arXiv:2602.03559v1 [math.AP] 3 Feb 2026

具有孤立奇点的平面 Hartree 方程解的渐近行为

TAO FENG、MINBO YANG 和 XIANMEI ZHOU*

Abstract. 本文研究 Hartree 型方程的孤立奇点 n

$$-\Delta u(x)=\left(\frac{1}{|x|^{\alpha}}*e^{u}\right)e^{u(x)}\quad \text{in } B_1\setminus\{0\},$$

其中 $\alpha>0$, $\frac{1}{|x|^{\alpha}}*e^{u}\triangleq\int_{B_1\setminus\{0\}}\frac{e^{u}(y)}{|x-y|^{\alpha}}dy$，且穿孔球 $B_1\setminus\{0\}\subset\mathbb{R}^2$。在有限总曲率条件下，通过建立奇异解的表示公式，我们得到了原点附近解的渐近行为。我们还将这一渐近行为结果推广到具有一般非负系数 $K(x)$ 的情形，以及任意维数 $n\geq 3$ 下的高阶 Hartree 型方程。

1. 引言与主要结果

本文关注以下在原点处具有孤立奇点的平面 Hartree 型方程:

$$-\Delta u(x)=\left(\frac{1}{|x|^{\alpha}}*e^{u}\right)e^{u(x)}\quad \text{in } B_1\setminus\{0\}\subset\mathbb{R}^2, \tag{1.1}$$

其中 $\alpha>0$, $B_1\setminus\{0\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的穿孔球，卷积 $\frac{1}{|x|^{\alpha}}*e^{u}\triangleq\int_{B_1\setminus\{0\}}\frac{e^{u}(y)}{|x-y|^{\alpha}}dy$。我们主要研究有限全曲率条件下非局部方程 $u\in C^2(B_1\setminus\{0\})$ 的奇异解（1.1）

$$\int_{B_1\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{|x|^{\alpha}}*e^{u}\right)e^{u(x)}\mathrm{d}x<+\infty. \tag{1.2}$$

近年来，涉及指数非线性和/或原点处孤立奇点的椭圆方程受到广泛研究，因为它们在各种几何与物理问题中发挥着重要作用。设 (M,g) 是一个完备黎曼流形， K 是定义在 M 上的给定函数。高斯曲率问题要问的是，是否存在一个与 g 在 M 上共形的度量 g_1，使其高斯曲率为 $\frac{K}{2}$？令 $g_1=e^{u}g$，并考虑 $M=\mathbb{R}^2$ 且 g 为标准欧几里得度量、 $K\equiv 1$ 的情形，则上述问题等价于求解以下经典椭圆方程（称为指定标量曲率方程）

$$-\Delta u=e^{u}\quad \text{in } \mathbb{R}^2. \tag{1.3}$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 35A21；35B40；35J91。*Key words and phrases.* Hartree 型方程，孤立奇点，渐近行为。

*MINBO YANG 部分受到国家重点研发计划（编号：2022YFA1005700）、国家自然科学基金（12471114）和浙江省自然科学基金（LZ22A010001）的资助。*通讯作者。

利用移动平面法，所有满足有限总曲率条件 C^2 的 (1.3) 的光滑解 $\int_{\mathbb{R}^2} e^{u(x)}\mathrm{d}x < \infty$ 均由 Chen-Li 进行了分类 [9, 10]。此外，关于高阶 Q-曲率方程的整体光滑解，也有一些分类结果

$$(-\Delta)^{\frac{n}{2}} u = e^u \quad \text{in } \mathbb{R}^n \ (n \geq 3). \tag{1.4}$$

对于偶数维 n，在假设 $\int_{\mathbb{R}^n} e^{u(x)}\mathrm{d}x < \infty$ 以及衰减条件 $u(x) = o(|x|^2)$（当 $|x| \to +\infty$时）下，Lin [36], Wei 和 Xu [45] 分别对 $n = 4$和 $n = 2m$ $(m \geq 2)$建立了(1.4)的所有解$u \in C^n(\mathbb{R}^n)$的完全分类。对于一般整数 n，Chang 和 Yang [5] 对满足衰减条件$u(x) = \ln \frac{2}{1+|x|^2} + w(\zeta(x))$（当 $|x| \to +\infty$时）的方程(1.4)的 C^n 光滑解进行了分类，其中 w 是定义在单位 n-球面$\mathbb{S}^n$上的光滑函数。此外，Lin [36], Xu [46], Martinazzi [38]和 Hyder [29]得到了(1.4)的解在无穷远处的渐近行为。

值得注意的是，利用Kelvin变换，方程 (1.3) 的解在无穷远处的渐近行为，直接揭示了相应奇异问题在奇点 0 附近的渐近行为

$$-\Delta u = |x|^{-4} e^u \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

因此，我们有必要关注具有孤立奇点的奇异椭圆解的渐近行为。在过去几十年中，文献对具有孤立奇点的奇异解的渐近行为取得了若干重要成果，并受到广泛关注。注意，若 $\alpha = 0$，方程 (1.1) 可化为共形高斯曲率方程

$$-\Delta u = e^u \quad \text{in } B_1 \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^2 \tag{1.5}$$

满足有限总曲率条件

$$\int_{B_1 \setminus \{0\}} e^{u(x)}\mathrm{d}x < +\infty. \tag{1.6}$$

方程 (1.5) 源于黎曼曲面上带有锥形奇点的指定高斯曲率问题 [11]。关于方程 $u \in C^2(B_1 \setminus \{0\})$ 的局部奇异解，最早由 Chou 和 Wan 于 [13] 进行了研究。他们证明存在一个常数$b > -2$ 使得

$$u(x) = b \ln |x| + \mathcal{O}(1) \quad \text{as } |x| \to 0 \tag{1.7}$$

通过应用复分析方法。如 [13], 所述，可积条件（1.6）是 u 渐近径向的必要条件。利用渐近估计（1.7），Guo、Wan 和 Yang [27] 随后推导出了 u 在原点附近任意阶的渐近展开。

关于高阶共形Q曲率方程，也有一些结果

$$(-\Delta)^{\frac{n}{2}} u = e^u \quad \text{in } B_1 \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n \tag{1.8}$$

且满足重要条件（1.6），其中 $n \geq 3$ 是一个整数。当 $n = 4$时，在原点处再附加一个衰减条件

$$u(x) = o(|x|^{-2}) \quad \text{as } |x| \to 0, \tag{1.9}$$

Guo 和刘 [25] 建立了局部奇异解 $u \in C^4(B_1 \setminus \{0\})$ 关于 (1.8) 在原点附近的渐近行为，方法为常微分方程方法，随后将其改进为完整渐近展开，见 [26]，其中利用了球面平均和常微分方程分析。对于一般情形 $n \geq 3$，在原点附近一个弱于 (1.9) 的温和衰减假设下，即

$$\int_{B_r \setminus \{0\}} |u(x)|\mathrm{d}x = o\left(r^{n-2}\right) \quad \text{as } r \to 0,$$

Yang 和 Yang [47] 发展了一种偏微分方程方法，用以研究 (1.8) 的局部奇异解。具体而言，对于奇整数 $n \geq 3$，他们考虑方程 (1.8)，且是在分布意义下；而对于偶数维 n，解 u属于 $C^n(B_1\backslash\{0\})$。基于泊松方程孤立奇点的刻画，作者在 [47]中导出了局部奇异解的表示公式，其方程为 (1.8)，并随后建立了其渐近行为。他们还将 (1.5) 与 (1.8) 两者的渐近行为结果推广到一般孤立奇点问题

$$(-\Delta)^{\frac{n}{2}} u = K(x)e^u \quad \text{in } B_1 \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.10}$$

其中 $K(x) \in L^\infty(B_1)$ 非负。

众所周知，对于 $n \geq 3$，方程 (1.3) 和 (1.4) 的高维类比是以下高阶 Yamabe 方程

$$(-\Delta)^{\frac{m}{2}} u = u^{\frac{n+m}{n-m}} \quad \text{in } B_1 \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.11}$$

其中 $m \in (0, n)$ 是一个整数。该方程与在共形平坦的 n 维流形上寻找具有预设曲率的共形黎曼度量这一问题有关。当 $m = 2$ 时，Caffarelli、Gidas 和 Spruck [4] 采用 Alexandrov 反射技术的一种“测度论”变体，获得了二阶 Yamabe 方程局部奇异正解 $u \in C^2(B_1 \setminus \{0\})$ 的渐近对称性。随后，Li [33] 通过采用简化的移动平面法，证明了相同的结果。后续研究利用线性化 Fowler 算子的谱性质进一步改进了渐近分析，参见 [31]。当 $m \geq 2$ 是偶数整数时，Jin 和 Xiong [30]近期通过建立方程 (1.11) 解的表示公式，研究了高阶 Yamabe 方程中方程 (1.11) 奇异正解的渐近径向对称性。此外，关于 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 中方程 (1.11) 的全局奇异正解 $u \in C^m(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ 的径向对称性与分类，读者可参阅 Gidas 、 Ni 和 Nirenberg [19]， 、 Carffarelli 、 Gidas 和 Spruck [4]， 、Schoen [43]， 、Chen 和 Li [9]， 、Chen、Li 和 Ou [12]， 、Lin [36]， 、Wei 和 Xu [45]， 、Li [34] ， 以及 Du 和 Yang[15] 的相关著作。关于具有更一般奇异集的高阶 Yamabe 方程的结果，参见 [6,7,15,28,49]。此外， [2,17,24] 中还给出了高阶 Yamabe 方程 Delaunay 型解的构造。关于具有一般预设曲率函数的 Yamabe 方程 $K(x)$，请参见 [7,8,16,37,44,49]。

