混合Besov空间中带阻尼的可压缩 Euler 系统：整体适定性与弛豫极限

Timoth´ee Crin-Barat 和 Zihao Song*

arXiv:2602.03575v1 [math.AP] 3 Feb 2026

摘要

我们研究混合Besov空间 $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$ 中带阻尼的可压缩 Euler 系统的整体适定性，以及其趋向多孔介质方程的弛豫极限。在 [12], 中，第一作者和 Danchin 在混合Besov空间中研究了这两个问题，其中解的高频分量由基于 L^2 的范数控制，而低频分量则由基于 L^p 的范数控制，且满足 $p \in [2,\max\{4, 2d/(d-2)\}]$。受极限系统在 L^p 基空间中适定这一观察的启发（$p \in [2, \infty)$），我们将低频分析扩展到这一完整范围，从而为研究此类松弛极限提供了一个更加统一的框架。

我们证明的核心是建立精细的乘积估计和交换子估计，以准确描述高频、中频和低频区域之间的相互作用。我们分析的一个关键观察是，两个局部化于低频的函数的乘积只会产生低频与中频之间的相互作用，而不会产生纯粹的高频相互作用。因此，恰当选取频率阈值后，两个局部化于低频的函数之乘积的高频投影为零。

关键词：可压缩欧拉方程、临界正则性、弛豫极限、多孔介质方程、混合Besov空间。

MSC（2020）：35B20；35B40；35Q31；76S05。

1 引言

1.1 模型介绍

我们研究 $\mathbb{R}^d$ 中多维带阻尼的可压缩欧拉系统的柯西问题，其中 $d \geq 1$，该问题写作

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla P + \dfrac{1}{\varepsilon}\rho u = 0, \\ (\rho, u)\big|_{t=0} = (\rho_0, u_0), \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，对于 $x \in \mathbb{R}^d$ 和 $t \geq 0$，$\rho = \rho(x,t) \in \mathbb{R}$ 表示密度，$u = u(x,t) \in \mathbb{R}^d$ 表示速度，而 $\varepsilon > 0$ 表示时间松弛参数。我们假设压力满足

*通讯作者：szh1995@nuaa.edu.cn

γ-律:

$$P(\rho) = A\rho^{\gamma}$$

其中 $\gamma > 1$ 和 $A > 0$. 为常数

本文重点研究系统 (1.1) 的强解，其初始数据接近常数平衡态 $(\bar{\rho}, 0)$，且满足 $\bar{\rho} > 0$。不失一般性，在本文余下部分中，我们假设 $\bar{\rho} = 1$ 。我们还关注所谓扩散缩放下的弛豫极限:

$$(\rho^{\varepsilon}, u^{\varepsilon})(t, x) \triangleq (\rho, \varepsilon^{-1}u)(\varepsilon^{-1}t, x). \tag{1.2}$$

在扩散缩放 (1.2) 下，系统 (1.1) 可写为

$$\begin{cases} \partial_t \rho^{\varepsilon} + \operatorname{div}(\rho^{\varepsilon} u^{\varepsilon}) = 0, \\ \varepsilon^2 \partial_t (\rho^{\varepsilon} u^{\varepsilon}) + \varepsilon^2 \operatorname{div}(\rho^{\varepsilon} u^{\varepsilon} \otimes u^{\varepsilon}) + \nabla P(\rho^{\varepsilon}) + \rho^{\varepsilon} u^{\varepsilon} = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，我们预期 $(\rho^{\varepsilon}, u^{\varepsilon})$ 收敛到 $(\mathcal{N}, V)$，其中 $(\mathcal{N}, V)$ 满足多孔介质系统

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{N} - \Delta P(\mathcal{N}) = 0, \\ V = -\dfrac{\nabla P(\mathcal{N})}{\mathcal{N}}, \end{cases} \tag{1.4}$$

第二个方程即为达西定律。

1.2 文献综述

系统 (1.1) 属于部分耗散双曲系统这一类。这类多维一阶 n分量系统的形式为

$$\partial_t U + \sum_{k=1}^{d} A^k(U) \partial_{x_k} U + \frac{1}{\varepsilon} L U = 0, \tag{1.5}$$

其中，$U = U(x, t) \in \mathbb{R}^n$ 是未知量，取对称矩阵值的映射 $A^k (k = 1, \cdots, d)$ 假设为线性的，且 L 是一个正定对称矩阵。

若 $L = 0$，则 (1.5) 化为经典守恒律。在这种情况下，整体存在性理论仍未解决；正如 Lax [25] 和 Serre [31], 的著名研究所证明的，即使初始数据光滑且很小，也可能形成激波。因此，一条自然的研究思路是考虑带有适当源项的双曲系统，为 (1.5) 提供额外的耗散结构。

在 Kawashima [23] 以及 Shizuta 和 Kawashima [32], 的开创性工作中，他们确定了一种充分的结构条件，即所谓的 (SK) 条件，以确保一类双曲–抛物型系统在初始数据较小时具有整体适定性。此后，这一理论得到了广泛发展。关于全局时间解的存在性证明，以及在 Sobolev 空间 H^s 中研究其大时间动力学（$s > \frac{d}{2} + 1$），请参阅 Yong [41], Kawashima 和 Yong [24]以及 Beauchard 和 Zuazua [2] 的工作。后来，Kawashima 和 Xu 将该理论推广至正则性较低的情形，并考虑了属于

非齐次 Besov 空间 $\dot{\mathbb{B}}^{d/2+1}_{2,1}$，的初始数据。最近，第一作者和 Danchin [10, 11]分析了临界齐次 Besov 空间中的部分耗散双曲系统。

关于带阻尼的可压缩欧拉系统，Chen、Levermore 和 Liu [6] 首先引入了恰当的熵结构，以刻画该系统的耗散行为。随后，Yong [41] 在对熵施加某些限制条件的情况下，证明了光滑解的整体存在性。此后，Sideris、Thomases 和 Wang [34]，以及 Wang 和 Yang [39]，建立了该系统的整体适定性，并在 Sobolev 空间 H^s 中证明了其渐近行为，其中 $s > \frac{d}{2} + 1$。Xu 和 Wang [40] 后来通过研究临界正则性假设下的弛豫极限，改进了这些结果。

关于拟线性双曲系统的奇异扩散极限，弱收敛结果可参见 Marcati 和 Mi- lani [28],、Marcati、Milani 和 Secchi [29],，以及 Marcati 和 Rubino [30] 。在 [22],，Junca 和 Rascle 在一维情形下，针对大范围的整体时间解 BV，证明了从阻尼 Euler 方程到多孔介质方程的弛豫过程，并给出了显式的收敛率。他们的方法基于一种与质量拉格朗日坐标相关的流函数方法。最近，沿用 [22], 中的相同方法，Peng 等人在 [26] 证明了部分耗散双曲系统在一维空间中整体时间收敛到抛物型系统，并推导出了弛豫过程的收敛率。Liang 和 Shuai 在 [27] 采用类似技术，将先前的结果推广到了多维周期情形（见 $\mathbb{T}^3$）。最近，第一作者、Peng 和 Shou [37] 在 $\mathbb{R}^3$得到了类似结果。

关于基于标准能量估计的方法，Coulombel 和 Goudon [8]以及 Coulombel 和 Lin [9] 在 Sobolev 空间中证明了弛豫极限，Xu 和 Wang [40] 进一步降低了对初始数据正则性的要求，并在非齐次 Besov 空间中证明了该极限。在 [12], 中，第一作者与 Danchin 证明了强收敛结果，为多维情形下此类弛豫极限提供了显式的收敛速率。

我们还提及一些与研究部分耗散系统在常数平衡态附近的稳定性相关的其他论文 [3, 11, 13, 17, 21, 35, 36]。

1.3 Hybrid $L^2 - L^p$ 适定性结果与本文目标

自 Brenner [4], 的工作以来，人们已知，一般而言，双曲系统在 L^p 空间中对于 $p \neq 2$是不适定的。只有在 $p = 2$ 时，或者矩阵 A^j彼此对易时，适定性结果才可能成立，因为在后一种情况下，它们可在同一组基下对角化，从而最终得到除 0 阶项外相互解耦的输运方程。

然而，在存在耗散算子的情况下，可以构造出这样的解：其低频在基于 L^p、具有 $p \neq 2$ 的空间中有界，而高频在 L^2 空间中有界。事实上，在 [10],，Danchin 与第一作者在带有 $p \neq 2$ 的混合 $L^2 - L^p$ 齐次 Besov 空间中，建立了带阻尼的可压缩欧拉系统的适定性，并证明了其弛豫极限。更确切地说，假设初始数据的$_d$低频部分属于 $\dot{\mathbb{B}}^{p}_{p,1}$，并满足限制条件

$$p \in \left[2, \min\{4, \frac{2d}{d-2}\}\right] \tag{1.6}$$

而初始数据的高频部分属于[1] $\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}$。我们还提及 [15] 的综述，其中讨论了一大类满足 (SK) 条件的部分耗散双曲系统；以及 Shou、Xu 和 Zhang [33] 的工作，他们改进了低频部分的正则性假设。

本文旨在将 (1.6) 中关于 p 的上界推广至 $p<\infty$，从而为更广泛且更一致的一类初始数据提供整体适定性与松弛理论。所谓一致性，源于以下观察：

- 极限多孔介质系统 (1.4) 对所有 $p<\infty$ 在 L^p 空间中均适定（见命题 5.1）。

- 正如 [12]，中所观察到的，带阻尼的可压缩欧拉系统在低频区域呈现出多孔介质型行为。

2 主要结果

2.1 系统的线性化

在陈述主要结果之前，我们先给出带阻尼的可压缩欧拉系统 (1.1) 的线性化。我们引入重标度声速和速度：

$$c^\varepsilon(\varepsilon t,x)\triangleq\frac{1}{\check{\gamma}}\sqrt{\frac{\partial P}{\partial\rho}}=\frac{(\gamma A)^{\frac{1}{2}}}{\check{\gamma}}(\rho(t,x))^{\check{\gamma}}\quad\text{and}\quad v^\varepsilon(\varepsilon t,x)=\frac{1}{\varepsilon}u(t,x)\tag{2.7}$$

其中 $\check{\gamma}=\frac{\gamma-1}{2}$。令 $c:=c^\varepsilon-\bar{c}$ 以及 $v:=v^\varepsilon-0$，系统 (1.1) 可改写为

$$\begin{cases}\partial_t c+v\cdot\nabla c+\check{\gamma}(c+\bar{c})\operatorname{div}v=0,\\ \varepsilon^2(\partial_t v+v\cdot\nabla v)+\check{\gamma}(c+\bar{c})\nabla c+\ v=0,\end{cases}\tag{2.8}$$

其中 $\bar{c}=\frac{(4\gamma A)^{\frac{1}{2}}}{\gamma-1}$。我们注意到，在此改写下，系统（2.8）是对称的。利用压力 P 的定义，形式上，当 $\varepsilon\to0$ 时，(2.8) 的解预期收敛到多孔介质方程 (1.4) 的解。

2.2 函数空间

我们首先回顾与 Littlewood–Paley 分解和 Besov 空间相关的记号。完整概述请参见 [1,第 2] 章。我们选取一个光滑、径向、非增且紧支撑于 $B(0,\frac{4}{3})$的函数 $\chi(\xi)$，以及一个 $\chi(\xi)$，其满足 $=1$ 支撑于 $B(0,\frac{3}{4})$，使得

$$\varphi(\xi):=\chi(\frac{\xi}{2})-\chi(\xi),\quad\sum_{j\in\mathbb{Z}}\varphi(2^{-j}\cdot)=1,\quad\operatorname{Supp}\varphi\subset\{\xi\in\mathbb{R}^d\mid\frac{3}{4}\le|\xi|\le\frac{8}{3}\}.$$

[1]我们回顾，嵌入 $\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}\hookrightarrow W^{1,\infty}$ 与 $\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1}\hookrightarrow L^\infty$ 成立。因此，在关于初始数据的这些假设下，这些解在 $L^1_T(W^{1,\infty})$ 与 $L^\infty_T(L^\infty)$ 中有界。

对于任意 $j \in \mathbb{Z}$，齐次二进小波块 Δ_j 和低频截断算子 S_j定义为

$$\dot{\Delta}_j f := \mathcal{F}^{-1}(\varphi(2^{-j}\cdot)\mathcal{F}f), \qquad \dot{S}_j f := \mathcal{F}^{-1}(\chi(2^{-j}\cdot)\mathcal{F}f),$$

其中 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}^{-1}$ 分别表示傅里叶变换及其逆变换。全文中，我们使用如下记号 $\Delta_j f := f_j$.

令 $\mathcal{S}'_h$ 为 $\mathbb{R}^d$ 上满足 $\lim_{j\to-\infty} \|\dot{S}_j f\|_{L^\infty} = 0$的温和分布集合。于是，我们有

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f_j \quad \text{and} \quad \dot{S}_j f = \sum_{j'\le j-1} u_{j'} \quad \text{in } \mathcal{S}'_h.$$

齐次 Besov 空间 $\dot{\mathbb{B}}^s_{p,r}$，其中 $p, r \in [1,\infty]$ 且 $s \in \mathbb{R}$，定义为

$$\dot{\mathbb{B}}^s_{p,r} := \{f \in \mathcal{S}'_h \mid \|f\|_{\dot{\mathbb{B}}^s_{p,r}} := \|\{2^{js}\|uf_j\|_{L^p}\}_{j\in\mathbb{Z}}\|_{l^r} < \infty\}.$$

为了研究所考虑的系统，我们引入频率域的分解。定义频率阈值

$$J^\varepsilon = \left\lfloor \log_2(\varepsilon^{-1}) \right\rfloor + k_0, \tag{2.9}$$

其中某个 $k_0 \in \mathbb{Z}$。对于任意 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$，我们定义

$$f := f^{\ell,\varepsilon} + f^{h,\varepsilon} \quad \text{where} \quad f^{\ell,\varepsilon} := \sum_{j<J^\varepsilon} \dot{\Delta}_j f \quad \text{and} \quad f^{h,\varepsilon} := \sum_{j\ge J^\varepsilon} \dot{\Delta}_j f.$$

相应地，我们定义频率限制 Besov 半范数

$$\|f\|^{\ell,\varepsilon}_{\dot{\mathbb{B}}^s_{p,1}} := \sum_{j<J^\varepsilon} 2^{js}\|\dot{\Delta}_j f\|_{L^p} \quad \text{and} \quad \|f\|^{h,\varepsilon}_{\dot{\mathbb{B}}^s_{2,1}} := \sum_{j\ge J^\varepsilon} 2^{js}\|\dot{\Delta}_j f\|_{L^2}.$$

通过引入额外的中间频率区域，第 3.1 节进一步细化了这一分解。

2.3 主要结果

我们引入以下泛函

$$X^\varepsilon(t) := X^{\ell,\varepsilon}(t) + X^{h,\varepsilon}(t),$$

其中

$$X^{\ell,\varepsilon}(t) := \|c\|^\ell_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1})\cap L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}+2}_{p,1})} + \varepsilon\|v\|^\ell_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1})} + \|v\|^\ell_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1})\cap L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}+1}_{p,1})} + \frac{1}{\varepsilon}\|\mathcal{W}\|^\ell_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1})},$$

其中 $\mathcal{W} = v + \check{\gamma}(c+\bar{c})\nabla c$ 且

$$X^{h,\varepsilon}(t) := \varepsilon\|c\|^h_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} + \frac{1}{\varepsilon}\|c\|^h_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} + \varepsilon^2\|v\|^h_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} + \|v\|^h_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}.$$

我们还用 E_0^ε 表示与范数 X_0^ε 对应的初始数据函数空间，其定义为

$$X_0^\varepsilon := \|(c_0, \varepsilon v_0)\|^\ell_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1}} + \|(\varepsilon c_0, \varepsilon^2 v_0)\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}.$$

我们首先给出小初始数据下的整体适定性结果。

定理 2.1。 设 $d \geq 1$ 和 $p \in [2, \infty)$。存在一个 $\eta > 0$ 和一个 $k_0 \in \mathbb{Z}$，使得对于所有 $\varepsilon > 0$, 若

$$\|(c_0, \varepsilon v_0)\|^{\ell,\varepsilon}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1}} + \|(\varepsilon c_0, \varepsilon^2 v_0)\|^{h,\varepsilon}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}} \leq \eta, \tag{2.10}$$

则柯西问题 *(2.8)* 存在唯一的全局时间解 (c, v) ，满足对于所有 $t > 0$,

$$X^\varepsilon(t) \leq C X_0^\varepsilon,$$

其中 $C > 0$ 是一个普适常数。

注 2.1。 在定理 *4.1* 中，我们去除了 d 和 p 关于 (1.6) 的限制条件，这些限制条件出现在 *[12]*中。这使我们能够为更广泛的初始数据构造全局时间解，并证明相应的弛豫极限。

注 2.2。 事实上，我们的计算得出了一个更一般的结果，见定理 *4.1*。在该定理中，我们定义了若干中间频率区域，以便精确描述频率相互作用，并强化对初始数据的假设。这些额外的频率区域是我们证明的关键要素，使我们能够改进空间可积性参数 p的上界。关于证明策略的详细描述，参见第 *2.5* 节。

接下来，我们证明定理 4.1 中构造的解强收敛于多孔介质方程的解。

定理 2.2. 设 $d \geq 1$, $p \in [2, \infty)$ 与 (c, v) 为定理 *2.1* 中对应于初始数据 $(c_0, v_0) \in E_0$ 的解。设 $\mathcal{N} \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^+; \dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1}) \cap L^1(\mathbb{R}^+; \dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}+2}_{p,1})$ 为 (1.4) 对应于初始数据 $\mathcal{N}_0 \in \dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1}$ 的相应全局解（见命题 *5.1*）。设ρ 与 ρ_0 为通过关系式 (2.7) 与 (1.2) 对应于 c 与 c_0 的密度。

假设

$$\|\rho_0^\varepsilon - \mathcal{N}_0\|_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\delta}_{p,1}} \leq C\varepsilon^\delta \quad for \ \delta \in (0, 1].$$

则当 $\varepsilon \to 0$ 时，我们有

$$\rho^\varepsilon - \mathcal{N} \longrightarrow 0 \quad strongly\ in \quad L^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\delta}_{p,1}) \cap L^{\frac{2}{1+\delta}}(\mathbb{R}^+; \dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}+1}_{p,1}),$$

and

$$v^\varepsilon + \frac{\nabla P(\rho^\varepsilon)}{\rho^\varepsilon} \longrightarrow 0 \quad strongly\ in \quad L^1(\mathbb{R}^+; \dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1}).$$

此外，我们有以下定量误差估计：对于 $\delta \in$ $(0, 1]$ 和 $r \in [1, 2)$，

$$\|\rho^\varepsilon - \mathcal{N}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\delta}_{p,1}) \cap L^{\frac{2}{1+\delta}}(\mathbb{R}^+; \dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}+1}_{p,1})} \leq C\varepsilon^\delta \quad and \quad \left\| v^\varepsilon + \frac{\nabla P(\rho^\varepsilon)}{\rho^\varepsilon} \right\|_{L^r(\mathbb{R}^+; \dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1})} \leq C\varepsilon.$$

注 2.3。 定理 *2.2* 中得到的收敛率取决于对初始数据所要求的正则性。在 $\delta = 1$ 的情形下，我们得到 *[12]* 中的收敛率，但适用于更广范围的空间可积性参数 p。

注 2.4. 本文所发展的混合函数框架与新的频率分裂技术也可推广到满足 *(SK)* 条件的形如 (1.5) 的一般部分耗散系统。为此，需要将本文的论证与 *[12, 15]* 中的论证结合起来。

