arXiv:2602.03577v1 [math.GR] 3 Feb 2026

弱 Haagerup 性质在图乘积下的稳定性

SHUBHABRATA DAS 和 PARTHA SARATHI GHOSH

摘要。本文证明：若有限多个群的图乘积中的每个群都满足弱 Haagerup 性质，且常数为 $\Lambda_{WH} = 1$，那么该图乘积也满足弱 Haagerup 性质。由此可推得，常数为 $\Lambda_{WH} = 1$ 的弱 Haagerup 群的自由积也满足弱 Haagerup 性质，且常数为 $\Lambda_{WH} = 1$。

1. 引言

若一个群存在一个函数序列，该序列逐点收敛到常值函数 1（称为近似单位），且其中的函数均有限支撑并且正定，则称该群为可积群。顺从群构成一个相当大的类，并且在取直积、商群和子群时保持稳定。有限秩自由群不是可积群。

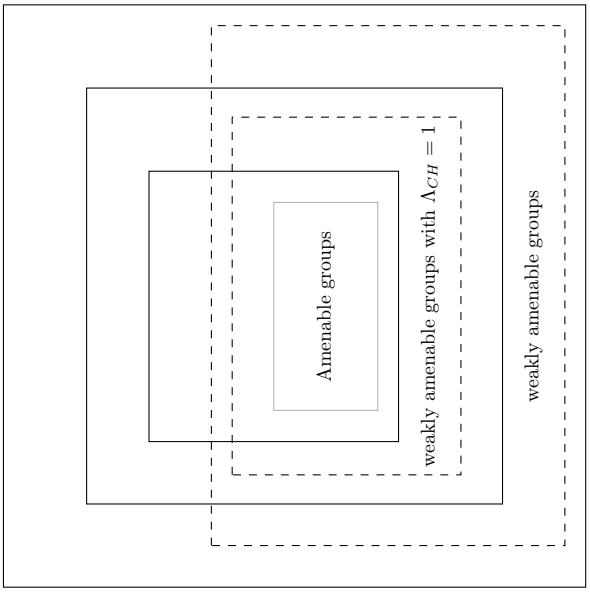
在 [18], 中，Haagerup 证明了自由群 $\mathbb{F}_n$ 上存在一个近似单位 $\{\phi_n\}$，其中的函数均为正定函数，并且在无穷远处消失（相对于词度量）。Akemann-Walter [1] 和 Choda [9] 将存在类似于 [18] 中近似单位的群称为具有*Haagerup* 性质。显然，顺从群具有 Haagerup 性质。双曲曲面的基本群、CAT(0) 立方化群、在树上真作用的群以及许多其他群都具有这一性质。Cherix 等人 [8] 对这一主题作了很好的综述。

可和性的另一种推广称为弱 *amenability*，其中要求 G具有由有限支撑函数构成的近似单位，并且这些函数在“完全有界”范数（B_2-范数，见定义 2.3）下统一有界。由于 G 上的正定映射 ϕ 具有有界的完全有界范数，这一概念推广了可和性。对于弱 amenable 群 G，有一个与之典范关联的常数，定义为这些近似单位的完全有界范数的下确界，称为 G 的 Cowling-Haagerup 常数，记作 $\Lambda_{CH}(G)$。显然，每个可积群都满足 $\Lambda_{CH} = 1$。上文提到的大多数群都已被证明是弱 amenable 的，且 $\Lambda_{CH} = 1$([18], [25], [23], [17])。作为具有 $\Lambda_{CH} > 1$的群的例子，我们提及 $Sp(1, n)$中的一个一致格 Γ，其中 $\Lambda_{CH}(\Gamma) = 2n - 1$。该群满足 Kazhdan 的性质 (T)，可将其视为 Haagerup 性质的强否定（见 [3],[11]）。

显然，像 $Sp(n, 1)$ 这样的群（或其中的格）不具有 Haagerup 性质。人们还注意到，大多数 满足 $\Lambda_{CH} = 1$ 的弱可合群恰好也是具有 Haagerup 性质的群，而 Cowling 在这方面提出了著名猜想： G 弱可合且满足 $\Lambda_{CH} = 1$，当且仅当 G 具有 Haagerup 性质（第 1.3.1, [8] 节）。Ozawa 和 Popa 构造了 [26], 中非弱可合群的例子，后来 Cornulier 等人证明它具有 Haagerup 性质 [10]。猜想的另一个方向仍未解决。

一种称为弱 *Haagerup* 性质 的进一步推广，介于 Haagerup 性质与弱 amenability 之间。Knudby 提出了这一概念 [20]（见定义 2.5）：若一个群上存在一个由在无穷远处消失的映射构成的近似单位，且这些映射在 B_2- 范数下有一致界，则称该群为弱 Haagerup 群。具有弱 Haagerup 性质的群 G 还带有一个常数$\Lambda_{WH}(G)$，其定义与 Λ_{CH}类似；显然，对于任意 G，都有 $\Lambda_{WH}(G) \leq \Lambda_{CH}(G)$。[19]给出了一个不具有弱 Haagerup 性质的群的例子。

关键词和短语。弱 Haagerup 性质，图积，完全有界范数，Herz-Schur 乘子，逼近性质。2010 年数学主题分类：20F65、46L07、46B28、43A35。



可和性和弱 amenability 在直积下均保持不变。 [5], Bozejko 和 Picardello 证明了，顺从群的自由积是弱可合的。然而，任意两个弱可合群的自由积是否仍然弱可合，至今仍是一个悬而未决的问题。不过，作为一个特例，Ricard 和徐已证明，两个还具有 $\Lambda_{CH}=1$的弱可合群的自由积也具有弱 amenability [28]。一般而言，群的 Haagerup 性质也已证明在直积、自由积以及（沿有限子群的）融合自由积运算下保持不变 [8]。Knudby 在 [21]中证明，两个弱 Haagerup 群的直积仍是弱 Haagerup 群。本文旨在研究弱 Haagerup 性质在某种群构造（图乘积）下的稳定性。

由 Green 在其论文 [15], 中定义的群的图积 $G(\Gamma)$，是一种将群的集合 $\{G_v\}_{v\in V(\Gamma)}$ 沿有限图 Γ 的顶点集 $V(\Gamma)$ 进行参数化组合的新颖方法。根据给定（有限）图的性质，群的图积也可视为群的自由积（对应于没有边的图）与直积（对应于给定顶点集上的完全图）之间的一种插值（详见第 2.4 节）。

对于有限单纯图 Γ，以及一族 $\{G_v\}_{v\in V(\Gamma)}$ 弱可合群，且对每个顶点 $v\in V(\Gamma)$ 满足 $\Lambda_{CH}(G_v)=1$, Reckwerdt 在 [27], 中证明了图乘积 $G(\Gamma)$ 是弱可合的。Haagerup 性质在图乘积下的稳定性由本文作者在[13], 中证明（另见 [2]）。本文的主要结果确立了弱 Haagerup 性质在图乘积下的稳定性。注意，具有 Haagerup 性质的群具有 $\Lambda_{WH}=1$，而满足 $\Lambda_{CH}(G)=1$ 的弱可合群 G 也是弱 Haagerup 的，且满足 $\Lambda_{WH}(G)=1$。因此，按照 Knudby 在 [20], 中的方案，证明具有 $\Lambda_{WH}=1$ 的弱 Haagerup 群是 Haagerup 的，便解决了 Cowling猜想的剩余部分。本文的主要结果可视为对该猜想的支持性证据。

定理 1.1. 设 Γ 是一个有限单纯图，且 $\{G_v\}_{v\in V(\Gamma)}$ 是一族弱 *Haagerup* 群，对每个 v 满足 $\Lambda_{WH}(G_v)=1$。则群 $G(\Gamma)$ 具有弱 *Haagerup* 性质，且 $\Lambda_{WH}(G(\Gamma))=1$。

图乘积在某种意义上是群的自由积的推广，因此作为上述定理的推论，我们同样有如下结果。

推论 1.2. 设 A 与 B 是两个弱 *Haagerup* 群，满足 $\Lambda_{WH}(G_v)=1$。则群 $G=A*B$ 具有弱 *Haagerup* 性质。

根据 Knudby [20], ，群 G 具有弱 Haagerup 性质且满足 $\Lambda_{WH}=1$ 的充要条件是存在一个真对称函数 ϕ，定义在 G 上，并且可表示为

群上的两个核之和，即对于任意 $x,\ y \in G$,

$$\phi(y^{-1}x) = \rho(x,y) + \tau(x,y) \tag{1}$$

其中， ρ 是真函数、条件负定函数，而 τ 是有界正定函数。因此，证明定理 1.1 的一种方法是在 $G(\Gamma)$ 上构造一个如上所述的真函数 ϕ。由于在每个 G_v 上，我们都有一个真函数 ϕ_v，它是上述 ρ_v 与 τ_v 之和，因此很自然会问：我们能否将各个核 ρ_v's 组合成一个 ρ，并将 τ_v's 组合成一个 τ，从而在 $G(\Gamma)$ 上得到一个 "$\phi = \rho + \tau$"。经过适当修改， G_v's 上的条件负定核之和在 $G(\Gamma)$ 上定义了一个同类型的核。[13] 采用了类似的方法，将 Haagerup 顶点群 G_v 上的条件负定核 ρ_v's 组合起来，从而在 $G(\Gamma)$ 上得到一个条件负定核，并证明其具有 Haagerup 性质。但在这里，我们无法将有界正定核 τ_v's 整合起来，在 $G(\Gamma)$ 上得到类似的核 τ，因此也无法得到所需的 $\phi = \rho + \tau$。我们沿用 [5,27,28] 中提出的一般论证思路来证明定理 1.1。在 [6] 的命题 12.3.5 以及 [25] 的主要结果证明中，也采用了某种类似的策略。

2. 预备知识

在全文中，设 G 是一个有限生成群。若函数 ϕ: $G \to \mathbb{C}$ 满足以下条件，则称其为 正定（或称为正类型或 PD）：对于所有 $n \in \mathbb{N}$，任取 n 个复数 $c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n$；以及群 G 中的任意 n 个元素 $g_1,\ g_2,\ \cdots,\ g_n$，

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} \phi(g_j^{-1} g_i) \geq 0$$

任意函数 ϕ: $G \to \mathbb{C}$ 都诱导出一个核 k_ϕ: $G \times G \to \mathbb{C}$，定义为 $k_\phi(g,\ h) := \phi(h^{-1}g)$。换言之， ϕ 是正定的，当且仅当对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 及任意子集 $\{g_1, \cdots, g_n\} \subset G$，矩阵 $[k_{ij} := k_\phi(g_i,\ g_j)] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 是正定的。

类似地，若对称函数 ϕ: $G \to \mathbb{C}$ （即 $\phi(x^{-1}) = \phi(x)\ \forall x \in G$）满足以下条件，则称其为 条件负定（CND）：对于所有 $n \in \mathbb{N}$，任取子集 $\{g_1, g_2, \cdots, g_n\} \subset G$ 以及由 n 个复数组成的任意集合 $\{c_1, \cdots, c_n\}$，且满足 $\sum_{i=1}^{n} c_i = 0$，有

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \overline{c_j} k_\phi(g_i, g_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i \overline{c_j} \phi(g_j^{-1} g_i) \leq 0$$

注记 2.1. 一个 *PD* 型（分别为 *CND* 型）的核 k: $G \times G \to \mathbb{C}$，若具有 G-不变性，即对所有 x、y、$z \in G$, 则会在群上诱导出一个 *PD* 型（分别为 *CND* 型）函数 ϕ_k。

$$k(xy, xz) = k(y, z).$$

或者， $\phi : G \to \mathbb{C}$ 可被刻画为 PD（[14]）：若存在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的酉表示π: $G \to \mathbb{B}(\mathcal{H})$以及一个单位向量 $\xi \in \mathcal{H}$，使得

$$\phi(g) = \langle \pi(g)\xi, \xi \rangle, \tag{2}$$

a换言之，存在一个映射 α: $G \to \mathcal{H}$，使得对于任意 $g,\ h \in G$

$$\phi(h^{-1}g) = \langle \alpha(g), \alpha(h) \rangle, \tag{3}$$

若存在一个映射 $R : G \to \mathcal{H}$ 到希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 中，使得则为 CND

$$k_\phi(g,h) = \phi(h^{-1}g) = ||R(g) - R(h)||^2. \tag{4}$$

条件负定映射与正定映射之间的以下关系归功于 Schoenberg。

引理 2.2。 *[29]([6],定理 D.11)* 当且仅当对每个 $t > 0,\ e^{-t\phi}$ 都是正定的，函数 ϕ: $G \to \mathbb{C}$ 才是条件负定的。