对临界 Hartree 型方程中孤立奇点的分析，既源于物理模型，也受到基本解析不等式的推动，参见 [35,40,41]。以下临界 Hartree 方程是一个典型例子

$$-\Delta u = (\mathcal{R}_\alpha * u^{\frac{2n-\alpha}{n-2}})u^{\frac{n+2-\alpha}{n-2}} \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.12}$$

其中 $\mathcal{R}_\alpha(x) * u^{\frac{2n-\alpha}{n-2}} := \int_\Omega \frac{u^{\frac{2n-\alpha}{n-2}}(y)}{|x-y|^\alpha}\, dy$，且 $n \geqslant 3$和 $\alpha \in (0, n)$。若 $\Omega = \mathbb{R}^n$，方程 (1.12) 的全局经典正解的完全分类已在 Miao 等人 [39], Du 和 Yang [14], Gao 等人 [18], 以及 Le [32], 的工作中建立，相关结果亦见 [22]。最近，Andrade、Feng、Piccione 和 Yang [1] 通过建立 (1.12) 正解的积分表示，研究了 (1.12) 的奇异解。一方面，当 $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 时， [1] 中的作者得到了 (1.12) 的全局正解$u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cap L^{\frac{2n-\alpha}{n+2}}(\mathbb{R}^n)$ 的径向对称性。另一方面，当 $\Omega = B_r \setminus \{0\}$ 且 $0 < r \leq \infty$ 时，他们导出了 (1.12) 的局部正解 $u \in C^2(B_r \setminus \{0\}) \cap L^{\frac{2n-\alpha}{n+2}}(B_r)$ 的渐近行为，即

$$u(x) = \mathcal{O}(|x|^{\frac{2-n}{2}}) \quad \text{as } |x| \to 0.$$

并进一步得到了 (1.12) 的奇异解在原点附近的渐近径向对称性。

上文提及的所有关于（1.12）的结果均针对 $n \geq 3$的情形。对于特殊情形 $n = 2$，在某些可积性条件下，关于相关指数非线性 Hartree 型方程的整体解 $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ 已有一些分类和渐近行为结果，参见 [21, 23, 42, 48]。然而，据我们所知，关于二维中带有孤立奇点的 Hartree 型方程（1.1）的研究结果寥寥无几。

需要指出的是，与指定标量曲率方程（1.3）不同，方程（1.1）的右端是一个非局部项。因此，在分析（ [25] 1.1）奇异解的渐近行为时，中基于常微分方程的技巧极难应用。由此自然产生一个问题：能否将基于偏微分方程的方法用于研究（1.1）？ 此外，（1.7）中的渐近行为对于（1.1）是否仍然成立? 回顾一下，本文要求 $\alpha > 0$，且有限全曲率条件（1.2）成立。受 [47], 的启发，我们为（1.1）的局部奇异解建立一个表示公式，进而推导出其在原点处的渐近行为。下面陈述我们的第一个主要结果。

定理1.1. 假设 $u \in C^2(B_1 \setminus \{0\})$ 是 (1.1) 的一个解，并且 $\alpha > 0$。若 u 满足(1.2)，则存在常数 $b > -2$ 使得

$$u(x) = v(x) + h(x) + b \ln |x| \quad for\ x \in B_1 \setminus \{0\},$$

其中 $h \in C^\infty(B_1)$ 是 $-\Delta h = 0$ 在 B_1 中的一个解，并且 v 由下式定义

$$v(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{B_1 \setminus \{0\}} \ln \frac{5}{|x-y|} \left(\frac{1}{|y|^\alpha} * e^u \right) e^{u(y)} \mathrm{d}y.$$

此外，若 $\alpha \in (0,2)$ 且 $b > \frac{\alpha-4}{2}$，则存在一个 *Hölder* 连续函数 $\varphi \in C^\gamma_{loc}(B_1)$，满足 $\gamma \in (0,1)$，使得

$$u(x) = \varphi + b \ln |x| \quad near\ the\ origin. \tag{1.13}$$

更一般地，我们将考虑如下高阶情形中的 Hartree型方程

$$(-\Delta)^{\frac{n}{2}} u(x) = \left(\frac{1}{|x|^\alpha} * e^u \right) e^{u(x)} \quad \text{in } B_1 \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.14}$$

其中 $n \geq 3$ 是一个整数。显然，方程 (1.14) 在偶数维是多调和方程，在奇数维是高阶分数阶方程。

基于对定理 1.1的证明所做的分析，我们可以再次得到 (1.14) 的奇异解的表示公式。然而，与二维情形 ($n = 2$) 相比，对于维数为 $n \geq 3$ 的高阶 Hartree 型方程，需要对 (1.14) 的解附加如下衰减条件，以消去高阶导数项:

$$\int_{B_r \setminus \{0\}} |u(x)| \mathrm{d}x = o\left(r^{n-2}\right) \quad \text{as } r \to 0. \tag{1.15}$$

我们首先考虑偶数维情形。在这种情形下，$(-\Delta)^{\frac{n}{2}}$ 的一个基本解为 $\phi(x) = c_n \ln \frac{5}{|x|}$，其中 $c_n > 0$ 是一个常数。本文的第二个结果是

定理 1.2. 假设 $n \geq 4$ 是偶数整数，且 $\alpha > 0$。令 $u \in C^n(B_1 \setminus \{0\})$ 为方程 (1.14)的解。若 u满足 (1.2)和衰减条件 (1.15)，则存在常数$b > -n$ 使得

$$u(x) = v(x) + h(x) + b \ln |x| \quad for\ x \in B_1 \setminus \{0\},$$

其中， $h \in C^\infty(B_1)$ 是方程 $(-\Delta)^{\frac{n}{2}} h = 0$ 在 B_1 中的一个解，而 v 定义为

$$v(x) = c_n \int_{B_1 \setminus \{0\}} \ln \frac{5}{|x-y|} \left(\frac{1}{|y|^\alpha} * e^u \right) e^{u(y)} \mathrm{d}y, \tag{1.16}$$

此外，若 $\alpha \in (0, n)$ 且 $b > \frac{\alpha-2n}{2}$，则存在一个 *Hölder* 连续函数 $\varphi \in C^\gamma_{loc}(B_1)$，满足 $\gamma \in (0,1)$，使得

$$u(x) = \varphi(x) + b \ln |x| \quad near\ the\ origin. \tag{1.17}$$

接下来，我们考虑奇数维情形。注意，当 $n \geq 3$ 是奇整数时，$(-\Delta)^{\frac{n}{2}}$ 是一个非局部积分算子。因此，在这一维数下，我们在分布意义下研究方程 (1.14)。

定义 1.3。设 $n \geq 3$ 为奇整数，且 $\alpha > 0$。我们称 $u \in C^n(B_1 \setminus \{0\})$ 是方程 (1.14)的一个解，如果满足以下条件：

(i) 函数 u 属于 $\mathcal{L}^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|}{1+|x|^{2n}} \mathrm{d}x < \infty \right\}$；

(ii) $\left(\frac{1}{|x|^\alpha} * e^u \right) e^{u(x)} \in L^1_{loc}(B_1 \setminus \{0\})$；

(iii) 对于任意测试函数 $\varphi \in C^\infty_c(B_1 \setminus \{0\})$，以下积分等式成立：

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x) (-\Delta)^{\frac{n}{2}} \varphi(x) \mathrm{d}x = \int_{B_1 \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{|x|^\alpha} * e^u \right) e^{u(x)} \varphi(x) \mathrm{d}x.$$

于是我们得到以下结果。

定理 1.4。假设 $n \geq 3$ 是奇数，且 $\alpha > 0$。令 $u \in \mathcal{L}^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n) \cap C^n(B_1 \setminus \{0\})$ 是方程 (1.14)的一个解，若 u 满足 (1.2) 和 (1.15)，则存在一个常数 $b > -n$ 使得

$$u(x) = v(x) + h(x) + b \ln |x| \quad for\ x \in B_1 \setminus \{0\},$$

其中 v 由 *(1.16)* 定义，且 $h \in \mathcal{L}^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(B_1)$ 是 $(-\Delta)^{\frac{n}{2}} h = 0$ 在 B_1 中的一个解。此外，若 $\alpha \in (0, n)$ 且 $b > \frac{\alpha-2n}{2}$，则存在一个 *Hölder* 连续函数 $\varphi \in C^\gamma_{loc}(B_1)$，满足 $\gamma \in (0,1)$，使得

$$u(x) = \varphi(x) + b \ln |x| \quad near\ the\ origin. \tag{1.18}$$

注 1.5（渐近行为）。对于 $\alpha \in (0, n)$ 和 $b > \frac{\alpha-2n}{2}$，我们可以描述方程 (1.1) 和 (1.14) 的解在原点处的渐近行为。事实上，根据 (1.18) 以及 $\varphi \in C^\gamma_{loc}(B_1)$，对于某个 $\gamma \in (0, 1)$，存在常数 C_1 和 C_2，使得

$$C_1 + b \ln |x| \leq u(x) \leq C_2 + b \ln |x| \quad near\ the\ origin. \tag{1.19}$$