2.4 关于可压缩 Navier–Stokes 方程的混合函数框架

混合函数框架已被用于研究各类偏微分方程，包括双曲–抛物型系统，例如可压缩 Navier–Stokes 方程，参见 Danchin 与 Charve [5] 以及 Chen、Miao 与 Zhang [7]。在他们的设定中，解的低频部分在基于 L^2 的空间中处理，而高频部分则在 L^p 空间中处理。这些工作中出现了类似于条件 (1.6) 的上界。然而，利用本文所发展的技术可能无法去掉这一条件。事实上，在估计两个高频局部化函数之乘积的低频部分时，可能会出现覆盖整个频率范围的项。因此，对 p 的上界似乎不可避免，因为形如 $\dot{\mathbb{B}}^{d/p}_{p,1} \hookrightarrow \dot{\mathbb{B}}^{d/2}_{2,1}$ 的嵌入对 $p > 2$ 并不成立。关于这一问题的进一步说明可见第 2.5 节与注 2.5。

我们还要指出 Guo、第二作者和 Yang [18], 的近期工作，该工作利用色散估计，并对初始数据的低频部分作出更强的正则性假设，从而扩展了 p 的适用范围。我们认为，带阻尼的可压缩欧拉系统也可以进行类似的分析，因为预计高频区域会出现色散现象。

2.5 证明策略

2.5.1 线性化系统的谱分析

我们对与 (2.8) 相关的线性系统进行谱分析，其中 $\check{}\gamma\bar{c} = 1$:

$$\begin{cases} \partial_t c + \operatorname{div} v = 0, \\ \varepsilon^2 \partial_t v + \nabla c + v = 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

对系统 (2.11) 应用傅里叶变换，可得 $\Omega = (c,\ v)$ 满足 s

$$\partial_t \widehat{\Omega} + H(\xi)\widehat{\Omega} = 0 \qquad \text{with} \quad H(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & i\xi \\ i\xi & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}.$$

$H(\xi)$ 的两个特征值渐近表现为

- 对于 $|\xi| \ll \varepsilon^{-1}$: $\lambda_+ \sim \varepsilon^{-1}$, $\lambda_- \sim \varepsilon|\xi|^2$;
- 对于 $|\xi| \gg \varepsilon^{-1}$: $\Re(\lambda_\pm) \sim \varepsilon^{-1}$。

在高频，我们观察到整个解以速率 $1/\varepsilon$ 指数衰减；而在低频，一个模态被指数阻尼，另一个模态的行为如同热核。

为了用能量方法刻画此类部分耗散系统在高频下的耗散行为，我们将本着渐近强制性理论的精神构造李雅普诺夫泛函，见 [2, 11, 14, 38]。由于该问题具有双曲性，这类能量估计被限制在基于 L^2的空间中，以避免损失一个导数。

在低频情形下，采用标准的次强制性方法无法刻画真实的谱动力学，因为它会使两个分量都呈现类热行为。关键在于，对于 $|\xi| \leq \varepsilon^{-1}$，特征值为纯实数，因此人们期望能够（部分）解耦该系统，从而刻画两种模态所表现的不同行为。这一现象在 [11, 12] 中得到强调，并受到Hoff [20] 与Haspot [19] 关于为可压缩 Navier–Stokes 系统引入有效速度的工作的启发。定义阻尼模态 $w = v + \nabla c$后，系统(2.11)可改写为

$$\begin{cases} \partial_t c - \Delta c = -\operatorname{div} w, \\ \varepsilon \partial_t w + \dfrac{w}{\varepsilon} = -\varepsilon \nabla \Delta c - \varepsilon \nabla \operatorname{div} w. \end{cases} \tag{2.12}$$

在 (2.12) 中，左端项完美地体现了谱行为。至于右端项，由于它们是高阶项，在低频区域 $|\xi| \leq \varepsilon^{-1}$ 中，可借助 Bernstein 型不等式将其吸收到左端的耗散项中。特别地，这一表述直接给出了 w 的 $\mathcal{O}(\varepsilon)$ 界，这是论证弛豫极限的关键要素。此外，由于耗散效应现在彼此解耦，可以分别在基于 L^p 的空间中估计两个方程。

2.5.2 精细频率分解

鉴于上一节的分析，自然会考虑一种混合函数框架，其中对于某个阈值 $J \in \mathbb{Z}$,

在低频区域（$|\xi| \leq J$）进行 • L^p 估计,

在高频区域（$|\xi| \geq J$）进行 • L^2 估计。

在线性情形下，这种方法对任意 $p \in [2, \infty)$都成立。非线性情形则更为复杂，因为在估计非线性项时，低频与高频之间会产生相互作用，因此需要对参数 p 施加额外限制。下文将阐明 i) 这些限制条件从何而来，以及 ii) 在哪些情况下可以放宽这些限制。

i) 关于 p。设 f，$g \in \mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^d)$。在低频区域估计形如 fg 的非线性项时，无需对 p 施加额外约束。事实上，在估计诸如 $\|fg\|^{\ell}_{\dot{\mathbb{B}}^{d/p}_{p}}$ 的非线性项时，我们使用以下分解[1]

$$\|fg\|^{\ell}_{\dot{\mathbb{B}}^{d/p}_{p,1}} \lesssim \|f^\ell g^\ell\|^{\ell}_{\dot{\mathbb{B}}^{d/p}_{p,1}} + \|f^h g^\ell\|^{\ell}_{\dot{\mathbb{B}}^{d/p}_{p,1}} + \|f^\ell g^h\|^{\ell}_{\dot{\mathbb{B}}^{d/p}_{p,1}} + \|f^h g^h\|^{\ell}_{\dot{\mathbb{B}}^{d/p}_{p,1}}. \tag{2.13}$$

在这些项中，最棘手的是 $\|f^h g^h\|^{\ell}_{\dot{\mathbb{B}}^{d/p}_{p,1}}$，因为高频分量

是在不同于低频分量的函数空间框架中得到控制的。然而，通过使用如下形式的嵌入，可以克服这一困难

$$\dot{\mathbb{B}}^{d/2}_{2,1} \hookrightarrow \dot{\mathbb{B}}^{d/p}_{p,1}, \qquad \text{for all } p \geq 2, \tag{2.14}$$

这使我们能够在基于 L^2 的空间中估计非线性项的高频贡献。

在相反的情形下，由于反向嵌入不成立，要估计形如

$$\|f^\ell g^\ell\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{d/2+1}_{2,1}}$$

的高频项，需要使用 H¨older 型不等式

$$L^p \times L^{p^*} \to L^2, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = \frac{1}{2},$$

并结合嵌入

$$\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p^*}}_{p,1} \hookrightarrow L^{p^*}, \qquad p^* = \frac{2p}{p-2}, \qquad p \leq p^*.$$

条件 $p \leq p^*$ 给出了 (1.6) 中的约束 $p \leq 4$。

正则性方面的考量导致了 (1.6) 中的限制条件 $p \leq \frac{2d}{d-2}$。在该频段，我们分析所采用的自然函数空间框架是空间 $\dot{\mathbb{B}}^{p}_{p,1}$。然而，使用嵌入 $\dot{\mathbb{B}}^{p-p^*}_{p,1} \hookrightarrow L^{p^*}$ 会导致无法控制解的低频分量，因为

$$\frac{d}{p} - \frac{d}{p^*} < \frac{d}{p}.$$

在实际处理中，我们通过将上述嵌入应用于解的梯度，而非解本身，来解决这一困难。因此，必须控制解在空间 $\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p^*}+1}_{p,1}$ 中的范数，这要求施加条件

$$\frac{d}{p} - \frac{d}{p^*} + 1 > \frac{d}{p}.$$

该不等式给出了 (1.6) 中的第二个约束条件。

ii) 去除约束条件。为了放宽对 p 的限制，我们更精细地分析频率相互作用。形如 $(f^\ell g^\ell)^h$ 的项可以表示为

$$(f^\ell g^\ell)^h = \sum_{\substack{2^j \geq J \\ 2^{j_1}, 2^{j_2} \leq J}} \dot{\Delta}_j(\dot{\Delta}_{j_1} f \dot{\Delta}_{j_2} g) = \sum_{\substack{2^j \geq J \\ 2^{j_1}, 2^{j_2} \leq J}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\Big(\frac{|\xi|}{2^j}\Big)\widetilde{\varphi}\Big(\frac{|\xi-\eta|}{2^{j_1}}\Big)\varphi\Big(\frac{|\eta|}{2^{j_2}}\Big)\widehat{f}(\xi-\eta)\widehat{g}(\eta)d\eta.$$

一个关键的观察是，存在某个固定常数 $1 \gg a_0 > 0$，使得

$$\sum_{2^j \geq J,\, 2^{j_1}, 2^{j_2} \leq J} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\Big(\frac{|\xi|}{2^j}\Big)\widetilde{\varphi}\Big(\frac{|\xi-\eta|}{2^{j_1}}\Big)\varphi\Big(\frac{|\eta|}{2^{j_2}}\Big)\widehat{f}(\xi-\eta)\widehat{g}(\eta)d\eta$$

$$= \sum_{\substack{2^j \geq J,\, 2^{j_1},\, 2^{j_2} \leq J \\ \max\{2^{j_1},2^{j_2}\} \geq a_0 J}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\Big(\frac{|\xi|}{2^j}\Big)\widetilde{\varphi}\Big(\frac{|\xi-\eta|}{2^{j_1}}\Big)\varphi\Big(\frac{|\eta|}{2^{j_2}}\Big)\widehat{f}(\xi-\eta)\widehat{g}(\eta)d\eta. \tag{2.15}$$

事实上，若 $\max\{2^{j_1}, 2^{j_2}\} < a_0 J$，根据 φ 的定义，我们可得

$$|\xi| \in [\frac{3}{4}J, \infty), \quad |\xi-\eta| \in [0, \frac{8}{3}a_0 J) \quad \text{and} \quad |\eta| \in [0, \frac{8}{3}a_0 J).$$

利用三角不等式可得

$$|\xi| \leq \big||\xi-\eta| + |\eta|\big| < \frac{16}{3}a_0 J,$$

只要将 a_0 取足够小，这就与 $|\xi| \geq \frac{3}{4}J$ 矛盾。 –

由 (2.15) 可知，对于形如 $(f^\ell g^\ell)^h$ 的高–低–低频相互作用，因子 f 或 g 中至少有一个必须局部化在中间频率范围 $[a_0 J,\, J]$ 内。该区间与零保持一定距离，且仅包含有限个集中在尺度 J 附近的二进块。因此，乘积 $(f^\ell g^\ell)^h$ 不可能产生任意高的频率，因为它的支集位于远离零点的相对狭窄频带内。

等式 (2.15) 表明，可以在低频区域和高频区域的交界处引入一个中频区域，用以收集由非线性交互产生、逃离高频区域但又未覆盖整个低频范围的频率。更具体地说，我们将考虑一个中频区域，在其中解处于基于 L^{p_1} 的框架下，并满足 $p_1 \in (2, p)$。随后，可以先在中频区域与高频区域之间应用 H¨older 不等式进行非线性分析，从而得到对中间指标 p_1 的限制。接着，在中频区域与低频区域之间进行类似分析，将得到对 p 较宽松的限制。之后可以通过引入足够多的中频区域迭代这一论证，最终达到任意 $p \in [2, \infty)$。

接下来，我们首先通过展示如何达到情形 $p = 6$来说明这一机制。为简单起见，我们忽略正则性问题，而只关注 Lebesgue 框架和 H¨older 型论证。

情形$\mathbf{p = 6}$：在这种情况下，最简单的选择是插入一个中频区域，使解在 L^{p_1} 中有界，并满足 $p_1 = 3$。对于某个常数 a_0，频率分解如图 1 所示。

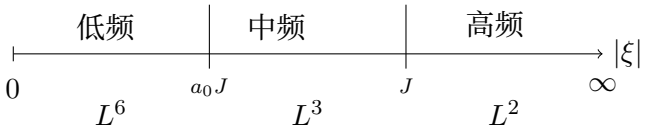


图 1： $p = 6$的频率分解图。

- 在高频区域，对于固定的 J，可以证明 $\|f^\ell g^\ell\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^s_{2,\,1}} = 0$，按照

用于得到（2.15）的论证。因此，非线性项可以分解为

$$\|fg\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^s_{2,1}} = \|f^\ell g^m\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^s_{2,1}} + \|f^m g^\ell\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^s_{2,1}} + \text{Remainders}.$$

对于前两项，我们采用 [11, 12] 中的常用方法。例如，我们有

$$\|f^\ell g^m\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^s_{2,1}} \lesssim \|f\|^\ell_{L^{p_1^*}} \|g\|^m_{\dot{\mathbb{B}}^s_{p_1,1}}, \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^*}$$

因此 $p_1^* \geq 6$。

- 在中频区域，我们有

$$\|fg\|^m_{\dot{\mathbb{B}}^s_{p_1,1}} = \|f^\ell g^\ell\|^m_{\dot{\mathbb{B}}^s_{p_1,1}} + \text{Remainders}.$$

应用 H¨older 不等式，我们得到

$$\|f^\ell g^\ell\|^m_{\dot{\mathbb{B}}^s_{p_1,1}} \lesssim \|f\|^\ell_{L^{\widetilde{p}_1^*}} \|g\|^\ell_{\dot{\mathbb{B}}^s_{6,1}}, \quad \frac{1}{p_1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{\widetilde{p}_1^*}.$$

因此，这要求满足限制条件 $\widetilde{p}_1^* \geq 6$。注意，选择 $p_1 = 3$ 可得 p_1^*，$\widetilde{p}_1^* \geq 6$，因此前面的 H¨older 估计有效。现在，所有出现的低频项都属于 L^p-型空间，且满足 $p = 6$。

- 在低频区域，我们回顾一下，使用 (2.14) 型嵌入就足以控制非线性项。

情形 p $< \infty$：若要达到更大的指标 p，我们需要加入额外的中频区域，每个区域对应不同的空间可积性参数（p_i）$_{i=1,\dots,R}$。第一个中频区域收集由非线性交互产生、脱离高频区域但尚未覆盖整个低频范围的频率。第二个中频区域收集由非线性交互产生、脱离第一个中频区域但尚未覆盖整个低频范围的频率。重复这一过程，直至引入足够数量的中频区域，以达到所需的可积性。频率分解如图2所示。

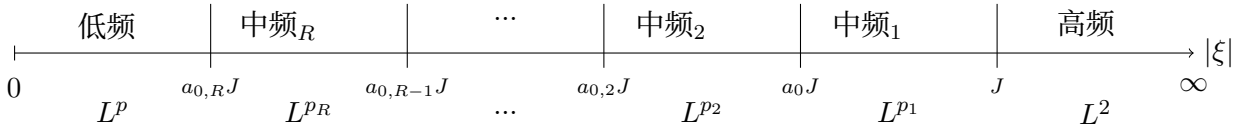


图2： $p < \infty$的频率分解图。

与情形 $p = 6$ 一样，通过选取$a_{0,1}$ 充分小，我们能够消去“高-低-低”型的频率相互作用。然后，选取某个 $a_{0,i}$，并对 $i = 2, \dots, R$ 取适当小的值，我们可以消去“中-低-低”型的相互作用。我们给出若干问题项的分析：

- 高-中$_1$-低相互作用：

$$\|f^\ell g^{m_1}\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^s_{2,1}} \lesssim \|f\|^\ell_{L^{p_1^*}} \|g\|^m_{\dot{\mathbb{B}}^s_{p_1,1}}, \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^*}.$$

- 中频$_i$-中频$_{i+1}$-低频相互作用：

$$\|f^\ell g^{m_{i+1}}\|^{m_i}_{\dot{\mathbb{B}}^s_{p_i,1}} \lesssim \|f\|^\ell_{L^{p_{i+1}^*}} \|g\|^m_{\dot{\mathbb{B}}^s_{p_{i+1},1}}, \quad \frac{1}{p_i} = \frac{1}{p_{i+1}} + \frac{1}{p_{i+1}^*}.$$

- 中频$_R$-低频-低频相互作用：

$$\|f^\ell g^\ell\|^{m_R}_{\dot{\mathbb{B}}^s_{p_R,1}} \lesssim \|f\|^\ell_{L^{p^*}} \|g\|^\ell_{\dot{\mathbb{B}}^s_{p,1}}, \quad \frac{1}{p_R} = \frac{1}{p^*} + \frac{1}{p}.$$

为了使上述 H¨older 不等式成立，我们需要序列 $(p_i)_{i=1,\ 2..R}$满足

$$p_1 \le \frac{2p}{p-2}, \quad p_{i+1} \le \frac{p_i p}{p - p_i} \quad \text{and} \quad p_R \le \frac{p}{2}. \tag{2.16}$$

在条件 (2.16) 下，我们有

$$\|f\|^\ell_{L^{p_1^*}} + \|f\|^\ell_{L^{p_{i+1}^*}} + \|f\|^\ell_{L^{p^*}} \lesssim \|f\|^\ell_{L^p}. \tag{2.17}$$

这确保了所有低频项都能在 L^p-型空间中得到控制，从而放宽了 (1.6) 中的约束 $p \le 4$。至于 (1.6) 中的条件 $p \le \frac{2d}{d-2}$，采用相同的频率分解，并适当选取序列 (p_i) 使得

$$p_1 \le \frac{2d}{d-2}, \quad p_{i+1} \le \frac{p_i d}{d - p_i} \quad \text{and} \quad p \le \frac{p_R d}{d - p_R},$$

即可消除第二个约束。

可采用的序列 (p_i) 的一般类别在定义 4.1 中给出。

注 2.5. 与我们研究中处理的情形相反，可压缩 *Navier–Stokes* 方程的分析顺序是颠倒的：L^p 估计在高频区域 $(|\xi| \le J)$ 进行，而低频区域 $(|\xi| \ge J)$ 则限制为 L^2。在此背景下，*[7, 19]* 中观察到的关于 p (1.6) 的限制条件，是由形如 $(f^h g^h)^\ell$ 的项导致的，对应于

$$\sum_{2^j \le J,\, 2^{j_1}, 2^{j_2} \ge J} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\Big(\frac{|\xi|}{2^j}\Big) \widetilde{\varphi}\Big(\frac{|\xi-\eta|}{2^{j_1}}\Big) \varphi\Big(\frac{|\eta|}{2^{j_2}}\Big) \widehat{f}(\xi-\eta)\, \widehat{g}(\eta)\, d\eta.$$

对于这一项，傅里叶支集并不像我们的情形那样消失，因为可以同时有 $|\xi| \to 0$以及 $|\xi - \eta|$ 和 $|\eta| \to \infty$。换言之，在估计两个局部化于高频的函数之乘积的低频分量时，会出现覆盖整个频率范围的贡献。因此，我们并不期望使用与上文类似的频率分解，能够在研究可压缩 *Navier–Stokes* 方程时去掉对 p 的限制条件。

2.6 论文结构

在第3节中，我们陈述适用于我们这一混合函数框架的新的乘积估计与交换子估计。第4节和第5节分别用于证明定理 2.1 和定理 2.2。新的乘积估计与交换子估计的证明收录于附录。

3 非经典乘积与交换子估计

本节将介绍一类新的乘积与交换子估计，它们是我们证明的基石。

3.1 精细函数空间

对于任意 $f \in \mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^d)$，我们定义

$$f := f^\ell + \sum_{i=1}^{R} f^{m_i} + f^h$$

with

$$f^\ell := \sum_{j<J^\varepsilon - N_0 R} \dot{\Delta}_j f, \quad f^{m_i} := \sum_{j\in J_i^\varepsilon} \dot{\Delta}_j f, \quad f^h := \sum_{j\geq J^\varepsilon} \dot{\Delta}_j f,$$

其中，$J^\varepsilon \in \mathbb{Z}$ 对应于中频区域 m_1 与高频区域之间的阈值，$R \in \mathcal{N}$ 对应于中频区域的数量，N_0 是某个固定的正常数，而 J_i^ε 定义为

$$J_i^\varepsilon := \big\{ j \in \mathbb{Z}, j \in [J^\varepsilon - N_0 i, J^\varepsilon - N_0(i-1)[\big\}.$$