2.1. **完全有界映射与 B_2-范数**。我们先介绍完全有界范数（或函数 ϕ: $G \to \mathbb{C}$ 的 B_2-范数）的定义，后文将用它来定义弱 Haagerup 性质。

考虑希尔伯特空间 $\ell^2(G)$，它与 G 有典范关联，是 G 上所有平方可和函数构成的空间。$\mathbb{B}(\ell^2(G))$ 是 $\ell^2(G)$ 上所有有界算子构成的空间。任意元素 $A \in \mathbb{B}(\ell^2(G))$ 都可以写成矩阵形式 $[A_{g,h}]_{g,h\in G}$，其中 $A_{g,h} = \langle A\delta_h, \delta_g\rangle$。核 k: $G \times G \to \mathbb{C}$ 诱导出一个乘子 m_k: $\mathbb{B}(\ell^2(G)) \to \mathbb{B}(\ell^2(G))$，其定义为

$$[A_{g,h}]_{g,h\in G} \mapsto [k(g,h)A_{g,h}]_{g,h\in G},$$

称为舒尔乘子。给定函数 ϕ: $G \to \mathbb{C}$，由诱导核k_ϕ得到的舒尔乘子 m_{k_ϕ} 称为***Herz-Schur*乘子**，如果它是一个有界算子。此外，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们可以通过考虑映射来定义$M_{n,\phi}$: $\mathbb{M}_n(\mathbb{B}(\ell^2(G))) \to \mathbb{M}_n(\mathbb{B}(\ell^2(G)))$

$$[a_{ij}] \mapsto [m_{k_\phi}(a_{ij})].$$

这里，$\mathbb{M}_n(\mathbb{B}(\ell^2(G)))$ 的范数通过将其与 $\mathbb{B}((\ell^2(G))^n)$ 等同来确定。

定义 2.3. 若存在一个 $B > 0$，使得上文定义的 $M_{n,\phi}$ 的算子范数对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都不超过 B，则称函数 ϕ: $G \to \mathbb{C}$ 是完全有界的。ϕ 的 B_2-范数（也称完全有界范数或 ***cb*** 范数）为

$$||\phi||_{B_2} := \sup_{n\in\mathbb{N}} ||M_{n,\phi}||$$

根据上述定义计算函数的 B_2-范数通常是一项困难的任务。不过，我们有以下关于完全有界函数的等价刻画，它更为有用。

引理 2.4 ([25], 定理 3). 设 ϕ: $G \to \mathbb{C}$ 是一个函数。则以下条件等价:

(1) $||\phi||_{B_2} \le B$，(2) 算子范数$||m_{k_\phi}|| \le B$，(3) 存在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 以及 $\alpha, \beta \in \ell^\infty(G, \mathcal{H})$，使得

$$k_\phi(g,h) = \langle \alpha(g), \beta(h)\rangle$$

其中 最大值$\{||\alpha||_\infty, ||\beta||_\infty\} \le \sqrt{B}$

假设对所有 $g \in G$ 都有 $\phi(g) := 1$，那么不难看出$||\phi||_{B_2} = 1$。进一步地，如果 $\phi(g) := d(e, g)$ 且 G 是无限的，那么它不可能是完全有界的，因为每个完全有界映射都应当是有界的。此外，任何正定函数都是完全有界的，并且 $||\phi||_{B_2} = |\phi(e)|$。这说明了为什么可和性蕴含弱 amenability。

2.2. **弱 Haagerup 性质**。群的弱 Haagerup 性质这一概念最早由 Knudby 提出，可能是为了回答 Cowling猜想 [20]。如前所述，这一概念同时推广了 Haagerup 性质和弱 amenability，为比较这两个概念提供了一个共同的平台。

定义 2.5。 G 是弱 ***Haagerup*** 的，如果存在一个映射序列 ϕ_n: $G \to \mathbb{C}$，满足

(1) ϕ_n 对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都在无穷远处趋于零，(2) $\{\phi_n\}$ 是一个近似单位，即 $\lim_{n\to\infty} \phi_n(g) = 1$ 对所有 $g \in G$ 都成立，(3) 存在一个常数 $B > 0$，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $||\phi_n||_{B_2} \le B$。

弱 ***Haagerup*** 常数记作 Λ_{WH}，对于 G，它是所有满足存在序列 $\{\phi_n\}_n$ 且符合上述性质的 $B > 0$ 的下确界。

在 [20],Knudby 给出了一个等价判据，用于判定满足 $\Lambda_{WH}(G) = 1$ 的弱 Haagerup 群。根据 [20],中的命题 3.1，群 G是弱 Haagerup 群且满足 $\Lambda_{WH}(G) = 1$，当且仅当存在一个适当映射 ϕ: $G \to \mathbb{R}$，它生成近似单位 $\{e^{-\frac{\phi}{n}}$: $G \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$，在 G上于无穷远处消失，并满足 $||e^{-\frac{\phi}{n}}||_{B_2} \le 1$。此外，[20] 中的命题 4.3 表明，上述半群生成元 ϕ 由两个函数 R, S: $G \to \mathcal{H}$ 映射到某个实希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 给出，且满足:

$$\phi(y^{-1}x) = ||R(x) - R(y)||^2 + ||S(x) + S(y)||^2, \quad \text{for all } x, y \in G. \tag{5}$$

此外，不失一般性，我们可以假设 $R(1_G) = 0_{\mathcal{H}} \in \mathcal{H}$。在方程 5 中令 $x = y$，注意到 G 在 S 下的像位于半径为 $\sqrt{\phi_{(1_G)}}/4$ 的球面上，该球面处于 $\mathcal{H}$内；也就是说，对于任意 $x \in G$:

$$||S(x)||^2 = \frac{\phi(1_G)}{4}$$

注 2.6. 展开方程 *5* 右侧的第二项，我们得到上述表达式 $\phi = \rho + \tau$: 对于任意 $x, y \in G$

$$\phi(y^{-1}x) = \underbrace{||R(x) - R(y)||^2 + \frac{\phi(1_G)}{2}}_{\rho(x,y)} + \underbrace{2\langle S(x), S(y)\rangle}_{\tau(x,y)}$$

引理 2.4 (3) 保证存在一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$，使得上述核可以表示为两个取值于 $\mathcal{H}$ 的映射 G 的内积。下一节我们将简要说明如何做到这一点。

注 2.7. 我们称元组 $(G, \phi, R, S, \mathcal{H})$ 为弱 ***Haagerup*** 群 G 的弱 ***Haagerup*** 数据，其中 $\Lambda_{WH}(G) = 1$。

2.3. **希尔伯特空间的指数化**。Schoenberg 引理 2.2 表明，对于定义在 G 上的条件负定映射 ϕ，函数 $e^{-\phi}$ 是正定的。条件负定函数 ϕ 可写为 $\phi(y^{-1}x) = ||R(x) - R(y)||^2$ (方程 4)。因此，参照方程 3，存在一个映射 $\alpha : G \to \mathcal{K}$ 到希尔伯特空间 $\mathcal{K}$，使得对于任意 x，$y \in G$，有

$$e^{-||R(x)-R(y)||^2} = \langle \alpha(x), \alpha(y)\rangle \tag{6}$$

下面我们描述一种标准的证明方法：将上述 $\mathcal{K}$ 视为与 R 和 S相关联的实希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的“指数”，从而使得上述方程 6 成立（参见 [6], 的附录 D 或 [12]）。

对于实希尔伯特空间 $\mathcal{H}$，考虑:

$$Exp(\mathcal{H}) := \mathbb{C} \oplus (\bigoplus_{n\geq 1} \mathcal{H}^{\otimes n})$$

定义映射 Exp: $\mathcal{H} \to Exp(\mathcal{H})$ 如下:

$$\xi \mapsto 1 \oplus \xi \oplus (\frac{1}{\sqrt{2!}}\xi \otimes \xi) \oplus (\frac{1}{\sqrt{3!}}\xi \otimes \xi \otimes \xi) \oplus \cdots$$

则对任意两个向量 ξ，$\eta \in \mathcal{H}$，我们得到

$$\langle Exp(\xi), Exp(\eta)\rangle = e^{\langle \xi, \eta\rangle},$$

并且对上述映射逐点缩放后，我们进一步得到

$$\begin{aligned} Exp_o : \mathcal{H} &\to Exp(\mathcal{H}) \\ \xi &\mapsto Exp_o(\xi) := e^{-||\xi||^2} Exp(\sqrt{2}\xi) \end{aligned}$$

使得 $\langle Exp_o(\xi)\ Exp_o(\eta)\rangle = e^{-||\xi-\eta||^2}$。

因此，对于一个满足 $\Lambda_{WH}(G) = 1$ 的群 G，有 x，$y \in G$

$$\begin{aligned} \langle Exp_o(\tfrac{R(x)}{\sqrt{n}}), Exp_o(\tfrac{R(y)}{\sqrt{n}})\rangle &= e^{-\frac{||R(x)-R(y)||^2}{n}} \\ \langle Exp_o(\tfrac{S(x)}{\sqrt{n}}), Exp_o(-\tfrac{S(y)}{\sqrt{n}})\rangle &= e^{-\frac{||S(x)+S(y)||^2}{n}} \end{aligned} \tag{7}$$

因此，对于满足 $\Lambda_{WH} = 1$ 的群 G 上的函数 $e^{-\frac{\phi}{n}}$，我们得到引理 2.4 的类似结果。注意，方程 5 中的第一个核是条件负定的。引理 2.2 告诉我们，核 $G \times G \ni (x,\ y) \mapsto e^{-||R(x)-R(y)||^2}$ 是正定的，因此该核的 B_2- 范数为 1。经过简单计算可得

$||Exp_o(\frac{S(x)}{\sqrt{n}})||$，$||Exp_o(\frac{S(y)}{\sqrt{n}})||$ 等于 1；因此，根据引理 2.4 和方程 7，我们可以说，核的另一部分（x，y）$\mapsto e^{-\frac{\phi(y^{-1}x)}{n}}$ 也具有有界的 B_2 范数，即：

$$||(x,y)\mapsto e^{-\frac{||S(x)+S(y)||^2}{n}}||_{B_2}\leq 1$$

2.4. 群的图积。 设 $\Gamma=(V(\Gamma)\ E(\Gamma))$ 是一个有限单纯图，其中没有自环和重边。由一组群 $\{G_v:\ v\in V(\Gamma)\}$ 所构成的图乘积 $G(\Gamma)$，以 Γ 的顶点为指标，是由这些群 G_v生成的群；当且仅当 G_v 和 G_w 之间有一条边 $[v,w]\in E(\Gamma)$ [15]时，来自这两个群的任意两个元素都可交换。

定义 2.8。 设 $\{G_v\}_{v\in V(\Gamma)}$ 是一组以 $V(\Gamma)$ 为指标的群。这组群的图乘积 $G(\Gamma)$ 是自由积 $*_{v\in V(\Gamma)}G_v$ 对由$\{g_vg_wg_v^{-1}g_w^{-1}:\ g_v\in G_v$、$g_w\in G_w$ 和 $[v,w]\in E(\Gamma)\}$ 生成的正规子群取商所得的群，即

$$G(\Gamma)=\frac{*_{v\in V(\Gamma)}G_v}{\langle\langle\{[G_v,G_w]:[v,w]\in E(\Gamma)\}\rangle\rangle}$$