注 1.6（b 的有效范围）。在定理 *1.1*、*1.2* 和 *1.4*中，对于 $\alpha \in (0, n)$ 和 $n \geq 2$，解仅当 (1.13)、(1.17) 以及 (1.18) 在原点附近成立时，才具有其中给出的渐近行为

$$b > \frac{\alpha - 2n}{2}.$$

更准确地说，假设 $u(x) = \varphi(x) + b \ln |x|$ 在原点附近成立，其中 $\varphi \in C^\gamma_{loc}(B_1)$ 对于某个 $0 < \gamma < 1$成立，那么 (1.19) 也成立。因此，当 $r > 0$充分小时，有

$$\int_{B_1 \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{|x|^\alpha} * e^u \right) e^{u(x)} \mathrm{d}x \geq C \int_{B_r} \left(\int_{B_r} \frac{|y|^b}{r^\alpha} \mathrm{d}y \right) |x|^b \mathrm{d}x,$$

这意味着有限总曲率条件 (1.2) 在 $b \leq \frac{\alpha-2n}{2}$ 时不成立。因此，它必定满足 $b > \frac{\alpha-2n}{2}$。

注 1.7 (一般系数 $K(x)$)。 将方程 (1.1) 和 (1.14) 替换为方程

$$-\Delta u(x)=K(x)\left(\frac{1}{|x|^{\alpha}}*e^{u}\right)e^{u(x)}\quad in\ B_1\setminus\{0\}\subset\mathbb{R}^2 \tag{1.20}$$

and

$$(-\Delta)^{\frac{n}{2}}u(x)=K(x)\left(\frac{1}{|x|^{\alpha}}*e^{u}\right)e^{u(x)}\quad in\ B_1\setminus\{0\}\subset\mathbb{R}^n,\ n\geq 3 \tag{1.21}$$

分别，其中唯一的区别是多了一个非负系数$K(x)\in L^{\infty}(B_1)$。那么，定理 *1.1*、*1.2*、*1.4* 以及注 *1.6* 在此情形下仍然成立。在这些情形中， v 的表达式变为

$$v(x)=c_n\int_{B_1\setminus\{0\}}\ln\frac{5}{|x-y|}K(y)\left(\frac{1}{|y|^{\alpha}}*e^{u}\right)e^{u(y)}\mathrm{d}y, \tag{1.22}$$

其中 $c_n>0$ 是一个常数，且$c_2=\frac{1}{2\pi}$。值得注意的是，当 $K(x)\equiv 1$时，方程(1.20)和(1.21) 分别化为原方程(1.1) 和(1.14) 。因此，在下面的证明中，我们将直接处理方程(1.20) 和(1.21)。

受 [47], 启发，我们的方法中的一个关键步骤是得到微分方程（1.20）和（1.21）的解的表示公式。这种方法不仅避免了卷积项导致基于常微分方程的技巧失效，还绕过了方程的非局部性所引发的最大值原理失效。这一思路在分析具有孤立奇点的高阶方程解的性质方面发挥着重要作用，正如 [15,30]所示。

本文组织如下。第 2 节中，我们首先推导偶数维情况下方程（1.20）和（1.21）奇异解的表示公式 $n\geq 3$，随后利用椭圆正则性理论证明定理 1.1 和定理 1.2。第 3 节中，我们推广奇数维情况下方程（1.21）解在原点处的渐近行为 $n\geq 3$，并证明定理 1.4。本文中， c、 C 将用于表示不同的常数。

2. Asymptotic behavior at isolated singularities in even dimension case

本节中，为简便起见，我们研究偶数维情况下方程（1.21）的奇异解$n\geq 2$ 。首先，在有限总曲率假设（1.2）下，我们推导出方程（1.21）解的一个关键表示公式，该公式以 v表示。随后，对于 $n=2$ 以及偶数 $n\geq 4$，我们在必要条件下验证 ¨的局部 H v older 连续性，从而得到该解在原点处的渐近行为。

2.1. 表示公式。

受 [47] 的启发，并基于泊松方程孤立奇点的刻画，我们现在给出偶数维情形下方程（1.21）的解的表示公式 $n\geq 2$。

命题 2.1 （表示公式）。 设 $n\geq 2$ 为正偶整数，且 $\alpha>0$。假设 $u\in C^n(B_1\setminus\{0\})$ 是方程 （1.21）的一个解，其中 $K\in L^{\infty}(B_1)$ 非负，且 u满足 （1.2），则存在常数 $a_\beta\in\mathbb{R}$ 使得 $|\beta|\leq n-1$，并且满足

$$u(x)=v(x)+h(x)+\sum_{|\beta|\leq n-1}a_\beta D^{\beta}\phi(x)\quad for\ x\in B_1\setminus\{0\}, \tag{2.1}$$

其中 $\phi(x)=c_n\ln\frac{5}{|x|}$ 是 $(-\Delta)^{\frac{n}{2}}$ 在 $\mathbb{R}^n$中的基本解， $h\in C^{\infty}(B_1)$ 是$(-\Delta)^{\frac{n}{2}}h=0$ 在 B_1 中的解，并且 v 由 (1.22)给出。

证明。 定义 $u^+(x):=\max\{u(x)\ 0\}$。容易验证， $u^+(x)\le e^{u(x)}$。因此，我们有

$$\begin{aligned}\int_{B_1\setminus\{0\}}K(x)\left(\frac{1}{|x|^\alpha}*e^u\right)e^{u(x)}\mathrm{d}x &\ge C\int_{B_1\setminus\{0\}}\left(\int_{B_1\setminus\{0\}}\frac{u^+(y)}{|x-y|^\alpha}\mathrm{d}y\right)u^+(x)\mathrm{d}x\\ &\ge \frac{C}{2^\alpha}\left(\int_{B_1\setminus\{0\}}u^+(x)\mathrm{d}x\right)^2.\end{aligned}$$

这与（1.2）一起意味着

$$\int_{B_1\setminus\{0\}}u^+(x)\mathrm{d}x<+\infty.$$

应用 [47,定理 1。4] 中的结果， $s=0$我们便完成了此命题的证明。 □

2.2. **二维情形**。 对于情形 $n=2$， $-\Delta$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中的基本解为$\phi(x)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{5}{|x|}$。我们将给出方程（1.20）−解的如下具体表示。

引理 2.2。 设 $\alpha>0$。假设 $u\in C^2(B_1\setminus\{0\})$ 是(1.20) 的一个解，满足条件(1.2)，且 $K\in L^\infty(B_1)$ 非负。则 u 可分解为

$$u(x)=v(x)+h(x)+a_0\phi(x)\quad for\ x\in B_1\setminus\{0\},$$

其中 v 由(1.22)给出， $h\in C^\infty(B_1)$ 是 B_1 中的调和函数，满足 $-\Delta h=0$，且常数 a_0 满足约束条件 $a_0<4\pi$。

证明。 利用命题 2.1 和 $n=2$，我们得到

$$u(x)=v(x)+h(x)+\sum_{|\beta|\le1}a_\beta D^\beta\phi(x)\quad \text{for } x\in B_1\setminus\{0\},\tag{2.2}$$

其中 v 由式（1.22）给出。我们将证明 $a_\beta=0$ 对 $|\beta|=1$成立。由式（1.2）和式（2.2），我们得到

$$\int_{B_{\frac12}\setminus\{0\}}\left(\int_{B_{\frac12}\setminus\{0\}}\frac{e^{v(y)}e^{h(y)}e^{\sum_{|\beta|\le1}a_\beta D^\beta\phi(y)}}{|x-y|^\alpha}\mathrm{d}y\right)e^{v(x)}e^{h(x)}e^{\sum_{|\beta|\le1}a_\beta D^\beta\phi(x)}\mathrm{d}x<+\infty.\tag{2.3}$$

由于 $h\in C^\infty$（B_1(0)），我们得到 $C_1<e^h<C_2$ 在 $B_{1/2}$ 中，其中 C_1、$C_2>0$是两个常数。由 K的非负性可知， $e^v\ge1$ 在 $B_{1/2}\setminus\{0\}$中。对于 x， $y\in B_{1/2}$，我们有$\frac{1}{|x-y|^\alpha}\ge1$。因此，由式（2.3），可得

$$\int_{B_{\frac12}\setminus\{0\}}e^{\sum_{|\beta|\le1}a_\beta D^\beta\phi(x)}\mathrm{d}x<+\infty.$$

