arXiv:2602.03568v1 [math.GR] 3 Feb 2026

图乘积下 Haagerup 性质的稳定性

SHUBHABRATA DAS 和 PARTHA SARATHI GHOSH

摘要。本文证明，有限多个群的任意图乘积，只要这些群都具有 Haagerup 性质（或 Gromov的a-T-可容性），其图乘积也具有 Haagerup 性质。

1. 引言

可 amenability 群由冯·诺依曼在研究 Banach-Tarski悖论时引入，定义为恰好是不允许进行悖论分解的那些群。此后，可 amenability 的概念得到广泛研究，并具有多种等价刻画。其中一种刻画是通过近似单位的存在来给出的，该近似单位由有限支撑的正定函数构成。关于这一主题的综述可见于著作 [Pat00] and 及其中的参考文献。

与群 G相关联的约化群 C^*-代数，记为 $C^*_\lambda(G)$，是在算子范数下对左正则表示 $\lambda : \mathbb{C}G \to \mathbb{B}(\ell^2 G)$ 的像取完备化得到的，其中 $\mathbb{C}G$ 是定义在 G 上、取值于 $\mathbb{C}$ 且有限支撑的函数所构成的群环。核 C^*-代数是指其恒等映射（作用于自身）可由有限秩映射逼近。 G可 amenability 当且仅当 $C^*_\lambda(G)$ 是核的。

在所有非 amenable 群中，最著名的当属由 n 个生成元生成的非阿贝尔自由群 $\mathbb{F}_n$。在 [Haa78], U. Haagerup 证明，非核的约化群 C^*-代数 $C^*_\lambda(\mathbb{F}_n)$ 具有某种逼近性质，后来称为 Haagerup 逼近性质，或简称为 ***Haagerup*** 性质；这一结果由 Akermann-Walter [AW81] 和 Choda [Cho83] 得出（见定义 2.2）。具有 Haagerup 性质的群类相当广泛，包括所有紧群（离散情形下为有限群）、所有可 amenable 群（因此也包括所有阿贝尔群、可解群等）、非阿贝尔自由群、闭可定向曲面的基本群等。具有 Haagerup 性质的群还可以等价地定义为：存在一个定义在该群上的适当条件负定函数。作用在树 [Haa78]，或 $CAT(0)$- 立方复形 [NR97]，上的群都具有此类函数，因此可知它们具有 Haagerup 性质。关于这一主题的优秀综述，参见 Cherix 等人的 [CCJ+01]。

另一种刻画群具有 Haagerup 性质的方法，而且往往非常有用，就是证明这类群在希尔伯特空间上存在适当的仿射等距作用。 $SO(n,1)$ $SU(n,1)$在希尔伯特空间上存在这类作用，因此具有 Haagerup 性质。Bekka、Cherix 和 Valette 证明，可 amenable 群也存在这类作用， [BCV95]。从这个角度看，D. Kazhdan 在 [Kaz67], 中提出的性质（T）可视为对 Haagerup 性质的强烈否定，这或许就是 M. Gromov 将 Haagerup 群称为$a\text{-}T\text{-}menable$的原因， [Gro92]。例如，由于 $SL_n(\mathbb{Z})$对$n \geq 3$具有性质（T），它们不具有 Haagerup 性质。其他此类例子还有 $SL_n(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^n$、 $Sp(n,1)$，其中 $n \geq 2$ 等。

两个具有 Haagerup 性质的群的直积仍是具有 Haagerup 性质的群。此外，Haagerup 性质在取有限子群上的自由积和合并积时保持不变[CCJ+01]。群的图乘积 是这样一种概念：将有限图中与各顶点对应的群组合起来，而关系子则是由边给出的换位子（见定义 3.1）。从某种意义上说，这一概念介于群的自由积与直积之间。由于 Haagerup 性质在这两种运算下都保持不变，一个自然的问题是：Haagerup 性质是否在任意图乘积下仍然保持不变？也就是说，若我们取群 $\{G_v\}_{v \in V(\Gamma)}$，每个有限图 Γ 的顶点对应一个群，并且