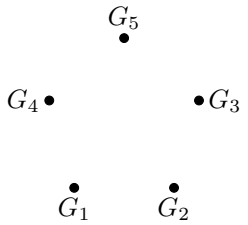


图 1. Γ不连通
$G(\Gamma)=*_{i=1}^{5}G_i$

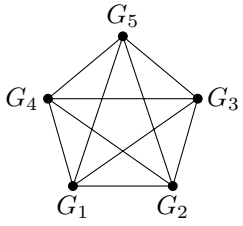


图 2. Γ是完全的
$G(\Gamma)=\oplus_{i=1}^{5}G_i$

注意，群在具有 n 个顶点且没有边的图 Γ 上的图积是各顶点群的自由积；若 Γ 是具有 n 个顶点的完全图，则相应的图乘积即为各顶点群的直积，见图 1、图 2。将这两种情形视为两个极端（零条边—全部边），一般的图乘积可看作相应顶点群的自由积与直积之间的插值。

假设 $G=*_vG_v$是群的自由积，则任意 $g\in G$都可写成 $g=g_1g_2\cdots g_n$，其中每个 $g_i\in G_{v_i}\setminus\{e\}$，且没有两个连续的 g_i来自同一个群。g 的这一表达式在群的自由积中是唯一的，并称为 g [22]的标准形，[30]。

类似地，若 $g\in G(\Gamma)$ 是群的图积中的一个元素，则 g 也可以表示为 $g=g_1g_2\ldots g_n$，其中 $g_i\in G_{v_i}\setminus\{e\}$ 以及相邻的元素分别来自两个不同的顶点群。但一般图乘积 $G(\Gamma)$ 中关系子 $\{[G_v,G_w]\}_{[v,w]\in E(\Gamma)}$ 的存在，使得无法为 g 中的元素 $G(\Gamma)$ 定义唯一的标准形表达式。相反，每个元素都有一个定义良好的约化形式，它本质上是在关系子所允许的“交换”意义下的标准形。

对于表达式 $g=g_1g_2\cdots g_{i-1}g_ig_{i+1}\cdots g_n$ 的一次交换，我们指的是：若 $[v_i,v_{i+1}]\in E(\Gamma)$，则 g 也可表示为 $g=g_1g_2\cdots g_{i-1}g_{i+1}g_i\cdots g_n$。若对 g 的上述分解进行交换，并在可能时将两个相邻元素相乘后，无法减少分解中所含字母的数量，则称该分解为约化的 。

Green 在她的论文（定理 3.9, [15]）中证明，对于图乘积 $G(\Gamma)$ 中的每个元素 g，约化表达式中出现的字母集合是唯一的。因此，g 的每个表达式中元素的数量都相同，这便在图乘积 $G(\Gamma)$ 上定义了一个“约化长度”度量，其定义为 $d_r(g,h):=|h^{-1}g|_r$，其中 $|g|_r$ 表示 g 的约化表达式中出现的字母数量。注意，在群的自由积的情形下，这就是正规长度。

设 v 是 Γ 的一个顶点。 v的星记为 $st(v)$，定义为在 Γ 中与 v 的距离为 ≤ 1 的顶点集合，即 $st(v) = \{w \in \Gamma : [v,w] \in E(\Gamma)\} \cup \{v\}$。设 $\Gamma_{st(v)} \subseteq \Gamma$ 是 Γ 中顶点集为 $st(v)$ 的最大子图。定义 $G(st(v)) := G(\Gamma_{st(v)})$。

注意，如果 $g_1 g_2 \cdots g_n$ 是一个约化表达式，且对于 $1 \leq i < j \leq n$， g_i， g_j 来自同一个顶点群 G_v，那么必定存在某个 k ，使得 $i < k < j$ 满足 $g_k \notin G(st(v))$. 否则就会与约化表达式的定义矛盾。

元素 $g \in G(\Gamma)$ 的约化形式是指 g 的约化分解所构成的一个等价类。 g 的“d-尾部”是指在上述等价类中各元素最后 d 个长度部分所出现的字母串集合。

引理 2.9。（见 *[27]* 中的引理 *2.5*）设 g、 $h \in G$（Γ）且 $d = |h^{-1}g|_r$。那么， $h^{-1}g$ 的约化形式中的每一项，要么是 g 的 d-尾部中的一项，要么是 h，要么是由 g 和 h 的d-尾部中的项合并而成。

因此，一般而言， g 的 d-尾部可以包含多于 d 个字母（在自由积情形下，恰好为 d）。以下引理显然可由此处的讨论得出，并已用于主定理的估计中。

引理 2.10. *[27]* 假设 M 是满足以下条件的最大值： Γ 中存在一个具有 M 个顶点的完全子图。那么， $G(\Gamma)$ 的任意元素的 d-尾部中字母的最大数量为 dM。

2.5. **由图乘积构造立方复形**。为了证明弱 Haagerup 性质，我们的目标是构造一个近似单位 $\{\phi_n\}$ ，使得

- 每个 ϕ_n 都在无穷远处趋于零，
- 并且每个 ϕ_n 的 B_2-范数都一致有界。

在第 3 节中，我们通过将来自各顶点群 G_v 的类似函数 $\phi_{n,\,v}$ 沿着某个“基空间” X 拼接起来，构造出这样的函数。在两种情形 [5] 和 [27]，中，为了保证近似单位在 B_2-范数下一致有界，相应的定义都需要乘以一个合适的正定因子进行缩放。为了使 $||\phi_n||_{B_2}$ 一致有界，我们也需要类似的正定缩放。

与 [27]，类似，在我们的情形中，基空间是与图乘积 $G(\Gamma)$ 典范关联的 CAT(0)立方复形，而 Niblo 和 Reeves [24] 已证明，CAT(0)立方复形上的距离函数是条件负定的。根据引理 2.2，我们利用这一条件负定距离函数得到一个正定缩放因子。本小节将简要讨论与图乘积 $G(\Gamma)$ 关联的 CAT(0)立方复形结构。

立方复形 是一种组合对象，由不同维数的欧几里得立方体沿低维面通过等距变换粘合而成。欧几里得立方体为立方复形赋予一个度量。若一个度量空间 X 满足 CAT(0)比较性质，即其中的每个测地三角形都与其欧几里得比较三角形一样薄，则称其为“CAT(0)”度量空间。所谓 *CAT(0)*立方复形 ，是指满足 CAT(0) 性质的立方复形。详情及其他等价定义见 [16],[4]。

如果空间 X 容许某种“墙空间”结构，也可以赋予它一个 CAT(0)立方复形结构；该结构由将 X 划分为两半的超平面的（组合）交集数据给出，这两半称为墙。非正式地说，墙空间是带有一族相交墙的空间。

定义 2.11.（墙空间） X 上的墙空间结构由一对$(X, \mathcal{W})$给出，其中集合$\mathcal{W} \subseteq \mathcal{P}(X)$ （ X的幂集）被视为半空间的空间，使得

(1) $\mathcal{W}$ 对补集运算封闭，即 $h \in \mathcal{W} \iff h^c \in \mathcal{W}$(2) 一面墙（简记为 h）定义为一对 (h, h^c)，由元素 $h \in \mathcal{W}$唯一确定(3) 若两点 $x, y \in X$ 被墙 h 分隔，则 $x \in h$ 且 $y \in h^c$(4)若两面墙 u和 v彼此交叉，则四个集合 $u \cap v, u \cap v^c, u^c \cap v, u^c \cap v^c$均非空。

在 [7], , Chatterji 和 Niblo 证明，若群 G 作用于墙空间 $(X, \mathcal{W})$，并保持由 $\mathcal{W}$给出的墙结构（即将墙映射为墙），那么存在与 $(X, \mathcal{W})$相关联的对偶 CAT(0)立方复形 $\hat{} X_{\mathcal{W}}$，且 G 在其上适当地作用。

定理 2.12. *[7]* 设 G 是一个作用于墙空间 X上的群，且 $\mathcal{W}$ 是墙的集合，其中相互交叉的墙的数量有上界。那么存在一个有限维 $CAT(0)$ </style}立方^复形 $X_{\mathcal{W}}$， G 在其上允许一个等距作用。

注 2.13. 尽管 *Chatterji* 和 *Niblo* 在恰当情形（即群恰当地作用于墙空间）下证明了上述定理，但无论是否满足恰当性假设，该定理都成立。

2.5.1. 图乘积上的墙空间结构。 设 v 是 Γ中的一个顶点。定义 $W_v \subset G(\Gamma)$ 为那些具有以来自 G_v 的元素开头的约化形式的元素的集合，即

$$W_v = \{g \in G(\Gamma) : g = g_1 g_2 \cdots g_m \text{ is a reduced form and } g_1 \in G_v\}.$$

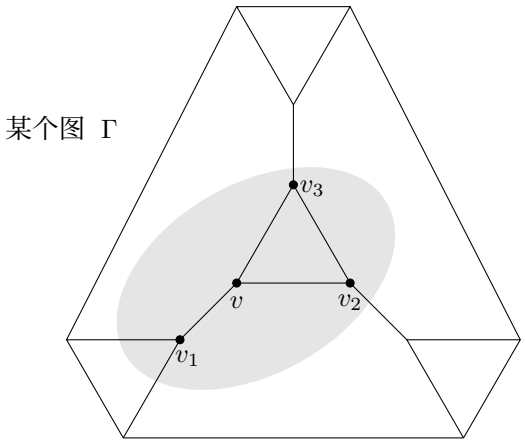


图 3. G_v， G_{v_1}， G_{v_2}， G_{v_3}在 $G(\Gamma)$ 中生成 $G(\Gamma_{st(v)})$

注意， W_v是 $G(\Gamma)$中的一面墙（因为(W_v, W_v^c)构成了 $G(\Gamma)$的一个划分）。在图 3 中， v的星是 Γ的子图 $\Gamma_{st(v)}$，由顶点 $\{v, v_1, v_2, v_3\}$ 以及相关的边组成，而W_v 恰好是 $G(\Gamma_{st(v)})$。注意， W_v^c 是这样一组元素：其约化字以一个来自与阴影区域之外的顶点相关联的群的元素开头。

对于任意 $g \in G(\Gamma)$，集合 gW_v 和 gW_v^c 由左乘自然定义。可以看出，集合 gW_v 包含所有这样的元素 $k \in G(\Gamma)$：其 g^{-1} 平移后的约化形式以一个来自 G_v的元素开头。此外，不难验证 $gW_v^c = (gW_v)^c$。因此，gW_v 也是$G(\Gamma)$的一面墙。令 $\mathcal{W}$ 为由以下各项给出的一组墙

$$\mathcal{W} := \{gW_v : g \in G(\Gamma), v \in \Gamma\} \tag{8}$$

在 [27], 中证明了， $\mathcal{W}$ 中相互交叉的墙的数量有一个上界，因此可得到一个有限维的对偶 $CAT(0)$-立方复形 $\hat{} X_{\mathcal{W}}$，如定理 2.12 所示。下文中我们将 $\hat{} X_{\mathcal{W}}$ 简记为 X。顶点集 $V(X)$ 是 $G(\Gamma)$ 中所有 $G(st(v))$ 的（左）陪集的集合，其中每个$v \in \Gamma$上， G 都具有典范作用。此外，存在一个 $x_0 \in X$，使得对于所有 g， $h \in G(\Gamma)$（引理 3.5, [27]）

$$d_X(gx_0, hx_0) = 2|h^{-1}g|_r \tag{9}$$

有限维 $CAT(0)$-立方复形上的距离度量属于条件负定型 [24]。方程 9 告诉我们， $G(\Gamma)$ 上的约化度量与对偶 CAT(0)立方复形的组合度量成比例；该复形由 $G(\Gamma)$ 上述墙结构得到。因此， $g \mapsto |g|_r$on $G(\Gamma)$ 上的约化长度函数是一个条件负定函数。

3. 图乘积的弱 Haagerup 性质

设 Γ 是一个有限单纯图，$\{G_v\}_{v\in V(\Gamma)}$ 是一族具有弱 Haagerup 性质的群，其弱 Haagerup 常数为 $\Lambda_{WH}(G_v) = 1$。对于每个顶点 $v \in V(\Gamma)$，我们给定一组弱 Haagerup 数据（G_v，ϕ_v，R_v，S_v，$\mathcal{H}_v$）。本节将结合这些完整的顶点数据$\{(G_v, \phi_v, R_v, S_v, \mathcal{H}_v)\}_{v\in V(\Gamma)}$，证明这些群$\{G_v\}_{v\in V(\Gamma)}$的图乘积 $G(\Gamma)$ 具有弱 Haagerup 性质。