注意， $D^{(i,j)}\phi$ 表示对 ϕ关于 x_1 求 i 次导数，并关于 x_2求 j 次导数。因此，根据 $-\Delta$ 在 $\mathbb{R}^2$中的基本解表达式，我们得到

$$\int_{B_{\frac12}\setminus\{0\}}e^{a_0\frac{1}{2\pi}\ln\frac{5}{|x|}+a_{(1,0)}\left(-\frac{x_1}{2\pi|x|^2}\right)+a_{(0,1)}\left(-\frac{x_2}{2\pi|x|^2}\right)}\mathrm{d}x<+\infty.\tag{2.4}$$

考虑极坐标

$$\begin{cases}x_1=r\cos\theta,\\ x_2=r\sin\theta,\end{cases}\qquad 0\le r<1,\ -\pi\le\theta\le\pi.$$

现在，我们证明若 $a_{(0,1)} \leq 0$，则 $a_{(1,0)} = 0$。设

$$D_1 = \left\{ (x_1, x_2) \in B_{1/2} \setminus \{0\} \middle| 0 \leq r < \frac{1}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}.$$

由（2.4），可得

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{5}{r}\right)^{\frac{1}{2\pi}a_0} e^{\frac{1}{2\pi}\left[a_{(1,0)}\left(-\frac{\cos\theta}{r}\right)+a_{(0,1)}\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)\right]} r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r < \infty.$$

由于 $a_{(0,1)} \leq 0$ 和 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$，我们得到

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{5}{r}\right)^{\frac{1}{2\pi}a_0} e^{\frac{1}{2\pi}\left[a_{(1,0)}\left(-\frac{\cos\theta}{r}\right)\right]} r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r < \infty.$$

利用 D_1 中的 $\cos\theta \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 以及以下等式

$$\int_0^{\frac{1}{2}} r^a e^{\frac{b}{r}} \mathrm{d}r = +\infty \quad \forall a \in \mathbb{R}, b > 0,$$

我们有 $a_{(1,0)} \geq 0$。另一方面，令

$$D_2 = \left\{ (x_1, x_2) \in B_{1/2} \setminus \{0\} \middle| 0 \leq r < \frac{1}{2}, \frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \pi \right\}.$$

那么我们也可以得到 $a_{(1,0)} \leq 0$。因此，若 $a_{(0,1)} \leq 0$ 成立，则 $a_{(1,0)} = 0$ 也成立。类似地，若 $a_{(0,1)} \geq 0$，通过分析中的积分，我们也可以推得 $a_{(1,0)} = 0$

$$D_3 = \left\{ (x_1, x_2) \in B_{1/2} \setminus \{0\} \middle| 0 \leq r < \frac{1}{2}, -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq 0 \right\}$$

and

$$D_4 = \left\{ (x_1, x_2) \in B_{1/2} \setminus \{0\} \middle| 0 \leq r < \frac{1}{2}, -\pi \leq \theta \leq -\frac{3\pi}{4} \right\}.$$

因此，我们得到 $a_{(1,0)} = 0$。此外，我们还可以得到 $a_{(0,1)} = 0$。

结合（2.4），我们有

$$\int_{B_{\frac{1}{2}} \setminus \{0\}} \left(\frac{5}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right)^{\frac{1}{2\pi}a_0} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 < \infty,$$

由此可得 $a_0 < 4\pi$。 □

接下来，我们证明定理 1.1。我们证明 ¨ 的局部 Hlder 连续性 v，由此可得 u在原点处的渐近行为。

定理 *1.1* 的证明。 由于 $a_0 < 4\pi$ 和 $a_0\phi(x) = \frac{1}{2\pi}a_0(\ln 5 - \ln|x|)$，由引理 2.2，存在一个常数 $b := -\frac{1}{2\pi}a_0 > -2$，使得 u 满足

$$u(x) = v(x) + h(x) + b\ln|x| \quad \text{for } x \in B_1 \setminus \{0\}, \tag{2.5}$$

其中 v 由（1.22）给出，且 $h \in C^\infty$（B_1）是 B_1中的调和函数。这里 h 通过吸收常数 $-b\ln 5$ 进行了重新定义。我们将证明，若 $\alpha \in$（0，2）且 $b > \frac{\alpha-4}{2}$，则 $v \in C^\gamma_{loc}$（B_1）

对于某个 $0<\gamma<1$。根据（2.5），我们知道 v 是以下方程的非负解

$$\begin{aligned}-\Delta v(x)&=K(x)\left(\frac{1}{|x|^{\alpha}}*e^{u}\right)e^{u(x)}\\&=K(x)\left(\int_{B_1\setminus\{0\}}\frac{e^{v(y)}e^{h(y)}|y|^{b}}{|x-y|^{\alpha}}\mathrm{d}y\right)e^{v(x)}e^{h(x)}|x|^{b}\quad\text{in } B_1\end{aligned}$$

在分布的意义下。根据 $K\in L^{\infty}(B_1)$ 和 (1.2)，我们有

$$\int_{B_1\setminus\{0\}}K(x)\left(\int_{B_1\setminus\{0\}}\frac{e^{v(y)}e^{h(y)}|y|^{b}}{|x-y|^{\alpha}}\mathrm{d}y\right)e^{v(x)}e^{h(x)}|x|^{b}\mathrm{d}x<\infty.$$

我们声称，对于某个 $p_0>1$，$K(x)\left(\frac{1}{|x|^{\alpha}}*e^{u}\right)e^{u(x)}\in L^{p_0}_{loc}(B_1)$。事实上，我们固定任意的 $r\in(0,1)$。为方便起见，定义 $f(x):=e^{u(x)}=|x|^{b}e^{h(x)}e^{v(x)}$ 和 $g_r(x):=\int_{B_r\setminus\{0\}}\frac{f(y)}{|x-y|^{\alpha}}\mathrm{d}y$。我们将 $K(x)\left(\frac{1}{|x|^{\alpha}}*e^{u}\right)e^{u(x)}$ 分为两部分：

$$\begin{aligned}K(x)\left(\frac{1}{|x|^{\alpha}}*e^{u}\right)e^{u(x)}=&K(x)g_r(x)f(x)+K(x)\left(\int_{B_{r_1}\setminus B_r}\frac{e^{u(y)}}{|x-y|^{\alpha}}\mathrm{d}y\right)f(x)\\&+K(x)\left(\int_{B_1\setminus B_{r_1}}\frac{e^{u(y)}}{|x-y|^{\alpha}}\mathrm{d}y\right)f(x)\\:=&\mathcal{I}_1(x)+\mathcal{I}_2(x)+\mathcal{I}_3(x)\quad\text{in } B_r,\end{aligned}$$

其中我们选取满足 $r<r_1<1$ 的 r_1。

对于 $\mathcal{I}_1$，根据 [3, 推论 1 和备注 2]，，我们知道 $e^{v}\in L^{p}(B_r)$ 对每个$p>0$都成立。由于 $b>-2$，存在 $p_f>1$，使得 $bp_f>-2$，因此 $|x|^{b}\in L^{p_f}(B_r)$。我们考虑两种情况：

(i) $b\geq 0$；(ii) $-2<b<0$。

对于情形 (i)，我们可以任选实数 $p_f>1$，使得 $|x|^{b}\in L^{p_f}(B_r)$。因此，对于任意 $q>1$，都有$f\in L^{q}(B_r)$。由于 $0<\alpha<2$，由 Hardy–Littlewood–Sobolev 不等式可知，存在某个 $q_1>1$，使得 $g_r\in L^{q_1}(B_r)$，进而有 $\mathcal{I}_1(x)\in L^{q_1}(B_r)$。

对于情形 (ii)，由 H¨older 不等式，我们可以选取某个 p_1，满足 $1<p_1<\min\{\frac{2}{2-\alpha},-\frac{2}{b}\}$，使得 $|x|^{b}\in L^{p_1}(B_r)$ 且 $f\in L^{p_1}(B_r)$。结合所选的 p_1应用 Hardy–Littlewood–Sobolev 不等式，可得存在满足下式的 $t>1$

$$\frac{1}{t}=\frac{1}{p_1}+\frac{\alpha}{2}-1,\tag{2.6}$$

使得

$$\|g_r\|_{L^{t}(B_r)}\leq C\|f\|_{L^{p_1}(B_r)}\tag{2.7}$$

其中某个常数为 $C>0$。接下来，我们考虑以下两种情况：

(a) $-\frac{2}{b}\geq\frac{2}{2-\alpha}$，即 $\alpha-2\leq b<0$；

(b) $-\frac{2}{b}<\frac{2}{2-\alpha}$，即 $-2<b<\alpha-2$。

对于情形 (a)，我们有 $1<p_1<\frac{2}{2-\alpha}$。因此，结合 (2.6)，可知 $0<\frac{1}{t}<\frac{\alpha}{2}$。通过直接计算，对于每个固定的 b，存在一个实数 s 使得 $\frac{t}{t-1}<s<-\frac{2}{b}$ 当 t充分大时，且 $|x|^{b}\in L^{s}(B_r)$ 以及 $f\in L^{s}(B_r)$。结合 (2.7)，可以

