]$ 是强连通图$\mathcal{G}(n)$的非负权重矩阵。矩阵 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足

$$a_{ii} \min_{x\in\mathbb{S}^{d-1}} \gamma_i(x) > \sum_{j\neq i} a_{ij} \max_{x\in\mathbb{S}^{d-1}} \gamma_j(x) \ \ \forall i \in \{1, ..., n\}. \tag{55}$$

命题 3 假设矩阵 A 与 $\bar{\gamma}$ 满足假设2，且 $X(t)$ 由式（10）给出。令 $\tilde{A}(k, t_0, X_0)$ 由式（53）给出。则存在一个连续函数

$$v : \mathbb{S}(n, d, \bar{\gamma}) \to (R^+)^n \cap \mathbb{S}^{n-1}, \tag{56}$$

使得对于所有 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$，每个序列 $\left\{ \frac{[\tilde{A}(k\ t_0\ X_0\ ]_{i\ ,})(,)]_i\|_2}{\|[\tilde{A}\ k\ t_0\ X_0} \right\}_{k=1}^{\infty}$ 都线性收敛到同一个向量 $v(X_0)$。

证明：鉴于假设2成立，引理1适用。因此，

$$X \mapsto AX \mapsto [D_{\bar{\gamma}}(AX)]_{ii}, \tag{57}$$

对于每个 i，它都是从紧集 $\mathbb{S}(n, d, \bar{\gamma})$到 R^+ 的连续函数。这意味着，对于每个 i，该映射的值域上下均有两个正常数作为界。进而，这意味着 $D_{\bar{\gamma}}(AX)$的所有 n 对角元素上下均有两个正常数作为界。因此， $A(m) = D_{\bar{\gamma}}(AX(t_0+m))A$ 满足假设1，命题2保证存在一个单位向量 $v(X_0)$，使得所讨论的序列线性收敛到 $v(X_0)$。收敛速率仅可由映射上界的常数以及假设1中的 σ_l 和σ_u 表示。这些常数与 i 和 X_0的具体取值无关。

现在我们证明 $v(X_0)$ 关于 X_0 是连续的。至此我们知道，对于适当的矩阵范数 $\|\cdot\|$（例如弗罗贝尼乌斯范数）以及任意 $X_0 \in \mathbb{S}(n, d, \bar{\gamma})$，对于 $\epsilon > 0$ 存在正整数 $T(\epsilon)$，使得对于 $k \geq T(\frac{\epsilon}{3})$，成立

$$\|P_{\mathbb{S}(n,n)}(\tilde{A}(k, t_0, X_0)) - \mathbf{1}_{n,1} v(X_0))\| \leq \frac{\epsilon}{3}. \tag{58}$$

~矩阵函数 $P_{\mathbb{S}(n,n)}(A(k, t_0, X_0))$ 关于 X_0 连续，对任意 $k > 0$ 均成立。因此，对于 $\epsilon > 0$，必定存在 $\delta(\epsilon) > 0$，使得 $\|X_0 - X_0\| \leq \delta$ 蕴含

$$\begin{aligned}&\|P_{\mathbb{S}(n,n)}(\tilde{A}(T(\frac{\epsilon}{3}), t_0, \tilde{X}_0)) - P_{\mathbb{S}(n,n)}(\tilde{A}(T(\frac{\epsilon}{3}), t_0, \bar{X}_0))\| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3}.\end{aligned} \tag{59}$$

现在我们在时刻 $k = T(\frac{\epsilon}{3})$ 应用三角不等式:

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{1}_{n,1} v(\bar{X}_0) - \mathbf{1}_{n,1} v(\tilde{X}_0)\| \\ &\leq \|\mathbf{1}_{n,1} v(\bar{X}_0) - P_{\mathbb{S}(n,n)}(\tilde{A}(T(\frac{\epsilon}{3}), t_0, \bar{X}_0))\| \\ &\quad + \|P_{\mathbb{S}(n,n)}(\tilde{A}(T(\frac{\epsilon}{3}), t_0, \bar{X}_0)) \\ &\quad - P_{\mathbb{S}(n,n)}(\tilde{A}(T(\frac{\epsilon}{3}), t_0, \tilde{X}_0))\| \\ &\quad + \|\mathbf{1}_{n,1} v(\tilde{X}_0) - P_{\mathbb{S}(n,n)}(\tilde{A}(T(\frac{\epsilon}{3}), t_0, \tilde{X}_0))\| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.\end{aligned} \tag{60}$$