根据上述数据，G_v 上的近似单位由 $\{e^{-\frac{\phi_v}{n}}\}$给出。我们对 $e^{-\frac{\phi_v}{n}}$ 作适当缩放，得到函数$\psi_{n,v}$，以便在群G_v的相应单位元处取值为 1，其中 $v \in V(\Gamma)$。按照[5], ，我们将通过组合$\psi_{n,v}$，在 $G(\Gamma)$上定义一个近似单位。

考虑$\psi_{n,v}$：$G_v \to \mathbb{R}$由 $g \mapsto e^{\frac{\phi_v(1_v)}{n}} e^{-\frac{\phi_v}{(g)n}}$给出。注意，$\{\psi_{n,v}\}$也是与 $e^{-\frac{\phi_v}{n}}$同类型的近似单位，并且其 B_2-范数为：$||\psi_{n,v}||_{B_2} \leq e^{\frac{\phi_v(1_v)}{n}}$。因此，对于任意 x，$y \in G_v$，我们有：

$$\psi_{n,v}(y^{-1}x) = e^{-\frac{-\phi_v(1_v)+\phi_v(y^{-1}x)}{n}} = e^{-\frac{\left[-\phi_v(1_v)+||R_v(x)-R_v(y)||^2+||S_v(x)+S_v(y)||^2\right]}{n}} \tag{10}$$

此外，根据第 2.3 节的讨论，可以将$\psi_{n,v}(y^{-1}x)$写成希尔伯特空间中两个向量的内积（见 7）：

$$\psi_{n,v}(y^{-1}x) = \langle Exp_o(\frac{R_v(x)}{\sqrt{n}}) \otimes e^{\frac{\phi_v(1_v)}{2n}} Exp_o(\frac{S_v(x)}{\sqrt{n}}),$$
$$Exp_o(\frac{R_v(y)}{\sqrt{n}}) \otimes e^{\frac{\phi_v(1_v)}{2n}} Exp_o(-\frac{S_v(y)}{\sqrt{n}})\rangle$$

其中每个分量的向量范数都不超过 $\sqrt{e^{\frac{\phi_v(1_v)}{n}}}$。为简化记号，我们写作

$$\alpha_{n,v}(x) := \underbrace{Exp_o(\frac{R_v(x)}{\sqrt{n}})}_{\alpha_{n,v,R_v}(x)} \otimes \underbrace{e^{\frac{\phi_v(1_v)}{2n}} Exp_o(\frac{S_v(x)}{\sqrt{n}})}_{\alpha_{n,v,S_v}(x)}$$

and

$$\beta_{n,v}(x) := \underbrace{Exp_o(\frac{R_v(x)}{\sqrt{n}})}_{\beta_{n,v,R_v}(x)} \otimes \underbrace{e^{\frac{\phi_v(1_v)}{2n}} Exp_o(\frac{-S_v(x)}{\sqrt{n}})}_{\beta_{n,v,S_v}(x)}$$

其中 $\alpha_{n,v}$ 和 $\beta_{n,v}$ 都是从 G_v 到希尔伯特空间 $Exp(\mathcal{H}_v) \otimes Exp(\mathcal{H}_v)$ 的映射。注意，这里$\alpha_{n,v,R_v} = \beta_{n,v,R_v}$。

令 X 为第 2.5 节中所述图乘积 $G(\Gamma)$ 所对应的有限维 CAT(0)立方复形。在 [13], 中，作者给出了一种沿着 X 将 $\{R_v\}$ 组合起来的方法。这里我们简要回顾这一构造。

顶点集 $V(X)$ 是 $G(st(v))$ 的陪集的集合，其中 $v \in V(\Gamma)$ 遍历所有情况；也就是说，$V(X) = \{G(\Gamma)/G(st(v))\}_{v\in V(\Gamma)}$。考虑希尔伯特空间 $\mathcal{H}_1 := \oplus_{t\in X}\mathcal{H}_t$，其中若 t 是陪集 $gG(st(v))$，则 $\mathcal{H}_t$ 为 $\mathcal{H}_v$。一个非平凡的$\gamma \in G(\Gamma)$ 具有约化形式 $\gamma = \gamma_1\gamma_2\dots\gamma_m$，其中对于 $i = 1, 2, \dots\dots, m$，$\gamma_i \in G_{v_i} \leq G(st(v_i))$。定义 $R_\Gamma : G(\Gamma) \to \mathcal{H}_1$ 如下：

$$R_\Gamma(\gamma) := \begin{cases} \oplus_{i=1}^m R_{v_i}(\gamma_i)_{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_{i-1}G(st(v_i))}, \text{ if } \gamma \neq 1_{G(\Gamma)} \\ 0_{\mathcal{H}} \text{ if } \gamma = 1_{G(\Gamma)} \end{cases} \tag{11}$$

然后，我们考虑从 $G(\Gamma)$ 到指数希尔伯特空间 $Exp(\mathcal{H}_1)$ 的映射，其定义如下：

$$\gamma \mapsto Exp_o(\frac{R_\Gamma(\gamma)}{\sqrt{n}})$$

满足以下性质：对于任意 γ，$\eta \in G(\Gamma)$

$$\langle Exp_o(\frac{R_\Gamma(\gamma)}{\sqrt{n}}), Exp_o(\frac{R_\Gamma(\eta)}{\sqrt{n}})\rangle = e^{-\frac{||R_\Gamma(\gamma)-R_\Gamma(\eta)||^2}{n}}. \tag{12}$$

我们选取 $\epsilon > 0$。对于每个 $v \in V(\Gamma)$, G_v 是弱 Haagerup 的，并且具有 $\Lambda_{WH}(G_v) = 1$。根据定义 2.5 以及上述在 G_v 上定义的近似单位 $\psi_{n,v}$，我们可以选取充分大的 n，使得 $||\psi_{n,v}||_{B_2} \leq 1+\epsilon$。为方便起见，我们将上述序列的尾部记为 $\phi_{n,v}$，其中对于每个 n，其 B_2-范数均小于 $1+\epsilon$。更确切地说，对于任意 $x \in G_v$，我们有 $||\alpha_{n,v,R_v}(x)|| = 1 = ||\beta_{n,v,R_v}(x)||$。因此

$$||\psi_{n,v}||_{B_2} = ||\alpha_{n,v,S_v}||_\infty \cdot ||\beta_{n,v,S_v}||_\infty \leq e^{\frac{\phi_v(1_v)}{n}} \leq 1+\epsilon$$

而且， ϵ 和 n 的这一选择还给出：

$$\text{for any } x \in G_v \begin{cases} ||\alpha_{n,v,S_v}(x)|| \leq \sqrt{1+\epsilon} \\ ||\beta_{n,v,S_v}(x)|| \leq \sqrt{1+\epsilon} \end{cases} \tag{13}$$

注3.1。注意，对于每个 $x \in G_v$，我们有 $\langle \alpha_{n,v,S_v}(x)\, \beta_{n,v,S_v}(x)\rangle = 1$。

给定 $\epsilon > 0$ 的选择，我们考虑元组

$$\Sigma_{v,\epsilon} := (G_v, \{\psi_{n,v}\}, \{\alpha_{n,v}\}, \{\beta_{n,v}\}, Exp(\mathcal{H}_v) \otimes Exp(\mathcal{H}_v))$$

将其视为 ϵ-扰动的弱 Haagerup 数据，适用于 G_v。为了证明图乘积具有弱 Haagerup 性质，我们在 $G(\Gamma)$ 上构造类似的 ϵ-数据，记作 $\Sigma_{\Gamma,\epsilon}$，它由完整的顶点数据 $\{\Sigma_{v,\epsilon}\}_{v\in V(\Gamma)}$ 得到。最后，我们令参数 ϵ 趋于零，从而得到 $\Lambda_{WH}(G(\Gamma)) = 1$。

到目前为止，我们已成功将所有 $v \in V(\Gamma)$ 上的函数 α_{n,v,R_v} 和 β_{n,v,R_v} 合并为 $G(\Gamma)$ 上相应的函数（见方程12）。为了在 $G(\Gamma)$ 上构造所需的近似单位，剩下的工作是将所有 $v \in V(\Gamma)$ 对应的函数 α_{n,v,S_v} 和 β_{n,v,S_v} 粘合起来。我们将证明的其余部分分为以下三个部分。

步骤 *I*：我们构造一族核 $\psi_{n,\Gamma,d}$（不是定义在整个 $G(\Gamma) \times G(\Gamma)$ 上，而是）相对于约化长度，限制在 $G(\Gamma)$ 中每个元素的 d-球面上。最后，我们将在不同的 $d \geq 0$ 上将核 $\psi_{n,\Gamma,d}$ 拼接起来，从而得到一族定义在整个群 $G(\Gamma)$ 上的核 $\{\psi_{n,\Gamma}\}_{n\in\mathbb{N}}$。

步骤 *II*：通过比较上述核 $\psi_{n,\Gamma}$ 与 $G(\Gamma)$ 上适当的正定核 $\sigma_{n,\Gamma}$（在 17 中构造）的距离，估计它们的 B_2-范数（见方程18）。步骤 *III*：我们证明核 $\psi_{n,\Gamma}$ 是 $G(\Gamma)$-不变的，从而在 $G(\Gamma)$ 上给出所需的近似单位 $\{\phi_{n,\Gamma}\}$。

3.1. 核的构造。首先，我们考虑向量 $\alpha_{n,v,S_v}(x)$ 的一个 ϵ-扰动平均 $\beta_{n,v,S_v}(x)$，使得所得向量非常接近另外两个向量，也就是说，对任意 $x \in G_v$，定义

$$avg_{n,v,S_v}(x) := \frac{\alpha_{n,v,S_v}(x) + \beta_{n,v,S_v}(x)}{2+\sqrt{2\epsilon}}.$$

现在将希尔伯特空间 $Exp(\mathcal{H}_v)$ 扩展为 $Exp(\mathcal{H}_v) := Exp(\mathcal{H}_v)$，并考虑映射 θ_{n,v,S_v}：$G_v \to Exp(\mathcal{H}_v)$，其定义如下

$$x \mapsto \begin{cases} \left(avg_{n,v,S_v}(x), \begin{pmatrix} D_{n,v,S_v}(x) \\ D_{n,v,S_v}(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \text{ if } x \neq 1_v \\ \left(avg_{n,v,S_v}(1_v), \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D_{n,v,S_v}(1_v) \\ D_{n,v,S_v}(1_v) \end{pmatrix}\right), \text{ if } x = 1_v \end{cases}$$

其中 $D_{n,v,S_v}(x) = \sqrt{\frac{1-||avg_{n,v,S_v}\ x\ ||^2}{2}} \in \mathbb{C}$。

注记 3.2。注意，根据 θ_n 的定义 $_{v,S_v}$ 可知，对于任意 $x \in G_v$、$||\theta_{n,v,S_v}(x)|| = 1$。

令 X 为 $G(\Gamma)$ 作用其上的有限维 CAT(0)立方复形（见 2.5）。我们知道，$V(X) = \cup_{v\in\Gamma}\{G(\Gamma)/G(st(v))\}$。我们考虑更大的希尔伯特空间

$$\mathcal{H}_2 = \otimes_{t\in V(X)}\widehat{Exp(\mathcal{H}_t)}$$

其中 $\mathcal{H}_t := \mathcal{H}_v$，若对于某个 v，有 $t = kG(st(v))$，且相应的真空向量为 $\left(avg_{n,\ v,\ S_v}(1_v)\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}D_n\\D_n\end{pmatrix}_{,\ v,\ S_v}(1_v)_{,\ v,\ S_v}(1_v)\right)$