关键词和短语。群的自由积、群的图积、Haagerup 性质、条件负定函数。2010 年数学主题分类：20F65、43A35、20E06。

这些群都具有 Haagerup 性质，那么它们的图乘积是否也具有 Haagerup 性质？我们对此给出肯定的回答。

定理 1.1。 设 Γ 是一个有限图， $\{G_v\}_{v\in V(\Gamma)}$ 是一族 *Haagerup* 群。那么，图乘积 $G(\Gamma)$ 具有 *Haagerup* 性质。

这一结果最初由 Y. Antolin 和 D. Dreesen 以一种截然不同的方法证明 [AD13], 。从某种意义上说，我们的证明更直接。我们通过在顶点群上拼接条件负定函数，在图乘积上构造一个条件负定函数，从而证明其具有 Haagerup 性质。

2. Haagerup 性质

设 G 是一个群。从现在起， G 始终表示一个有限生成群。给定一个函数ϕ: $G\to\mathbb{C}$，它将诱导一个核 k_ϕ: $G\times G\to\mathbb{C}$，定义为 $k_\phi(g,\ h):=\phi(h^{-1}g)$。所谓正定函数 ϕ: $G\to\mathbb{C}$，是指对于每个 $n\in\mathbb{N}$, 任取 $\{c_1,c_2,\ldots,c_n\}\subset\mathbb{C}$和 $\{g_1,g_2,\ldots,g_n\}\subset G$，都有:

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i\overline{c_j}k_\phi(g_i,g_j)=\sum_{i,j=1}^{n} c_i\overline{c_j}\phi(g_j^{-1}g_i)\geq 0.$$

ℓ^2G 是定义在 G上的所有平方可和函数组成的空间。关于内积 $\langle f_1,f_2\rangle:=\sum_{g\in G}f_1(g)f_2(g)$，该空间构成一个希尔伯特空间。$(\ell^2G)_1$ 是希尔伯特空间的单位球面。 ϕ 为正定的另一种刻画是([dLHV89])：存在一个正交表示 $\pi: G\to\mathbb{B}(\ell^2G)$和 $\xi\in(\ell^2G)_1$，使得,

$$\phi(g)=\langle\pi(g)\xi,\xi\rangle$$

类似地，如果对任意 $n\in\mathbb{N}$，矩阵 $n\times n\left[K_{ij}=\phi(g_j^{-1}g_i)\right]$ 在任意选取子集 $\{g_1,g_2,\ldots,g_n\}\subset G$时都是条件负定矩阵，则称 ϕ 为条件负定（CND）。其等价刻画是存在一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 和一个映射 R: $G\to\mathcal{H}$，使得,

$$k_\phi(g,h)=\phi(h^{-1}g)=||R(g)-R(h)||^2 \tag{1}$$

给定 G 上任意一个核 k，无论它是正定还是条件负定，都会在 G 上诱导出同类型的函数 ϕ_k，其定义关系为 $\phi_k(g)=k(g,\ e)$; 若 k 是一个 G-不变的函数，即对于所有 $(g,\ h)\in G\times G$，都有 $k(g,\ h)=k(h^{-1}g,\ e)$。正定核与条件负定核之间的联系归功于 Schoenberg。

引理 2.1。 *([Sch38], 定理 D.11[BO08])* k： $G\times G\to\mathbb{C}$ 是条件负定的，当且仅当 e^{-k}： $G\times G\to\mathbb{C}$ 是正定的。

定义 2.2。 如果一个群 G 存在一个函数序列 ϕ_n： $G\to\mathbb{C}$，且满足以下性质，则称其为 *Haagerup* 群（或具有 *Haagerup* 性质的群）：

a) $\phi_n(g)$ 逐点收敛b) 每个 ϕ_n 在 ∞ 处消失，即 $\phi_n(g)$ 当 $|g|\to\infty$ 时趋于 $\to 0$，c) 每个 ϕ_n 都是正定的。