证明至此完成。□

定义连续函数 $v(X_0)$ 后，我们给出方向渐近一致性的充要条件。

定理1 假设矩阵 A 与 $\bar{\gamma}$ 满足假设2，且 $X(t)$ 由（10）给出。当且仅当 $v(X_0)X_0 \neq \mathbf{0}_{1,\ d}$时，其中 $v(X_0)$ 是命题3中的向量，方向具有渐近一致性。

此外，如果 $v(X_0)X_0 \neq \mathbf{0}_{1,\ d}$，还可以得到:

(1) point-wise convergence of directions and the directions converge linearly to $\frac{v(X_0)X_0}{\|v(X_0)X_0\|_2}$ *for all* i*;*

(2) point-wise convergence of states. The sequence $\{X(t)\}$ *converges (linearly) to* $P_{\mathbb{S}(n,d,\bar{\gamma})}(\mathbf{1}_{n,1}(v(X_0)X_0))$ *(if each* γ_i *is differentiable at* $\frac{v(X_0)X_0}{\|v(X_0)X_0\|_2}$*).*

证明：令我们定义 $t = t_0 + k$ 和

$$z_i(t) = \frac{[\tilde{A}(k, t_0, X_0)]_i}{\|[\tilde{A}(k, t_0, X_0))]_i\|_2} \text{ and } y_i(t) = z_i(t)X_0, \tag{61}$$

对所有 i 和 $k > 0$，很容易得出$y_i(t)$ $\|y_i(t)\|_2 = \frac{x_i}{\|x_i(t)}$ $(t)\|_2$ 对所有 $t > t_0$ 均成立，并且 $\lim_{t\to+\infty} y_i(t) = \lim_{t\to+\infty} z_i(t)X_0 = y_\infty = v(X_0)X_0$。

我们首先证明充分性。假设 $y_\infty = v(X_0)X_0 \neq \mathbf{0}_{1,d}$。那么 $\lim_{t\to+\infty} \frac{x_i(t)}{\|x_i(t)\|_2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{y_i(t)}{\|y_i(t)\|_2} = \frac{v(X_0)X_0}{\|v(X_0)X_0\|_2}$ 对所有 i 均成立。此外，γ_i 的连续性保证了状态的逐点收敛。如果序列 $\{z_i(t)\}$ 线性收敛，那么序列 $\{y_i(t)\}$ 也线性收敛。对于足够大的 t，存在 $\delta \in (0,1)$，使得 $\|y_i(t+1) - y_\infty\|_2 \leq \delta \|y_i(t) - y_\infty\|_2$。$g(y) = \frac{y}{\|y\|_2}$ 在 y_∞ 处的泰勒展开为

$$g(y_\infty + e) - g(y_\infty) = \frac{e}{\|y_\infty\|_2}\left(I_d - \frac{y_\infty^T y_\infty}{\|y_\infty\|_2^2}\right) + O(\|e\|_2^2). \tag{62}$$

因此，对于足够大的 t，范数 $\|g(y(t)) - g(y_\infty)\|_2$ 有界，其界由 $\|y(t) - y_\infty\|_2$ 的缩放给出。若每个 γ_i 在 $\frac{v(X_0)X_0}{\|v(X_0)X_0\|_2}$ 处可微，则可以对状态的线性收敛作出类似论证，因为 $x_i(t) = \gamma_i\left(\frac{y_i(t)}{\|y_i(t)\|_2}\right)\frac{y_i(t)}{\|y_i(t)\|_2}$ for all i.

现在我们证明必要性。假设对某个 X_0，存在方向的渐近一致性，从而 (15) 成立。那么必定存在时刻 $T \geq t_0 + n$ 以及单位向量 $h \in \mathbb{R}^d$（作为 X_0 的函数），使得 $X(T)h^T > \mathbf{0}_{n,1}$。换言之，必定存在时刻 T，使得所有方向都位于某个半球的内部。由于 $v(X(T))$ 为正，故有 $v(X(T))X(T)h^T > 0$。显然 $v(X(T))X(T) \neq \mathbf{0}_{1,d}$。我们还由先前结果可知，对 $T - t_0 \geq n$，$A(T - t_0, t_0, X_0)$ 是正矩阵。因此必定存在 $\bar{j}$，使得对任意 i,