加入这些额外的 $\mathbb{C}^2$ 分量，是为了吸收过程中累积的一些“误差”（参见 20 及之后的表达式）。

设 $\gamma = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_m$ 是元素 $\gamma \in G(\Gamma)$ 的一个约化形式，而出现在 γ 任意约化形式最后 d 项中的有序 d 元组 $(\gamma_{m-d+1},\ \cdots,\ \gamma_m)$ 的集合称为 γ 的 d-尾部（见第 2.4 节）。对于每个 $d\in\mathbb{N}$，我们定义 $\alpha_{n,\ \Gamma,\ d}$ 和 $\beta_{n,\ \Gamma,\ d}$：$G(\Gamma)\to\mathcal{H}_2$，定义如下

$$\alpha_{n,\Gamma,d}(\gamma) = \otimes_{i=1}^{m}\begin{cases}\theta_{n,*,S_*}(\gamma_i)_{\gamma_1\cdots\gamma_{i-1}G(st(v_i))}, & \text{if } \gamma_i\notin d\text{-tail of }\gamma,\\ \left(\alpha_{n,*,S_*}(\gamma_i),\begin{pmatrix}C^{\alpha_{n,*,S_*}}(\gamma_i,\gamma_i)\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}C^{\alpha_{n,*,S_*}}(\gamma_i,1_*)\\0\end{pmatrix}\right)_{\gamma_1\cdots\gamma_{i-1}G(st(v_i))}, & \text{if } \gamma_i\in d\text{-tail of }\gamma\end{cases} \tag{14}$$

$$\beta_{n,\Gamma,d}(\gamma) = \otimes_{i=1}^{m}\begin{cases}\theta_{n,*,S_*}(\gamma_i)_{\gamma_1\cdots\gamma_{i-1}G(st(v_i))}, & \text{if } \gamma_i\notin d\text{-tail of }\gamma,\\ \left(\beta_{n,*,S_*}(\gamma_i),\begin{pmatrix}0\\C^{\beta_{n,*,S_*}}(\gamma_i,\gamma_i)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\C^{\beta_{n,*,S_*}}(\gamma_i,1_*)\end{pmatrix}\right)_{\gamma_1\cdots\gamma_{i-1}G(st(v_i))}, & \text{if } \gamma_i\in d\text{-tail of }\gamma\end{cases} \tag{15}$$

其中 $*$ 表示 $v\in\Gamma$，使得 $\gamma_i\in G_v$，而 $C^{\alpha_{n,v,S_v}}(x,y)$ 和 $C^{\beta_{n,v,S_v}}(x,y)$ 的表达式为：对所有 $x,y\in G_v$，

$$C^{\alpha_{n,v,S_v}}(x,y) := \frac{\langle\alpha_{n,v,S_v}(x),\beta_{n,v,S_v}(y) - avg_{n,v,S_v}(y)\rangle}{D_{n,v,S_v}(y)}$$
$$C^{\beta_{n,v,S_v}}(x,y) := \frac{\langle\alpha_{n,v,S_v}(y) - avg_{n,v,S_v}(y),\beta_{n,v,S_v}(x)\rangle}{D_{n,v,S_v}(y)}$$

现在我们证明上述映射的良定义性。假设 v_i 与 v_{i+1} 的顶点之间存在一条边，其中 Γ。那么我们有

$$\gamma = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{i-1}\gamma_i\gamma_{i+1}\cdots\gamma_m = \gamma_1\cdots\gamma_{i-1}\gamma_{i+1}\gamma_i\gamma_{i+2}\cdots\gamma_m$$

验证良定义性归结为验证以下两个方程:

$$\gamma_1\cdots\gamma_{i-1}G(st(v_i)) = \gamma_1\cdots\gamma_{i-1}\gamma_{i+1}G(st(v_i))$$
$$\gamma_1\cdots\gamma_iG(st(v_{i+1})) = \gamma_1\cdots\gamma_{i-1}G(st(v_{i+1}))$$

这是因为 $[G_{v_i},G_{v_{i+1}}] = 1$ 属于 $G(\Gamma)$。由于 γ 的约化形式的表达式是唯一的，除非在两个相邻且彼此交换的因子之间进行有限次交换。因此，映射 $\alpha_{n,\Gamma,d}$ 和 $\beta_{n,\Gamma,d}$ 是良定义的。

因此我们可以定义一个核

$$\begin{aligned}\psi_{n,\Gamma,d} : G(\Gamma)\times G(\Gamma) &\to \mathbb{C}\\ (\gamma,\eta) &\mapsto \langle\alpha_{n,\Gamma,d}(\gamma),\beta_{n,\Gamma,d}(\eta)\rangle\end{aligned}$$

现在令 $E_d := \{(\gamma,\ \eta) :\ |\eta^{-1}\gamma|_r = d\}\subset G(\Gamma)\times G(\Gamma)$，并令 χ_d 为 E_d的示性函数。对所有 $d\in\mathbb{N}$将 $\psi_{n,\ \Gamma,\ d}$ 求和，得到 $G(\Gamma)$上的一个核 $\psi_{n,\ \Gamma}$。

$$\begin{aligned}\psi_{n,\Gamma} : G(\Gamma)\times G(\Gamma) &\to \mathbb{C}\\ (\gamma,\eta) &\mapsto \langle Exp_o(R_\Gamma(\gamma)),Exp_o(R_\Gamma(\eta))\rangle\sum_{d=0}^{\infty}e^{-\frac{d}{n}}\psi_{n,\Gamma,d}(\gamma,\eta)\chi_d(\gamma,\eta)\end{aligned}$$

接下来，我们验证这些核 $\psi_{n,\ \Gamma}$' 是完全有界的，并进一步证明它们是 $G(\Gamma)$-不变的，从而在 $G(\Gamma)$上得到函数序列 $\phi_{n,\ \Gamma}$ ，其 B_2-范数与这些核的范数相同。

3.2. **B_2-范数估计**$\psi_{n,\ \Gamma}$。 R_Γ 将图乘积群 $G(\Gamma)$ 映射到希尔伯特空间 $\mathcal{H}_1$（见 11），且 $(\gamma,\ \eta) \mapsto ||R_\Gamma(\gamma) - R_\Gamma(\eta)||^2$ 是 $G(\Gamma)$ 上的条件负定核。因此，该核

$$(\gamma,\eta) \mapsto \langle Exp_o(\frac{R_\Gamma(\gamma)}{\sqrt{n}}), Exp_o(\frac{R_\Gamma(\eta)}{\sqrt{n}})\rangle = e^{-\frac{||R_\Gamma(\gamma)-R_\Gamma(\eta)||^2}{n}}$$

是正定的（根据引理 2.2），且在对角线上取值为 1，这意味着上述核的 B_2-范数为 1。

回顾对于任意 $x \in G_v$，向量 $avg_{n,\ v,\ S_v}(x)$ 被定义为 ϵ-扰动平均，即由 $\alpha_{n,\ v,\ S_v}(x)$ 和 $\beta_{n,\ v,\ S_v}(x)$ 得到。对范数进行简单计算可得

$$\left.\begin{aligned} ||\alpha_{n,v,S_v}(x) - avg_{n,v,S_v}(x)||^2 \le \epsilon \\ ||\beta_{n,v,S_v}(x) - avg_{n,v,S_v}(x)||^2 \le \epsilon \end{aligned}\right\} \ \forall\ x \in G_v,$$

and

$$||avg_{n,v,S_v}(x)||^2 = \frac{||\alpha_{n,v,S_v}(x)||^2 + ||\beta_{n,v,S_v}(x)||^2 + 2}{(2+\sqrt{2\epsilon})^2} \le \frac{2(2+\epsilon)}{(2+\sqrt{2\epsilon})^2},$$

[1]这反过来意味着 $|D_{n,\ v,\ S_v}(x)| \ge \frac{\epsilon^4}{4}$。综合上述不等式，可得出对上文定义的常数 $C^{\alpha_{n,\ v,\ S_v}}(x,\ y)$ 和 $C^{\beta_{n,\ v,\ S_v}}(x,\ y)$ 的一个界；也就是说，存在一个正实数 $A > 0$ 使得

$$\sup_{x,y\in G_v}\{|C^{\alpha_{n,v,S_v}}(x,y)|, |C^{\beta_{n,v,S_v}}(x,y)|\} < A\epsilon^{\frac{1}{4}}$$

为了计算 B_2-范数 $\psi_{n,\Gamma}$，我们需要知道核 $\psi_{n,\Gamma,d}$ 的该范数值。上述估计表明，向量 $\alpha_{n,\Gamma,d}$ 和 $\beta_{n,\Gamma,d}$ 的各个分量向量的范数分别由 $(1+\epsilon+2A^2\epsilon^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} < (1+B\sqrt{\epsilon})$ 1 2 控制，其中 $B > 0$ 取某个值。引理 2.10 告诉我们，任意元素 $\gamma \in G(\Gamma)$ 的 d-尾部中至多有 $d\bar{M}$ 个字母。因此，对于任意 $\gamma \in G(\Gamma)$，向量 $\alpha_{n,\Gamma,d}(\gamma)$ 和 $\beta_{n,\Gamma,d}(\gamma)$ 的范数均由 $(1+B\sqrt{\epsilon})^{\frac{dM}{2}}$ 控制。因此，由引理 2.4 可得，

$$||\psi_{n,\Gamma,d}||_{B_2} < (1+B\sqrt{\epsilon})^{dM}$$

回顾一下，根据定义，对于任意 $(\gamma,\ \eta) \in G(\Gamma) \times G(\Gamma)$，我们有

$$\psi_{n,\Gamma}(\gamma,\eta) = \langle Exp_o(R_\Gamma(\gamma)), Exp_o(R_\Gamma(\eta))\rangle \sum_{d=0}^{\infty} e^{-\frac{d}{n}} \psi_{n,\Gamma,d}(\gamma,\eta)\chi_d(\gamma,\eta) \tag{16}$$

我们知道，上述核的第一部分的 B_2-范数为 1。我们将证明，第二部分中的求和在 B_2-范数下也接近一个正定核，其 B_2-范数为 1。这说明向量 $\alpha_{n,\ \Gamma,\ d}$ 和 $\beta_{n,\ \Gamma,\ d}$的选取是合理的。

假设 $\gamma = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_m$ 是 $\gamma \in G(\Gamma)$ 的一个约化形式。定义映射 $\zeta_{n,\ \Gamma}$: $G(\Gamma) \to \mathcal{H}_2$ 如下:

$$\zeta_{n,\Gamma}(\gamma) := (\theta_{n,v_1,S_{v_1}}(\gamma_1))_{G(st(v_1))} \otimes \cdots \otimes (\theta_{n,v_m,S_{v_m}}(\gamma_m))_{\gamma_1\cdots\gamma_{m-1}G(st(v_m))}.$$

$\zeta_{n,\ \Gamma}$ 的良定义性，显然可由上文对函数 $\alpha_{n,\ \Gamma,\ d}$ 的良定义性的讨论，以及对任意元素 $\gamma \in G(\Gamma)$ 所述的 $||\zeta_{n,\ \Gamma}(\gamma)|| = 1$ 得出。定义核 $\sigma_{n,\ \Gamma}$: $G(\Gamma) \times G(\Gamma) \to \mathbb{C}$ 如下:

$$\sigma_{n,\Gamma}(\gamma,\eta) = \langle \zeta_{n,\Gamma}(\gamma), \zeta_{n,\Gamma}(\eta)\rangle \tag{17}$$

并注意到它是正定的，且 B_2-范数为 1。我们将借助这个核 $\sigma_{n,\ \Gamma}$ 来估计方程 16 第二部分的B_2-范数。注意

$$\begin{aligned} \psi_{n,\Gamma,d}(\gamma,\eta) - \sigma_{n,\Gamma}(\gamma,\eta) = &\langle \alpha_{n,\Gamma,d}(\gamma) - \zeta_{n,\Gamma}(\gamma), \beta_{n,\Gamma,d}(\eta)\rangle \\ &+ \langle \zeta_{n,\Gamma}(\gamma), \beta_{n,\Gamma,d}(\eta) - \zeta_{n,\Gamma}(\eta)\rangle \end{aligned}$$