找到一些满足 $\frac{1}{s}+\frac{1}{t}=\frac{1}{q_2}$ 的 $q_2>1$，从而

$$\int_{B_r\setminus\{0\}}|f(x)g_r(x)|^{q_2}\,\mathrm{d}x\le\int_{B_r\setminus\{0\}}|f(x)|^{q_2}\,|g_r(x)|^{q_2}\,\mathrm{d}x\le\|f^{q_2}\|_{\frac{s}{q_2}}\|(g_r)^{q_2}\|_{\frac{t}{q_2}}<\infty,$$

其中我们使用了 Hölder 不等式。因此，由此可得

$$\mathcal{I}_1(x)\in L^{q_2}(B_r).$$

对于情形 (b)，我们有 $1<p_1<\frac{2}{b}$。在假设 $0<\alpha<2$ 与 $b>\frac{\alpha-4}{2}$ 下，我们得到 $\frac{\alpha-4}{2}<b<\alpha-2$ 与 $\frac{-b+\alpha-2}{2}<\frac{1}{t}<\frac{\alpha}{2}$。因此，对每个固定的 b，我们也可以找到一个满足 $\frac{t}{t-1}<s<-\frac{2}{b}$ 的实数 s，使得 $|x|^b\in L^s(B_r)$ 且 $f\in L^s(B_r)$。采用与情形 (a) 中类似的方法，我们得出存在某个满足 $\frac{1}{s}+\frac{1}{t}=\frac{1}{q_3}$ 的 $q_3>1$，使得

$$\mathcal{I}_1(x)\in L^{q_3}(B_r).$$

对于 $\mathcal{I}_2$，由 u 在 $B_{r_1}\setminus\{0\}$ 中的正则性可知，存在常数 $M>0$，使得 $u<M$ 在 $B_{r_1}\setminus B_r$ 中成立。因此，我们有如下估计

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_2(x)&\le C\left(\int_{B_{r_1}\setminus B_r}\frac{e^M}{|x-y|^\alpha}\mathrm{d}y\right)f(x)\\&\le C\left(\int_{B_2}\frac{1}{|y|^\alpha}\mathrm{d}y\right)f(x)\\&\le Cf(x)\quad\text{for } x\in B_r.\end{aligned}$$

通过对 $\mathcal{I}_1$ 进行分析时采用的类似论证，我们知道存在某个 $q_4=p_1>1$，使得 $\mathcal{I}_2\in L^{q_4}(B_r)$。

对于 $\mathcal{I}_3$，根据假设（1.2）和 $\alpha\in(0,\ n)$，我们有

$$\left(\int_{B_1\setminus\{0\}}e^{u(x)}\mathrm{d}x\right)^2\le 2^\alpha\int_{B_1\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{|x|^\alpha}*e^u\right)e^{u(x)}\mathrm{d}x<\infty,$$

这意味着 $e^u\in L^1(B_1\setminus\{0\})$。对于 $x\in B_r$ 和 $y\in B_1\setminus B_{r_1}$，我们注意到

$$|x-y|\ge|y|-|x|\ge r_1-r>0.$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_3(x)&\le C\left(\int_{B_1\setminus B_{r_1}}\frac{e^{u(y)}}{|x-y|^\alpha}\mathrm{d}y\right)f(x)\\&\le C\,(r_1-r)^{-\alpha}\left(\int_{B_1\setminus B_{r_1}}e^{u(y)}\mathrm{d}y\right)f(x)\\&\le Cf(x)\quad\text{for } x\in B_r.\end{aligned}$$

通过与 $\mathcal{I}_1$ 类似的论证，我们有 $\mathcal{I}_3\in L^{q_4}(B_r)$。

综上所述，对于 $\alpha\in(0,2)$ 和 $b>\frac{\alpha-4}{2}$，我们可以选取 $p_0=\min\{q_1,q_2,q_3,q_4\}$，则 $K(x)\left(\frac{1}{|x|^\alpha}*e^u\right)e^{u(x)}\in L^{p_0}(B_r)$。由于 $r\in(0,1)$ 是任意的，我们推出

$$K(x)\left(\frac{1}{|x|^\alpha}*e^u\right)e^{u(x)}\in L^{p_0}_{loc}(B_1)\quad\text{for some } p_0>1.$$

应用标准的 $W^{2,p}$ 椭圆正则性理论（见 [20]）直接得到改进的正则性 $v \in W^{2,p_0}_{loc}(B_1)$。随后由Sobolev嵌入定理可知， v 是局部H¨older连续的，即对某个 $\gamma \in (0,1)$，有 $v \in C^{\gamma}_{loc}(B_1)$。□

2.3. **偶数维情形**（$n \geq 4$）。本小节沿用二维情形中的类似详细分析，研究偶数维 $n \geq 4$下的Hartree型方程（1.21）。相应的多调和方程涉及高阶奇异性，因此带来了诸多新的挑战。因此，我们需要在原点附近附加衰减条件（1.15）。在有限总曲率假设（1.2）和条件（1.15）下，我们还推导出偶数维情形下方程（1.21）解的表示公式，并进一步研究这些解在原点附近的渐近行为。

若 $n \geq 4$是偶数，则 $(-\Delta)^{\frac{n}{2}}$的一个基本解为 $\phi(x) = c_n \ln \frac{5}{|x|}$，其中 $c_n > 0$为常数。于是我们有

引理2.3。设 $n \geq 4$ 为偶数整数，且 $\alpha > 0$。假设 $u \in C^n(B_1 \setminus \{0\})$ 是（1.21）的一个解，满足条件（1.2）和（1.15），且$K \in L^{\infty}(B_1)$ 非负。则u可分解为

$$u(x) = v(x) + h(x) + a_0\phi(x) \quad for\ x \in B_1 \setminus \{0\}, \tag{2.8}$$

其中 v 由下式定义：(1.22)。函数 $h \in C^{\infty}(B_1)$ 是 B_1 中的多调和函数，满足$(-\Delta)^{\frac{n}{2}} h = 0$，且常数 a_0满足约束条件 $a_0 < \frac{n}{c_n}$。

证明。若 u 是（1.21）的解，且 $K \in L^{\infty}(B_1)$，则由命题 2.1 以及 $s = 0$ 可得如下分解：

$$u(x) = v(x) + h(x) + \sum_{|\beta| \leq n-1} a_\beta D^\beta \phi(x) \quad \text{for } x \in B_1 \setminus \{0\}, \tag{2.9}$$

其中 v 由（1.22）给出，且 $h \in C^{\infty}(B_1)$ 是 $(-\Delta)^{\frac{n}{2}} h = 0$ 在 B_1中的一个解。接下来我们将证明 $\sum_{1 \leq |\beta| \leq n-1} a_\beta D^\beta \phi(x) \equiv 0$。证明分为两步。

步骤 1。我们证明，与 $2 \leq |\beta| \leq n-1$ 阶导数对应的所有系数都必须为零。

由 Fubini定理和条件（1.2），可得

$$\begin{aligned}
\int_{B_r} v(x)\mathrm{d}x &\leq C \int_{B_r} \left[\int_{B_1} \ln \frac{5}{|x-y|} K(y) \left(\frac{1}{|y|^\alpha} * e^u \right) e^{u(y)} \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \\
&\leq C \int_{B_1} \left(\int_{B_r} \ln \frac{5}{|x-y|} \mathrm{d}x \right) K(y) \left(\frac{1}{|y|^\alpha} * e^u \right) e^{u(y)} \mathrm{d}y \\
&\leq C r^n \ln \frac{1}{r} \int_{B_1} K(y) \left(\frac{1}{|y|^\alpha} * e^u \right) e^{u(y)} \mathrm{d}y \\
&\leq C r^n \ln \frac{1}{r}, \qquad \text{for } 0 < r < \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

将此结果与（1.15）及（2.9）结合，可得

$$\int_{B_r} \left| \sum_{|\beta| \leq n-1} a_\beta D^\beta \phi(x) \right| \mathrm{d}x = o(1) r^{n-2} \quad \text{as } r \to 0. \tag{2.10}$$

对于最高阶导数 $|\beta| = n-1$，我们将它们分组如下

$$\sum_{|\beta| = n-1} a_\beta D^\beta \phi(x) = \frac{P_{n-1}(x)}{|x|^{2n-2}}, \tag{2.11}$$