假设在 G 上有一个适当函数 ϕ，它是条件负定的，那么根据引理 2.1，序列 $\phi_n=e^{-\frac{\phi}{n}}$ 将满足定义 2.2 的所有条件。反过来，也就是说，给定一个具有上述性质的序列 ϕ_n，可以在 G 上构造一个适当的条件负定函数 ϕ，该事实的证明见 [CCJ+01] 。因此，我们有一个等价定义:

定义 2.3。 G 具有 *Haagerup* 性质，如果在 G 上存在一个适当、对称的条件负定函数。

每当 G是 Haagerup 群时，我们就有一个适当的条件负定函数 ϕ，以及一个从 G 到希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的映射 R，满足方程 (1)。我们将这组数据记作 $(G,\ \phi,\ \mathcal{H},\ R)$，并称其为对应于 G的 Haagerup 元组。

3. 图乘积

设 Γ 是一个没有环和二边形的有限图。 $V(\Gamma)$ 是 Γ 的顶点集， $E(\Gamma)$ 是 Γ的边集。顶点 v和 w之间的无序边记作 $[v,w]$。再设 $\{G_v\}_{v\in V(\Gamma)}$ 是一个固定的群族。由沿着 Γ组合 G_v得到 $\{G_v\}_{v\in V(\Gamma)}$ 的图乘积 $G(\Gamma)$。

定义 3.1. 对于有限图 Γ 和群族 $\{G_v\}_{v\in V(\Gamma)}$，群的图积 $G(\Gamma)$ 是商群 $*_{v\in V(\Gamma)}G_v \Big/ \langle\langle\{[G_v,G_w]:[v,w]\in E(\Gamma)\}\rangle\rangle$。

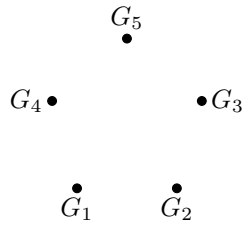

图 1. Γ是不连通的$G(\Gamma) = *_{i=1}^{5}G_i$

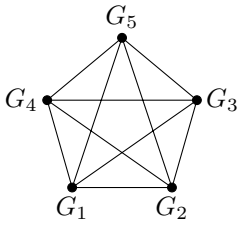

图 2. Γ是完全图 $G(\Gamma) = \oplus_{i=1}^{5}G_i$

群的自由积和直积是群的图积的两个极端例子。容易看出，如果 Γ 是一个具有 n个顶点且没有边的图，那么 $G(\Gamma)$ 是顶点群的自由积；如果 Γ是一个具有 n个顶点的完全图，那么 $G(\Gamma)$ 就是直积（见上图）。Green 在她的学位论文 [Gre90] 中研究了群的图积。

对于 $\{G_v\}_{v\in V(\Gamma)}$，显然，图乘积 $G(A)\leq G(\Gamma)$，其中 A 是 Γ的子图。定义 $lk(v):=\{w\in V(\Gamma):[v,w]\in E(\Gamma)\}$ 和 $st(v):=lk(v)\cup\{v\}$，其中 $v\in V(\Gamma)$。我们用 $ST(v)$ 表示 Γ的极大子图，其顶点集为 $st(v)$。那么 $G(st(v))$ 就是指图乘积 $G(ST(v))$。每个元素 $g\in G(\Gamma)$ 都可以写成如下形式

$$g = g_1 g_2 \dots g_m$$

其中每个 $g_i\in G_{v_i}$，对于 $v_i\in V(\Gamma)$，以及某个 m。如果 $[v_i,v_{i+1}]\in E(\Gamma)$，那么

$$g = g_1 g_2 \dots g_m = g_1 \dots g_{i-1} g_{i+1} g_i g_{i+2} \dots g_m$$

我们将上述操作称为“交换”。可以对形式 $g=g_1g_2\dots g_m$ 执行以下三种操作:

a) 执行交换，b) 若出现单位元，则将其删去，
c) 若 g_i 和 g_{i+1} 都来自 G_{v_i}，则将它们相乘

注 3.2. 交换不会改变元素的数量。操作 *(b)* 和 *(c)* 会使元素数量减少1。

若一个形式 $g=g_1g_2\dots g_m$经过任意次数的上述操作后元素数量保持不变，则称其为约化的 。这种约化形式就是自由积中的通常正规形式，并且是唯一确定的。一般图乘积 $G(\Gamma)$ 中存在 $\mathcal{R}_\Gamma$ 关系，因此约化形式并不唯一。然而，任意约化形式中元素的数量对于 a$g\in G(\Gamma)$ 都是唯一确定的 [Gre90，推论 3.13]。因此，它将导出一个长度函数 l_r，该函数由 $G(\Gamma)$ 上的约化长度 $|\cdot|_r$ 给出，即:

$$\begin{aligned} l_r : G(\Gamma) &\to \mathbb{R} \\ g &\mapsto l_r(g) = |g|_r := m \end{aligned} \tag{2}$$

其中，处于约化形式 $g=g_1g_2\dots g_m$ 的 a $g\in G(\Gamma)$ 的约化长度 $|g|_r$ 为 m。

注 3.3。每当 $g_1g_2\dots g_m$ 是一种约化形式，且 g_i、$g_j\in G_v$ 时，就存在某个 $q\in\mathbb{N}$ 和 $u\notin st(v)$，使得 $i<q<j$，且 $g_q\in G_u$。

4. 定理：在 $G(\Gamma)$ 上构造条件负定函数

设 Γ 是一个有限图，$\{G_v\}_{v\in V(\Gamma)}$ 是一个具有 Haagerup 性质的 Γ-群族。根据定义，具有 Haagerup 性质的群 G_v' 都配备了适当条件负定函数 $\phi_v : G_v \to \mathbb{R}$、希尔伯特空间 $\mathcal{H}_v$' 以及映射 $R_v : G_v \to \mathcal{H}_v$，使得:

$$\phi_v(h^{-1}g) = ||R_v(g) - R_v(h)||^2 \text{ for all } g, h \in G_v.$$

我们的目标是在 $G(\Gamma)$ 上构造一个适当条件负定函数，记作 ϕ_Γ，并将 ϕ_v's 结合到 G_v's 上。为此，我们将使用与图乘积 $G(\Gamma)$ 相伴的 CAT(0) 方块复形结构。在 $G(\Gamma)$ 上存在某种"墙结构"，由此可得到一个有限维$CAT(0)$ 方块复形 X，其上有一个 $G(\Gamma)$ 作用。这归功于 Reckwerdt [Rec17] 和 Chatterji-Niblo[CN05]。在 $G(\Gamma)$ 上定义的距离函数

$$\begin{aligned} d_r : \quad & G(\Gamma) \times G(\Gamma) \to \mathbb{R} \\ & (g, h) \longmapsto |h^{-1}g|_r \end{aligned}$$

与 d_X（即 X 上的度量）"等价"。注意，$l_r(g) = d_r(g, e)$。更具体地说，在 [Rec17]Reckwerdt 中证明，对于任意 g, $h \in G(\Gamma)$ 以及某个 $x_0 \in X$，有

$$d_X(gx_0, hx_0) = 2d_r(g, h). \tag{3}$$

由上述等式可知，d_r 在 $G(\Gamma)$上的度量是条件负定的，因为 d_X在 X [NR97]的顶点集上也是如此。

为了在 $G(\Gamma)$上得到一个适当的条件负定函数，我们将度量 d_r 与沿 CAT(0) 立方复形 X定义的条件负定函数 $\{\phi_v\}$ 结合起来。首先，我们概述自由积的情形，一般情形的证明类似。