我们还引入，对于 a，$b \in [1, R]$,

$$f^{[\ell,m_a]} := \sum_{j<J^\varepsilon - N_0(a-1)} \dot{\Delta}_j z, \quad f^{[m_b,h]} := \sum_{j\geq J^\varepsilon - N_0 b} \dot{\Delta}_j z, \quad f^{[m_a,m_b]} := \sum_{j\in J^\varepsilon_{[a,b]}} \dot{\Delta}_j z,$$

其中 $J_{[a,b]}$ 定义为

$$J^\varepsilon_{[a,b]} := \big\{ j \in \mathbb{Z}, j \in [J^\varepsilon - N_0 a, J^\varepsilon - N_0(b-1)[\big\}.$$

因此，我们定义频率限制 Besov 半范数

$$\|z\|^\ell_{\dot{\mathbb{B}}^s_{p,1}} := \sum_{j<J^\varepsilon - N_0 R} 2^{js} \|\dot{\Delta}_j z\|_{L^p}, \quad \|z\|^{m_i}_{\dot{\mathbb{B}}^s_{p_i,1}} := \sum_{j\in J_i^\varepsilon} 2^{js} \|\dot{\Delta}_j z\|_{L^{p_i}},$$

$$\|z\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^s_{2,1}} := \sum_{j\geq J^\varepsilon} 2^{js} \|\dot{\Delta}_j z\|_{L^2},$$

and

$$\|z\|^{[\ell,m_a]}_{\dot{\mathbb{B}}^s_{p,1}} := \|z\|^\ell_{\dot{\mathbb{B}}^s_{p,1}} + \sum_{i=a}^{R} \|z\|^{m_i}_{\dot{\mathbb{B}}^s_{p_i,1}}, \quad \|z\|^{[m_a,m_b]}_{\dot{\mathbb{B}}^s_{p,1}} := \sum_{i=b}^{a} \|z\|^{m_i}_{\dot{\mathbb{B}}^s_{p_i,1}},$$

$$\|z\|^{[m_b,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^s_{p,1}} := \sum_{i=1}^{b} \|z\|^{m_i}_{\dot{\mathbb{B}}^s_{p_i,1}} + \|z\|^{h}_{\dot{\mathbb{B}}^s_{2,1}}.$$

3.2 乘积与交换子定律

我们引入适用于混合函数框架的乘积估计和交换子估计。

引理 3.1. 设 $d \geq 1$, $s > 0$ 和 $p \in [2, \infty)$。假设 $\{p_i\}_{i\in[1,R]} \in (2, p)$ 是递增序列，并令 f, $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$。

1. 高频乘积定律：对于固定的 $s, s_1, s_2 > 0$，若 p_1 满足以下条件

$$s + \frac{2d}{p_1} - \frac{d}{2} > 0, \quad p_1 > \frac{2p}{p-2}, \quad s - \frac{d}{2} = s_1 + s_2 - \frac{2d}{p_1}, \tag{3.18}$$

则存在一个整数 $N_0 > 0$，使得

$$\sum_{j\geq J^\varepsilon} 2^{js}\|\dot{\Delta}_j(fg)\|_{L^2} \leq C\Big(\|f\|^{[\ell,m_1]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p_1^*}}_{p,1}} \|g\|^{m_1}_{\dot{\mathbb{B}}^s_{p_1,1}} + \|f\|_{L^\infty}\|g\|^{h}_{\dot{\mathbb{B}}^s_{2,1}} + \|g\|^{[\ell,m_1]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p_1^*}}_{p,1}} \|f\|^{m_1}_{\dot{\mathbb{B}}^s_{p_1,1}} + \|g\|_{L^\infty}\|f\|^{h}_{\dot{\mathbb{B}}^s_{2,1}} + \|f\|^{[m_1,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{s_1}_{p_1,1}} \|g\|^{[m_1,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{s_2}_{p_1,1}}\Big),$$

其中 $\frac{1}{2} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^*}$，常数 C 取决于 R, s, p, p_i 和 d。

2. 中频乘积定律：对于固定的 $s, s_1, s_2 > 0$ 和 $p_i \in (2, p)$，若 p_{i+1} 满足以下条件

$$s + \frac{2d}{p_{i+1}} - \frac{d}{p_i} > 0, \quad p_{i+1} > \frac{p_i p}{p - p_i}, \quad s - \frac{d}{p_i} = s_1 + s_2 - \frac{2d}{p_{i+1}} \tag{3.19}$$

那么存在一个整数 N_0，使得

$$\sum_{j\in J_i} 2^{js}\|\dot{\Delta}_j(fg)\|_{L^{p_i}} \leq C\Big(\|f\|^{[\ell,m_{i+1}]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p_{i+1}^*}}_{p,1}} \|g\|^{m_{i+1}}_{\dot{\mathbb{B}}^s_{p_{i+1},1}} + \|f\|_{L^\infty}\|g\|^{[m_i,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^s_{p_i,1}} + \|g\|^{[\ell,m_{i+1}]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p_{i+1}^*}}_{p,1}} \|f\|^{m_{i+1}}_{\dot{\mathbb{B}}^s_{p_{i+1},1}} + \|g\|_{L^\infty}\|f\|^{[m_i,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^s_{p_i,1}} + \|f\|^{[m_{i+1},h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{s_1}_{p_{i+1},1}} \|g\|^{[m_{i+1},h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{s_2}_{p_{i+1},1}}\Big)$$

where $\frac{1}{p_i} = \frac{1}{p_{i+1}} + \frac{1}{p_{i+1}^*}$.

引理 3.2. 设 $d \geq 1$、$s > 0$ 和 $p \in [2, \infty)$。假设 $(p_i)^{i\in[1,R]} \in (2,\ p)$ 是一个递增序列，并令 f、$g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$。对于 $j \in \mathbb{Z}$，记 $\mathfrak{R}_j \triangleq \dot{S}_{j-1}f\,\dot{\Delta}_j g - \dot{\Delta}_j(fg)$。

1. 高频交换子估计：对于固定的 s、s_1、$s_2 > 0$，若 p_1 满足(3.18)，则存在一个仅依赖于 s、p 和 d 的常数 C，使得

$$\sum_{j\geq J^\varepsilon} 2^{js}\|\mathfrak{R}_j\|_{L^2} \leq C\Big(\|\nabla f\|^{[\ell,m_1]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p_1^*}}_{p,1}} \|g\|^{m_1}_{\dot{\mathbb{B}}^{s-1}_{p_1,1}} + \|\nabla f\|_{L^\infty}\|g\|^{h}_{\dot{\mathbb{B}}^{s-1}_{2,1}} + \|g\|^{[\ell,m_1]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p_1^*}}_{p,1}} \|f\|^{m_1}_{\dot{\mathbb{B}}^s_{p_1,1}} + \|g\|_{L^\infty}\|f\|^{h}_{\dot{\mathbb{B}}^s_{2,1}} + \|g\|^{[m_1,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{s_1}_{p_1,1}} \|f\|^{[m_1,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{s_2}_{p_1,1}}\Big).$$

2. 中频交换子估计：对于固定的 s、 s_1、 $s_2>0$ 和 $p_i\in(2、\ p)$，若 p_{i+1}满足以下条件 *(3.19)*，则存在一个仅依赖于 s、 p 和d的常数 C ，使得

$$\sum_{j\in J_i}2^{js}\|\mathfrak{R}_j\|_{L^{p_i}}\le C\Big(\|\nabla f\|^{[\ell,m_{i+1}]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p^*_{i+1}}}_{p,1}}\|g\|^{m_{i+1}}_{\dot{\mathbb{B}}^{s-1}_{p_{i+1},1}}+\|\nabla f\|_{L^\infty}\|g\|^{[m_i,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{s-1}_{p_i,1}}+\|g\|^{[\ell,m_{i+1}]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p^*_{i+1}}}_{p,1}}\|f\|^{m_{i+1}}_{\dot{\mathbb{B}}^{s}_{p_{i+1},1}}$$
$$+\|g\|_{L^\infty}\|f\|^{[m_i,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{s}_{p_i,1}}+\|g\|^{[m_{i+1},h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{s_1}_{p_{i+1},1}}\|f\|^{[m_{i+1},h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{s_2}_{p_{i+1},1}}\Big).$$

上述引理的证明见附录 A。

4 定理 2.1 的证明

本节旨在证明定理 2.1。事实上，我们的分析得出了以下更一般的结论，它直接蕴含定理 2.1。

定理 4.1。 令 $d\ge1$, $p\in[2,\infty)$, $\varepsilon>0$。假设 $(c_0,v_0)\in E_0$。存在一个$\eta>0$、一个 $k_0\in\mathbb{Z}$、一个 $R>0$ 以及一个递增序列 $(p_i)_{i=1,\dots,R}$ （依赖于 d 和 p），使得若

$$X_0\le\eta,\tag{4.20}$$

其中 X_0 由式 *(4.22)* 给出，则柯西问题 *(2.8)* 存在唯一的全局时间解 (c,v) ，满足

$$(c,\varepsilon v)^{\ell,J^\varepsilon}\in L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1}),\ (\nabla c,v)^{\ell,J^\varepsilon}\in L^1(\mathbb{R}^+;\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}+1}_{p,1}),\ \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{W}^\ell\in L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1})$$
$$(c,\varepsilon v)^{m_i,J^\varepsilon}\in L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1}),\ (\nabla c,v)^{m_i,J^\varepsilon}\in L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}+1}_{p_i,1}),\ \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{W}^{m_i}\in L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1})$$
$$(\varepsilon c,\varepsilon^2 v)^{h,J^\varepsilon}\in L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})\quad and\quad(\frac{1}{\varepsilon}c,v)^{h,J^\varepsilon}\in L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}).$$

此外，我们有一致估计

$$X(t)\le CX_0,$$

其中 $X(t)$ 定义于 (4.21) 中，且 $C>0$ 是一个普适常数。

在定理 4.1 中，我们引入了以下泛函:

$$X(t):=X^\ell(t)+\sum_{i=1}^R X^{m_i}(t)+X^h(t),\tag{4.21}$$

其中

$$X^\ell(t):=\|c\|^\ell_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1})\cap L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}+2}_{p,1})}+\varepsilon\|v\|^\ell_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1})}+\|v\|^\ell_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1})\cap L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}+1}_{p,1})}+\frac{1}{\varepsilon}\|\mathcal{W}\|^\ell_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1})},$$

$$X^{m_i}(t) := \|c\|^{m_i}_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1})\cap L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}+2}_{p_i,1})} + \varepsilon\|v\|^{m_i}_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1})} + \|v\|^{m_i}_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1})\cap L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}+1}_{p_i,1})} + \frac{1}{\varepsilon}\|\mathcal{W}\|^{m_i}_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1})}$$

and

$$X^h(t) := \varepsilon\|c\|^h_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} + \frac{1}{\varepsilon}\|c\|^h_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} + \varepsilon^2\|v\|^h_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} + \|v\|^h_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}.$$

我们还用 E_0 表示与由 b 定义的范数 X_0 相对应的函数空间 y

$$X_0 :=\|(c_0,\varepsilon v_0)\|^\ell_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1}} + \sum_{i=1}^{R}\|(c_0,\varepsilon v_0)\|^{m_i}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1}} + \|(\varepsilon c_0,\varepsilon^2 v_0)\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}. \tag{4.22}$$

注记4.1。 与定理 *2.1* 相比，定理 *4.1* 对初始数据的中频分量施加了较弱的可积性假设。在定理 *2.1* 中，假设整个中频区域属于 L^2；而在定理 *4.1* 中，只要求这些分量属于 L^{p_i} 空间，其中所用序列 (p_i)需满足适当条件。

注记4.2。 我们在定理 *4.1* 中采用的容许序列$(p_i)_{i=1,\dots,R}$ 由定义 *4.1* 指定。其构造对于拓展空间可积性指标 p的容许范围起着核心作用。每个元素 p_i 对应于低频区域与高频区域之间插入的某个中频区域所关联的可积性指标。这些中间尺度使我们能够借助 *H¨older* 型估计逐步拓展可积性范围。

注记4.3。 在定理 *4.1* 中，关于初始数据的条件 (2.10) 取决于序列 (p_i)的选择。通过在中频区域施加额外的正则性，可以简化该条件。定理 *2.1* 展示了这种简化，并且是定理 *4.1* 的直接推论。

定理 4.1 的证明主要依赖于一致先验估计，该估计将在下一小节中给出。

4.1 先验估计

我们首先引入容许序列的概念。该概念对应于中频空间可积性参数的选取，这些参数可用于扩展低频可积性参数 p 的取值范围。

定义 4.1. 令 $p\in(2,\infty)$、 $d\geq 1$ 和 $R\in\mathbb{Z}$ 满足 $R>1$。我们将容许序列的集合 $\mathcal{S}_{p,R}$ 定义如下：
若 $p\in(2,4]$,

$$\mathcal{S}_{p,R} = \Big\{(p_i)_{i=1,\dots,R}\in(2,p), p_i<p_{i+1};\ p_1\leq\frac{2d}{d-2},\ p_{i+1}\leq\frac{p_i d}{d-p_i},\ p\leq\frac{p_R d}{d-p_R}\Big\}.$$

如果 $p\in(4,\infty)$,

$$\mathcal{S}_{p,R} = \Big\{(p_i)_{i=1,\dots,R}\in(2,p), p_i<p_{i+1};\ p_1\leq\min\{\frac{2p}{p-2},\frac{2d}{d-2}\},$$

$$p_{i+1} \le \min\{\tfrac{p_i p}{p-p_i}, \tfrac{p_i d}{d-p_i}\},\ p \le \min\{2p_R, \tfrac{p_R d}{d-p_R}\}\ \Big\}.$$

下面给出一个满足 (2.16) 的序列示例:

$$(p_i)_{i\in[1,R]} = \{p_i = 2 + \frac{4i}{p-2},\ R = \left[\frac{(p-2)(p-4)}{8}\right] + 1\}.$$

本小节的主要目标是证明以下先验估计:

引理 4.1. 设 $d \ge 1$ 和 $p \in (2,\infty)$。假设 $(p_i) \in \mathcal{S}_{p,R}$，且 (c,v) 是系统（2.8）的一组光滑解。以下先验估计成立

$$X(t) \lesssim X_0 + X^2(t) + X^3(t). \tag{4.23}$$

本小节余下部分用于证明引理 4.1。

4.1.1 高频估计

设 $j \ge J^\varepsilon$，并假设 $\gamma = 1$。将局部化算子 Δ_j 作用于系统（2.8），得到

$$\begin{cases} \partial_t c_j + \dot S_{j-1} v\cdot\nabla c_j + \operatorname{div} v_j = R_j^1 + R_j^2 - \dot S_{j-1} c \operatorname{div} v_j, \\ \varepsilon^2\partial_t v_j + \varepsilon^2 \dot S_{j-1} v\cdot\nabla v_j + \nabla c_j + v_j = R_j^3 + R_j^4 - \dot S_{j-1} c\nabla c_j, \end{cases}$$

其中

$$R_j^1 := \dot S_{j-1} v\cdot\nabla\dot\Delta_j c - \dot\Delta_j(v\cdot\nabla c), \quad R_j^2 := \dot S_{j-1} c\operatorname{div}\dot\Delta_j v - \dot\Delta_j(c\operatorname{div} v),$$

$$R_j^3 := \varepsilon^2\big(\dot S_{j-1} v\cdot\nabla\dot\Delta_j v - \dot\Delta_j(v\cdot\nabla v)\big) \quad \text{and} \quad R_j^4 := \dot S_{j-1} c\nabla\dot\Delta_j c - \dot\Delta_j(c\nabla c).$$

与 $(c_j,\ v_j)$ 作 L^2 内积，得到

$$\begin{aligned} \frac12\frac{d}{dt}\|(c_j,\varepsilon v_j)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\|\varepsilon v_j\|_{L^2}^2 &\lesssim \|\nabla v\|_{L^\infty}\|(c_j,\varepsilon v_j)\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \big\|(R_j^1,R_j^2)\big\|_{L^2}\|c_j\|_{L^2} + \Big\|\frac{1}{\varepsilon}(R_j^3,R_j^4)\Big\|_{L^2}\|\varepsilon v_j\|_{L^2}, \end{aligned} \tag{4.24}$$

其中我们用到了

$$\int \dot S_{j-1} v\cdot\nabla c_j\, c_j dx \lesssim \|\nabla v\|_{L^\infty}\|c_j\|_{L^2}^2$$

and

$$\varepsilon^2\int \dot S_{j-1} v\cdot\nabla v_j\, v_j dx \lesssim \|\nabla v\|_{L^\infty}\|\varepsilon v_j\|_{L^2}^2.$$

为了恢复密度的耗散，我们计算以下交叉项的时间导数:

$$2^{-2j}\frac{d}{dt}\langle\nabla c_j,v_j\rangle+\frac{1}{\varepsilon^2}\|c_j\|_{L^2}^2\lesssim\|v_j\|_{L^2}^2+2^{-2j}\frac{1}{\varepsilon^2}\langle\nabla c_j,v_j\rangle$$
$$+2^{-j}\frac{1}{\varepsilon}\left\|Q_j^1\right\|_{L^2}\|\varepsilon v_j\|_{L^2}+2^{-j}\frac{1}{\varepsilon^2}\left\|Q_j^2\right\|_{L^2}\|c_j\|_{L^2},\quad(4.25)$$

其中 $Q^1=v\cdot\nabla c+c\cdot\nabla v$ 和 $Q^2=\varepsilon^2 v\cdot\nabla v-c\cdot\nabla c_\circ$ 利用事实 $2^j\gtrsim 1/\varepsilon$ 可推出$1\lesssim\varepsilon 2^j$, 我们得到

$$\|v_j\|_{L^2}^2=\frac{1}{\varepsilon^2}\|\varepsilon v_j\|_{L^2}^2,\quad 2^{-2j}\frac{1}{\varepsilon^2}\langle\nabla c_j,v_j\rangle\lesssim\frac{1}{\varepsilon}\|c_j\|_{L^2}\|v_j\|_{L^2}\lesssim\frac{1}{\varepsilon^2}(\|c_j\|_{L^2}^2+\|\varepsilon v_j\|_{L^2}^2).$$

因此，将 (4.25) 乘以一个足够小的常数 $\eta>0$ ，并与 (4.24) 相加，可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mathcal{L}_j+\frac{1}{\varepsilon^2}\|(c_j,\varepsilon v_j)\|_{L^2}^2\lesssim\|\nabla v\|_{L^\infty}\|(c_j,\varepsilon v_j)\|_{L^2}^2+\left\|(R_j^1,R_j^2)\right\|_{L^2}\|c_j\|_{L^2}$$
$$+\left\|\frac{1}{\varepsilon}(R_j^3,R_j^4)\right\|_{L^2}\|\varepsilon v_j\|_{L^2}+2^{-j}\frac{1}{\varepsilon}\left\|Q_j^1\right\|_{L^2}\|\varepsilon v_j\|_{L^2}+2^{-j}\frac{1}{\varepsilon^2}\left\|Q_j^2\right\|_{L^2}\|c_j\|_{L^2},\quad(4.26)$$

其中

$$\mathcal{L}_j=\|(c_j,\varepsilon v_j)\|_{L^2}^2+2^{-2j}\langle\nabla c_j,v_j\rangle\sim\|(c_j,\varepsilon v_j)\|_{L^2}^2\quad(4.27)$$

因为 $2^{-2j}\langle\nabla c_j,\ v_j\rangle\lesssim\|c_j\|_{L^2}^2+\|\varepsilon v_j\|_{L^2}^2$.