其中 $P_{n-1}(x)$ 是一个次数为 $n-1$ 的齐次多项式。通过映射 $\theta \mapsto P_{n-1}(\theta)$ 将 P_{n-1} 限制到单位球面$\mathbb{S}^{n-1}$ 上。该限制函数在紧集 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上连续。我们断言 $P_{n-1} \equiv 0$。事实上，若 $P_{n-1} \not\equiv 0$，则至少存在一点 $\theta_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$，使得 $P_{n-1}(\theta_0) > 0$。令 $d_0 = \frac{1}{2}P_{n-1}(\theta_0)$。因此，由连续性可知，存在 θ_0 的一个测地球邻域 $U_0 \subset \mathbb{S}^{n-1}$，使得对所有 $\theta \in U_0$，都有 $|P_{n-1}| \geq d_0 > 0$。使用满足 $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ 的极坐标$x = \rho\theta$，体积元变为

$$\mathrm{d}x = \rho^{n-1}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta.$$

根据齐次性，对于 $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ 和 $\rho > 0$，我们有

$$P_{n-1}(x) = \rho^{n-1}P_{n-1}(\theta).$$

现在，定义区域 $V_r = [0, r] \times U_0$。于是，

$$\int_{V_r} \left| \sum_{|\beta|=n-1} a_\beta D^\beta \phi(x) \right| \mathrm{d}x = \int_{U_0} |P_{n-1}(\theta)| \, \mathrm{d}\theta \int_0^r \mathrm{d}\rho \geq d_1 r$$

对于某个常数 $d_1 > 0$。另一方面，直接计算可得

$$\int_{B_r} \left| \sum_{|\beta|\leq n-2} a_\beta D^\beta \phi(x) \right| \mathrm{d}x \leq C \int_{B_r} |x|^{-n+2} \mathrm{d}x \leq Cr^2.$$

因此，结合这两个估计，我们有

$$\begin{aligned}
\int_{V_r} \left| \sum_{|\beta|\leq n-1} a_\beta D^\beta \phi(x) \right| \mathrm{d}x &\geq \int_{V_r} \left| \sum_{|\beta|=n-1} a_\beta D^\beta \phi(x) \right| \mathrm{d}x - \int_{V_r} \left| \sum_{|\beta|\leq n-2} a_\beta D^\beta \phi(x) \right| \mathrm{d}x \\
&\geq \int_{V_r} \left| \sum_{|\beta|=n-1} a_\beta D^\beta \phi(x) \right| \mathrm{d}x - \int_{B_r} \left| \sum_{|\beta|\leq n-2} a_\beta D^\beta \phi(x) \right| \mathrm{d}x \\
&\geq d_1 r - Cr^2 \\
&\geq \frac{d_1}{2} r \quad \text{for small } r > 0.
\end{aligned}$$

这与（2.10）矛盾。因此，我们得出 $P_{n-1} \equiv 0$，这意味着

$$\sum_{|\beta|=n-1} a_\beta D^\beta \phi(x) = 0.$$

通过重复这一过程，我们得出

$$\sum_{|\beta|=j} a_\beta D^\beta \phi(x) = 0,$$

对每个指标 $2 \leq j \leq n-2$ 均成立。

步骤 2. 我们证明 $\sum_{|\beta|=1} a_\beta D^\beta \phi(x) = 0$ 和 $a_0 < \frac{n}{c_n}$。 —

由（1.2）、（2.9）以及步骤 1 中的结果可得

$$\int_{B_{\frac{1}{2}}\setminus\{0\}} \left(\int_{B_{\frac{1}{2}}\setminus\{0\}} \frac{e^{v(y)} e^{h(y)} e^{\sum_{|\beta|\leq 1} a_\beta D^\beta \phi(y)}}{|x-y|^\alpha} \mathrm{d}y \right) e^{v(x)} e^{h(x)} e^{\sum_{|\beta|\leq 1} a_\beta D^\beta \phi(x)} \mathrm{d}x < +\infty. \tag{2.12}$$

为了利用这一点，我们首先注意到 $h \in C^\infty(B_1(0))$蕴含 $C_1 < e^h < C_2$ 属于 $B_{1/2}$，其中有两个常数 $C_1, C_2 > 0$。由 K的非负性，$e^v \geq 1$ 属于 $B_{1/2} \setminus \{0\}$。对于 $x, y \in B_{1/2}$，核

满足$\frac{1}{|x-y|^{\alpha}} \geq 1$。结合这些界与（2.12），我们得到涉及剩余指数项的积分的有限性:

$$\int_{B_{\frac{1}{2}}\setminus\{0\}} e^{\sum_{|\beta|\leq 1} a_\beta D^\beta \phi(x)} \mathrm{d}x < +\infty.$$

也就是说,

$$\int_{B_{\frac{1}{2}}\setminus\{0\}} \left(\frac{5}{|x|}\right)^{c_n a_0} e^{-c_n \sum_{i=1}^n a_i \frac{x_i}{|x|^2}} \mathrm{d}x < +\infty, \tag{2.13}$$

其中 $a_i = a(0,\cdots,1,\cdots,0)$. 采用与证明定理 1.1时类似的论证，可得 $a_i = 0$ 对每个 $i = 1, 2, \cdots, n$，因此 $\sum_{|\beta|=1} a_\beta D^\beta \phi(x) = 0$。由式（2.13）可得

$$\int_{B_{\frac{1}{2}}\setminus\{0\}} \left(\frac{5}{|x|}\right)^{c_n a_0} \mathrm{d}x < +\infty,$$

这意味着 $c_n a_0 < n$。证明完毕。 □

现在，我们讨论 v 的正则性。在此之前，我们需要以下引理来估计 v。

引理2.4（对数势的指数可积性）。设 $F \geq 0$ 且 $F \in L^1(B_1)$。定义

$$v(x) = \int_{B_1} K(x,y)F(y)\mathrm{d}y, \quad in\ B_1 \subset \mathbb{R}^n,$$

其中核 K 满足

$$|K(x,y)| \leq C_1\big(1 + |\ln|x-y||\big), \quad x, y \in B_1, \tag{2.14}$$

对于某个常数 $C_1 > 0$。于是，对于任意 $p > 1$，我们有

$$e^{pv} \in L^1(B_1).$$

注 2.5。引理 *2.4* 不要求 F 处处有限。任意非负的 $F \in L^1(B_1)$都是允许的，即使 F 具有孤立奇点。由于 F 是可积的，势

$$v(x) = \int_{B_1} K(x,y)F(y)\mathrm{d}y$$

在 B_1 中几乎处处有良好定义，这足以得到 $e^{pv} \in L^1(B_1)$。

证明。由于 $F \geq 0$ 和 $F \in L^1(B_1)$，对于任意 $\varepsilon > 0$，我们可以选取 $\lambda > 0$ 使得截断

$$F_1 = F\chi_{\{F<\lambda\}} \qquad \text{and} \qquad F_2 = F\chi_{\{F\geq\lambda\}}$$

满足 ying $F_1 \in L^\infty(B_1)$ 和 $\|F_2\|_{L^1(B_1)} < \varepsilon$，其中截断函数 χ_Ω 定义为

$$\chi_\Omega = \begin{cases} 1, & \text{in } \Omega, \\ 0, & \text{in } \Omega^c. \end{cases}$$

因此，对于任意固定的 $p > 1$，存在 $\lambda_p > 0$使得 $F_1 \in L^\infty(B_1)$且$\|F_2\|_{L^1(B_1)} < \frac{n}{2pC_1}$。于是，函数 v 可分解为$v = v_1 + v_2$，其中

$$v_i(x) = \int_{B_1} K(x,y)F_i(y)\mathrm{d}y \qquad i = 1, 2.$$

由 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned}\|v_1\|_{L^\infty(B_1)} &\le \|K(x,y)\|_{L^1(B_1)}\|F_1\|_{L^\infty(B_1)}\\ &\le C_1\|F_1\|_{L^\infty(B_1)}\int_{B_2}(1+|\ln|y||)\,\mathrm{d}y\\ &< \infty,\end{aligned}$$

这意味着 $e^{pv_1}\in L^1(B_1)$。另一方面，利用 (2.14) 和 Jensen不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{B_1} e^{p|v_2(x)|}\mathrm{d}x &\le \int_{B_1} e^{pC_1\int_{B_1}(1+|\ln|x-y||)F_2(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}x\\ &\le C\int_{B_1} e^{pC_1\|F_2\|_1\int_{B_1}\left(|\ln|x-y||\frac{F_2(y)}{\|F_2\|_1}\right)\mathrm{d}y}\mathrm{d}x\\ &\le C\int_{B_1}\int_{B_1}\left(e^{|\ln|x-y||}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{F_2(y)}{\|F_2\|_1}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\ &\le C\int_{B_1}\left(\frac{1}{|y|}\right)^{\frac{n}{2}}\mathrm{d}y + C\int_{B_2\setminus B_1}|y|^{\frac{n}{2}}\mathrm{d}y\\ &< \infty.\end{aligned}$$