自由积的 Haagerup 性质。考虑 G为 A与 B的自由积，其中这两个群都具有 Haagerup 性质，并设$(A, \phi_A, \mathcal{H}_A, R_A)$和$(B, \phi_B, \mathcal{H}_B, R_B)$为相应的两个 Haagerup 元组。设 T 为 G的 Bass-Serre 树。考虑希尔伯特空间 $\mathcal{H} = \oplus_{t\in T}\mathcal{H}_t$，其中 $\mathcal{H}_t$ 取 $\mathcal{H}_A$或 $\mathcal{H}_B$，这取决于 t 分别属于 G/A 还是 G/B。另假设 $R_A(e_A) = 0_{\mathcal{H}_A}$ 且$R_B(e_B) = 0_{\mathcal{H}_B}$。

g中任意非平凡元素都有唯一的正规形式 $g = g_1g_2\cdots g_n$，其中 $g_i \in A$或 B。我们使用这一正规形式定义 R：$G \to \mathcal{H}$，如下所示:

$$R(g) := \begin{cases} R_1(g_1)_{G(1)} \oplus R_2(g_2)_{g_1G(2)} \oplus \cdots \oplus R_n(g_n)_{g_1g_2\cdots g_{n-1}G(n)}, \text{ if } g \neq e \\ 0_{\mathcal{H}} \text{ if } g = e \end{cases} \tag{4}$$

其中 $g_i \in G(i)$ 要么是 A，要么是 B；而 R_i 则根据位置取 R_A 或 R_B。

引理 4.1. 由该方程定义的 $G \times G$ 上的核 k，

$$k(g, h) := ||R(g) - R(h)||^2$$

是 G-不变的，即对任意 f、g、$h \in G$，都有 $k(fg, fh) = k(g, h)$。

证明。只需证明，对任意 $g, h \in G$，都有 $k(g, h) = k(h^{-1}g, e)$。设 $g = g_1g_2\cdots g_n$和 $h = h_1h_2\cdots h_m$是它们的正规形式，其中对于 $1 \le i \le p \le$，$g_i = h_i$取最小值。则 $h^{-1}g$的正规形式为 $h_m^{-1}h_{m-1}^{-1}\cdots h_{p+2}^{-1}cg_{p+2}\cdots g_{n-1}g_n$，其中 $c = h_{p+1}^{-1}g_{p+1}$。为简洁起见，在 R 的定义中省略后缀中向量的位置。现在注意，向量的各个分量

$$R(h^{-1}g) = R(h_m^{-1}h_{m-1}^{-1}\cdots h_{p+2}^{-1}cg_{p+2}\cdots g_{n-1}g_n)$$

都分别位于 $\mathcal{H}$ 的不同正交子空间 $\mathcal{H}_t$ 中。因此我们有，

$$\begin{aligned} k(h^{-1}g, e) = & \sum_{i=p+2}^{n} ||R_i(g_i)||^2 + \sum_{i=p+2}^{m} ||R_i(h_i^{-1})||^2 + ||R_{p+1}(h_{p+1}^{-1}g_{p+1})||^2 \\ = & \sum_{i=p+2}^{n} ||R_i(g_i)||^2 + \sum_{i=p+2}^{m} ||R_i(h_i)||^2 + ||R_{p+1}(g_{p+1}) - R_{p+1}(h_{p+1})||^2 \\ & \qquad [\text{as } \phi_A, \phi_B \text{ are symmetric}] \\ = & || \oplus_{i=p+1}^{n} R_i(g_i) - \oplus_{i=p+1}^{m} R_i(h_i)||^2 \\ = & ||R(g) - R(h)||^2 = k(g, h) \end{aligned}$$

这证明了核 k 的 G-不变性。 □

˜现在，核 k 在 G上诱导出一个条件负定函数 ϕ ，但它可能不是适当的。为了使其具有适当性，我们加上约化长度函数 l_r；Haagerup 已在[Haa78]中证明该函数是条件负定的。定义函数 ϕ： $G \to \mathbb{R}$ 如下:

$$g \mapsto \phi(g) := l_r(g) + \tilde{\phi}(g)$$

见引理 4.4，其中给出了 ϕ具有适当性的证明。因此，$(G,\ \phi,\ \mathcal{H},\ R)$ 是一个 Haagerup 元组 e.