因此

$$||\psi_{n,\Gamma,d} - \sigma_{n,\Gamma}||_{B_2} \leq \sup_{\gamma,\eta\in G(\Gamma)} \Big(||\alpha_{n,\Gamma,d}(\gamma) - \zeta_{n,\Gamma}(\gamma)||\ ||\beta_{n,\Gamma,d}(\eta)|| + ||\zeta_{n,\Gamma}(\gamma)||\ ||\beta_{n,\Gamma,d}(\eta) - \zeta_{n,\Gamma}(\eta)|| \Big) \quad (18)$$

由于对于任意 $v \in \Gamma$ 和 $x \in G_v$，以下方程均成立（根据注3.1）：

$$\langle \alpha_{n,v,S_v}(x), avg_{n,v,S_v}(x)\rangle + C^{\alpha_{n,v,S_v}}(x,x)\cdot D_{n,v,S_v}(x) = 1 \text{ and}$$
$$\langle \beta_{n,v,S_v}(x), avg_{n,v,S_v}(x)\rangle + C^{\beta_{n,v,S_v}}(x,x)\cdot D_{n,v,S_v}(x) = 1$$

使得 $\langle \alpha_{n,\Gamma,d}(\gamma)\zeta_{n,\Gamma}(\gamma)\rangle = 1 = \langle \zeta_{n,\Gamma}(\gamma)\alpha_{n,\Gamma,d}(\gamma)\rangle$ （$\beta_{n,\Gamma,d}$也同样成立）。利用这一点，我们得到：

$$||\alpha_{n,\Gamma,d}(\gamma) - \zeta_{n,\Gamma}(\gamma)||^2 = \ ||\alpha_{n,\Gamma,d}(\gamma)||^2 - 1 \quad \text{and}$$
$$||\beta_{n,\Gamma,d}(\gamma) - \zeta_{n,\Gamma}(\gamma)||^2 = \ ||\beta_{n,\Gamma,d}(\gamma)||^2 - 1$$

因此，不等式 18 变为：

$$\begin{aligned}
||\psi_{n,\Gamma,d} - \sigma_{n,\Gamma}||_{B_2} \leq\ & \sup_{\gamma,\eta\in G(\Gamma)} \Big(\sqrt{||\alpha_{n,\Gamma,d}(\gamma)||^2 - 1}\ ||\beta_{n,\Gamma,d}(\eta)|| \\
& + \sqrt{||\beta_{n,\Gamma,d}(\eta)||^2 - 1} \Big) \\
\leq\ & \sqrt{(1+B\sqrt{\epsilon})^{dM} - 1}\ (1+B\sqrt{\epsilon})^{\frac{dM}{2}} + \sqrt{(1+B\sqrt{\epsilon})^{dM} - 1} \\
=\ & \Big(\sqrt{(1+B\sqrt{\epsilon})^{dM} - 1} \Big) \cdot \Big((1+B\sqrt{\epsilon})^{\frac{dM}{2}} + 1 \Big) \\
\leq\ & 2\sqrt{BdM}(1+B\sqrt{\epsilon})^{dM}\epsilon^{\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

现在我们估计$||\psi_{n,\Gamma}||_{B_2}$:

$$\begin{aligned}
||\psi_{n,\Gamma}||_{B_2} &= ||\langle Exp_o(R_\Gamma(\cdot)), Exp_o(R_\Gamma(\cdot))\rangle \sum_{d=0}^{\infty} e^{-\frac{d}{n}} \psi_{n,\Gamma,d}(\cdot,\cdot)\chi_d(\cdot,\cdot)||_{B_2} \\
&= ||\langle Exp_o(R_\Gamma(\cdot)), Exp_o(R_\Gamma(\cdot))\rangle||_{B_2}\ ||\sum_{d=0}^{\infty} e^{-\frac{d}{n}} \psi_{n,\Gamma,d}(\cdot,\cdot)\chi_d(\cdot,\cdot)||_{B_2} \\
&= 1 \cdot ||\sum_{d=0}^{\infty} e^{-\frac{d}{n}} \psi_{n,\Gamma,d}(\cdot,\cdot)\chi_d(\cdot,\cdot)||_{B_2}
\end{aligned}$$

我们需要估计 χ_d 的 B_2-范数，因为它出现在上述$||\psi_{n,\Gamma}||_{B_2}$表达式中。这个估计正是 Mizuta 在 [23] 中给出的。他证明了以下结果：

引理 3.3。 *[23]*设 X 是一个有限维 *CAT(0)* 立方复形，且 Ξ_d 是集合 $\{(x,y) : d_X(x,y) = d\}$ 的示性函数，则存在一个多项式 p 使得 $||\Xi_d||_{B_2} \leq p(d)$。

如第 2.5 节最后一部分所述，我们有一个有限维 CAT(0) 立方复形X， $G(\Gamma)$作用于其上。方程 9 与前一个引理共同推出， $||\chi_d||_{B_2}$ 在 $G(\Gamma)$上的值以 $p(d)$为界。因此我们可以写为，

$$\begin{aligned}
||\psi_{n,\Gamma}||_{B_2} &\leq ||\sum_{d=0}^{\infty} e^{-\frac{d}{n}} \Big(\psi_{n,\Gamma,d}(\cdot,\cdot) - \sigma_{n,\Gamma}(\cdot,\cdot) \Big) \chi_d(\cdot,\cdot)||_{B_2} + ||\sum_{d=0}^{\infty} e^{-\frac{d}{n}} \sigma_{n,\Gamma}(\cdot,\cdot)\chi_d(\cdot,\cdot)||_{B_2} \\
&\leq \sum_{d=0}^{\infty} e^{-\frac{d}{n}}\ ||\psi_{n,\Gamma,d} - \sigma_{n,\Gamma}||_{B_2}\ ||\chi_d||_{B_2} + ||\sigma_{n,\Gamma}||_{B_2}\ ||\sum_{i=0}^{\infty} e^{-\frac{d}{n}} \chi_d||_{B_2} \\
&\leq ||\sigma_{n,\Gamma}||_{B_2} ||e^{-\frac{|\cdot|_r}{n}}||_{B_2} + \sum_{d=0}^{\infty} e^{-\frac{d}{n}} 2\sqrt{BdM}(1+B\sqrt{\epsilon})^{dM}\epsilon^{\frac{1}{4}} p(d)
\end{aligned}$$

这里第一个加项为 1，因为 $\sigma_{n,\Gamma}$ 是正定的，且在对角线上取值为 1；另一个项根据方程 9 和引理 2.2 也为正定。第二个加项以 $\epsilon^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\sum_{d=0}^{\infty} e^{-\frac{d}{n}} (1+B\sqrt{\epsilon})^{dM} q(d) \right)$ 为界，其中 $q(d)$ 是一个次数比 $p(d)$ 高一的多项式。使用比值判别法可知，当 $n \leq M \quad {}^{1}_{\ln(1+B\sqrt{\epsilon})}$ 时，此级数收敛。

设 $\delta > 0$ 为正数，则对于 $n = \lfloor M \quad {}^{1}_{\ln(1+B\sqrt{\epsilon})} \rfloor$，存在 $K \in \mathbb{N}$，使得 $\epsilon^{\frac{1}{4}} \sum_{d=K+1}^{\infty} e^{-\frac{d}{n}} (1+B\sqrt{\epsilon})^{dM} q(d) < \frac{\delta}{2}$。此外，我们可以将 ϵ 选得足够小，从而以下结论也成立：

$$\epsilon^{\frac{1}{4}} \left(\sum_{d=0}^{K} e^{-\frac{d}{n}} (1+B\sqrt{\epsilon})^{dM} q(d) \right) \leq \epsilon^{\frac{1}{4}} (1+B\sqrt{\epsilon})^{KM} \sum_{d=0}^{\infty} e^{-\frac{d}{n}} q(d) < \frac{\delta}{2}.$$

那么，对于这个特定的 n，我们有 $||\psi_{n,\Gamma}||_{B_2} < 1+\delta$。现在，对于一个递减的 $\epsilon_k \in (0, \epsilon)$ 数列，我们有一个核的子序列 $\{\psi_{n_k,\Gamma}\}$，它具有如下性质：对每个 k，都有 $||\psi_{n_k,\Gamma}||_{B_2} < 1+\delta$。

3.3. 核 $\psi_{n,\Gamma}$ 是 $G(\Gamma)$-不变的。 本节证明 $G(\Gamma)$-不变性，即对任意三个元素 $\gamma, \eta, \eta' \in G(\Gamma)$，

$$\psi_{n,\Gamma}(\eta, \eta') = \psi_{n,\Gamma}(\gamma\eta, \gamma\eta'),$$

进而在 $G(\Gamma)$ 上定义如下函数：

$$\begin{aligned} \phi_{n,\Gamma} : G(\Gamma) &\to \mathbb{C} \\ \gamma &\mapsto \psi_{n,\Gamma}(\gamma, 1_{G(\Gamma)}) \end{aligned}$$

具有与 $\psi_{n,\Gamma}$ 相同的 B_2-范数。为获得 $G(\Gamma)$-不变性，我们按如下步骤进行：

- 我们证明 $\psi_{n,\Gamma}(\gamma, \eta) = \psi_{n,\Gamma}(\eta^{-1}\gamma, 1_{G(\Gamma)})$，对于任意 $\gamma, \eta \in G(\Gamma)$，以及
- 如果对于某个函数 $f(\gamma, \eta)$（见 16），有 $\psi_{n,\Gamma}(\gamma, \eta) = e^{f(\gamma, \eta)}$，那么对于 $\psi_{n,\Gamma}$ 的 $G(\Gamma)$-不变性，只需证明对于任意 $\gamma, \eta \in G(\Gamma)$，有 $f(\gamma, \eta) = f(\eta^{-1}\gamma, 1_{G(\Gamma)})$。

设 γ，η 是 $G(\Gamma)$ 中的任意两个元素，分别对应两个约化形式 $\gamma = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_m$ 和 $\eta = \eta_1\eta_2\cdots\eta_p$。$\eta^{-1}\gamma$ 在 $G(\Gamma)$ 中的约化形式构型有如下可能性：

(1) 字母 γ_i 和 η_i 相同，即 $\gamma_i = \eta_i$ 在 G_{v_i} 中对于 $1 \leq i \leq q \leq \min\{m, p\}$(2) 字母 γ_i 和 η_i 属于同一个 G_{v_i}，但对于 $1 \leq i \leq r \leq \min\{m, p\}$而言彼此不同，且 Γ 中以 $\{v_1, \cdots, v_r\}$ 为顶点的子图是一个完全图，其中 $r \leq M$ 和 M 来自引理 2.10 的假设；(3) 上述 (1) 和 (2) 中描述的情况可能有限次重复。这些情况中，γ_i，η_i 来自同一个顶点群 G_{v_i}，会导致消去，或产生形如 $\eta_i^{-1}\gamma_i$ 的字的有限乘积；(4) η 或 γ 的约化形式的尾部中，可能存在一些字母，它们在 $\eta^{-1}\gamma$ 的每一种约化形式中都保留下来。

从上述讨论（图4）可以清楚地看出，$\eta^{-1}\gamma$ 的约化形式由以下类型的音节或字母组成：(i) 形如 $\eta_i^{-1}\gamma_i$ 的字的有限乘积（因为(1)中提到的其他可能性都被约掉了）；(ii) 如可能性4所述，剩余的字母仍然存在。因此，$f(\gamma, \eta) = f(\eta^{-1}\gamma, 1_{G(\Gamma)})$ 的证明归结为以下情形（见图 5）：

设 γ，$\eta \in G(\Gamma)$ 具有上述约化形式，且对于 $1 \leq i \leq q \leq$，$\gamma_i = \eta_i$ 取最小值；若 Γ 中的子图以 $\{v_{q+1}, \cdots, v_{q+r}\}$ 为顶点，且是一个具有 $r \leq M$ 的完全图，则 $\eta^{-1}\gamma$ 的约化形式为

$$\eta_p^{-1} \cdots \eta_{q+1+r}^{-1} (\eta_{q+1}^{-1}\gamma_{q+1}) \cdots (\eta_{q+r}^{-1}\gamma_{q+r}) \gamma_{q+1+r} \cdots \gamma_m.$$