因此，我们得出对于任意 $p>1$, $e^{pv}\in L^1(B_1)$，结论成立。证明完毕。 □

现在我们开始证明定理 1.2。

定理 *1.2* 的证明。 我们定义

$$b := -c_n a_0 > -n.$$

由于 $a_0\phi(x) = -b\ln 5 + b\ln|x|$，根据引理 2.3，我们得到

$$u(x) = v(x) + h(x) + b\ln|x|. \tag{2.15}$$

由 v 给出（1.22），且 $h\in C^\infty(B_1)$ 是 $(-\Delta)^{\frac{n}{2}}h = 0$ 在 B_1中的一个解，其中我们将常数 $-b\ln 5$ 吸收到调和函数 h中。因此，我们知道 v 是一个非负解，满足

$$(-\Delta)^{\frac{n}{2}}v = K(x)\left(\frac{1}{|x|^\alpha}*e^u\right)e^{u(x)} \quad \text{in } B_1$$

在分布意义下。利用 $K\in L^\infty(B_1)$ 和假设（1.2），可得

$$\int_{B_1\setminus\{0\}} K(x)\left(\frac{1}{|x|^\alpha}*e^u\right)e^{u(x)}\mathrm{d}x < +\infty.$$

由于 $c_n\ln\frac{5}{|x-y|}$满足（2.14），因此由引理2.4 和注2.5，可得 $e^v\in L^p(B_1)$，对任意$p>1$。

接下来，我们将证明存在某个 $v\in C^\gamma_{loc}(B_1)$。由 (1.21) 和 (2.15)，我们知道v 是以下方程的非负解

$$\begin{aligned}(-\Delta)^{\frac{n}{2}}v(x) &= K(x)\left(\frac{1}{|x|^\alpha}*e^u\right)e^{u(x)}\\ &= K(x)\left(\int_{B_1\setminus\{0\}}\frac{e^{v(y)}e^{h(y)}|y|^b}{|x-y|^\alpha}\mathrm{d}y\right)e^{v(x)}e^{h(x)}|x|^b \quad \text{in } B_1\end{aligned}$$

在分布意义下。按照与定理 1.1 的证明类似的方法可得，在满足 $\alpha \in (0,n)$ 且 $b > \frac{\alpha-2n}{2}$ 的条件下，可推出

$$K(x)\left(\int_{B_1\setminus\{0\}} \frac{e^{v(y)}e^{h(y)}|y|^b}{|x-y|^\alpha}\mathrm{d}y\right)e^{v(x)}e^{h(x)}|x|^b \in L^{p_0}(B_1)$$

对于某个 $p_0 > 1$。随后应用标准的 $W^{n,\,p}$ 椭圆正则性理论可得$v \in W^{n,\,p_0}_{loc}(B_1)$。由此，再根据 Sobolev 嵌入定理可知 $v \in C^{\gamma}_{loc}(B_1)$，其中 $0<\gamma<1$。因此，由 (2.15) 可得

$$u(x) = \varphi(x) + b\ln|x| \quad \text{in } B_1\setminus\{0\},$$

其中 $\varphi := v + h \in C^{\gamma}_{loc}(B_1)$，对于某个 $0<\gamma<1$。证明至此完成。 □

3. Asymptotic behavior at isolated singularities in odd dimension case

本节中，我们研究奇数维 $n \geq 3$下 Hartree型方程 $(-\Delta)^{\frac{n}{2}}$ 的孤立奇点问题。此时，算子 ($u \in \mathcal{L}^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$ 是一个非局部算子，我们主要考虑空间 $u \in \mathcal{L}^{\frac{n}{2}}(\bar{\mathbb{R}}^n)$ 中定义的分布解。在有限总曲率条件 (1.2) 和衰减条件 (1.15) 下，我们还证明了原点附近的渐近行为与偶数维情形中的形式相同。下面的引理给出了奇数维下方程 (1.21) 解的相应表示公式。

引理3.1。 设 $n \geq 3$ 为奇整数，且 $\alpha > 0$。假设 $u \in \mathcal{L}^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n) \cap C^n(B_1\setminus\{0\})$ 是 (1.21) 的一个解，满足条件 (1.2) 和 (1.15)，且 $K \in L^\infty(B_1)$ 非负。那么u可分解为

$$u(x) = v(x) + h(x) + b\ln|x| \quad \textit{for } x \in B_1\setminus\{0\},$$

其中 v 由 (1.22)定义， $h \in C^\infty(B_1)$ 是 B_1 中的一个多调和函数，满足 $(-\Delta)^{\frac{n}{2}}h = 0$，且常数 b 满足 $b > -n$。

证明。 设 v如（1.22）所定义。标准的势估计表明 $v \in \mathcal{L}^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$，并且

$$(-\Delta)^{\frac{n}{2}}v(x) = K(x)\left(\frac{1}{|x|^\alpha} * e^u\right)e^{u(x)} \qquad \text{in } \mathcal{D}'(B_1).$$

令 $w = u - v$。则

$$(-\Delta)^{\frac{n}{2}}w = 0 \qquad \text{in } B_1\setminus\{0\}.$$

因此，对于任意 $\psi \in C^\infty_c(B_1\setminus\{0\})$，有

$$\langle(-\Delta)^{\frac{n}{2}}w, \psi\rangle = 0,$$

这意味着

$$\operatorname{supp}\big((-\Delta)^{\frac{n}{2}}w\big) \subset \{0\}.$$

根据Schwartz经典结构定理，我们知道

$$(-\Delta)^{\frac{n}{2}}w = \sum_{|\beta|\leq M} a_\beta D^\beta\delta_0, \qquad a_\beta \in \mathbb{R}.$$

利用 $(-\Delta)^{\frac{n}{2}}\phi = \delta_0$，我们有

$$w(x) = h(x) + \sum_{|\beta|\leq M} a_\beta D^\beta\phi(x),$$

其中 h满足 $(-\Delta)^{\frac{n}{2}}h = 0$在 B_1中，且 $\phi(x) = c_n\ln\frac{5}{|x|}$是 $(-\Delta)^{\frac{n}{2}}$的基本解。由椭圆正则性可知 $h \in C^\infty(B_1)$。由于 u， v， $h \in L^1_{\mathrm{loc}}(B_1)$ 和 $D^\beta\phi(x) \sim |x|^{-|\beta|}$，

0 附近的局部可积性要求 $|\beta| < n$。因此，当 $|\beta| \geq n$时， $a_\beta = 0$，且 $M \leq n-1$。由此我们得出

$$u(x) = v(x) + h(x) + \sum_{|\beta| \leq n-1} a_\beta D^\beta \phi(x) \quad \text{for } x \in B_1 \setminus \{0\}.$$

仿照引理2.3的证明进行论证，可得

$$u(x) = v(x) + h(x) + b \ln |x| \quad \text{for } x \in B_1 \setminus \{0\},$$

其中， $b > -n$ 和 h 已通过将一个常数吸收到调和部分中重新定义。 □

现在我们讨论 v 的正则性，并证明定理1.4。

定理*1.4*的证明。由于 $c_n \ln \frac{5}{|x-y|}$ 满足（2.14），根据引理2.4 和注2.5，可得 $e^{pv} \in L^1(B_1)$，其中 $p > 1$。由（1.21）以及 u的表达式可知 v 是以下方程的非负解

$$\begin{aligned}(-\Delta)^{\frac{n}{2}} v(x) &= K(x) \left(\frac{1}{|x|^\alpha} * e^u \right) e^{u(x)} \\ &= K(x) \left(\int_{B_1 \setminus \{0\}} \frac{e^{v(y)} e^{h(y)} |y|^b}{|x-y|^\alpha} \mathrm{d}y \right) e^{v(x)} e^{h(x)} |x|^b \quad \text{in } B_1\end{aligned}$$

在分布意义下。采用与定理1.1 的证明类似的论证可知，只要 $\alpha \in (0, n)$且 $b > \frac{\alpha - 2n}{2}$，就有

$$K(x) \left(\int_{B_1 \setminus \{0\}} \frac{e^{v(y)} e^{h(y)} |y|^b}{|x-y|^\alpha} \mathrm{d}y \right) e^{v(x)} e^{h(x)} |x|^b \in L^{p_0}(B_1)$$

对于某个 $p_0 > 1$。根据 v 的表达式以及经典位势估计（例如，参见 Gilbarg-Trudinger [20]），我们得到 $v \in C^\gamma_{loc}(B_1)$，其中 $0 < \gamma < 1$。因此，我们得到

$$u(x) = \varphi(x) + b \ln |x| \quad \text{in } B_1 \setminus \{0\},$$

其中 $\varphi := v + h \in C^\gamma_{loc}(B_1)$，对于某个 $0 < \gamma < 1$。 □

声明：作者声明不存在利益冲突。

References

[1] J. H. Andrade、T. Feng、P. Piccione 和 M. Yang，临界Hartree方程奇异解的局部渐近性，arXiv预印本，arxiv: 2505 19021 3 。。J. H. Andrade 和 J. Wei，临界六阶方程奇异正解的分类，arXiv预印本，[2] arxiv: 2210 04376, 2022 3 。。H. Brezis 和 F. Merle，二维中 $-\Delta u = V(x)e^u$ 的解的一致估计与爆破行为，偏微分方[3]程通讯， **16** 1991 8 9, 1223 1253 9 ( )，第 - 期，–。L. Caffarelli、B. Gidas 和 J. Spruck，具有临界Sobolev增长的半线性椭圆方程的渐近对称性与局部行为，《纯粹与应用数学通讯》，[4] **42** 1989 271 297 3 ( )，–。S. Y. A. Chang 和 P. C. Yang，关于共形几何中n阶微分方程解的唯一性，数学研究快报，[5] **4** 1997 91 102 2 ( )，–。C. C. Chen 和 C. S. Lin，具有Sobolev指数的半线性椭圆方程奇异正解[6]的局部行为，《杜克数学杂志》， **78** 1995 315 334 3 ( )，–。C. C. Chen 和 C. S. Lin，利用移动平面法对共形标量曲率方程[7]进行估计，《纯粹与应用数学通讯》， **50** 1997 971 1017 3 ( )，–。C. C. Chen 和 C. S. Lin，关于数量曲率方程奇异解的渐近对[8]称性，《数学年刊》， **313** (1999)，第2期，229–245。3