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{|[v(X(T))X(T)]_{\bar{j}}|}{\|\tilde{A}(T-t_0,t_0,X_0)\|_{\mathrm{F}}} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{|[[\tilde{A}(k,T,X(T))]_{\bar{i}}\tilde{A}(T-t_0,t_0,X_0)X_0]_{\bar{j}}|}{\|[\tilde{A}(k,T,X(T))]_{\bar{i}}\|_2 \|\tilde{A}(T-t_0,t_0,X_0)\|_{\mathrm{F}}} \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \frac{|[[\tilde{A}(k,T,X(T))\tilde{A}(T-t_0,t_0,X_0)]_{\bar{i}}X_0]_{\bar{j}}|}{\|[\tilde{A}(k,T,X(T))\tilde{A}(T-t_0,t_0,X_0)]_{\bar{i}}\|_2} \\ &= |[v(X_0)X_0]_{\bar{j}}| \leq \|v(X_0)X_0\|_1, \end{aligned} \tag{63}$$

其中 $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ 表示弗罗贝尼乌斯范数。这意味着，如果方向的渐近一致性成立，那么 $v(X_0)X_0 \neq \mathbf{0}_{1,d}$。□

定理1指出，如果方向的渐近一致性成立，那么收敛是线性且逐点的。因此，不存在不具备逐点收敛和线性收敛阶的方向渐近一致性。根据定理1，下面的推论可直接得出。

推论1 假设矩阵 A 与 $\bar{\gamma}$ 共同满足假设2，且 $X(t)$ 由(10)给出。(1) 存在方向的渐近一致性且具有逐点收敛的那些 X_0 所构成的集合是一个开集。(2) 共识方向（状态）关于 X_0 是局部连续的。

现在给出一个推论，其中包含使 $v(X_0)X_0 \neq \mathbf{0}_{1,d}$ 成立的充分条件。

推论 2 设矩阵 A 与 $\bar{\gamma}$ 满足假设2，且 $X(t)$ 由式（10）给出。在以下每个条件下，$v(X_0)X_0 \neq \mathbf{0}_{1,d}$ 均成立，因此由定理1可保证方向的渐近一致性及逐点收敛。

(1) $X_0 \in \mathbb{S}(n,d,\bar{\gamma})$ 的行位于某个半空间内，也就是说，存在一个单位向量 $h \in \mathbb{R}^d$ 使得 $\mathbf{0}_{n,1} \neq X_0 h^T \geq \mathbf{0}_{n,1}$。
(2) $X_0 \in \mathbb{S}(n,d,\bar{\gamma})$ 的秩为 n；当 $d \geq n$ 时，除去一个零测度的 X_0 集合中的元素，均满足这一条件。(3) 如果 $X_0 \in \mathbb{S}(n,d,\bar{\gamma})$ 有一个非零列 c 满足 $c^T \notin \mathcal{C}^\perp(A)$，其中

$$\mathcal{C}^\perp(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists y \in \mathcal{C}(A),\ s.t.\ y \neq \mathbf{0}_{1,n}, yx^T = 0\}, \tag{64}$$

where $\mathcal{C}(A)$ is the minium cone for A.

证明：
(1) 由于 $v(X_0)$ 是一个正向量，$v(X_0)X_0h^T \neq 0$，这意味着 $v(X_0)X_0 \neq \mathbf{0}_{1,d}$。

(2) 如果 X_0 的秩为 n，显然 $v(X_0)X_0 \neq \mathbf{0}_{1,d}$。如果 $d \geq n$，那么行线性相关的 X_0 构成的集合是零测集。

(3) 如果 c X_0 中存在一列，使得 c^T 不属于 $\mathcal{C}^\perp(A)$，那么由于 $v(X_0) \in \mathcal{C}$ A，可得 $v(X_0)c \neq 0$。□

下面通过一个示例来说明一致性的必要条件，即 $v(X_0)X_0 \neq \mathbf{0}_{1,d}$。考虑 X_0 的情形：不存在 h，因此推论 2 中的条件 (1) 得以满足，但存在一个 h，使得 $\mathbf{0}_{n,1} = X_0 h^T$。

对于此类情况，我们无法保证 $v(X_0)X_0 \neq \mathbf{0}_{1,d}$。图 2 左侧的图展示了单位圆上的这一情况，其中 $n = d = 2$。这里 $[X_0]_1 = -[X_0]_2$ 表示 $[X_0]_1$ 和 $[X_0]_2$ 在单位圆上处于对跖位置，并且位于一条经过原点的直线上。这种构型是算法（10）的一个不动点（在这种情况下，用算法（18）来描述会更方便）。可以验证，这个不动点是不稳定的。图 2 右侧的图中，向量 $v(X_0)$ 以蓝色箭头表示，而 X_0 的两列则以黑点表示。显然