利用引理 A.1，将其乘以 $2^{(\frac{d}{2}+1)j}$ 并对 $j\geq J^\varepsilon$ 求和，可得

$$\|(c,\varepsilon v)\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}+\frac{1}{\varepsilon^2}\|(c,\varepsilon v)\|^h_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\leq X_0+C\int_0^t\|\nabla v\|_{L^\infty}\|(c,\varepsilon v)\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{p,1}}$$
$$+\int_0^t\Big(\sum_{j\geq J^\varepsilon}2^{(\frac{d}{2}+1)j}\left\|(R_j^1,R_j^2,\frac{1}{\varepsilon}R_j^3,\frac{1}{\varepsilon}R_j^4)\right\|_{L^2}+\sum_{j\geq J^\varepsilon}2^{\frac{d}{2}j}\left\|(\frac{1}{\varepsilon}Q_j^1,\frac{1}{\varepsilon^2}Q_j^2)\right\|_{L^2}\Big),$$

将其乘以 ε，得到

$$X^h(t)\lesssim X_0+\varepsilon\int_0^t\|\nabla v\|_{L^\infty}(\|c\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{p,1}}+\varepsilon\|v\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{p,1}})$$
$$+\varepsilon\int_0^t\Big(\sum_{j\geq J^\varepsilon}2^{(\frac{d}{2}+1)j}\left\|(R_j^1,R_j^2,\frac{1}{\varepsilon}R_j^3,\frac{1}{\varepsilon}R_j^4)\right\|_{L^2}+\sum_{j\geq J^\varepsilon}2^{\frac{d}{2}j}\left\|(\frac{1}{\varepsilon}Q_j^1,\frac{1}{\varepsilon^2}Q_j^2)\right\|_{L^2}\Big).$$

关于非线性项，我们首先断言以下不等式:

$$\|\nabla v\|_{L^1_T(L^\infty)}\lesssim X(t),\quad\varepsilon^2\|\nabla v\|_{L^\infty_T(L^\infty)}\lesssim X(t),\quad\varepsilon\|\nabla a\|_{L^\infty_T(L^\infty)}\lesssim X(t).\quad(4.28)$$

我们仅对第一个不等式给出估计，因为其他项可通过类似的计算处理。我们有

$$\|\nabla v\|_{L^\infty}\lesssim\|v\|^\ell_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}+1}_{p,1}}+\sum_{i=1}^R\|v\|^{m_i}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}+1}_{p_i,1}}+\|v\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}},\quad(4.29)$$

对其进行时间积分后，即可得到所需的不等式。因此我们得到

$$\varepsilon\int_0^t\|\nabla v\|_{L^\infty}(\|c\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{p,1}}+\varepsilon\|v\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{p,1}})\leq\Big(\|v\|^\ell_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}+1}_{p,1})}+\sum_{i=1}^R\|v\|^{m_i}_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}+1}_{p_i,1})}+\|v\|^h_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\Big)$$
$$\cdot\big(\varepsilon\|c\|^h_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\varepsilon^2\|v\|^h_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\big)\lesssim X^2(t).\quad(4.30)$$

因此，我们只需处理交换子 R^i_j 和乘积 Q^i_j。

关于 R^1_j 和 R^2_j的估计。事实上，在引理 3.2 中取 $s=\frac{d}{2}+1$ 可得

$$\sum_{j\geq J^\varepsilon}2^{(\frac{d}{2}+1)j}\|R^1_j\|_{L^2}\leq C\Big(\|\nabla v\|^{[\ell,m_1]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p_1^*}}_{p,1}}\|\nabla c\|^{m_1}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}}_{p_1,1}}+\|\nabla v\|_{L^\infty}\|\nabla c\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}$$
$$+\|\nabla c\|^{[\ell,m_1]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p_1^*}}_{p,1}}\|v\|^{m_1}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{p_1,1}}+\|\nabla c\|_{L^\infty}\|v\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}+\|\nabla c\|^{[m_1,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_1}}_{p_1,1}}\|v\|^{[m_1,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_1}+1}_{p_1,1}}\Big).$$

选取 p_1，使得对于满足 $r>0$的 $r=1-\frac{d}{2}+\frac{d}{p_1}$，自然有

$$\|\nabla(c,v)\|^{[\ell,m_1]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p_1^*}}_{p,1}}\lesssim\varepsilon^r\big(\|(c,v)\|^\ell_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1}}+\sum_{i=1}^R\|(c,v)\|^{m_i}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1}}\big),$$

and

$$\|\nabla c\|^{m_1}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}}_{p_1,1}}\lesssim\varepsilon^{-r}\|c\|^{m_1}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_1}+2}_{p_1,1}},\quad\|v\|^{m_1}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{p_1,1}}\lesssim\varepsilon^{1-r}\|v\|^{m_1}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_1}+1}_{p_1,1}},$$

这意味着

$$\varepsilon\int_0^t\|\nabla v\|^{[\ell,m_1]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p_1^*}}_{p,1}}\|\nabla c\|^{m_1}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}}_{p_1,1}}\lesssim\varepsilon\Big(\|v\|^\ell_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1})}+\sum_{i=1}^R\|v\|^{m_i}_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1})}\Big)\|c\|^{m_1}_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_1}+2}_{p_1,1})}\lesssim X^2(t).\quad(4.31)$$

第二项的处理方式与推导 (4.30) 时相同。对于第三项，我们得到

$$\varepsilon\int_0^t\|\nabla c\|^{[\ell,m_1]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p_1^*}}_{p,1}}\|v\|^{m_1}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{p_1,1}}\lesssim\varepsilon^2\Big(\|c\|^\ell_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1})}+\sum_{i=1}^R\|c\|^{m_i}_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1})}\Big)\|v\|^{m_1}_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_1}+1}_{p_1,1})}\lesssim\varepsilon X^2(t).\quad(4.32)$$

对于第四项，利用 (4.28)，有

$$\varepsilon\int_0^t\|\nabla c\|_{L^\infty}\|v\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\leq\varepsilon\|\nabla c\|_{L^\infty_T(L^\infty)}\|v\|^h_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\lesssim X^2(t).\quad(4.33)$$

最后，对于最后一项，我们得到

$$\varepsilon\int_0^t\|v\|^{[m_1,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_1}+1}_{p_1,1}}\|\nabla c\|^{[m_1,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_1}}_{p_1,1}}\lesssim\varepsilon\Big(\|v\|^{m_1}_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_1}+1}_{p_1,1})}\|c\|^{m_1}_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_1}+1}_{p_1,1})}+\|v\|^{m_1}_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_1}+1}_{p_1,1})}\|c\|^h_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}$$

$$\|v\|^h_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\|c\|^{m_1}_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_1}+1}_{p_1,1})}+\|v\|^h_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\|c\|^h_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\Big)\lesssim X^2(t),$$

其中我们用到了

$$\varepsilon\|v\|^{m_1}_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_1}+1}_{p_1,1})}\lesssim\|v\|^{m_1}_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_1}}_{p_1,1})}\lesssim X(t).$$

因此，我们得到

$$\varepsilon\int_0^t\sum_{j\geq J^\varepsilon}2^{(\frac{d}{2}+1)j}\|R^1_j\|_{L^2}\lesssim X^2(t).\tag{4.34}$$

交换子R^2_j 可以用类似的方法处理。

关于 R^3_j 的估计。我们有

$$\sum_{j\geq J^\varepsilon}2^{(\frac{d}{2}+1)j}\|R^3_j\|_{L^2}\leq C\Big(\|\nabla v\|^{[\ell,m_1]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p_1^*}}_{p,1}}\|\nabla v\|^{m_1}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}}_{p_1,1}}+\|\nabla v\|_{L^\infty}\|\nabla v\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\|\nabla v\|^{[m_1,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_1}}_{p_1,1}}\|v\|^{[m_1,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_1}+1}_{p_1,1}}\Big).$$

利用

$$\varepsilon^2\int_0^t\|\nabla v\|^{[\ell,m_1]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p_1^*}}_{p,1}}\|\nabla v\|^{m_1}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}}_{p_1,1}}\lesssim\varepsilon\Big(\|v\|^{\ell}_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1})}+\sum_{i=1}^R\|v\|^{m_i}_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1})}\Big)\|v\|^{m_1}_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_1}+1}_{p_1,1})}\lesssim X^2(t),$$

$$\varepsilon^2\int_0^t\|\nabla v\|_{L^\infty}\|v\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\leq\varepsilon^2\|\nabla v\|_{L^\infty_T(L^\infty)}\|v\|^h_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\lesssim X^2(t),$$

$$\varepsilon^2\int_0^t\|v\|^{[m_1,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_1}+1}_{p_1,1}}\|\nabla v\|^{[m_1,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_1}}_{p_1,1}}\lesssim\varepsilon^2\big(\|v\|^{m_1}_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_1}+1}_{p_1,1})}+\|v\|^h_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\big)^2\lesssim X^2(t),$$

我们得到

$$\sum_{j\geq J^\varepsilon}2^{(\frac{d}{2}+1)j}\|R^3_j\|_{L^2}\lesssim X^2(t).$$

关于 R^4_j 的估计。我们有

$$\sum_{j\geq J}2^{(\frac{d}{2}+1)j}\|R^4_j\|_{L^2}\leq C\Big(\|\nabla a\|^{[\ell,m_1]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p_1^*}}_{p,1}}\|\nabla a\|^{m_1}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}}_{p_1,1}}+\|\nabla a\|_{L^\infty}\|\nabla a\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\|\nabla a\|^{[m_1,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_1}}_{p_1,1}}\|a\|^{[m_1,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_1}+1}_{p_1,1}}\Big).$$

利用这一点

$$\int_0^t\|\nabla a\|^{[\ell,m_1]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p_1^*}}_{p,1}}\|\nabla a\|^{m_1}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}}_{p_1,1}}\lesssim\Big(\|a\|^{\ell}_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1})}+\sum_{i=1}^R\|a\|^{m_i}_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1})}\Big)\|a\|^{m_1}_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_1}+2}_{p_1,1})}\lesssim X^2(t),$$

$$\int_0^t\|\nabla a\|_{L^\infty}\|a\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\leq\|\nabla a\|_{L^\infty_T(L^\infty)}\|a\|^h_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\lesssim X^2(t)$$

and

$$\int_0^t \|a\|^{[m_1,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_1}+1}_{p_1,1}} \|\nabla a\|^{[m_1,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_1}}_{p_1,1}} \lesssim \big(\|a\|^{m_1}_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_1}+1}_{p_1,1})} + \|a\|^{h}_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\big)^2 \lesssim X^2(t),$$

我们得出 R_j^4 满足

$$\sum_{j\geq J^\varepsilon} 2^{(\frac{d}{2}+1)j}\|R_j^4\|_{L^2} \lesssim X^2(t).$$

关于 Q_j^1 和 Q_j^2 的估计。记

$$Q_j^1 = \dot{S}_{j-1}v\cdot\nabla\dot{\Delta}_j c + \dot{S}_{j-1}c\cdot\nabla\dot{\Delta}_j v + R_j^1 + R_j^2, \tag{4.35}$$

$$Q_j^2 = \varepsilon^2\dot{S}_{j-1}v\cdot\nabla\dot{\Delta}_j v + \dot{S}_{j-1}c\cdot\nabla\dot{\Delta}_j c + R_j^3 + R_j^4. \tag{4.36}$$

我们有

$$\sum_{j\geq J^\varepsilon} 2^{\frac{d}{2}j}\|\dot{S}_{j-1}v\cdot\nabla\dot{\Delta}_j c\|_{L^2} \leq C\|v\|_{L^\infty}\|c\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}$$

and

$$\sum_{j\geq J} 2^{\frac{d}{2}j}\|\dot{S}_{j-1}c\cdot\nabla\dot{\Delta}_j v\|_{L^2} \leq C\|c\|_{L^\infty}\|v\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}},$$

这意味着

$$\begin{aligned}\int_0^t \|v\|_{L^\infty}\|c\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}} &\leq \frac{1}{\varepsilon}\Big(\varepsilon\|v\|^{\ell}_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1})} + \varepsilon\sum_{i=1}^R \|v\|^{m_i}_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1})} + \varepsilon^2\|v\|^h_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\Big)\|c\|^h_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\\ &\lesssim X^2(t)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\int_0^t \|c\|_{L^\infty}\|v\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}} &\leq \Big(\|c\|^{\ell}_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}+1}_{p,1})} + \sum_{i=1}^R \|c\|^{m_i}_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}+1}_{p_i,1})} + \varepsilon\|c\|^h_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\Big)\|v\|^h_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\\ &\lesssim X^2(t).\end{aligned}$$

至于余项，注意到它们可以像之前一样处理 t

$$\int_0^t \sum_{j\geq J^\varepsilon} 2^{\frac{d}{2}j}\left\|(R_j^1,R_j^2)\right\|_{L^2} \lesssim \varepsilon\int_0^t \sum_{j\geq J^\varepsilon} 2^{(\frac{d}{2}+1)j}\left\|(R_j^1,R_j^2)\right\|_{L^2} \lesssim X^2(t).$$

项 Q^1 和 Q^2 可以用类似的方法进行估计。至此，高频先验估计部分告一段落，因为我们已经证明

$$X^h(t) \lesssim X_0 + X^2(t). \tag{4.37}$$

4.1.2 中频估计

设 $J^\varepsilon - RN_0 \le j < J^\varepsilon$ 和 $(p_i) \in S_{p,\ R}$。回顾一下

$$\begin{cases} \partial_t c + v \cdot \nabla c + \check{\gamma}(c+\bar{c})\mathrm{div}\, v = 0, \\ \varepsilon^2(\partial_t v + v \cdot \nabla v) + \check{\gamma}(c+\bar{c})\nabla c + \ v = 0. \end{cases} \tag{4.38}$$

定义阻尼模态 $w = \varepsilon(v + \check{\gamma}(c+\bar{c})\nabla c)$，我们有

$$\partial_t w + \frac{1}{\varepsilon^2} w = -(\check{\gamma}\bar{c})^2 \varepsilon \nabla \mathrm{div}\, v + Q^3,$$

其中

$$Q^3 = -\varepsilon v \nabla v - \check{\gamma}\bar{c}\varepsilon\nabla(v\cdot\nabla c) - (\check{\gamma}\bar{c})^2\varepsilon\nabla(c\mathrm{div}\, v) + \check{\gamma}\varepsilon\partial_t(c\nabla c).$$

因此，有

$$\|w\|^{m_i}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1}} + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t \|w\|^{m_i}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1}} \le X_0 + \varepsilon\int_0^t \sum_{j\in J_i^\varepsilon} 2^{(\frac{d}{p_i}+2)j}\|v_j\|_{L^{p_i}} + \int_0^t \sum_{j\in J_i^\varepsilon} 2^{\frac{d}{p_i}j}\|Q_j^3\|_{L^{p_i}}. \tag{4.39}$$

利用阻尼模态 w 的定义，密度满足以下热方程:

$$\partial_t c - \check{\gamma}\bar{c}\Delta c = -\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{div} w + Q^4$$

其中

$$Q^4 = -v\cdot\nabla c - \check{\gamma}c\mathrm{div}\, v + \check{\gamma}\mathrm{div}\,(c\cdot\nabla c).$$

热方程的经典估计导出

$$\|c\|^{m_i}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1}} + \int_0^t \|c\|^{m_i}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}+2}_{p_i,1}} \le X_0 + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \|w\|^{m_i}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1}} + \int_0^t \sum_{j\in J_i^\varepsilon} 2^{\frac{d}{p_i}j}\|Q_j^4\|_{L^{p_i}}. \tag{4.40}$$

因此，将 (4.39) 与乘以充分小常数 K 的 (4.40) 相加，并选取充分小的 k_0，我们得到

$$\begin{aligned} \|w\|^{m_i}_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1})} + \frac{1}{\varepsilon^2}\|w\|^{m_i}_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1})} + K\big(\|c\|^{m_i}_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1})} + \|c\|^{m_i}_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}+2}_{p_i,1})}\big) \\ \le X_0 + \|v_j\|^{m_i}_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1})} + \int_0^t \sum_{j\in J_i^\varepsilon} 2^{\frac{d}{p_i}j}\|(Q_j^3, Q_j^4)\|_{L^{p_i}}. \end{aligned} \tag{4.41}$$

对于分量 v，我们得到

$$\varepsilon\|v\|^{m_i}_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1})} \lesssim \|w\|^{m_i}_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1})} + \varepsilon\|c\|^{m_i}_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1})}, \tag{4.42}$$

$$\|v\|^{m_i}_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1})} \lesssim \frac{1}{\varepsilon}\|w\|^{m_i}_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1})} + \|c\|^{m_i}_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}+1}_{p_i,1})} \tag{4.43}$$

and

$$\|v\|^{m_i}_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}+1}_{p_i,1})} \lesssim \frac{1}{\varepsilon}\|w\|^{m_i}_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1})} + \|\nabla c\|^{m_i}_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}+1}_{p_i,1})}. \tag{4.44}$$

因此，利用 $2^j \leq \frac{2^{k_0}}{\varepsilon}$ 可推出 $1 \lesssim 2^{k_0}2^{-j}\varepsilon^{-1}$，并适当取足够小的 k_0，我们得到

$$X^{m_i}(t) \leq X_0 + \int_0^t \sum_{j\in J_i^\varepsilon} 2^{\frac{d}{p_i}j}\|(Q_j^3, Q_j^4)\|_{L^{p_i}}. \tag{4.45}$$

接下来，我们重点讨论非线性项。

对 Q_j^3 的估计。我们首先回顾 R^1，R^2，R^3 的定义，以及

$$\dot{\Delta}_j(v\cdot\nabla c) = \dot{S}_{j-1}v\cdot\nabla\dot{\Delta}_j c + R_j^1, \quad \dot{\Delta}_j(c\mathrm{div}\, v) = \dot{S}_{j-1}c\mathrm{div}\,\dot{\Delta}_j v + R_j^2; \tag{4.46}$$

$$\dot{\Delta}_j(v\cdot\nabla v) = \dot{S}_{j-1}v\cdot\nabla\dot{\Delta}_j v + R_j^3. \tag{4.47}$$

受（4.35）的启发，我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^t \sum_{j\in J_i^\varepsilon} 2^{\frac{d}{p_i}j}\|\varepsilon\nabla(\dot{S}_{j-1}v\cdot\nabla\dot{\Delta}_j c)\|_{L^{p_i}} &\lesssim \int_0^t \sum_{j\in J_i^\varepsilon} 2^{\frac{d}{p_i}j}\|\dot{S}_{j-1}v\cdot\nabla\dot{\Delta}_j c\|_{L^{p_i}} \\
&\lesssim \int_0^t \sup_{j\in J_i^\varepsilon}\|\dot{S}_{j-1}v\|_{L^\infty}\|c\|^{m_i}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}+1}_{p_i,1}} \\
&\leq \|v\|_{L^2L^\infty}\|c\|^{m_i}_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}+1}_{p_i,1})} \lesssim X^2(t),
\end{aligned} \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^t \sum_{j\in J_i^\varepsilon} 2^{\frac{d}{p_i}j}\|\varepsilon\nabla(\dot{S}_{j-1}c\mathrm{div}\,\dot{\Delta}_j v)\|_{L^{p_i}} &\lesssim \int_0^t \sum_{j\in J_i^\varepsilon} 2^{\frac{d}{p_i}j}\|\dot{S}_{j-1}c\mathrm{div}\,\dot{\Delta}_j v\|_{L^{p_i}} \\
&\lesssim \int_0^t \sup_{j\in J_i^\varepsilon}\|\dot{S}_{j-1}c\|_{L^\infty}\|v\|^{m_i}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}+1}_{p_i,1}} \\
&\leq \|c\|_{L^\infty_T(L^\infty)}\|v\|^{m_i}_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}+1}_{p_i,1})} \lesssim X^2(t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon\int_0^t \sum_{j\in J_i} 2^{\frac{d}{p_i}j}\|\dot{S}_{j-1}v\cdot\nabla\dot{\Delta}_j v\|_{L^{p_i}} &\lesssim \varepsilon\int_0^t \sup_{j\in J_i^\varepsilon}\|\dot{S}_{j-1}v\|_{L^\infty}\|v\|^{m_i}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}+1}_{p_i,1}} \\
&\leq \varepsilon\|v\|_{L^\infty L^\infty}\|v\|^{m_i}_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}+1}_{p_i,1})} \lesssim X^2(t).
\end{aligned}$$