对于这类 γ 和 η，我们将分别计算 $f(\eta^{-1}\gamma, 1_{G(\Gamma)})$ 和 $f(\gamma, \eta)$。

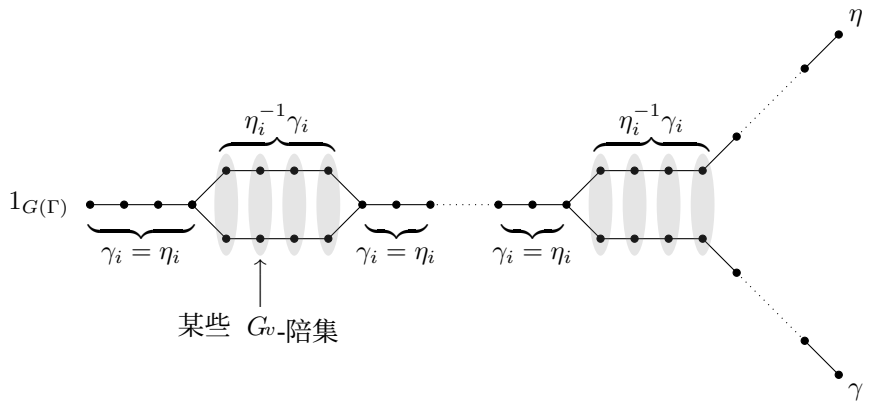


图 4。 $\eta^{-1}\gamma$ 的约化形式示意图

3.3.1. $(, 1_{G(\Gamma)})$的表达式。首先考虑$\psi_{n,\gamma}(\eta^{-1}\gamma, 1_{G(\Gamma)})$，并求出 e在该表达式中的指数:

$$\begin{aligned}\psi_{n,\Gamma}(\eta^{-1}\gamma, 1_{G(\Gamma)}) =&\langle Exp_o(R_\Gamma(\eta^{-1}\gamma)), Exp_o(R_\Gamma(1_{G(\Gamma)}))\rangle \\ &\sum_{d=0}^{\infty} e^{-\frac{d}{n}}\psi_{n,\Gamma,d}(\eta^{-1}\gamma, 1_{G(\Gamma)})\chi_d(\eta^{-1}\gamma, 1_{G(\Gamma)}) \\ =&e^{-\frac{||R_\Gamma(\eta^{-1}\gamma)||^2}{n}} e^{-\frac{|\eta^{-1}\gamma|_r}{n}}\psi_{n,|\eta^{-1}\gamma|_r,\Gamma}(\eta^{-1}\gamma, 1_{G(\Gamma)})\end{aligned}$$

化简上述方程可得,

$$\begin{aligned}\psi_{n,\Gamma}(\eta^{-1}\gamma, 1_{G(\Gamma)}) = e^{-\frac{||R_\Gamma(\eta^{-1}\gamma)||^2}{n}} e^{-\frac{|\eta^{-1}\gamma|_r}{n}}\ &\Pi_{i=q+1+r}^{p}\langle\alpha_{n,v_i,S_{v_i}}(\eta_i^{-1}), \beta_{n,v_i,S_{v_i}}(1_{v_i})\rangle \\ &\Pi_{i=q+1}^{q+r}\langle\alpha_{n,v_i,S_{v_i}}(\eta_i^{-1}\gamma_i), \beta_{n,v_i,S_{v_i}}(1_{v_i})\rangle \\ &\Pi_{i=q+1+r}^{m}\langle\alpha_{n,v_i,S_{v_i}}(\gamma_i), \beta_{n,v_i,S_{v_i}}(1_{v_i})\rangle\end{aligned}$$

代入相应内积的值可得,

$$\begin{aligned}\psi_{n,\Gamma}(\eta^{-1}\gamma, 1_{G(\Gamma)}) = e^{-\frac{||R_\Gamma(\eta^{-1}\gamma)||^2}{n}} e^{-\frac{|\eta^{-1}\gamma|_r}{n}} e^{\sum_{i=q+1+r}^{p}\frac{\phi_{v_i}(1_{v_i})-||S_{v_i}(\eta_i^{-1})+S_{v_i}(1_{v_i})||^2}{n}} \\ e^{\sum_{i=q+1}^{q+r}\frac{\phi_{v_i}(1_{v_i})-||S_{v_i}(\eta_i^{-1}\gamma_i)+S_{v_i}(1_{v_i})||^2}{n}}\ e^{\sum_{i=q+1+r}^{m}\frac{\phi_{v_i}(1_{v_i})-||S_{v_i}(\gamma_i)+S_{v_i}(1_{v_i})||^2}{n}}.\end{aligned}$$

因此，由上述方程右侧得到的 e 的总指标为

$$\begin{aligned}-\frac{||R_\Gamma(\eta^{-1}\gamma)||^2}{n} - \frac{|\eta^{-1}\gamma|_r}{n} + \sum_{i=q+1+r}^{p}\frac{\phi_{v_i}(1_{v_i}) - ||S_{v_i}(\eta_i^{-1}) + S_{v_i}(1_{v_i})||^2}{n} + \\ \sum_{i=q+1}^{q+r}\frac{\phi_{v_i}(1_{v_i}) - ||S_{v_i}(\eta_i^{-1}\gamma_i) + S_{v_i}(1_{v_i})||^2}{n} + \sum_{i=q+1+r}^{m}\frac{\phi_{v_i}(1_{v_i}) - ||S_{v_i}(\gamma_i) + S_{v_i}(1_{v_i})||^2}{n}\end{aligned}$$

因此，根据其定义拆分 R_Γ 后，上述表达式变为:

$$\begin{aligned}f(\eta^{-1}\gamma, 1_{G(\Gamma)}) := -\frac{|\eta^{-1}\gamma|_r}{n} + \sum_{i=q+1+r}^{p}\frac{\phi_{v_i}(1_{v_i}) - ||R_{v_i}(\eta_i^{-1})||^2 - ||S_{v_i}(\eta_i^{-1}) + S_{v_i}(1_{v_i})||^2}{n} \\ + \sum_{i=q+1}^{q+r}\frac{\phi_{v_i}(1_{v_i}) - ||R_{v_i}(\eta_i^{-1}\gamma_i)||^2 - ||S_{v_i}(\eta_i^{-1}\gamma_i) + S_{v_i}(1_{v_i})||^2}{n} \\ + \sum_{i=q+1+r}^{m}\frac{\phi_{v_i}(1_{v_i}) - ||R_{v_i}(\gamma_i)||^2 - ||S_{v_i}(\gamma_i) + S_{v_i}(1_{v_i})||^2}{n} \quad (19)\end{aligned}$$

因此，19 给出了方程等式右边的指数：

$$\psi_{n,\Gamma}(\eta^{-1}\gamma, 1_{G(\Gamma)}) = e^{f(\eta^{-1}\gamma, 1_{G(\Gamma)})}.$$

3.3.2. (γ, η)的表达式。现在我们用同样的方法，求出 $\psi_{n,\Gamma}(\gamma,\eta)$ 的值中 e 的指数。

$$\begin{aligned}\psi_{n,\Gamma}(\gamma,\eta) =&\langle Exp_o(R_\Gamma(\gamma)), Exp_o(R_\Gamma(\eta))\rangle \sum_{d=0}^{\infty} e^{-\frac{d}{n}} \psi_{n,\Gamma,d}(\gamma,\eta)\chi_d(\gamma,\eta)\\ =&e^{-\frac{||R_\Gamma(\gamma)-R_\Gamma(\eta)||^2}{n}} e^{-\frac{|\eta^{-1}\gamma|_r}{n}} \psi_{n,|\eta^{-1}\gamma|_r,\Gamma}(\gamma,\eta)\end{aligned}$$

根据 $\psi_{n,|\eta^{-1}\gamma|_r,\Gamma}$ 的定义，我们有

$$\psi_{n,|\eta^{-1}\gamma|_r,\Gamma}(\gamma,\eta) = \langle \alpha_{n,|\eta^{-1}\gamma|_r,\Gamma}(\gamma), \beta_{n,|\eta^{-1}\gamma|_r,\Gamma}(\eta)\rangle.$$

根据约化长度 $|\eta^{-1}\gamma|_r$ 的大小，内积 $\langle \alpha_{n,|\eta^{-1}\gamma|_r,\Gamma}(\gamma)\beta_{n,|\eta^{-1}\gamma|_r,\Gamma}(\eta)\rangle$ 的前 q 项将呈现以下几种形式之一（见图 5）：

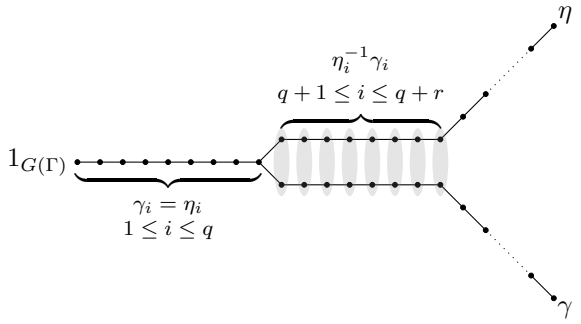


图 5

$$\begin{cases}1. & \langle \theta_{n,v_i,S_{v_i}}(\gamma_i), \theta_{n,v_i,S_{v_i}}(\eta_i)\rangle\\ 2. & \langle \theta_{n,v_i,S_{v_i}}(\gamma_i), \begin{pmatrix}\beta_{n,v_i,S_{v_i}}(\eta_i), \begin{pmatrix}0\\ C^{\beta_{n,v_i,S_{v_i}}}(\eta_i,\eta_i)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ C^{\beta_{n,v_i,S_{v_i}}}(\eta_i,1_{v_i})\end{pmatrix}\end{pmatrix}\rangle\\ 3. & \langle \begin{pmatrix}\alpha_{n,v_i,S_{v_i}}(\gamma_i), \begin{pmatrix}C^{\alpha_{n,v_i,S_{v_i}}}(\gamma_i,\gamma_i)\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}C^{\alpha_{n,v_i,S_{v_i}}}(\gamma_i,1_{v_i})\\ 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}, \theta_{n,v_i,S_{v_i}}(\eta_i)\rangle\\ 4. & \langle \begin{pmatrix}\alpha_{n,v_i,S_{v_i}}(\gamma_i), \begin{pmatrix}C^{\alpha_{n,v_i,S_{v_i}}}(\gamma_i,\gamma_i)\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}C^{\alpha_{n,v_i,S_{v_i}}}(\gamma_i,1_{v_i})\\ 0\end{pmatrix}\end{pmatrix},\\ & \qquad \begin{pmatrix}\beta_{n,v_i,S_{v_i}}(\eta_i), \begin{pmatrix}0\\ C^{\beta_{n,v_i,S_{v_i}}}(\eta_i,\eta_i)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ C^{\beta_{n,v_i,S_{v_i}}}(\eta_i,1_{v_i})\end{pmatrix}\end{pmatrix}\rangle.\end{cases} \tag{20}$$

在所有这些情况下，由于 $\gamma_i = \eta_i$，因此内积为 1。引理 2.9 指出，对于 $i \ge q+1$，每个 γ_i 和 η_i 分别都位于 γ 和 η 的 $|\eta^{-1}\gamma|_r$-尾部。根据 $\eta^{-1}\gamma$ 给定的约化形式，我们还可以说，对于 $q+1 \le i \le q+r$，$\gamma_i, \eta_i \in G_{v_i}$。因此，接下来的 r 项具有以下形式（见图 5 中间部分）：

$$\langle \begin{pmatrix}\alpha_{n,v_i,S_{v_i}}(\gamma_i), \begin{pmatrix}C^{\alpha_{n,v_i,S_{v_i}}}(\gamma_i,\gamma_i)\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}C^{\alpha_{n,v_i,S_{v_i}}}(\gamma_i,1_{v_i})\\ 0\end{pmatrix}\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}\beta_{n,v_i,S_{v_i}}(\eta_i), \begin{pmatrix}0\\ C^{\beta_{n,v_i,S_{v_i}}}(\eta_i,\eta_i)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ C^{\beta_{n,v_i,S_{v_i}}}(\eta_i,1_{v_i})\end{pmatrix}\end{pmatrix}\rangle$$