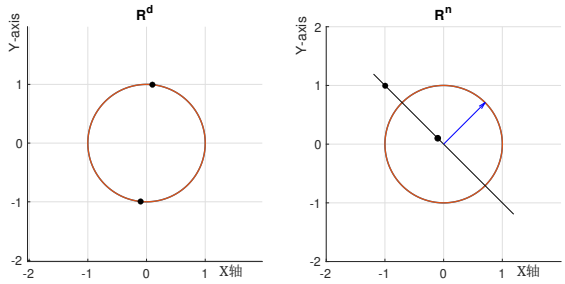


图 2. 左： X_0 的各行在 $\mathbb{R}^d$单位圆上的对跖位置。右： X_0 在 $\mathbb{R}^n$ 中的两列（黑点）以及向量 v（X_0）（蓝色箭头）。显然， v（X_0）$X_0 = \mathbf{0}_{1,\ d}$。

$v(X_0)$与这两列正交，因此方向或状态的渐近一致性不会发生。

图 2 右侧的图示表明，推论 2 中的条件 (1) 等价于一个关于 X_0各行的条件。若存在一个正交矩阵 R，使得 X_0R 有一列的所有元素均非负，且至少有一个元素严格为正，则 v（X_0）$X_0 \neq \mathbf{0}_{1,\ d}$。

推论 2 中的条件 (3) 由图 3 示出，其中展示了 $\mathcal{C}(P_{\mathbb{S}(n,n)}(A(k,t_0,X_0)))$-锥的演化。初始锥 $\mathcal{C}(A)$ 对应亮红色，且该锥包含所有后续的$\mathcal{C}(P_{\mathbb{S}(n,n)}(A(k,t_0,X_0)))$-锥。随着 k 增大，红色逐渐加深。请注意，虽然这些锥无限延伸，但可视化仅显示与单位圆盘相交的部分。集合 $\mathcal{C}^{\perp}(A)$ 由裁剪后的紫色区域表示。由于由 $P_{\mathbb{S}(n,n)}(A(k,t_0,X_0))$ 的行构成的锥会随时间收缩，相应的测地凸包也逐渐收缩至一个点。右侧的图 4 展示了测地凸包如何随时间收缩的一个示例，其空间维数为 $\mathbb{S}^2$。左侧展示了单位球面上表示归一化行 $P_{\mathbb{S}(n,n)}(A(k,t_0,X_0))$ 的点$\tilde{}$如何收敛。随着时间推移，这些点彼此越来越接近，最终收敛到一个点，该点对应于向量 $v(X_0)$。

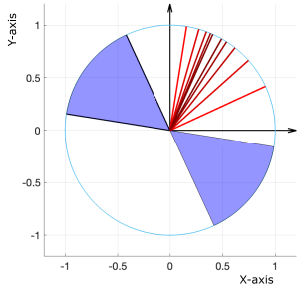


图 3. $\mathbb{R}^2$中最小锥 $\mathcal{C}$（$\tilde{A}$（k，t_0，X_0））的演化。图中展示了前 5 个时间步，颜色越深表示时间步越晚。紫色区域表示 $\mathcal{C}^{\perp}$（A）。这里， $d = n = 2$。

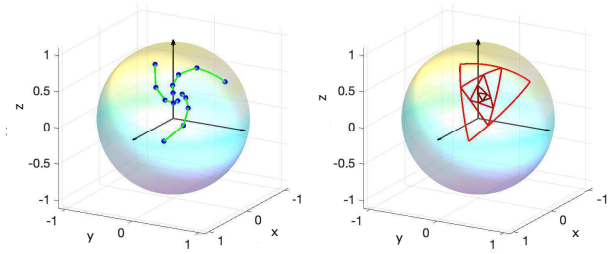


图 4。左：表示$\tilde{}$归一化行 $P_{\mathbb{S}(n,n)}(A(k,t_0,X_0))$ 的点在$\mathbb{R}^3$单位球面上收敛。右：相应的测地凸包随时间不断缩小。图中展示了最初 5 个时间步，颜色越深表示时间步越晚。此处，$d = n = 3$。