关于 R_j^1，利用引理 3.2，可得

$$\sum_{j\in J_i} 2^{\frac{d}{p_i}j}\|\varepsilon\nabla R_j^1\|_{L^{p_i}} \leq \sum_{j\in J_i} 2^{\frac{d}{p_i}j}\|R_j^1\|_{L^{p_i}} \leq C\Big(\|\nabla v\|^{[\ell,m_{i+1}]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p_{i+1}^*}}_{p,1}}\|\nabla c\|^{m_{i+1}}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}-1}_{p_{i+1},1}} + \|\nabla v\|_{L^\infty}\|\nabla c\|^{[m_i,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}-1}_{p_i,1}}$$

$$+\|\nabla c\|^{[\ell,m_{i+1}]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p^*_{i+1}}}_{p,1}}\|v\|^{m_{i+1}}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_{i+1},1}}+\|\nabla c\|_{L^\infty}\|v\|^{[m_i,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1}}+\|\nabla c\|^{[m_{i+1},h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}}_{p_{i+1},1}}\|v\|^{[m_{i+1},h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}}_{p_{i+1},1}}\Big). \quad (4.49)$$

关于第一个右端项，对于任意 $p_{i+1}>\frac{p_ip}{p-p_i}$，我们有

$$\|\nabla v\|^{[\ell,m_{i+1}]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p^*_{i+1}}}_{p,1}}\lesssim\|v\|^{\ell}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p^*_{i+1}}+1}_{p,1}}+\sum_{\iota=i+1}^{R}\|v\|^{m_\iota}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_\iota}-\frac{d}{p^*_{i+1}}+1}_{p_\iota,1}}\lesssim\varepsilon^{\frac{d}{p^*_{i+1}}-1}\Big(\|v\|^{\ell}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1}}+\sum_{\iota=i+1}^{R}\|v\|^{m_\iota}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_\iota}}_{p_\iota,1}}\Big), \quad (4.50)$$

and

$$\|\nabla c\|^{m_{i+1}}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}-1}_{p_{i+1},1}}\lesssim\varepsilon^{2-\frac{d}{p_i}+\frac{d}{p_{i+1}}}\|c\|^{m_{i+1}}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}+2}_{p_{i+1},1}}, \quad (4.51)$$

由此可得，注意到 $\frac{d}{p^*_{i+1}}=\frac{d}{p_i}-\frac{d}{p_{i+1}}$，

$$\int_0^t\|\nabla v\|^{[\ell,m_{i+1}]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p^*_{i+1}}}_{p,1}}\|\nabla c\|^{m_{i+1}}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}-1}_{p_{i+1},1}}\lesssim\varepsilon\big(\|v\|^{\ell}_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1})}+\sum_{\iota=i+1}^{R}\|v\|^{m_\iota}_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_\iota}}_{p_\iota,1})}\big)\|c\|^{m_{i+1}}_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}+2}_{p_{i+1},1})}\le X^2(t). \quad (4.52)$$

同样，根据（4.28），我们有

$$\int_0^t\|\nabla v\|_{L^\infty}\|\nabla c\|^{[m_i,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}-1}_{p_i,1}}\lesssim\|\nabla v\|_{L^1_T(L^\infty)}\Big(\sum_{\iota=i+1}^{R}\|c\|^{m_\iota}_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_\iota}}_{p_\iota,1})}+\varepsilon\|c\|^{h}_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{p,1})}\Big)\lesssim X^2(t), \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned}\int_0^t\|\nabla c\|^{[\ell,m_{i+1}]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p^*_{i+1}}}_{p,1}}\|v\|^{m_{i+1}}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_{i+1},1}}&\lesssim\|c\|^{[\ell,m_{i+1}]}_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p^*_1}+1}_{p,1})}\|v\|^{m_{i+1}}_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}}_{p_{i+1},1})}\\&\lesssim\big(\|c\|^{\ell}_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1})}+\sum_{\iota=i+1}^{R}\|c\|^{m_\iota}_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_\iota}}_{p_\iota,1})}\big)\|v\|^{m_{i+1}}_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}+1}_{p_{i+1},1})}\lesssim X^2(t),\end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\int_0^t\|\nabla c\|_{L^\infty}\|v\|^{[m_i,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1}}\lesssim\|\nabla c\|_{L^2_T(L^\infty)}\Big(\sum_{\iota=i+1}^{R}\|v\|^{m_\iota}_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_\iota}}_{p_\iota,1})}+\varepsilon\|v\|^{\ell}_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\Big)\lesssim X^2(t), \quad (4.55)$$

and

$$\begin{aligned}\int_0^t\|\nabla c\|^{[m_{i+1},h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}}_{p_{i+1},1}}\|v\|^{[m_{i+1},h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}}_{p_{i+1},1}}&\lesssim\big(\|c\|^{h}_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\sum_{\iota=1}^{i+1}\|c\|^{m_\iota}_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}+1}_{p_{i+1},1})}\big)\\&\quad\cdot\big(\|v\|^{h}_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\sum_{\iota=1}^{i+1}\|v\|^{m_\iota}_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}}_{p_{i+1},1})}\big)\lesssim X^2(t).\end{aligned} \quad (4.56)$$

因此我们得到

$$\int_0^t \sum_{j\in J_i^\varepsilon} 2^{\frac{d}{p_i}j}\|\varepsilon\nabla R_j^1\|_{L^{p_i}} \lesssim X^2(t).$$

交换子 R^2 同样可以处理，我们有

$$\sum_{j\in J_i} 2^{\frac{d}{p_i}j}\|\varepsilon\nabla R_j^2\|_{L^{p_i}} \le C\Big(\|\nabla c\|^{[\ell,m_{i+1}]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p_{i+1}^*}}_{p,1}}\|\nabla v\|^{m_{i+1}}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}-1}_{p_{i+1},1}}+\|\nabla c\|_{L^\infty}\|\nabla v\|^{[m_i,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}-1}_{p_i,1}}+\|\nabla v\|^{[\ell,m_{i+1}]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p_{i+1}^*}}_{p,1}}\|c\|^{m_{i+1}}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_{i+1},1}}$$
$$+\|\nabla v\|_{L^\infty}\|c\|^{[m_i,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1}}+\|\nabla v\|^{[m_{i+1},h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}}_{p_{i+1},1}}\|c\|^{[m_{i+1},h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}}_{p_{i+1},1}}\Big).$$

这就得到

$$\int_0^t \sum_{j\in J_i^\varepsilon} 2^{\frac{d}{p_i}j}\|\varepsilon\nabla R_j^2\|_{L^{p_i}} \lesssim X^2(t).$$

对于 R_j^3，由引理 3.2 可得

$$\sum_{j\in J_i} 2^{\frac{d}{p_i}j}\|R_j^3\|_{L^{p_i}} \le C\Big(\|\nabla v\|^{[\ell,m_{i+1}]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p_{i+1}^*}}_{p,1}}\|\nabla v\|^{m_{i+1}}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}-1}_{p_{i+1},1}}+\|\nabla v\|_{L^\infty}\|\nabla v\|^{[m_i,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}-1}_{p_i,1}}+\|\nabla v\|^{[m_{i+1},h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}}_{p_{i+1},1}}\|v\|^{[m_{i+1},h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}}_{p_{i+1},1}}\Big).$$

有

$$\varepsilon\int_0^t \|\nabla v\|^{[\ell,m_{i+1}]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p_{i+1}^*}}_{p,1}}\|\nabla v\|^{m_{i+1}}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}-1}_{p_{i+1},1}} \lesssim \varepsilon\big(\|v\|^{\ell}_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1})}+\sum_{\iota=i+1}^{R}\|v\|^{m_\iota}_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_\iota}}_{p_\iota,1})}\big)\|v\|^{m_{i+1}}_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}+1}_{p_{i+1},1})} \lesssim X^2(t),$$

$$\varepsilon\int_0^t \|\nabla v\|_{L^\infty}\|v\|^{[m_i,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1}} \lesssim \|\nabla v\|_{L^1_T(L^\infty)}\big(\sum_{\iota=i+1}^{R}\varepsilon\|v\|^{m_\iota}_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_\iota}}_{p_\iota,1})}+\varepsilon^2\|v\|^{h}_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\big) \lesssim X^2(t),$$

$$\varepsilon\int_0^t \|\nabla v\|^{[m_{i+1},h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}}_{p_{i+1},1}}\|v\|^{[m_{i+1},h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}}_{p_{i+1},1}} \lesssim \big(\varepsilon\|v\|^{h}_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\sum_{\iota=1}^{i+1}\varepsilon\|v\|^{m_\iota}_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}+1}_{p_{i+1},1})}\big)$$
$$\cdot\big(\|v\|^{h}_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\sum_{\iota=1}^{i+1}\|v\|^{m_\iota}_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}}_{p_{i+1},1})}\big) \lesssim X^2(t).$$

综合这些估计，我们得到

$$\varepsilon\int_0^t \sum_{j\in J_i^\varepsilon} 2^{\frac{d}{p_i}j}\|R_j^3\|_{L^{p_i}} \lesssim X^2(t).$$

对于 Q_j^3 中的项 $\partial_t(c\nabla c)$，我们发现

$$\partial_t(c\nabla c) = -\nabla\left(\check{\gamma}\bar{c}c\mathrm{div}\, v + cv\cdot\nabla c + \check{\gamma}c^2\mathrm{div}\, v\right). \tag{4.57}$$

二次项可以完全按照之前的方法处理。对于三次项 $cv\cdot c$，我们有

$$\dot{\Delta}_j(cv\cdot\nabla c)=\dot{S}_{j-1}(cv)\cdot\nabla\dot{\Delta}_j c+\widetilde{R}_j^1,\quad \widetilde{R}_j^1:=\dot{S}_{j-1}(cv)\cdot\nabla\dot{\Delta}_j c-\dot{\Delta}_j(cv\cdot\nabla c).$$

因此，类似于（4.48）和（4.49）的计算表明

$$\begin{aligned}\int_0^t\sum_{j\in J_i^\varepsilon}2^{\frac{d}{p_i}j}\|\varepsilon\nabla(\dot{S}_{j-1}(cv)\cdot\nabla\dot{\Delta}_j c)\|_{L^{p_i}}&\lesssim\int_0^t\sup_{j\in J_i^\varepsilon}\|\dot{S}_{j-1}(cv)\|_{L^\infty}\|c\|^{m_i}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}+1}_{p_i,1}}\\&\le\|c\|_{L^\infty(L^\infty)}\|v\|_{L^2(L^\infty)}\|c\|^{m_i}_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}+1}_{p_i,1})}\lesssim X^3(t),\end{aligned}$$

而对于交换子项，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{j\in J_i}2^{\frac{d}{p_i}j}\|\varepsilon\nabla\widetilde{R}_j^1\|_{L^{p_i}}\le C\Big(&\|\nabla(cv)\|^{[\ell,m_{i+1}]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p^*_{i+1}}}_{p,1}}\|\nabla c\|^{m_{i+1}}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}-1}_{p_{i+1},1}}+\|\nabla(cv)\|_{L^\infty}\|\nabla c\|^{[m_i,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}-1}_{p_i,1}}\\&+\|\nabla c\|^{[\ell,m_{i+1}]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p^*_{i+1}}}_{p,1}}\|(cv)\|^{m_{i+1}}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_{i+1},1}}+\|\nabla c\|_{L^\infty}\|(cv)\|^{[m_i,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1}}+\|\nabla c\|^{[m_{i+1},h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}}_{p_{i+1},1}}\|(cv)\|^{[m_{i+1},h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}}_{p_{i+1},1}}\Big).\end{aligned}$$

我们只处理右端项中的前两项，其他项更易处理。对于第一项，对任意 $p_{i+1}>\frac{p_ip}{p-p_i}$，利用（4.50）可得

$$\begin{aligned}\|\nabla(cv)\|^{[\ell,m_{i+1}]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p^*_{i+1}}}_{p,1}}&\lesssim\sum_{\iota=i+1}^R\|cv\|^{\ell}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_\iota}-\frac{d}{p^*_{i+1}}+1}_{p_\iota,1}}+\|cv\|^{m_\iota}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p^*_{i+1}}+1}_{p,1}}\\&\lesssim\varepsilon^{\frac{d}{p^*_{i+1}}-1}\|cv\|^{\ell}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1}}+\varepsilon^{\frac{d}{p^*_{i+1}}}\sum_{\iota=i+1}^R\|cv\|^{m_\iota}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_\iota}+1}_{p_\iota,1}}.\end{aligned}$$

我们有

$$\|cv\|^{\ell}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1}}\lesssim\|c\|_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1}}\|v\|_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1}}$$

并且，回顾（4.51），我们得到

$$\int_0^t\varepsilon^{\frac{d}{p^*_{i+1}}-1}\|cv\|^{\ell}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1}}\|\nabla c\|^{m_{i+1}}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}-1}_{p_{i+1},1}}\lesssim\|c\|_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1})}\|v\|_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1})}\|c\|^{m_{i+1}}_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}+1}_{p_{i+1},1})}\le X^3(t).\quad(4.58)$$

另一方面，注意到

$$\sum_{\iota=i+1}^R\|cv\|^{m_\iota}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_\iota}+1}_{p_\iota,1}}\lesssim\sum_{\iota=i+1}^R\|c\mathrm{div}\,v\|^{m_\iota}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_\iota}}_{p_\iota,1}}+\sum_{\iota=i+1}^R\|v\cdot\nabla c\|^{m_\iota}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_\iota}}_{p_\iota,1}},$$

重复（4.48）和（4.49）–（4.56）中的计算，我们得到

$$\int_0^t\varepsilon^{\frac{d}{p^*_{i+1}}}\sum_{\iota=i+1}^R\|cv\|^{m_\iota}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_\iota}+1}_{p_\iota,1}}\|\nabla c\|^{m_{i+1}}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}-1}_{p_{i+1},1}}\lesssim\sum_{\iota=i+1}^R\|cv\|^{m_\iota}_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_\iota}+1}_{p_\iota,1})}\|c\|^{m_{i+1}}_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}}_{p_{i+1},1})}\le X^3(t).\quad(4.59)$$

综合上述不等式，我们得到

$$\sum_{j\in J_i}2^{\frac{d}{p_i}j}\|\varepsilon\nabla\widetilde{R}^1_j\|_{L^{p_i}}\le CX^3(t)\quad\Longrightarrow\int_0^t\sum_{j\in J_i^\varepsilon}2^{\frac{d}{p_i}j}\|\varepsilon\dot{\Delta}_j\nabla(cv\cdot\nabla c)\|_{L^{p_i}}\le CX^3(t).$$

（4.57）中的其他三次项也可以用类似的方法进行估计。至此，完成了对 Q_j^3 的估计。

关于 Q_j^4 的估计。尚需估计项散度$(c\cdot\nabla c)$。我们有

$$\dot{\Delta}_j(\mathrm{div}\,(c\cdot\nabla c))=\dot{\Delta}_j(\nabla c\cdot\nabla c)+\dot{S}_{j-1}c\cdot\Delta\dot{\Delta}_jc+\widetilde{R}^4_j,\ \ \widetilde{R}^4_j:=\dot{S}_{j-1}c\Delta\dot{\Delta}_jc-\dot{\Delta}_j(c\Delta c).\ (4.60)$$

然后，引理 3.1 中的乘积估计使我们得到

$$\sum_{j\in J_i}2^{\frac{d}{p_i}j}\|\mathrm{div}\,(\nabla c\cdot\nabla c)\|_{L^{p_i}}\le C\Big(\|\nabla c\|^{[\ell,m_{i+1}]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p^*_{i+1}}}_{p,1}}\|\nabla c\|^{m_{i+1}}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_{i+1},1}}+\|\nabla c\|_{L^\infty}\|\nabla c\|^{[m_i,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1}}$$
$$+\|\nabla c\|^{[m_{i+1},h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}}_{p_{i+1},1}}\|c\|^{[m_{i+1},h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}+1}_{p_{i+1},1}}\Big),$$

and

$$\int_0^t\sum_{j\in J_i}2^{\frac{d}{p_i}j}\|\mathrm{div}\,(\dot{S}_{j-1}c\nabla\dot{\Delta}_jc)\|_{L^{p_i}}\lesssim\int_0^t\sup_{j\in J_i^\varepsilon}\|\dot{S}_{j-1}c\|_{L^\infty}\|c\|^{m_i}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}+2}_{p_i,1}}$$
$$\le\|c\|_{L^\infty_T(L^\infty)}\|c\|^{m_i}_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}+2}_{p_i,1})}\lesssim X^2(t).$$

对于 R^4_j，成立

$$\sum_{j\in J_i}2^{\frac{d}{p_i}j}\|\mathrm{div}\,R^4_j\|_{L^{p_i}}\le C\Big(\|\nabla c\|^{[\ell,m_{i+1}]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p^*_{i+1}}}_{p,1}}\|\nabla c\|^{m_{i+1}}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_{i+1},1}}+\|\nabla c\|_{L^\infty}\|\nabla c\|^{[m_i,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1}}+\|\nabla c\|^{[m_{i+1},h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}}_{p_{i+1},1}}\|c\|^{[m_{i+1},h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}+1}_{p_{i+1},1}}\Big).$$

于是有

$$\int_0^t\|\nabla c\|^{[\ell,m_{i+1}]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p^*_{i+1}}}_{p,1}}\|\nabla c\|^{m_{i+1}}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_{i+1},1}}\lesssim\big(\|c\|^{\ell}_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1})}+\sum_{\iota=i+1}^{R}\|c\|^{m_\iota}_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_\iota}}_{p_\iota,1})}\big)\frac{1}{\varepsilon}\|c\|^{m_{i+1}}_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}+2}_{p_{i+1},1})}\lesssim X^2(t),$$

$$\int_0^t\|\nabla c\|_{L^\infty}\|c\|^{[m_i,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}+1}_{p_i,1}}\lesssim\|\nabla c\|_{L^2L^\infty}\big(\sum_{\iota=i+1}^{R}\|c\|^{m_\iota}_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_\iota}+2}_{p_\iota,1})}+\|c\|^{\ell}_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\big)\lesssim X^2(t),$$

$$\int_0^t\|\nabla c\|^{[m_{i+1},h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}}_{p_{i+1},1}}\|c\|^{[m_{i+1},h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}+1}_{p_{i+1},1}}\lesssim\big(\|c\|^{h}_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\sum_{\iota=1}^{i+1}\|c\|^{m_\iota}_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}+1}_{p_{i+1},1})}\big)^2\lesssim X^2(t),$$

从而得到

$$\int_0^t\sum_{j\in J_i^\varepsilon}2^{\frac{d}{p_i}j}\|\mathrm{div}\,R^4_j\|_{L^{p_i}}\lesssim X^2(t).$$

上述计算得出

$$X^{m_i}(t) \lesssim X_0 + X^2(t) + X^3(t). \tag{4.61}$$

4.1.3 L^p中的低频估计

线性部分的估计是标准的，参见 [12]。利用阻尼模态 w，我们得到

$$X^{\ell}(t) \leq X_0 + \int_0^t \sum_{j \leq J^{\varepsilon} - N_0 R} 2^{\frac{d}{p}j} \|(Q_j^3, Q_j^4)\|_{L^p}. \tag{4.62}$$