主要结果。 给定一个有限图 Γ，我们有一族 $\{G_v\}_{v\in V(\Gamma)}$ 具有 Haagerup 性质的群，以及与之对应的 Haagerup 元组 $\{(G_v,\ \phi_v,\ \mathcal{H}_v,\ R_v)\}_{v\in V(\Gamma)}$。我们采用与上述类似的方法，证明图乘积 $G(\Gamma)$ 满足定理 1.1。

令 T 为所有陪集 $\{G(\Gamma)/G(st(v))\}_{v\in V(\Gamma)}$ 的集合。考虑希尔伯特空间 $\mathcal{H}:=\oplus_{t\in T}\mathcal{H}_t$，其中，如果 t 是陪集 $gG(st(v))$，则 $\mathcal{H}_t$ 是 $\mathcal{H}_v$。注意，在自由积情形中，希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 对应于具有两个顶点的非连通图。同样不失一般性地，我们可以假设每个R_v 都将单位元映射到相应希尔伯特空间中的零向量。

一个非平凡的 $g \in G(\Gamma)$ 有一个约化形式 $g = g_1g_2\dots g_m$，其中 $g_i \in G_{v_i}$对于 $i = 1$，2、.....、m。为简便起见，我们记 $g_i \in G(i) \le G(st(i))$。类似于自由积情形中的定义 (4)，我们定义$R : G(\Gamma) \to \mathcal{H}$ 如下:

$$R(g) := \begin{cases} \oplus_{i=1}^{m} R_i(g_i)_{g_1g_2\dots g_{i-1}G(st(i))}, \text{ if } g \neq e \\ 0_{\mathcal{H}} \text{ if } g = e \end{cases}$$

其中 R_i 是 R_{v_i}。为验证 R 定义良好：假设群 $G(i)$ 和 $G(i+1)$ 在 $G(\Gamma)$ 中可交换，并且我们可以在 g 的约化形式的第 i 个位置进行交换，即

$$g = g_1g_2\dots g_{i-1}g_ig_{i+1}\dots g_m = g_1g_2\dots g_{i-1}g_{i+1}g_i\dots g_m.$$

因此可以说

$$\begin{aligned} g_1g_2\dots g_{i-1}g_iG(st(i+1)) = &\quad g_1g_2\dots g_{i-1}G(st(i+1)) \text{ and} \\ g_1g_2\dots g_{i-1}g_{i+1}G(st(i)) = &\quad g_1g_2\dots g_{i-1}G(st(i)) \end{aligned}$$

这表明，在 g_i 和 g_{i+1} 之间进行交换，会使直和中向量 $R(g)$ 的第 i 个分量和第 $(i+1)$ 个分量互换，但不会影响 $R(g)$。一个约化形式可以通过有限次交换从另一个约化形式得到。因此，映射 R 在 $G(\Gamma)$ 上定义良好。

引理4.2。 k 上由以下方式给出的核 $G(\Gamma) \times G(\Gamma)$ 是 $G(\Gamma)$-不变的:

$$(g, h) \mapsto ||R(g) - R(h)||^2$$

证明。 注意，与自由积的情形不同，约化形式并不唯一。除此之外，证明与引理 4.1 完全相同。□

˜因此，我们得到一个定义在 $G(\Gamma)$上的条件负定函数 ϕ ，但它不一定是适当的。注意，如果 g有一个约化形式 $g = g_1g_2\dots g_m$，其中 $g_i \in G_{v_i}$，那么

$$\tilde{\phi}(g) = \sum_{i=1}^{m} \phi_{v_i}(g_i) \tag{5}$$

由等式 (3) 可知，距离函数 d_r 在$G(\Gamma) \times G(\Gamma)$上是条件负定的，因此 l_r 在 $G(\Gamma)$上也满足条件负定。

定义 ϕ_Γ 在 $G(\Gamma)$上的函数如下:

$$\phi_\Gamma := l_r + \tilde{\phi}$$

由于它是两个条件负定函数之和，因此在 $G(\Gamma)$上也满足条件负定。

注 4.3。 对于任意 $v \in V(\Gamma)$，均有 $\phi_\Gamma\Big|_{G_v} \equiv 1 + \phi_v$。

引理 4.4。 ϕ_Γ 在 $G(\Gamma)$上是适当的。

证明。令 $|g|$ 表示 $g \in G(\Gamma)$ 的词长。我们需要证明，当 $|g|$ 趋于无穷时， $\phi_\Gamma(g) \to \infty$ 。我们分两种情况证明。