6 仿真

本节给出了算法（10）中方向或状态渐近一致性的多个示例。我们进行了大量仿真，以数值方式支持第5节所述的结果。推论 2 为定理1中的 $v(X_0)X_0 \neq \mathbf{0}_{1,\ d}$ 提供了充分条件。然而，对于随机系统参数进行的数值仿真似乎表明，可以猜想条件 $v(X_0)X_0 \neq \mathbf{0}_{1,\ d}$ 对除零测度集合外的所有 X_0 均成立。该结论基于在多种随机选取的配置下进行的 10^8 仿真，包括不同的空间维数 d、智能体数量 n、矩阵结构 A，以及包括 l_p-球面在内的非平凡星形边界；在每次实验中都观察到了方向的渐近一致性。

在每次仿真中，随机选取了 n 和 d。每次仿真还随机选取了一个强连通图 $\mathcal{G}(n)$，以及一个满足假设2的 A-矩阵。为构造非平凡的星凸形状，在 $\mathbb{R}^d$ 中生成了 K 个随机单位向量，向量数量 K 从 d到 $4d$之间均匀选取。随后，将每个向量乘以一个随机正因子进行缩放。然后，将任意给定方向 $h \in \mathbb{R}^d$ 上的边界距离计算为某个最小距离与方向向量 h 和 K 个单位向量之间的非负标量积之和，并将这些标量积提升至一个变化的整数幂，该幂从 1 到 10 均匀采样。初始的 X_0通过逐元素从标准正态分布中采样生成，然后投影到星形边界上。

图5–8展示了部分仿真实例。为了便于可视化，空间维数d 设为2或3。图5、图6展示了范数参数 p和半径 r取不同值时的各种l_p-球面。图7展示了图6左侧配置的线性收敛。图8展示了一个更复杂的星形边界上的一致性收敛示例。

图5和图8左侧展示了智能体的初始位置（ x_i-状态），右侧展示了最终位置以及共识方向。图6在同一幅图中展示了初始位置和最终位置，以及每个智能体从初始位置到最终位置的轨迹。在所有展示的示例中， $n > d$; 除图6左侧的情况外，所有情况下初始矩阵 X_0 都不属于任何半空间。

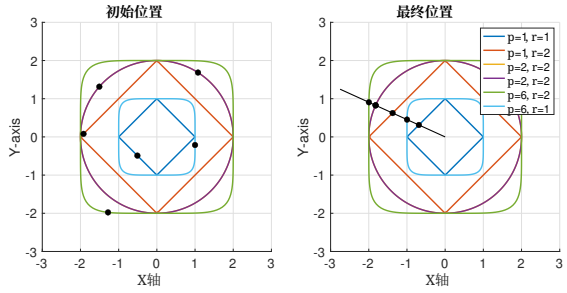


图5. 智能体在 $\mathbb{R}^2$中的各种 l_p-球面上运动时，向共识方向收敛。球面的所选半径和参数 p 在图例中标出。左：智能体的初始位置。右：智能体的最终位置，这些位置已收敛至共识方向。连接原点与智能体最终位置的线段表示共识方向。

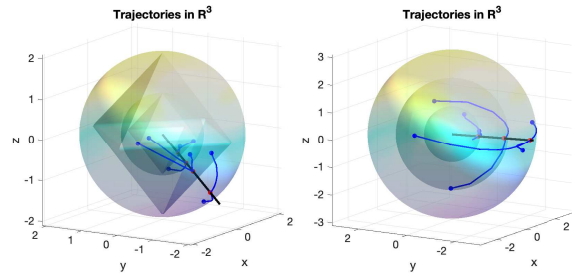


图6. 智能体在 $\mathbb{R}^3$中的各种 l_p-球面上运动时，向共识方向收敛，其中左侧为： $p = \{1, 2\}$, $r = \{1, 2\}$ $p = 2$ $r = \{1, 2, 3\}$; 右侧为：，。蓝点表示智能体的初始位置，红点表示最终位置。蓝线描绘了各智能体随时间变化的轨迹。连接原点与最终位置的线段表示共识方向。