低频区域中的非线性分析要简单得多，因为我们无需进行交换子估计，也无需使用 H¨older 不等式。实际上，只需利用乘积律和 Sobolev嵌入即可。例如，有

$$\int_0^t \sum_{j < J^{\varepsilon} - N_0 R} 2^{\frac{d}{p}j} \|\dot{\Delta}_j (v \cdot \nabla c)\|_{L^p} \lesssim \|v\|_{L_T^2(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1})} \|c\|_{L_T^2(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}+1}_{p,1})} \lesssim X^2(t)$$

and

$$\int_0^t \sum_{j < J^{\varepsilon} - N_0 R} 2^{\frac{d}{p}j} \|\dot{\Delta}_j \mathrm{div}\,(c \cdot \nabla c)\|_{L^p} \lesssim \|c\|_{L_T^{\infty}(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1})} \|c\|_{L_T^1(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}+2}_{p,1})} \lesssim X^2(t)$$

其中我们用到了嵌入 $\dot{\mathbb{B}}^{s}_{2,\ 1} \hookrightarrow \dot{\mathbb{B}}^{s-\frac{d}{2}+\frac{d}{p}}_{p\ 1}$，。其他项也可以用类似方法控制。我们得到

$$X^{\ell}(t) \lesssim X_0 + X^2(t) + X^3(t). \tag{4.63}$$

结合 (4.37)、(4.61) 和 (4.63)，引理 4.1 的证明即告完成。

4.2 整体适定性

本小节概述系统 (2.8) 的解的整体时间存在性与唯一性的主要论证。

根据引理 4.1 中的先验估计，利用初始数据的小性，通过标准的自举论证可以证明全局时间解的存在性。更多细节请参阅 [12, 第3节。2]

关于解的唯一性，只需考虑情形 $\varepsilon = 1$。我们定义 $(\delta c, \delta v) = (c_1 - c_2, v_1 - v_2)$，其中 (c_1, v_2) 和 (c_2, v_2) 是全局时间解，分别对应初始数据 $(c_{1,0}, v_{1,0})$ 和 $(c_{2,0}, v_{2,0})$，并满足定理 4.1 中的正则性条件。我们有

$$\begin{cases} \partial_t \delta c + \check{\gamma}\bar{c}\mathrm{div}\,\delta v = \delta Q^1 \triangleq Q^1(c_1, v_1) - Q^1(c_2, v_2), \\ \partial_t \delta v + \check{\gamma}\bar{c}\nabla \delta c + \delta v = \delta Q^2 \triangleq Q^2(c_1, v_1) - Q^2(c_2, v_2). \end{cases} \tag{4.64}$$

为估　立唯一性，我们旨在证明 $\delta c = \delta v = 0$。这是通过估计实现的　ng

(4.64)，利用解的性质并应用Gronwall引理。我们记

$$\delta X(t) \triangleq \|(\delta c,\delta v)\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}}_{2,1}} + \sum_{i=1}^{R} \|(\delta c,\delta v)\|^{m_i}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1}} + \|(\delta c,\delta v)\|^{\ell}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1}}$$

and

$$\delta X_0 \triangleq \|(\delta c_0,\delta v_0)\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}}_{2,1}} + \sum_{i=1}^{R} \|(\delta c_0,\delta v_0)\|^{m_i}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1}} + \|(\delta c_0,\delta v_0)\|^{\ell}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1}}.$$

我们有如下结果。

引理4.2. 设 $d \geq 1$, $p \in (2,\infty)$ 和 $(p_i) \in \mathcal{S}_{p_i,R}$。设 (c_1, v_1) 和 (c_2, v_2) 是方程*(2.8)*的两个解，分别对应初始数据 $(c_{1,0},v_{1,0})$ 和 $(c_{2,0},v_{2,0})$。以下估计成立

$$\delta X(t) \lesssim \delta X_0 + \int_0^t \widetilde{X}(s)\delta X(s) \tag{4.65}$$

其中

$$\widetilde{X}(s) \triangleq \|(c_i,v_i)\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}} + \sum_{i=1}^{R} \|(c_i,v_i)\|_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1}} + \|(c_i,v_i)\|^{\ell}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1}}.$$

利用引理4.2，结合Gronwall不等式及以下事实，我们可以得出唯一性:

$$\sup_{t\in(0,T]} \int_0^t \widetilde{X}(s) \leq C$$

对于 $T \leq c$，当 c 充分小时。更多细节见 [12, 第3节。3]

在接下来的几节中，我们将证明引理4.2。

4.2.1 高频中的误差估计

误差系统如下:

$$\begin{cases} \partial_t \delta c_j + \dot{S}_{j-1}v_1 \cdot \nabla \delta c_j + \operatorname{div}\delta v_j = \delta R_j^1 + \delta R_j^2 - \dot{S}_{j-1}c_1 \operatorname{div}\delta v_j + \delta \widetilde{Q}_j^1, \\ \partial_t \delta v_j + \dot{S}_{j-1}v_1 \cdot \nabla \delta v_j + \nabla \delta c_j + \delta v_j = \delta R_j^3 + \delta R_j^4 - \dot{S}_{j-1}c_1 \nabla \delta c_j + \delta \widetilde{Q}_j^2, \end{cases}$$

其中

$$\delta R_j^1 = \dot{S}_{j-1}v_1 \cdot \nabla \dot{\Delta}_j \delta c - \dot{\Delta}_j(v_1 \cdot \nabla \delta c), \delta R_j^2 = \dot{S}_{j-1}c_1 \operatorname{div}\dot{\Delta}_j \delta v - \dot{\Delta}_j(c_1 \operatorname{div}\delta v),$$

$$\delta R_j^3 = \varepsilon^2\big(\dot{S}_{j-1}v_1 \cdot \nabla \dot{\Delta}_j \delta v - \dot{\Delta}_j(v_1 \cdot \nabla \delta v)\big), \delta R_j^4 = \dot{S}_{j-1}c_1 \nabla \dot{\Delta}_j \delta c - \dot{\Delta}_j(c_1 \nabla \delta c)$$

and

$$\delta \widetilde{Q}_j^1 = \dot{\Delta}_j\big(\delta v \cdot \nabla c_2 - \delta c \cdot \nabla v_2\big),\ \delta \widetilde{Q}_j^2 = \dot{\Delta}_j\big(\delta c \cdot \nabla c_2 - \delta v \cdot \nabla v_2\big).$$

有

$$\|(\delta c,\delta v)(t)\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}}_{2,1}} \lesssim \delta X_0+\int_0^t \|\nabla v_1\|_{L^\infty}\|(\delta c,\delta v)\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}}_{2,1}} + \int_0^t \sum_{j\geq J^\varepsilon} 2^{\frac{d}{2}j}\left\|(\delta R^1_j,\delta R^2_j,\delta\widetilde{Q}^1_j,\delta R^3_j,\delta R^4_j,\delta\widetilde{Q}^2_j)\right\|_{L^2} + \int_0^t \sum_{j\geq J^\varepsilon} 2^{\frac{d}{2}j}\left\|(\delta Q^1_j,\delta Q^2_j)\right\|_{L^2}. \quad (4.66)$$

我们有

$$\int_0^t \|\nabla v_1\|_{L^\infty}\|(\delta c,\delta v)\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}}_{2,1}} \lesssim \int_0^t \widetilde{X}(s)\delta X(s) \quad (4.67)$$

其中我们用到了

$$\|\nabla v_1\|_{L^\infty}\lesssim \|v_i\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}+\sum_{i=1}^R \|v_i\|^{m_i}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}+1}_{p_i,1}}+\|v_i\|^{\ell}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}+1}_{p,1}}\lesssim \widetilde{X}(s).$$

因此只需关注 δR^1_j 和 $\delta\widetilde{Q}^1_j$。引理 3.2 给出

$$\sum_{j\geq J^\varepsilon}2^{\frac{d}{2}j}\|\delta R^1_j\|_{L^2}\leq C\Big(\|\nabla v_1\|^{[\ell,m_1]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p_1^*}}_{p,1}}\|\nabla\delta c\|^{m_1}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}-1}_{p_1,1}}+\|\nabla v_1\|_{L^\infty}\|\nabla\delta c\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}} + \|\nabla\delta c\|^{[\ell,m_1]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p_1^*}}_{p,1}}\|v_1\|^{m_1}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}}_{p_1,1}}+\|\nabla\delta c\|_{\dot{\mathbb{B}}^{-1}_{\infty,1}}\|v_1\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\|\nabla\delta c\|^{[m_1,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_1}-1}_{p_1,1}}\|v_1\|^{[m_1,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_1}+1}_{p_1,1}}\Big). \quad (4.68)$$

我们只需处理第一个右端项，其余各项可按前面各节的方式处理。回顾 $r=1-\frac{d}{2}+\frac{d}{p_1}$，成立

$$\|\nabla v_1\|^{[\ell,m_1]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p_1^*}}_{p,1}}\lesssim \|v_1\|^{\ell}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1}}+\sum_{i=1}^R\|v_1\|^{m_i}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1}}\lesssim\widetilde{X}(s),$$

$$\|\nabla\delta c\|^{m_1}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}-1}_{p_1,1}}\lesssim\|\delta c\|^{m_1}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_1}}_{p_1,1}}\lesssim\delta X(s),$$

由此得到

$$\int_0^t\|\nabla v_1\|^{[\ell,m_1]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p_1^*}}_{p,1}}\|\nabla\delta c\|^{m_1}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}-1}_{p_1,1}}\lesssim\int_0^t\widetilde{X}(s)\delta X(s). \quad (4.69)$$

以与 (4.67) 和 (4.69) 中相同的方式处理其他项，可得

$$\int_0^t\sum_{j\geq J^\varepsilon}2^{\frac{d}{2}j}\|\delta R^1_j\|_{L^2}\leq\int_0^t\widetilde{X}(s)\delta X(s).$$

对于 $\delta\widetilde{Q}_j^1$，我们重点关注 $\delta v\cdot\nabla c_2$。我们将其分解为

$$\delta v\cdot\nabla c_2=\delta v^h\cdot\nabla c_2+(\sum_{\iota=1}^{R}\delta v^{m_\iota}+\delta v^\ell)\cdot\nabla c_2. \tag{4.70}$$

对于高频项，我们有

$$\sum_{j\geq J^\varepsilon}2^{\frac{d}{2}j}\|\dot{\Delta}_j(\delta v^h\cdot\nabla c_2)\|_{L^2}\leq C\|\delta v^h\|_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|\nabla c_2\|_{\dot{\mathbb{B}}^0_{\infty,1}}\lesssim\widetilde{X}(s)\delta X(s).$$

对于其他项，我们将其分解为

$$\dot{\Delta}_j\big(\delta v^{m_\iota}\cdot\nabla c_2\big)=\dot{S}_{j-1}\delta v^{m_\iota}\cdot\nabla\dot{\Delta}_j c_2+\delta\bar{R}_j^1(v^{m_\iota},c_2) \tag{4.71}$$

and

$$\dot{\Delta}_j\big(\delta v^{\ell}\cdot\nabla c_2\big)=\dot{S}_{j-1}\delta v^{\ell}\cdot\nabla\dot{\Delta}_j c_2+\delta\bar{R}_j^1(v^{\ell},c_2), \tag{4.72}$$

其中

$$\delta\bar{R}_j^1(f,c_2)=\dot{S}_{j-1}f\cdot\nabla\dot{\Delta}_j c_2-\dot{\Delta}_j(f\cdot\nabla c_2).$$

我们有

$$\sum_{j\geq J^\varepsilon}2^{\frac{d}{2}j}\|\dot{S}_{j-1}\delta v^{m_\iota}\cdot\nabla\dot{\Delta}_j c_2\|_{L^2}\leq C\|\dot{S}_{j-1}\delta v^{m_\iota}\|_{L^\infty}\|c_2\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\lesssim\widetilde{X}(s)\delta X(s)$$

对于余项，由引理 3.2 可得

$$\begin{aligned}\sum_{j\geq J^\varepsilon}2^{\frac{d}{2}j}\|\delta\bar{R}_j^1(v^{m_\iota},c_2)\|_{L^2}\leq C\Big(&\|\nabla\delta v^{m_\iota}\|^{[\ell,m_1]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p_1^*}}_{p,1}}\|\nabla c_2\|^{m_1}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}-1}_{p_1,1}}+\|\nabla\delta v^{m_\iota}\|_{L^\infty}\|\nabla c_2\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}\\&+\|\nabla c_2\|^{[\ell,m_1]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p_1^*}}_{p,1}}\|\delta v^{m_\iota}\|^{m_1}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}}_{p_1,1}}+\|\nabla c_2\|_{\dot{\mathbb{B}}^{-1}_{\infty,1}}\|\delta v^{m_\iota}\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\|\nabla\delta v^{m_\iota}\|^{[m_1,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_1}-1}_{p_1,1}}\|c_2\|^{[m_1,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_1}+1}_{p_1,1}}\Big).\end{aligned}$$

与 (4.68) 相比，我们需要以不同的方式处理第二个右端项。我们有

$$\|\nabla\delta v^{m_\iota}\|_{L^\infty}\lesssim\|\nabla\delta v\|^{m_\iota}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_1}}_{p_1,1}}\lesssim\|\delta v\|^{m_\iota}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_1}}_{p_1,1}};\quad\|\nabla c_2\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}\lesssim\|\nabla c_2\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}},$$

这意味着

$$\|\nabla\delta v^{m_\iota}\|_{L^\infty}\|\nabla c_2\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}\lesssim\widetilde{X}(s)\delta X(s)$$

并得到

$$\int_0^t\sum_{j\geq J^\varepsilon}2^{\frac{d}{2}j}\|\delta\bar{R}_j^1\|_{L^2}\leq\int_0^t\widetilde{X}(s)\delta X(s).$$

剩余项可以类似处理。因此我们得到

$$\|(\delta c,\delta v)\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}}_{2,1}} \lesssim \delta X_0+\int_0^t \widetilde{X}(s)\delta X(s). \tag{4.73}$$

4.2.2 中频误差估计

定义误差阻尼模态 $\delta w=\delta v+\check{\gamma}\bar{c}\nabla\delta c$。该系统表示为

$$\begin{cases}\partial_t\delta w+\delta w=-\nabla\mathrm{div}\,\delta v+\nabla\delta Q^1+\delta Q^2,\\ \partial_t\delta c-\check{\gamma}\bar{c}\Delta\delta c=-\mathrm{div}\delta w+\delta Q^1.\end{cases} \tag{4.74}$$

重复第 4.1.2 节中的计算，我们得到

$$\|(\delta c,\delta v)\|^{m_i}_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1})}\le \delta X_0+\int_0^t\sum_{j\in J_i}2^{\frac{d}{p_i}j}\|(\delta Q^1_j,\delta Q^2_j)\|_{L^{p_i}}. \tag{4.75}$$

我们关注 δQ^1_j 中的项 $v_1\cdot\nabla\delta c$。有

$$\int_0^t\sum_{j\in J_i}2^{\frac{d}{p_i}j}\|\dot{S}_{j-1}v_1\cdot\dot{\Delta}_j\nabla\delta c\|_{L^{p_i}}\le C\int_0^t\|\dot{S}_{j-1}v_1\|_{L^\infty}\|\nabla\delta c\|^{m_i}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1}}\le\int_0^t\delta X(s)\widetilde{X}(s). \tag{4.76}$$

对于交换子，由引理 3.2 可得

$$\begin{aligned}\sum_{j\in J_i}2^{\frac{d}{p_i}j}\|\delta R^1_j\|_{L^{p_i}}\le C\Big(&\|\nabla v_1\|^{[\ell,m_{i+1}]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p^*_{i+1}}}_{p,1}}\|\nabla\delta c\|^{m_{i+1}}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}-1}_{p_{i+1},1}}+\|\nabla v_1\|_{L^\infty}\|\nabla\delta c\|^{[m_i,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}-1}_{p_i,1}}\\&+\|\nabla\delta c\|^{[\ell,m_{i+1}]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p^*_{i+1}}}_{p,1}}\|v_1\|^{m_{i+1}}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_{i+1},1}}+\|\nabla\delta c\|_{\dot{\mathbb{B}}^{-1}_{\infty,1}}\|v_1\|^{[m_i,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1}}+\|\nabla\delta c\|^{[m_{i+1},h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}-1}_{p_{i+1},1}}\|v_1\|^{[m_{i+1},h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}+1}_{p_{i+1},1}}\Big).\end{aligned} \tag{4.77}$$

对于第一项，利用（4.50），我们得到

$$\|\nabla v_1\|^{[\ell,m_{i+1}]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p^*_{i+1}}}_{p,1}}\|\nabla\delta c\|^{m_{i+1}}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}-1}_{p_{i+1},1}}\lesssim\Big(\|v_1\|^{\ell}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1}}+\sum_{\iota=i+1}^R\|v_1\|^{m_\iota}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_\iota}}_{p_\iota,1}}\Big)\|\delta c\|^{m_{i+1}}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}}_{p_{i+1},1}} \tag{4.78}$$

由此可得

$$\int_0^t\|\nabla v_1\|^{[\ell,m_{i+1}]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p^*_{i+1}}}_{p,1}}\|\nabla\delta c\|^{m_{i+1}}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}-1}_{p_{i+1},1}}\lesssim\int_0^t\widetilde{X}(s)\delta X(s). \tag{4.79}$$

其他右端项也可用类似的方法处理，除了最后一项，我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^t\|\nabla\delta c\|^{[m_{i+1},h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}-1}_{p_{i+1},1}}\|v_1\|^{[m_{i+1},h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}+1}_{p_{i+1},1}}\\ \lesssim&\int_0^t\Big(\sum_{\iota=i+1}^R\|\delta a\|^{m_\iota}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_\iota}}_{p_\iota,1}}+\|\delta\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\Big)\Big(\sum_{\iota=i+1}^R\|v_1\|^{m_\iota}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_\iota}}_{p_\iota,1}}+\|v_1\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\Big)\end{aligned}$$

$$\lesssim \int_0^t \widetilde{X}(s)\delta X(s). \tag{4.80}$$

因此，我们得到

$$\int_0^t \sum_{j\in J_i} 2^{\frac{d}{p_i}j}\|\dot{\Delta}_j(v_1\cdot\nabla\delta c)\|_{L^{p_i}} \lesssim \int_0^t \widetilde{X}(s)\delta X(s).$$

另一方面，对于项 $\delta v\cdot\nabla c_2$，我们使用分解 (4.70)、(4.71)-(4.72)。对于中频区域 m^ι, $\iota\in[1,R]$，我们有

$$\sum_{j\in J_i} 2^{\frac{d}{p_i}j}\|\dot{S}_{j-1}\delta v^{m_\iota}\cdot\nabla\dot{\Delta}_j c_2\|_{L^{p_i}} \le C\|\dot{S}_{j-1}\delta v^{m_\iota}\|_{L^\infty}\|c_2\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}} \lesssim \widetilde{X}(s)\delta X(s)$$

and

$$\begin{aligned}\sum_{j\in J_i} 2^{\frac{d}{p_i}j}\|\delta\bar{R}^1_j(v^{m_\iota},c_2)\|_{L^{p_i}} \le C\Big(&\|\nabla\delta v^{m_\iota}\|^{[\ell,m_{i+1}]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p^*_{i+1}}}_{p,1}}\|\nabla c_2\|^{m_{i+1}}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}-1}_{p_{i+1},1}} + \|\nabla\delta v^{m_\iota}\|_{L^\infty}\|\nabla c_2\|^{[m_i,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}-1}_{p_i,1}}\\ &+\|\nabla c_2\|^{[\ell,m_{i+1}]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p^*_{i+1}}}_{p,1}}\|\delta v^{m_\iota}\|^{m_{i+1}}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_{i+1},1}} + \|\nabla c_2\|_{L^\infty}\|\delta v^{m_\iota}\|^{[m_i,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1}} + \|\nabla c_2\|^{[m_{i+1},h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}-1}_{p_{i+1},1}}\|\delta v^{m_\iota}\|^{[m_{i+1},h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_{i+1}}+1}_{p_{i+1},1}}\Big)\\ &\lesssim \widetilde{X}(s)\delta X(s)。\end{aligned} \tag{4.81}$$