情况 1： $|g|$ 趋于无穷大，但 $l_r(g)$ 是有限的，设 $l_r(g) = k$。令 $g = g_1 g_2 \cdots g_k$ 为约化形式。于是根据鸽巢原理，存在一个 $1 \leq i \leq k$，使得 $|g_i|$ 趋于无穷大。由于 ϕ_{v_i} 是适当的，$\phi_{v_i}(g_i)$ 的值也趋于无穷大。因此，根据方程 (5)， $\phi_\Gamma(g)$ 趋于无穷大。

情况 2： $|g|$ 趋于无穷大，并且 $l_r(g)$ 也趋于无穷大。因此，同样有 $\phi_\Gamma(g) = l_r(g) + \phi(g)$ 趋于无穷大。

□

因此，我们得到以下结果（定理 1.1）：

定理 4.5。设 Γ 是一个有限图，且 $\{G_v\}_{v \in V(\Gamma)}$ 是一族具有 *Haagerup* 性质的群。那么，图乘积 $G(\Gamma)$ 具有 *Haagerup* 性质。

5. 致谢

PSG[1] 获得 CSIR 研究奖学金 [文件号 08/155(0066)/2019-EMR-I], 印度政府的资助。SD[2]感谢 Presidency University 数学系通过 DST-FIST [文件号 SR/FST/MS-I/2019/41]提供的基础设施支持。

参考文献

[AD13] Yago Antolín 与 Dennis Dreesen。Haagerup 性质在图乘积下是稳定的。arXiv 预印本 arXiv:1305.6748，2013。[AW81] Charles A Akemann 与 Martin E Walter。无界负定函数。《加拿大数学杂志》，33(4):862–871，1981。[BCV95] ME Bachir Bekka、Pierre-Alain Cherix 与 Alain Valette。可 amenable 群的适当仿射等距作用。诺维科夫猜想、指标定理与刚性，2:1–4，1995。[BO08] Nathanial Patrick Brown 与 Narutaka Ozawa。C^*-代数与有限维逼近，第 88 卷。美国数学会，2008。[CCJ+01] Pierre-Alain Cherix、Michael Cowling、Paul Jolissaint、Pierre Julg 与 Alain Valette。具有 Haagerup 性质的群：Gromov 的 aT-可 amenability，第 197 卷。施普林格科学与商业媒体，2001。[Cho83] Marie Choda。Haagerup 型群因子。1983。[CN05] Indira Chatterji 与 Graham Niblo。从墙空间到 cat(0) 立方复形。《国际代数与计算杂志》，15(05n06):875–885，2005。[dLHV89] Pierre de La Harpe 与 Marc Valette。局部紧群的 Kazhdan 性质 (T)：附 Marc Burger 的附录。法国数学会，1989。[Gre90] Elisabeth Ruth Green。群的图乘积。博士论文，利兹大学，1990。[Gro92] Mikhael Gromov。无限群的渐近不变量。技术报告，P00001028，1992。[Haa78] Uffe Haagerup。一个具有度量逼近性质的非核 C*-代数的例子。《数学创刊》，50(3):279–293，1978。[Kaz67] David A Kazhdan。群的对偶空间与其闭子群结构的联系。《泛函分析及其应用》，1(1):63–65，1967。[NR97] Graham A Niblo 与 Lawrence Reeves。作用于 cat (0 7, 1997 1 1 1) 立方复形的群。《几何与拓扑》，( ): – 。[Pat00] Alan LT Paterson。可 amenability。第 29 号。美国数学会，2000。[Rec17] Eric Reckwerdt。弱可 amenability 在图乘积下是稳定的。《伦敦数学会杂志》，96(1):133–155，2017。[Sch38] Isaac J Schoenberg。度量空间与完全单调函数。《数学年刊》，第 811 841 页，1938 – 。

[1]parthasarathi.ghosh.100@gmail.com[2]
shubhabrata.maths@presiuniv.ac.in