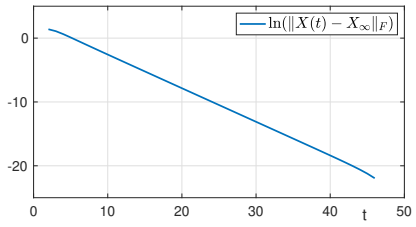


图7. 图6左图所示配置呈现出线性收敛。

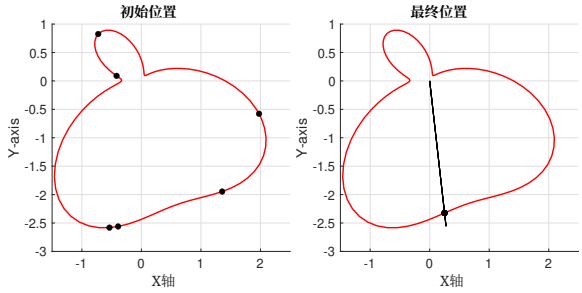


图8. 在 $\mathbb{R}^2$中，智能体在星形边界$\mathbb{S}(6, 2, \bar{\gamma})$上收敛至一致性。左图：智能体的初始位置。右图：智能体的最终位置，它们已在 $\mathbb{S}(6, 2, \bar{\gamma})$内收敛至同一点。图中所示线段连接原点与一致性点。

7 结论

本文聚焦于多智能体系统的离散时间一致性算法，其中每个智能体的状态位于星形凸集的边界（星形边界）上。一个特例是，例如，当所有智能体特定集合相同且等于单位欧几里得球面时。在每个离散时间步，状态更新映射由邻居状态的锥组合或凸组合到智能体特定星形边界上的径向投影构成。邻域由有向强连通图定义。本文给出了方向（归一化状态）的渐近一致性的一个充要条件。此外，若发生方向的渐近一致性，则这些方向线性收敛。本文还给出了使该条件成立的一组充分条件。

致谢

本工作部分得到由Knut and Alice Wallenberg基金会资助的Wallenberg人工智能、自主系统与软件计划（WASP）的支持，并部分得到瑞典研究理事会项目编号2019-04769的支持。

参考文献

Absil, P.A., Malick, J., 2012. 矩阵流形上的类投影回缩映射。《SIAM优化杂志》22, 135–158. Balashov, M., Kamalov, R., 2021. 流形上采用Armijo步长的梯度投影方法。《计算数学与数学物理》61, 1776–1786. Boumal, N., Absil, P.A., Cartis, C., 2019. 流形上非凸优化的全局收敛速率。《IMA数值分析杂志》39, 1–33. Cao, Y., Yu, W., Ren, W., Chen, G., 2012. 分布式多智能体协调研究近期进展综述。

智能体协调。《IEEE工业信息学汇刊》9, 427–438. De Pasquale, G., Smith, K.D., Bullo, F., Valcher, M.E., 2023. 对偶半范数、遍历系数与半收缩理论。《IEEE自动控制汇刊》69, 3040–3053. Deplano, D., Franceschelli, M., Giua, A., 2023. 非线性单调系统与多智能体网络一致性的新型稳定性条件。《IEEE自动控制汇刊》68, 7028–7040. Diaconis, P., Stroock, D., 1991. 马尔可夫链特征值的几何界。《应用概率年刊》1, 36–61. D¨orfler, F., Bullo, F., 2014. 相位振荡器复杂网络中的同步：综述。Automatica 50, 1539–1564. Garin, F., Schenato, L., 2010. 使用线性一致性算法的分布式估计与控制应用综述，载于：《网络化控制系统》。施普林格，页码75–107. Horn, R.A., Johnson, C.R., 2013. 矩阵分析。第2版，剑桥大学出版社。Jafarpour, S., Cisneros-Velarde, P., Bullo, F., 2021. 网络系统与扩散耦合振荡器的弱收缩与半收缩。《IEEE自动控制汇刊》67, 1285–1300. Jafarpour, S., Coogan, S., 2025. 多面体锥上的单调性与收缩。《IEEE自动控制汇刊》70, 1200–1207. Karimi, H., Nutini, J., Schmidt, M., 2016. Polyak–Łojasiewicz条件下梯度方法与近端梯度方法的线性收敛，载于：《数据库中的机器学习与知识发现：欧洲会议，ECML PKDD 2016》，施普林格，页码795–811. Kawano, Y., Hosoe, Y., 2025. 微分正离散时间随机系统的收缩分析。《IEEE自动控制汇刊》70, 5238–5253. Lin, Z., Francis, B., Maggiore, M., 2005. 关于多个非线性动力系统的状态一致问题。《IFAC会议论文集》38, 82–87. Markdahl, J., Thunberg, J., Gonc̃alves, J., 2017. 球面上的几乎全局一致性。《IEEE自动控制汇刊》63, 1664–1675. Markdahl, J., Thunberg, J., Gonc̃alves, J., 2020. Stiefel流形上的高维Kuramoto模型使复杂网络几乎全局同步。Automatica 113, 108736. Mesbahi, M., Egerstedt, M., 2010. 多智能体网络的图论方法。普林斯顿大学出版社。Moreau, L., 2004. 连续时间分布式一致性算法的稳定性，载于：2004年第43届IEEE决策与控制会议（CDC）（IEEE目录号04CH37601），IEEE，页码3998–4003. Nedic, A., Olshevsky, A., Shi, W., 2017. 时变图上分布式优化的几何收敛实现。《SIAM优化杂志》