然后，对时间积分可得

$$\int_0^t \sum_{j\in J_i} 2^{\frac{d}{p_i}j}\|\dot{\Delta}_j(\delta v\cdot\nabla c_2)\|_{L^{p_i}} \lesssim \int_0^t \widetilde{X}(s)\delta X(s).$$

δQ^1_j 和 δQ^2_j 中的剩余项可用类似方式处理。我们得到

$$\|\delta c\|^{m_i}_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1})} + \|\delta v\|^{m_i}_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1})} \le \delta X_0 + \int_0^t \widetilde{X}(s)\delta X(s).$$

4.2.3 低频误差估计

如同中频分析中那样，我们有

$$\|\delta c\|^{\ell}_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1})} + \|\delta v\|^{\ell}_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1})} \le \delta X_0 + \int_0^t \sum_{j\le J^\varepsilon - RN_0} 2^{\frac{d}{p}j}\|(\delta Q^1_j,\delta Q^2_j)\|_{L^p}. \tag{4.82}$$

同样，我们关注项 δQ^1_j，特别是项 $\dot{\Delta}_j(v_1\cdot\nabla\delta c+\delta v\cdot\nabla c_2)$。对于第一项，回顾 $\dot{\Delta}_j(v_1\cdot\nabla\delta c)$ $=\dot{S}_{j-1}v_1\cdot\nabla\delta c_j+\delta R^1_j$，我们有

$$\sum_{j\le J^\varepsilon - RN_0} 2^{\frac{d}{p}j}\|\dot{\Delta}_j(v_1\cdot\nabla\delta c)\|_{L^p} \le C(\|v_1\|_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1}}\|\nabla\delta c\|^{\ell}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1}} + \|\nabla v_1\|_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1}}\|\delta c\|_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1}}).$$

对于 δQ_j^1中的第二项，我们有

$$\sum_{j\le J^\varepsilon - RN_0} 2^{\frac{d}{p}j}\|\dot{\Delta}_j(\delta v\cdot\nabla c_2)\|_{L^p} \le C\|\delta v\|_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1}}\|\nabla c_2\|_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1}}$$

因此

$$\int_0^t \sum_{j\le J^\varepsilon - RN_0} 2^{\frac{d}{p}j}\|\dot{\Delta}_j(v_1\cdot\nabla\delta c+\delta v\cdot\nabla c_2)\|_{L^p} \le C\int_0^t \widetilde{X}(s)\delta X(s).$$

然后，对 δQ_j^1 和 δQ_j^2 中的其他项进行类似计算，可得

$$\|\delta c\|^\ell_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1})} + \|\delta v\|^\ell_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1})} \le \delta X_0 + \int_0^t \widetilde{X}(s)\delta X(s).$$

综合上述估计，我们得到（4.65）。

5 定理 2.2 的证明

我们回顾以下关于多孔介质方程扰动解的命题。

*d***命题 5.1** ([12])。 **</style}令，并假设，** *1 </style}*，其中 $\bar{\mathcal{N}}>0$。存在常数 $c_0>0$，使得如果

$$\left\|\mathcal{N}_0-\bar{\mathcal{N}}\right\|_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1}} \le c_0,$$

那么，下列方程

$$\partial_t\mathcal{N}-\Delta P(\mathcal{N})=0 \tag{5.83}$$

配以初始数据 $\mathcal{N}_0$，存在唯一的全局解 $\mathcal{N}$，使得 $\mathcal{N}-\bar{\mathcal{N}}\in\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^+;\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1})\cap L^1(\mathbb{R}^+;\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}\mp 2}_{p\,1},)$ 并且

$$Y(t)\triangleq\|\mathcal{N}\|_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1})}+\|\mathcal{N}\|_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}+2}_{p,1})}\lesssim c_0. \tag{5.84}$$

为证明定理 2.2，我们使用定理 2.1 中建立的统一有界性。对于$r\in[1,2]$，我们有

$$\begin{aligned}\|\mathcal{W}\|_{L^r_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1})} &\lesssim \Big(\|\mathcal{W}\|^\ell_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1})}+\sum_{i=1}^R\|\mathcal{W}\|^{m_i}_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1})}+\varepsilon\|(\nabla c,v)\|^h_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\Big)^{2-\frac{2}{r}}\\ &\times \Big(\|\mathcal{W}\|^\ell_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1})}+\sum_{i=1}^R\|\mathcal{W}\|^{m_i}_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p_i}}_{p_i,1})}+\varepsilon\|(\nabla c,v)\|^h_{L^1_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\Big)^{\frac{2}{r}-1}\\ &\lesssim \varepsilon^{\frac{2}{r}-1}.\end{aligned}$$

利用 $\nabla P_{(\rho^\varepsilon)}\rho^\varepsilon = \gamma(c+\bar{c})\nabla c$，我们得到阻尼模态的所需估计：

$$\left\| v^\varepsilon + \frac{\nabla P(\rho^\varepsilon)}{\rho^\varepsilon} \right\|_{L^r_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1})} = \|\mathcal{W}\|_{L^r_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1})} \leq C\varepsilon^{\frac{2}{r}-1}. \tag{5.85}$$

定义 $\delta D = \rho^\varepsilon - \mathcal{N}$。根据泰勒展开，对于 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$，有

$$P(f) - P(f^*) = P'(f^*)(f-f^*) + \widetilde{P}(f^*)(f-f^*).$$

由于 $\bar{\rho} = \bar{\mathcal{N}}$，误差 δD 满足

$$\partial_t \delta D - \mu\Delta\delta D = \mathcal{E} + \mathcal{S}$$

其中 $\mu = P'(\bar{\rho})$,

$$\mathcal{E} = \Delta\big((\widetilde{P}(\rho) - \widetilde{P}(\bar{\rho}))\delta D + (\widetilde{P}(\rho) - \widetilde{P}(\mathcal{N}))(\mathcal{N} - \bar{\mathcal{N}})\big) \quad \text{and} \quad \mathcal{S} = -\mathrm{div}\,(\rho\mathcal{W}).$$

因此，杜哈梅尔公式表明

$$\delta D = e^{\mu\Delta t}\delta D_0 + \int_0^t e^{\mu\Delta(t-s)}\big(\mathcal{E}+\mathcal{S}\big).$$

热方程的标准估计给出，对于 $\delta > 0$,

$$\|\delta D\|_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\delta}_{p,1})\cap L^{\frac{2}{1+\delta}}_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}+1}_{p,1})} \lesssim \|\delta D_0\|_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\delta}_{p,1}} + \|\mathcal{E}\|_{L^{\frac{2}{1+\delta}}_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-1}_{p,1})} + \|\mathcal{S}\|_{L^{\frac{2}{1+\delta}}_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-1}_{p,1})}. \tag{5.86}$$

因此， 接下来需要控制右端项。对于 $\mathcal{E}$ 中的第一项，我们有 ve

$$\begin{aligned}\|\Delta\big((\widetilde{P}(\rho) - \widetilde{P}(\bar{\rho}))\delta D\big)\|_{L^{\frac{2}{1+\delta}}_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-1}_{p,1})} &\lesssim \|c\|_{L^\infty_T(L^\infty)}\|\delta D\|_{L^{\frac{2}{1+\delta}}_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}+1}_{p,1})} + \|\delta D\|_{L^{\frac{2}{\delta}}_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1})}\|c\|_{L^2_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}+1}_{p,1})} \\ &\lesssim X(t)\|\delta D\|_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\delta}_{p,1})\cap L^{\frac{2}{1+\delta}}_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}+1}_{p,1})}.\end{aligned}$$

$\mathcal{E}$ 中的另一项可以用类似的方法处理，从而得到

$$\|\Delta\big((\widetilde{P}(\rho) - \widetilde{P}(N))(\mathcal{N} - \bar{\mathcal{N}})\big)\|_{L^{\frac{2}{1+\delta}}_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-1}_{p,1})} \lesssim Y(t)\|\delta D\|_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\delta}_{p,1})\cap L^{\frac{2}{1+\delta}}_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}+1}_{p,1})}.$$

综合以上估计，我们得到

$$\|\mathcal{E}\|_{L^{\frac{2}{1+\delta}}_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-1}_{p,1})} \lesssim \big(X(t)+Y(t)\big)\|\delta D\|_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\delta}_{p,1})\cap L^{\frac{2}{1+\delta}}_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}+1}_{p,1})}.$$

关于 $\mathcal{S}$，对于 $\delta \in (0,1]$, , 有

$$\|\mathrm{div}\,(\rho\mathcal{W})\|_{L^{\frac{2}{1+\delta}}_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-1}_{p,1})} \lesssim (1+\|c\|_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1})})\|\mathcal{W}\|_{L^{\frac{2}{1+\delta}}_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}}_{p,1})} \lesssim \varepsilon^\delta X(t),$$

其中，我们在最后一个不等式中使用了 (5.85)。利用 $X(t)\ Y(t) \ll 1$，可得

$$\|\delta D\|_{L^\infty_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\delta}_{p,1})\cap L^r_t(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}+1}_{p,1})} \leq \|\delta D_0\|_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\delta}_{p,1}} + \varepsilon^\delta X(t)$$

在 $\|\delta D_0\|_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\delta}_{p,1}} \leq \varepsilon^{\delta}$，这意味着

$$\|\delta D\|_{L^{\infty}_T(\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\delta}_{p,1})} \leq \varepsilon^{\delta}.$$

定理 2.2 的证明到此结束。

致谢

T. Crin-Barat 受到项目 ANR-24-CE40-3260 – Hyperbolic Equations, Approximations& Dynamics (HEAD) 的资助。

数据可用性声明

本文不适用数据共享，因为本研究未生成或分析任何数据集。

利益冲突声明

作者声明，他们不存在任何利益冲突。

工具箱及乘积与交换子估计的证明

A.1 工具箱

引理 A.1 ([16])。 设 $X\colon [0,T] \to \mathbb{R}_+$ 是一个连续函数，且 X^2 可微。假设存在常数 $B \geq 0$ 和可测函数 $A\colon [0,T] \to \mathbb{R}_+$，使得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}X^2 + BX^2 \leq AX \quad a.e.\ on\ \ [0,T].$$

那么，对于所有 $t \in [0,T]$，我们有

$$X(t) + B\int_0^t X(s) \leq X_0 + \int_0^t A(s).$$

A.2 引理 3.1 的证明

利用博尼抛物分解，我们得到

$$\dot{\Delta}_j(fg) = T_f g + R(f,g) + T_g f,$$

其中

$$T_f g := \dot{\Delta}_j(\sum_{j' \in \mathbb{Z}} \dot{S}_{j'-1} f \dot{\Delta}_{j'} g),$$

$$R(f,g) := \dot{\Delta}_j(\sum_{j'\in\mathbb{Z}} \widetilde{\dot{\Delta}}_{j'} f \cdot \dot{\Delta}_{j'} g)$$

and

$$T_g f := \dot{\Delta}_j(\sum_{j'\in\mathbb{Z}} \dot{S}_{j'-1} g \dot{\Delta}_{j'} f),$$

其中 $\widetilde{\dot{\Delta}}_{j'} f := \sum_{|k-j'|\le 1} \dot{\Delta}_k f$.

情形（1）：高频。令 $j \ge J^{\varepsilon}$ 和 $f \in \mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^d)$。对于余项 $R(f, g)$，利用 $\dot{\Delta}_j$ 二进块的傅里叶局部化性质，存在一个正的 N_1，使得

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\sum_{j'\in\mathbb{Z}} \dot{\Delta}_j(\widetilde{\dot{\Delta}}_{j'} f \dot{\Delta}_{j'} g))(\xi) &= \sum_{j'\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\frac{|\xi|}{2^j})\widetilde{\varphi}(\frac{|\xi-\eta|}{2^{j'}})\varphi(\frac{|\eta|}{2^{j'}})\widehat{f}(\xi-\eta)\widehat{g}(\eta)d\eta \\ &= \sum_{j'\ge j-N_1} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\frac{|\xi|}{2^j})\widetilde{\varphi}(\frac{|\xi-\eta|}{2^{j'}})\varphi(\frac{|\eta|}{2^{j'}})\widehat{f}(\xi-\eta)\widehat{g}(\eta)d\eta. \quad \text{(A.87)}\end{aligned}$$

事实上，根据 φ 和 $\widetilde{\varphi}$的定义，我们可得

$$|\xi| \in [\frac{3}{4}2^j, \frac{8}{3}2^j], \quad |\xi-\eta| \in [\frac{3}{8}2^{j'}, \frac{16}{3}2^{j'}] \quad \text{and} \quad |\eta| \in [\frac{3}{4}2^{j'}, \frac{8}{3}2^{j'}].$$

现在，固定一个 j，若 $j' < j - N_1$，则

$$|\xi| \le \big||\xi-\eta| + |\eta|\big| \le 2^{j'+2N_1}.$$

根据 $|\xi|$的支集，只要选取足够大的 N_1，便可得到（A.87）。因此，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{j\ge J} 2^{sj}\|\dot{\Delta}_j(\sum_{j'\in\mathbb{Z}} \widetilde{\dot{\Delta}}_{j'} f \dot{\Delta}_{j'} g)\|_{L^2} &\lesssim \sum_{j\ge J} 2^{(s+\frac{2d}{p_1}-\frac{d}{2})j}\|\dot{\Delta}_j(\sum_{j'\in\mathbb{Z}} \widetilde{\dot{\Delta}}_{j'} f \dot{\Delta}_{j'} g)\|_{L^{\frac{p_1}{2}}} \\ &\lesssim \sum_{j\ge J} 2^{(s+\frac{2d}{p_1}-\frac{d}{2})j} \sum_{j'\ge j-N_1} \|\widetilde{\dot{\Delta}}_{j'} f\|_{L^{p_1}} \|\dot{\Delta}_{j'} g\|_{L^{p_1}} \\ &= \sum_{j\ge J} \left(\sum_{j'\ge j-N_1} 2^{(s+\frac{2d}{p_1}-\frac{d}{2})(j-j')} 2^{(s+\frac{2d}{p_1}-\frac{d}{2})j'} \|\widetilde{\dot{\Delta}}_{j'} f\|_{L^{p_1}} \|\dot{\Delta}_{j'} g\|_{L^{p_1}} \right).\end{aligned}$$

若 $s + \frac{2d}{p_1} - d > 0$，我们可以选取一个满足 $N_0 \ge N_1 + 1$ 的 N_0，并应用杨不等式得到：对于 $s - \frac{d}{p} = s_1 + s_2 - \frac{2d}{p_1}$，—

$$\begin{aligned}\sum_{j\ge J} 2^{sj}\|\dot{\Delta}_j(\sum_{j'\in\mathbb{Z}} \widetilde{\dot{\Delta}}_{j'} f \dot{\Delta}_{j'} g)\|_{L^2} &\lesssim \sum_{j\ge J} \left(\sum_{j'\ge j-N_0-1} 2^{(s+\frac{2d}{p_1}-\frac{d}{2})(j-j')} 2^{(s+\frac{2d}{p_1}-\frac{d}{2})j'} \|\widetilde{\dot{\Delta}}_{j'} f\|_{L^{p_1}} \|\dot{\Delta}_{j'} g\|_{L^{p_1}} \right) \\ &\lesssim \sum_{j\ge J-N_0-1} 2^{s_1 j}\|\widetilde{\dot{\Delta}}_j f\|_{L^{p_1}} \sup_{j\ge J-N_0-1} 2^{s_2 j}\|\dot{\Delta}_j g\|_{L^{p_1}} \\ &\lesssim \sum_{j\ge J-N_0} 2^{s_1 j}\|\dot{\Delta}_j f\|_{L^{p_1}} \sup_{j\ge J-N_0} 2^{s_2 j}\|\dot{\Delta}_j g\|_{L^{p_1}}\end{aligned}$$

$$\lesssim \|f\|^{[m_1,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{s_1}_{p_1,1}} \|g\|^{[m_2,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{s_2}_{p_1,1}}.$$

关于抛物乘积项 $T_f g$，存在一个 $N_2 \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\sum_{j'\in\mathbb{Z}} \dot{\Delta}_j(\dot{S}_{j'-1} f \dot{\Delta}_{j'} g))(\xi) &= \sum_{j'\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\frac{|\xi|}{2^j})\chi(\frac{|\xi-\eta|}{2^{j'-1}})\varphi(\frac{|\eta|}{2^{j'}})\widehat{f}(\xi-\eta)\widehat{g}(\eta)d\eta \\ &= \sum_{|j-j'|\le N_2} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\frac{|\xi|}{2^j})\chi(\frac{|\xi-\eta|}{2^{j'-1}})\varphi(\frac{|\eta|}{2^{j'}})\widehat{f}(\xi-\eta)\widehat{g}(\eta)d\eta. \quad \text{(A.88)}\end{aligned}$$

上述等式的证明与 (A.87) 的证明类似。由三角不等式可得

$$|\xi| \in [\frac{3}{4}2^j, \frac{8}{3}2^j],\ |\xi-\eta| \in [0, \frac{4}{3}2^{j'}] \quad \text{and} \quad |\eta| \in [\frac{3}{4}2^{j'}, \frac{8}{3}2^{j'}] \Rightarrow |\xi| \in [\frac{4}{3}2^{j'}, 2^{j'+2}].$$

然后，取 N_2 足够大即可导出矛盾，从而得到 (A.88)。显然，(A.88) 意味着

$$\sum_{j\ge J} \dot{\Delta}_j(\sum_{j'\in\mathbb{Z}} \dot{S}_{j'-1} f \dot{\Delta}_{j'} g) \sim \sum_{j\ge J-N_2} \dot{S}_{j-1} f \dot{\Delta}_j g$$

and

$$\begin{aligned}&\|\sum_{j\ge J} 2^{sj}\dot{\Delta}_j(\sum_{j'\in\mathbb{Z}} \dot{S}_{j'-1} f \dot{\Delta}_{j'} g)\|_{L^2} \\ &\qquad \lesssim \sum_{j\in[J-N_2,J)} 2^{sj}\|\dot{S}_{j-1}f\|_{L^{p_1^*}}\|\dot{\Delta}_j g\|_{L^{p_1}} + \sum_{j\ge J} 2^{sj}\|\dot{S}_{j-1}f\|_{L^\infty}\|\dot{\Delta}_j g\|_{L^2}.\end{aligned}$$

利用 Sobolev嵌入，我们得到

$$\sup_{j\in[J-N_2,J)} \|\dot{S}_{j-1}f\|_{L^{p_1^*}} \lesssim \|f\|^{[\ell,m_1]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p_1^*}}_{p,1}},$$

$$\sup_{j\ge J} \|\dot{S}_{j-1}f\|_{L^\infty} \lesssim \|f\|_{L^\infty} \quad \text{and} \quad \sum_{j\ge J} 2^{sj}\|\dot{\Delta}_j g\|_{L^2} \lesssim \|g\|^h_{\dot{\mathbb{B}}^s_{2,1}},$$

只要 $p_1 \ge \frac{2p}{p-2}$。此外，进一步选取 $N_0 \ge N_2$，便有

$$\sum_{j\in[J-N_2,J)} 2^{sj}\|\dot{\Delta}_j g\|_{L^{p_1}} \lesssim \sum_{j\in[J-N_0,J)} 2^{sj}\|\dot{\Delta}_j g\|_{L^{p_1}} \lesssim \|g\|^{m_1}_{\dot{\mathbb{B}}^s_{p_1,1}}.$$

另一个抛物乘积项可用对称的方法处理。至此，高频估计得证。

情形（2）：中频乘积。回顾一下，$J_i = [J - N_0 i, J - (N_0-1)i[$。对于余项，按照高频区域中的处理方法，我们发现存在一个N_1，使得

$$\sum_{j\in J_i} 2^{sj}\|\dot{\Delta}_j(\sum_{j'\in\mathbb{Z}} \widetilde{\dot{\Delta}}_{j'} f \dot{\Delta}_{j'} g)\|_{L^{p_i}} \lesssim \sum_{j\in J_i} 2^{(s+\frac{2d}{p_{i+1}}-\frac{d}{p_i})j}\|\dot{\Delta}_j(\sum_{j'\in\mathbb{Z}} \widetilde{\dot{\Delta}}_{j'} f \dot{\Delta}_{j'} g)\|_{L^{\frac{p_{i+1}}{2}}}$$

$$\lesssim \sum_{j\in J_i} 2^{(s+\frac{2d}{p_{i+1}}-\frac{d}{p_i})j} \sum_{j'\geq j-N_1} \|\widetilde{\dot{\Delta}}_{j'} f\|_{L^{p_{i+1}}} \|\dot{\Delta}_{j'} g\|_{L^{p_{i+1}}}$$

$$= \sum_{j\in J_i} \left(\sum_{j'\geq j-N_1} 2^{(s+\frac{2d}{p_{i+1}}-\frac{d}{p_i})(j-j')} 2^{(s+\frac{2d}{p_{i+1}}-\frac{d}{p_i})j'} \|\widetilde{\dot{\Delta}}_{j'} f\|_{L^{p_{i+1}}} \|\dot{\Delta}_{j'} g\|_{L^{p_{i+1}}} \right).$$

由于 $J_i = [J - N_0 i, J - (N_0 - 1)i[$, ，我们可以选取一个 N_0 满足 $N_0 \geq N_1 + 1$。那么，若$s + \frac{2d}{p_{i+1}} = \frac{d}{p_i} > 0$，由杨不等式可得

$$\sum_{j\in J_i} 2^{sj} \|\dot{\Delta}_j (\sum_{j'\in\mathbb{Z}} \dot{\Delta}_{j'} f \dot{\Delta}_{j'} g)\|_{L^{p_i}} \lesssim \sum_{j\geq J-N_0(i+1)i} 2^{s_1 j} \|\widetilde{\dot{\Delta}}_j f\|_{L^{p_{i+1}}}$$

$$\times \sup_{j\geq J-N_0(i+1)} 2^{s_2 j} \|\dot{\Delta}_j g\|_{L^{p_{i+1}}} \lesssim \|f\|^{[m_{i+1},h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{s_1}_{p_{i+1},1}} \|g\|^{[m_{i+1},h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{s_2}_{p_{i+1},1}}$$

取 $s_1 + s_2 = s + \frac{2d}{p_{i+1}} = \frac{d}{p_i}$ 后，余项的分析至此结束 m.