[9] W. Chen 和 C. Li，若干非线性椭圆方程解的分类，《杜克数学杂志》，63 (1991)，615 622 2, 3 –。W. Chen 和 C. Li，Nirenberg问题的充要条件，《纯粹与应用数学通讯》，**48** 1995 6, 657 667 2 ( )，第–期。W. Chen 和 C. Li，什么样的奇异曲面可以具有常曲率？《杜克数学杂志》，78 (1995)，第2期，437–451。2[10] W. Chen、C. Li 和 B. Ou，积分方程解的分类，《纯粹与应用数学通讯》，**59** 2006 3, 330 343 3 ( )，第–期。K. S. Chou 和 Y. H. Wan，穿孔圆盘中 $-\Delta u + e^u = 0$ 解的渐近径向对称性[11]，《太平洋数学杂志》，**163** 1994 2, 269 276 2 ( )，第–期。L. Du 和 M. Yang，临界非局部方程解的唯一性与非退化性，《离散与连续动力系统》，[12]**39** 2019 5847 5866 3 ( )，–。X. Du 和 H. Yang，带奇异集的高阶共形不变方程正解的局部行为，《微积分变分与偏微分方程》，[13]**60** 2021 204, 35 3, 6 ( )，论文编号，页码。X. Du 和 H. Yang，孤立奇点附近共形标量曲率方程的渐近展开，arXiv预印本，arXiv: 2402 16597 3 [14]。R. Frank 和 T. Konig，具有临界指数的非线性双调和方程正解的分类，《分析与偏微分方程》，[15]**12** 2019 4, 1101 1113 3 ( )，第–期。F. Gao 和 M. Yang，非线性Choquard方程的Brezis-Nirenberg型临界问题，《中国科学：数学》，[16]**61** 2018 1219 1242 3 ( )，–。B. Gidas、W. M. Ni 和 L. Nirenberg，通过最大值原理得到的对称性及相关性质，《数学物理通讯》，[17]**68** 1979 209 243 3 ( )，–。D. Gilbarg 和 N. Trudinger，二阶椭圆偏微分方程，1998年版重印。数学经典。施普林格出版社，柏林，[18]2001 11, 16 [19]。M. Gluck，具有非局部非线性项的 $\mathbb{R}^2$ 上椭圆方程解的分类，《离散与连续动力系统》，[20]**45** 2025 4262 4299 4 ( )，–。L. Guo、T. Hu、S. Peng 和 W. Shuai，涉及Hardy-Littlewood-Sobolev临界指数的Choquard方程解的存在性与唯一性，《微积分变分与偏微分方程》，58 (2019)，论文编号 128, 34 3 [21]，页码。Y. Guo 和 S. Peng，具有指数非线性的Hartree型方程解的渐近行为与分类，《几何分析杂志》，[22]**34** 2024 1, 23, 21 4 ( )，第期，论文编号，页码。Z. Guo、X. Huang、L. Wang 和 J. Wei，关于具有临界指数的双调和椭圆方程的Delaunay解，《数学分析杂志》，[23]**140** 2020 1, 371 394 3 ( )，第–期。Z. Guo 和 Z. Liu，外部区域中某些椭圆方程解的渐近行为，《太平洋数学杂志》，[24]**309** 2020 2, 333 352 2, 4 ( )，第–期。Z. Guo、Z. Liu 和 F. Wan，共形Q曲率方程奇异解的渐近展开，《几何分析杂志》，[25]**32** 2022 7, 193, 44 2 ( )，第期，论文编号，页码。Z. Guo、F. Wan 和 Y. Yang，穿孔圆盘中 $-\Delta u + e^u = 0$ 的奇异解的渐近展开，《微积分变分与偏微分方程》，[26]**60** 2021 1, 51, 35 2 ( )，第期，论文编号，页码。X. Huang、Y. Li 和 X. Zhou，具有奇异集的双调和Lane-Emden方程正解的对称性，《微积分变分与偏微分方程》，[27]**64** 2025 2, 67, 26 3 ( )，第期，论文编号，页码。A. Hyder，具有常Q曲率的 $\mathbb{R}^2$ 上共形度量的结构，《微分积分方程》，32 (2019 423 454 2)，–。T. Jin 和 J. Xiong，具有孤立奇点的高阶共形不变方程解的渐近对称性与局部行为，Ann. Inst. Poincar´ [28]´ **38** 2021 4, 1167 1216 3, 6 e Anal. Non Lineaire.，( )，第–期。N. Korevaar、R. Mazzeo、F. Pacard 和 R. Schoen，具有孤立奇点的常标量曲率度量的精细渐近展开，《数学发明》，[29]**135** 1999 2, 233 272 3 ( )，第–期。P. Le，Hartree 方程的经典解，《数学分析及其应用》，[30]**485** 2020 123859 3 ( )，。C. Li，非线性椭圆方程奇异解的局部渐近对称性，《数学发明》，[31]123 (1996 221 231 3)，–。Y. Y. Li，关于某些共形不变积分方程的评注：移动球面法，《欧洲数学会杂志》，[32]**6** 2004 153 180 3 ( )，–。E. H. Lieb 和 B. Simon，库仑系统的Hartree-Fork理论，《数学物理通讯》，[33]4 (1980)，1063–1072。3[34] C. S. Lin，关于 $\mathbb{R}^n$ 上一个共形不变四阶方程解的分类，《瑞士数学评论》，[35]73 (1998)，206–231。2, 3

[37] C. S. Lin，通过移动平面法 III 估计标量曲率方程，《纯粹与应用数学通讯》，
53 2000 5, 611 646 3 ( )，第 – 号。L. Martinazzi，n维欧氏空间上高阶 Liouville 方程解的分类，
[38]《数学杂志》，263（2009），307–329。2[39] C. Miao、Y. Wu 和 G. Xu，聚焦型能量临界非线性 Hartree 方程的动力学，《数学论坛》，
27 2015 1, 373 447 3 ( )，第 – 号。I. M. Moroz、R. Penrose 和 P. Tod，
Schr¨odinger-Newton[40] 方程的球对称解，《经典与量子引力》，
15 1998 2733 2742 3 ( )，–。G. I. Nazin，经典统计物理中具有多粒子相互作用
[41]的系统的极限分布函数，《理论与数学物理》，
25 1975 1, 132 140 3 ( )，第 – 号。Y. Niu，高阶临界 Choquard 方程解的分类，《纯[42]粹与应用分析通讯》，24（ 2025 5, 812 839 4），第 – 号。
R. Schoen，黎曼度量的总标量曲率泛函的变分理论及相关主题，载于《变[43]分法专题》（蒙特卡蒂尼泰尔梅，1987），《数学讲义》第1365卷，第 120 154 1989 3 –页。施普林格，柏林，。J. Wei 和 X. Xu，
关于[44]n维欧氏空间上度量的共形变形，《泛函分析杂志》，( )，第 – 号。J. Wei 和 X. Xu，高阶共形不变方程解的分类，《数学年刊》，（ 1999 207 228 2, 3），–。X. Xu，$\mathbb{R}^4$中某些四阶非线性椭圆方程解的分类，《太平洋数学杂志》，
225 [46]2006 2, 361 378 2 ( )，第 – 号。H. Yang 和 R. Yang，关于共形高斯曲率方程及 Q-曲率方程的孤立奇[47]点，arXiv预印本，arXiv: 2502 08318 3, 4, 6, 7 。。J. Yang 和 X. Yu，
二维临界 Choquard 方程解的分类，[48]可在 SSRN 4405840 获取。7。4[49] L. Zhang，通过移动球法对共形数量曲率方程进行精细渐近估计，《泛函分析杂志》，192（2002），491–516。3

(T. FENG) School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University 321004, Jinhua-ZJ, People's Republic of China*Email address*: fengtao@zjnu.edu.cn

(M. YANG) School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University 321004, Jinhua-ZJ, People's Republic of China*Email address*: mbyang@zjnu.edu.cn

(X. ZHOU) School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University 321004, Jinhua-ZJ, People's Republic of China*Email address*: xmzhou@zjnu.edu.cn