27, 2597–2633。Olfati-Saber, R., 2006。多智能体动态系统的群集：算法与理论。《IEEE自动控制汇刊》51, 401–420。Olfati-Saber, R., Fax, J., Murray, R., 2007。网络化多智能体系统中的一致性与协作。《IEEE会刊》95, 215–233。Olfati-Saber, R., Murray, R.M., 2004。具有切换拓扑和时延的智能体网络中的一致性问题。《IEEE自动控制汇刊》49, 1520–1533。Ren, W., Beard, R.W., 2005。动态变化交互拓扑下多智能体系统的一致性寻求。《IEEE自动控制汇刊》50, 655–661。Ren, W., Beard, R.W., Atkins, E., 2005。多智能体协调中的一致性问题综述，载于：2005年美国控制会议论文集，IEEE。第1859–1864页。Reynolds, C.W., 1987。鸟群、兽群与鱼群：一种分布式行为模型，载于：第14届计算机图形学与交互技术年度会议论文集，第25–34页。Rudin, W., 等，1964。数学分析原理。第3卷。麦格劳-希尔，纽约。Sarlette, A., Sepulchre, R., 2009。圆周上的同步。arXiv预印本 arXiv:0901.2408。Savazzi, S., Nicoli, M., Rampa, V., 2020。协作设备的联邦学习：面向大规模物联网的一种一致性方法。《IEEE物联网期刊》7, 4641–4654。Scardovi, L., Sarlette, A., Sepulchre, R., 2007。N-环面上的同步与平衡。《系统与控制快报》56, 335–341。Schenato, L., Fiorentin, F., 2011。Average TimeSync：一种用于无线传感器网络时钟同步的基于一致性协议。《Automatica》47, 1878–1886。Scutari, G., Sun, Y., 2019。时变有向图上的分布式非凸约束优化。《数学规划》176, 497–544。Shah, S.M., 2017。多智能体网络的黎曼流形分布式优化。arXiv预印本 arXiv:1711.11196。Shi, W., Ling, Q., Wu, G., Yin, W., 2015。EXTRA：一种用于去中心化一致性优化的精确一阶算法。《SIAM优化杂志》25, 944–966。Thunberg, J., Gonc̃alves, J., Hu, X., 2016。切换拓扑下SE (3)上的一致性与编队控制。《Automatica》66, 109–121。Thunberg, J., Hu, X., Gonc̃alves, J., 2017。切换非线性系统中一致性的局部李雅普诺夫函数。《IEEE自动控制汇刊》62, 6466–6472。Thunberg, J., Markdahl, J., Gonc̃alves, J., 2018。旋转矩阵列同步的动态控制器：一种QR分解方法。《Automatica》93, 20–25。Tron, R., Afsari, B., Vidal, R., 2012a。内蕴一致性

三维特殊正交群 SO (3) 上具有几乎全局收敛性的内蕴一致性，载于：2012年IEEE第51届决策与控制会议（CDC），IEEE。第2052–2058页。Tron, R., Afsari, B., Vidal, R., 2012b。具有有界曲率流形上的黎曼一致性。《IEEE自动控制汇刊》58, 921–934。Vicsek, T., Czirok, A., Eshel, B.J., Cohen, I., Shochet, O., 1995。自驱动粒子系统中的新型相变。《物理评论快报》75, 1226。Wu, D., Rantzer, A., 2024。变化拓扑下非线性一致性的希尔伯特度量，载于：2024年欧洲控制会议（ECC），IEEE。第633–638页。Yuan, K., Ling, Q., Yin, W., 2016。论去中心化梯度下降的收敛性。《SIAM优化杂志》26, 1835–1854。