对于抛物乘积项，与高频区域的情形一样，我们可以选取一个 N_2 ，使得

$$\|\sum_{j\in J_i} 2^{sj} \dot{\Delta}_j (\sum_{j'\in\mathbb{Z}} \dot{S}_{j'-1} f \dot{\Delta}_{j'} g)\|_{L^{p_i}} \lesssim \sum_{j\geq J-N_0 i-N_2} 2^{sj} \|\dot{S}_{j-1} f \dot{\Delta}_j g\|_{L^{p_i}}$$

$$\lesssim \sum_{j\in[J-N_0 i-N_2, J-N_0 i)} 2^{sj} \|\dot{S}_{j-1} f\|_{L^{p^*_{i+1}}} \|\dot{\Delta}_j g\|_{L^{p_{i+1}}} + \sum_{j\geq J-N_0 i} 2^{sj} \|\dot{S}_{j-1} f\|_{L^\infty} \|\dot{\Delta}_j g\|_{L^{p_i}}.$$

由于

$$\sup_{j\in[J-N_0 i-N_2, J-N_0 i)} \|\dot{S}_{j-1} f\|_{L^{p^*_{i+1}}} \lesssim \|f\|^{[\ell, m_{i+1}]}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p^*_{i+1}}}_{p,1}},$$

$$\sup_{j\geq J-N_0 i} \|\dot{S}_{j-1} f\|_{L^\infty} \lesssim \|f\|_{L^\infty}, \quad \sum_{j\geq J-N_0 i} 2^{sj} \|\dot{\Delta}_j g\|_{L^2} \lesssim \|g\|^{[m_i,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^s_{p_i,2,1}},$$

若取 $N_0 \geq N_2$，则有

$$\sum_{j\in[J-N_0 i-N_2, J-N_0 i)} 2^{sj} \|\dot{\Delta}_j g\|_{L^{p_{i+1}}} \lesssim \sum_{j\in[J-N_0(i+1), J-N_0 i)} 2^{sj} \|\dot{\Delta}_j g\|_{L^{p_{i+1}}} \lesssim \|g\|^{m_i}_{\dot{\mathbb{B}}^s_{p_{i+1},1}},$$

这便得到了中频区域所需的估计，并完成了引理 3.1 的证明。

□

A.3 引理 3.2 的证明

回顾一下， $\mathfrak{R}_j := S_{j-1} f \, \Delta_j g - \Delta_j (fg)$。根据 Bony 分解，我们有

$$\mathfrak{R}_j := R_{1,j} + R_{2,j} + R_{3,j}$$

其中

$$R_{1,j} = \dot{\Delta}_j (\sum_{j'\in\mathbb{Z}} \widetilde{\dot{\Delta}}_{j'} w \cdot \dot{\Delta}_{j'} z), \quad R_{2,j} = \dot{\Delta}_j (\sum_{j'\in\mathbb{Z}} \dot{\Delta}_{j'} w \cdot \dot{S}_{j'-1} z)$$

and

$$R_{3,j}=\dot{\Delta}_j(\sum_{j'\in\mathbb{Z}}\dot{S}_{j'-1}w\cdot\dot{\Delta}_{j'}z)-\dot{S}_{j-1}w\cdot\dot{\Delta}_j z.$$

情形（1）：高频。令 $j\geq J$。项 $R_{1,\ j}$ 和 $R_{2,\ j}$ 可按照引理 3.1 的证明处理，因此我们重点考察 $R_{3,\ j}$。利用二进块的傅里叶局部化性质，存在一个整数 $N_2>0$，使得

$$\dot{\Delta}_j(\sum_{j'\in\mathbb{Z}}\dot{S}_{j'-1}w\dot{\Delta}_{j'}z)\ =\ \sum_{|j-j'|\leq N_2}[\dot{\Delta}_j,\dot{S}_{j'-1}w]\dot{\Delta}_{j'}z+\sum_{|j-j'|\leq 1}\left(\dot{S}_{j'-1}w-\dot{S}_{j-1}w\right)\dot{\Delta}_j\dot{\Delta}_{j'}z. \tag{A.89}$$

对于 $j'=J-1$，并取充分大的 N_0，上述量仅在 $j\in[J,J+N_0]$ 时非零，因为 $|j-j'|\leq N_2$。应用 [1, 引理 2.97] 可得

$$\begin{aligned}\|\sum_{j\geq J}2^{sj}[\dot{\Delta}_j,\dot{S}_{J-2}w]\dot{\Delta}_{J-1}z\|_{L^2}&\lesssim\sum_{j\in[J,J+N_0]}2^{sj}\sum_{k\leq J-3}\|[\dot{\Delta}_j,\dot{\Delta}_k w]\dot{\Delta}_{J-1}z\|_{L^2}\\&\lesssim\sum_{k\leq J-3}\|\dot{\Delta}_k\nabla w\|_{L^{p_1^*}}\|\dot{\Delta}_{J-1}z\|_{L^{p_1}}\lesssim\|\nabla w\|_{\dot{\mathbb{B}}^{0}_{p_1^*,1}}^{[\ell,m_1]}\|z\|_{\dot{\mathbb{B}}^{s}_{p_1,1}}^{m_1}.\end{aligned}$$

类似地，可以处理 $j'\leq J-2$ 的情形。对于 $j'\geq J$，有

$$\begin{aligned}\|\sum_{j\geq J}2^{sj}\sum_{|j-j'|\leq N_2,j'\geq J}[\dot{\Delta}_j,\dot{S}_{j'-1}w]\dot{\Delta}_{j'}z\|_{L^2}&\lesssim\sum_{j\geq J}2^{(s-1)j}\sum_{|j-j'|\leq N_2,j'\geq J}\|\dot{S}_{j'-1}\nabla w\|_{L^\infty}\|\dot{\Delta}_{j'}z\|_{L^2}\\&\lesssim\|\nabla w\|_{\dot{\mathbb{B}}^{0}_{\infty,1}}\|z\|_{\dot{\mathbb{B}}^{s-1}_{2,1}}^{h}.\end{aligned}$$

最后，我们有

$$\begin{aligned}\|\sum_{j\geq J}2^{sj}\sum_{|j-j'|\leq 1}\left(\dot{S}_{j'-1}w-\dot{S}_{j-1}w\right)\dot{\Delta}_j\dot{\Delta}_{j'}z\|_{L^2}&\lesssim\sum_{j\geq J}2^{sj}\|\dot{S}_{j'-1}w-\dot{S}_{j-1}w\|_{L^\infty}\|\dot{\Delta}_j z\|_{L^2}\\&\lesssim\sup_{j\in\mathbb{Z}}2^j\|\dot{\Delta}_j w\|_{L^\infty}\|z\|_{\dot{\mathbb{B}}^{s-1}_{2,1}}^{h}\lesssim\|\nabla w\|_{\dot{\mathbb{B}}^{0}_{\infty,1}}\|z\|_{\dot{\mathbb{B}}^{s-1}_{2,1}}^{h},\end{aligned}$$

这就完成了高频部分的证明。

情形（2）：中频中的交换子。设 $j\in J_i$。同样，我们只关注 $R_{3,\ j}$。回顾 (A.89)，对于 $j'=J-N_0i-1$，应用 [1, 引理 2.97] 可得

$$\begin{aligned}\|\sum_{j\in J_i}2^{sj}[\dot{\Delta}_j,\dot{S}_{J-4i-2}w]\dot{\Delta}_{J-N_0i-1}z\|_{L^{p_i}}&\lesssim\sum_{j\in J_i}2^{sj}\sum_{k\leq J-N_0i-3}\|[\dot{\Delta}_j,\dot{\Delta}_k w]\dot{\Delta}_{J-N_0i-1}z\|_{L^{p_i}}\\&\lesssim\sum_{k\leq J-N_0i-3}\|\dot{\Delta}_k\nabla w\|_{L^{p_{i+1}^*}}\|\dot{\Delta}_{J-N_0i-1}z\|_{L^{p_{i+1}}}\lesssim\|\nabla w\|_{\dot{\mathbb{B}}^{0}_{p_{i+1}^*,1}}^{[\ell,m_{i+1}]}\|z\|_{\dot{\mathbb{B}}^{s}_{p_{i+1},1}}^{m_{i+1}}.\end{aligned}$$

类似地，可以处理 $j'\leq J-N_0i-2$ 的情形。对于 $j'\geq J-N_0i$，有

$$\|\sum_{j\in J_i}2^{sj}\sum_{|j-j'|\leq N_2,j'\geq J-N_0i}[\dot{\Delta}_j,\dot{S}_{j'-1}w]\dot{\Delta}_{j'}z\|_{L^{p_i}}$$

$$\lesssim \sum_{j\in J_i} 2^{(s-1)j} \sum_{|j-j'|\le N_2, j'\ge J-N_0 i} \|\dot S_{j'-1}\nabla w\|_{L^\infty}\|\dot\Delta_{j'} z\|_{L^{p_i}} \lesssim \|\nabla w\|_{\dot{\mathbb{B}}^0_{\infty,1}}\|z\|^{[m_i,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{s-1}_{p_i,1}}.$$

最后，我们有

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{j\in J_i} 2^{sj}\sum_{|j-j'|\le 1}\Big(\dot S_{j'-1}w-\dot S_{j-1}w\Big)\dot\Delta_j\dot\Delta_{j'}z\Big\|_{L^{p_i}} &\lesssim \sum_{j\in J_i} 2^{sj}\|\dot S_{j'-1}w-\dot S_{j-1}w\|_{L^\infty}\|\dot\Delta_j z\|_{L^{p_i}}\\ &\lesssim \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^j\|\dot\Delta_j w\|_{L^\infty}\|z\|^{[m_i,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{s-1}_{p_i,1}} \lesssim \|\nabla w\|_{\dot{\mathbb{B}}^0_{\infty,1}}\|z\|^{[m_i,h]}_{\dot{\mathbb{B}}^{s-1}_{p_i,1}}.\end{aligned}$$

至此，引理 3.2 的证明完成。 □

参考文献

[1] H. Bahouri、J.-Y. Chemin 和 R. Danchin。《傅里叶分析与非线性偏微分方程》，数学科学基础丛书第343卷。施普林格，海德堡，2011年。[2] K. Beauchard 和 E. Zuazua。部分耗散双曲系统的大时间渐近行为。《数学分析与应用文献》，199，177–227，2011年。[3] R. Bianchini。扩散尺度下金-辛模型的一致渐近估计与收敛估计。《SIAM 数学分析杂志》，50（2），1877-1899，2018年。[4] P. Brenner。 L_p中的对称双曲系统的柯西问题。《斯堪的纳维亚数学》，19：27–37，1966年。[5] F. Charve 和 R. Danchin。临界 L^p 框架下可压缩 Navier–Stokes 方程的整体存在性结果。《数学分析与应用文献》，198，233-271，2010年。[6] G.-Q Chen、C.D. Levermore 和 T.-P Liu。带刚性弛豫项和熵的双曲守恒律。《纯粹与应用数学通讯》，47：787–830，1994年。[7] Q. Chen、C. Miao 和 Z. Zhang。高振荡初速度下可压缩 Navier–Stokes 方程的整体适定性。《纯粹与应用数学通讯》，63（9）：1173–1224，2010年。[8] J.-F. Coulombel 和 T. Goudon。多维等温欧拉方程的强弛豫极限。《美国数学会汇刊》，359（2）：637–648，2007年。[9] J.-F. Coulombel 和 C. Lin。多维欧拉方程的强弛豫极限。《非线性微分方程与应用》，20：447–461，2013年。[10] T. Crin-Barat 和 R. Danchin。临界正则性框架下的部分耗散双曲系统：多维情形。《Journal de Math》´《ematiques Pures et Appliqu》´《ees》，165：1–41，2022年。[11] T. Crin-Barat 和 R. Danchin。临界正则性框架下的一维部分耗散双曲系统及其应用。《纯粹与应用分析》，4（1）：85–125，2022年。

[12] T. Crin-Barat 和 R. Danchin。 L^p 框架下部分耗散双曲系统的整体存在性及弛豫极限。《数学年刊》，386（3-4）：2159–2206，2023年。[13] T. Crin-Barat、L.-Y. Shou 和 J.Zhang。 L^p 框架下金-辛模型的强弛豫极限与一致时间渐近性。《中国科学：数学》，68（11）：2593–2628，2025年。[14] R. Danchin。临界空间中可压缩 Navier–Stokes 方程的整体存在性。《数学发明》，141，579-614，2000年。[15] R. Danchin。临界正则性框架下的部分耗散系统及强弛豫极限。《EMS数学科学综述》，9（1）：135–192，2022年。[16] R. Danchin 和 J. Xu。临界 L^p 框架下可压缩 Navier–Stokes 方程的最优时间衰减估计。《数学分析与应用文献》，224，53–90，2017年。[17] G. Faye 和 L.M. Rodrigues。双曲型平衡律系统黎曼激波的指数渐近稳定性。《SIAM 数学分析杂志》，55（6）：6425–6456，2023年。[18] Z. Guo、Z. Song 和 M. Yang。最优 Besov 空间中三维可压缩 Navier–Stokes 方程的整体适定性。《arXiv:2509.17005》，2025年。[19] B. Haspot。正压黏性流体在临界空间中的整体强解存在性。《数学分析与应用文献》，202，427–460，2011年。[20] D. Hoff。多维可压缩流动 Navier–Stokes 方程弱解的唯一性。《SIAM J. Math. Anal》，37，1742–1760，2006年。[21] S. Jin 和 Z. Xin。任意空间维数下守恒律系统的弛豫格式。《纯粹与应用数学通讯》，48（3）：235–276，1995年。[22] S. Junca 和 M. Rascle。等温欧拉系统向热方程的强弛豫。《应用数学与物理杂志》，53（2）：239–264，2002年。[23] S. Kawashima。双曲-抛物复合型系统及其在磁流体力学方程中的应用。《博士论文》，1983年。[24] S. Kawashima 和 W.-A. Yong。双曲型平衡律的衰减估计。《分析与应用》，28（1）：1–33，2009年。[25] P. D. Lax。《双曲守恒律系统与激波的数学理论》，应用数学会议委员会区域会议丛书第11卷。《工业与应用数学学会》，宾夕法尼亚州费城，1973年。[26] Y. Li、Y.-J. Peng 和 L. Zhao。双曲型平衡律系统向抛物型系统的收敛率。《应用分析》，第1079–1095页，2021年。[27] Z. Liang 和 Z. Shuai。双曲型平衡律系统向抛物型系统的收敛率。《渐近分析》，1224：163–198，2021年。

[28] P. Marcati 和 A. Milani。一维达西定律作为可压缩欧拉流的极限。《微分方程杂志》，84(1):129–147，1990年。[29] P. Marcati、A. Milani 和 P. Secchi。拟线性非齐次双曲系统弱解的奇异收敛。《数学手稿》，60(1):49–69，1988年。[30] P. Marcati 和 B. Rubino。拟线性一阶系统的双曲型到抛物型松弛理论。《微分方程杂志》，162(2):359–399，2000年。[31] D. Serre。守恒律系统，第*1*卷。Diderot 出版社，艺术与科学，巴黎、纽约、阿姆斯特丹，1996年。[32] S. Shizuta 和 S. Kawashima。双曲—抛物型方程组及其在离散玻尔兹曼方程中的应用。《北海道数学杂志》，14，249-275，1985年。[33] L.-Y. Shou、J. Xu 和 P. Zhang。部分耗散双曲型平衡律系统的衰减特征理论。*arXiv:2507.11450*，2025年。[34] T.C. Sideris、B. Thomases 和 D. Wang。带阻尼的三维可压缩欧拉方程解的长期行为。《偏微分方程通讯》，28(3- 4):795–816，2003年。[35] M. Sroczinski。一般拟线性双曲型平衡律小解的整体存在性与渐近衰减。《双曲微分方程杂志》，22:613–642，2025年。[36] L-Y. Shou、T. Crin-Barat、L. Liverani 和 E. Zuazua。具有非对称松弛的双曲系统的大时间渐近行为：一种算法方法。《纯粹与应用数学杂志》，202，2025年。[37] Y-J. Peng、T. Crin-Barat 和 L-Y. Shou。Sobolev 空间中可压缩欧拉系统与欧拉—麦克斯韦系统松弛极限的整体收敛速率。《微分方程杂志》，453，2026年。[38] C. Villani。次强制性。《美国数学会回忆录》，2010年。[39] W. Wang 和 T. Yan。多维带阻尼欧拉方程解的逐点估计。《微分方程杂志》，173(2):410–450，2001年。[40] J. Xu 和 Z. Wang。Besov 空间中的可压缩欧拉方程松弛极限。《纯粹与应用数学杂志 *(9)*》，99(1):43–61，2013年。[41] W.-A. Yong。双曲型平衡律的熵与整体存在性。《理性力学与分析档案》，172(2):247–266，2004年。

Timoth´ee Crin-Barat Université de Toulouse,
Institut de Mathématiques de Toulouse, Route de Narbonne 118,
31062 CEDEX 9 Toulouse, France,电子邮箱地址:
timothee.crin-barat@math.univ-toulouse.fr

Zihao Song

Mathematics and Key Laboratory of Mathematical MIIT, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing, 211106, P. R. China,电子邮箱地址: szh1995@nuaa.edu.cn; songzh19950504@gmail.com