其值为 $\langle \alpha_{n,v_i,S_{v_i}}(\gamma_i)\, \beta_{n,v_i,S_{v_i}}(\eta_i)$。最后，对于 $i \ge q+1+r$，$\langle \alpha_{n,|\eta^{-1}\gamma|_r,\Gamma}(\gamma)\beta_{n,|\eta^{-1}\gamma|_r,\Gamma}(\eta)\rangle$ 的其余项具有如下形式：

$$\begin{cases} 1. & \langle\left(\alpha_{n,v_i,S_{v_i}}(\gamma_i),\begin{pmatrix}C^{\alpha_{n,v_i,S_{v_i}}}(\gamma_i,\gamma_i)\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}C^{\alpha_{n,v_i,S_{v_i}}}(\gamma_i,1_{v_i})\\0\end{pmatrix}\right),\theta_{n,v_i,S_{v_i}}(1_{v_i})\rangle \\ & =\langle\alpha_{n,v_i,S_{v_i}}(\gamma_i),\beta_{n,v_i,S_{v_i}}(1_{v_i})\rangle \\ 2. & \langle\theta_{n,v_i,S_{v_i}}(1_{v_i}),\left(\beta_{n,v_i,S_{v_i}}(\eta_i),\begin{pmatrix}0\\C^{\beta_{n,v_i,S_{v_i}}}(\eta_i,\eta_i)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\C^{\beta_{n,v_i,S_{v_i}}}(\eta_i,1_{v_i})\end{pmatrix}\right)\rangle \\ & =\langle\alpha_{n,v_i,S_{v_i}}(1_{v_i}),\beta_{n,v_i,S_{v_i}}(\eta_i)\rangle \end{cases}$$

因此，$\psi_{n,\Gamma}(\gamma,\eta)$ 的值为

$$\psi_{n,\Gamma}(\gamma,\eta)=e^{-\frac{||R_\Gamma(\gamma)-R_\Gamma(\eta)||^2}{n}-\frac{|\eta^{-1}\gamma|_r}{n}}e^{\sum_{i=q+1}^{q+r}\frac{\phi_{v_i}(1_{v_i})-||S_{v_i}(\gamma_i)+S_{v_i}(\eta_i)||^2}{n}}\cdot$$
$$e^{\sum_{i=q+1+r}^{m}\frac{\phi_{v_i}(1_{v_i})-||S_{v_i}(\gamma_i)+S_{v_i}(1_{v_i})||^2}{n}}\cdot e^{\sum_{i=q+1+r}^{p}\frac{\phi_{v_i}(1_{v_i})-||S_{v_i}(1_{v_i})+S_{v_i}(\eta_i)||^2}{n}}$$

同样，通过考察 e 的指标并化简 R_Γ 的表达式，我们得到：

$$f(\gamma,\eta):=-\frac{|\eta^{-1}\gamma|_r}{n}+\sum_{i=q+1}^{q+r}\frac{\phi_{v_i}(1_{v_i})-||R_{v_i}(\gamma_i)-R_{v_i}(\eta_i)||^2-||S_{v_i}(\gamma_i)+S_{v_i}(\eta_i)||^2}{n}+$$
$$\sum_{i=q+1+r}^{m}\frac{\phi_{v_i}(1_{v_i})-||R_{v_i}(\gamma_i)||^2-||S_{v_i}(\gamma_i)+S_{v_i}(1_{v_i})||^2}{n}+$$
$$\sum_{i=q+1+r}^{p}\frac{\phi_{v_i}(1_{v_i})-||R_{v_i}(\eta_i)||^2-||S_{v_i}(1_{v_i})+S_{v_i}(\eta_i)||^2}{n}\quad(21)$$

由方程 19 和 21 可知，$f(\eta^{-1}\gamma,\ 1_{G(\Gamma)})=f(\gamma,\ \eta)$，这证明函数 $\psi_{n,\ \Gamma}$ 是 $G(\Gamma)$-不变的，即对于任意 $\gamma,\ \eta,\ \eta'\in G(\Gamma)$：

$$\psi_{n,\Gamma}(\eta,\eta')=\psi_{n,\Gamma}(\gamma\eta,\gamma\eta'),$$

3.4. 主定理的证明。 简而言之，我们从以上各节得到了：

- 在第 3.1 节中，我们构造了一列核 $\psi_{n,\ \Gamma}$，
- 第 3.2 节给出了子序列 $||\psi_{n_k,\ \Gamma}||_{B_2}$ 的一个上界，
- 第 3.3 节证明了 $\psi_{n,\Gamma}$ 在 $G(\Gamma)$ 的对角作用下保持不变。

因此，函数 $\phi_{n,\Gamma}:\ G(\Gamma)\ \to\mathbb{C}$ 定义为 $\phi_{n,\Gamma}(\gamma):=\psi_{n_n,\Gamma}(\gamma,1_{G(\Gamma)})$，其 B_2-范数有界。对于 γ 的约化形式 $\gamma_1\cdots\gamma_m$，映射形式如下：

$$\phi_{n,\Gamma}(\gamma)=e^{-\frac{|\gamma|_r+\sum_{i=1}^{m}\left(\phi_{v_i}(\gamma_i)-\phi_{v_i}(1_{v_i})\right)}{n}}$$

映射 $\gamma\mapsto|\gamma|_r+\sum_{i=1}^{m}\left(\phi_{v_i}(\gamma_i)-\phi_{v_i}(1_{v_i})\right)$ 是 $G(\Gamma)$ 上的适当映射（适当性的证明见引理 4.4, [13] ）。这证明了 $\phi_{n,\Gamma}$ 是一个在无穷远处消失的函数。

总结目前为止得到的结果：对于任意给定的 $\delta>0$，我们有映射

$$\phi_{n,\Gamma}:G(\Gamma)\to\mathbb{C}$$

具有以下性质：

(1) $\phi_{n,\Gamma}$ 在无穷远处趋于零，(2) $\phi_{n,\Gamma}(\gamma)\to1$ 当 $n\to\infty$时，对于所有 $\gamma\in G(\Gamma)$，(3) $||\phi_{n,\ \Gamma}||_{B_2}\le1+\delta$

因此，我们证明了以下定理。

定理 3.4. 设 Γ 是一个有限图，且对每个顶点 $v\in V(\Gamma)$，其关联群 G_v 具有弱 *Haagerup* 性质，且 $\Lambda_{WH}(G_v)=1$。则 $G(\Gamma)$ 具有弱 *Haagerup* 性质。此外 $\Lambda_{WH}(G(\Gamma))=1$。

下面是一个特例：

推论 3.5。 假设 A和 B是两个弱 *Haagerup* 群，且 $\Lambda_{WH}(A) = 1 = \Lambda_{WH}(B)$，那么 $G = A * B$具有弱 *Haagerup* 性质，且 $\Lambda_{WH}(G) = 1$。

注 3.6. 推论 *3.5* 的证明与定理 *3.4* 相同。但在此处，我们取 X 为 *Bass-Serre* 树，它是与群的自由积 *[30]* 相关联的一种特殊的 *CAT(0)*立方复形。 *[18],* 已证明，树上的距离度量，或者更准确地说， G 上的正规长度，是条件负定型。最后，*Bozejko* 和 *Picardello* 在 *[5],* 中证明，对于自由积， $||\chi_d||_{B_2}$ （出现在 $\psi_{n,\ \Gamma}$ 中）具有线性上界，即存在某个 $D > 0$，使得 $||\chi_d||_{B_2} \leq D\ (d + 1)$。

致谢

PSG[1] 获得了印度政府], 印度科学与工业研究理事会奖学金 [，档案编号 08/155(0066)/2019-EMR-I。SD[2] 感谢总统大学数学系通过 DST-FIST [提供的基础设施支持，档案编号 SR/FST/MS-I/2019/41]。

参考文献

[1] Charles A Akemann 和 Martin E Walter。无界负定函数。《加拿大数学杂志》，33(4):862–871，1981。[2] Yago Antolín 和 Dennis Dreesen。Haagerup 性质在图乘积下保持稳定。arXiv 预印本 arXiv:1305.6748，2013。[3] Bachir Bekka、Pierre de La Harpe 和 Alain Valette。Kazhdan 的性质 (T)。剑桥大学出版社，2008。[4] Mladen Bestvina、Michah Sageev 和 Karen Vogtmann。几何群论，IAS/PARK CITY 数学系列，第 21 卷。美国数学学会，2014。[5] Marek Bożejko 和 Massimo A Picardello。弱可合群与融合积。《美国数学学会会刊》，117(4):1039–1046，1993。[6] Nathanial Patrick Brown 和 Narutaka Ozawa。 C^*-代数与有限维逼近，第 88 卷，G.S.M. 美国数学学会，2008。[7] Indira Chatterji 和 Graham Niblo。从墙空间到 CAT(0) 立方复形。《国际代数与计算杂志》，15:875–885，2005。[8] Pierre-Alain Cherix、Michael Cowling、Paul Jolissaint、Pierre Julg 和 Alain Valette。具有 Haagerup 性质的群：Gromov 的 a-T-可容性，第 197 卷。Birkh¨auser，2001。[9] Marie Choda。Haagerup 型群因子。《日本学士院院刊》，A 辑，数学科学，59:174–177，1983。[10] Yves Cornulier、Yves Stalder 和 Alain Valette。绕圈积及其推广的真作用。《美国数学学会汇刊》，364(6):3159–3184，2012。[11] Michael Cowling 和 Uffe Haagerup。实秩一单李群 Fourier 代数的完全有界乘子。《数学新进展》，96:507–549，1989。[12] Marius Dadarlat 和 Erik Guentner。保持离散群希尔伯特空间一致嵌入性的构造。《美国数学学会汇刊》，355(8):3253–3275，2003。[13] Shubhabrata Das 和 Partha Sarathi Ghosh。Haagerup 性质在图乘积下的稳定性。《数学档案》，第 1–9 页，2023。[14] Pierre de La Harpe 和 Marc Valette。《局部紧群的 Kazhdan 性质 (T)：附有 Marc Burger 的附录》。法国数学会，1989。[15] Elisabeth Ruth Green。群的图乘积。博士论文，利兹大学，1990。[16] Mikhael Gromov。双曲群。载于《群论论文集》，第 75–263 页。施普林格，1987。[17] Erik Guentner 和 Nigel Higson。CAT(0) 立方群的弱 amenability。《几何学献辞》，148:137–156，2010。[18] Uffe Haagerup。一个具有度量逼近性质的非核 C*-代数的例子。《数学新进展》，50(3):279–293，1978。[19] Uffe Haagerup 和 Søren Knudby。弱 Haagerup 性质 II：例子。《国际数学研究通知》，2015(16):6941–6967，2015。[20] Søren Knudby。Herz–Schur 乘子半群。《泛函分析杂志》，266(3):1565–1610，2014。[21] Søren Knudby。弱 Haagerup 性质。《美国数学学会汇刊》，368 3508，2016 5 3469( ): – 。[22] Roger C Lyndon 和 Paul E Schupp。组合群论，第 188 卷。施普林格，1977。[23] Naokazu Mizuta。有限维 CAT(0) 立方复形的 Bożejko–Picardello 型不等式。《泛函分析杂志》，254(3):760–772，2008。[24] Graham A Niblo 和 Lawrence Reeves。作用于 CAT(0 7, 1997 1 1 1) 立方复形的群。《几何与拓扑》，( ): – 。[25] Narutaka Ozawa。双曲群的弱 amenability。《群、几何与动力系统》，2(2):271–280，2008。[26] Narutaka Ozawa 和 Sorin Popa。关于一类至多具有一个 Cartan 子代数的 II_1 因子。《数学年刊》，第 713–749 页，2010。

[1]parthasarathi.ghosh.100@gmail.com[2]
shubhabrata.maths@presiuniv.ac.in

[27] Eric Reckwerdt。弱 amenability 在图乘积下保持稳定。伦敦数学学会会刊，96(1):133–155，2017。[28] Éric Ricard 和 Quanhua Xu。约化自由积的 Khintchine 型不等式及其应用。纯粹与应用数学杂志，599 (2006)，27–59。[29] Isaac J Schoenberg。度量空间与完全单调函数。数学年刊，第 811–841 页，1938。[30] Jean-Pierre Serre。树。施普林格，2002。