阿佩尔–劳里切拉超几何函数的二重积分与变换公式 F_D

SHIHAO WANG、CHENGLONG YU、ZHIWEI ZHENG

摘要。超几何函数的单值化可以支配这些函数本身的性质。此前，第二与第三作者利用 Deligne–Mostow 理论以及曲线与曲面之间的几何对应，研究了阿佩尔–劳里切拉超几何函数的单值化群之间的可公度关系。本文采用同一构造，得到这些超几何函数之间的变换公式。这也借助二重积分与 Fubini 定理，为 Goursat 二次变换中的若干情形提供了另一种途径。

arXiv:2602.03601v1 [math.CA] 3 Feb 2026

目录

1. 引言 1 2. 超几何函数回顾 3 3. 两个引理 4 4. 双纤维化与周期积分 5 5. 划分 $(1,2)+(1,1)+(1,0)$ 7 6. 划分 $(1,2)+(1,0)+(1,0)+(0,1)$ 9 7. 划分 $(2,2)+(1,0)+(0,1)$ 15 8. 划分 $(1,2)+(2,1)$ 16 9. 划分 $(1,3)+(1,0)+(1,0)$ 17

参考文献 20

1. 引言

Euler–Gauss 超几何函数的二次或更高阶变换可追溯至 Gauss [Gau66], Kummer [Kum36] 和 Goursat [Gou81]。他们通过研究相应的超几何微分方程，得到了这些公式。Riemann [Rie57], Fuchs [Fuc66], Schwarz [Sch73] 以及许多其他数学家的工作，确立了超几何系统的单值化群与超几何函数性质之间的重要联系。尤其当两个单值化群可公度（即经过适当共轭后，它们具有共同的有限指数子群）时，预期相应的超几何函数之间存在变换公式。

对于超几何函数的多变量推广，例如阿佩尔–劳里切拉超几何函数，也有许多遵循类似思路、通过比较微分系统来研究变换公式的工作，参见例如 [KS07, KS08, MO09, Mat10, Ots21]。关于阿佩尔–劳里切拉超几何函数的单值化群，Sauter [Sau90] 和 Deligne–Mostow [DM93] 研究了它们作为 PU(1,2) 子群时的可公度关系。Deligne–Mostow 还将其与超几何函数恒等式联系起来，参见 [DM93，第 13] 章。该方法基于对具有圆锥复双曲结构的模空间进行比较。在 [YZ24], 中，第二和第三作者通过某些带双纤维化的曲面的几何，研究了 Deligne–Mostow 理论中阿佩尔–劳里切拉超几何函数单值化群之间的可公度关系。研究发现了新的关系，完整的可公度关系列表见 [YZ24, 表 2] 。

本文中，我们运用同样的构造（带双纤维化的曲面），得到相应超几何函数之间的变换公式。核心思路是研究这些曲面上某些体积形式的周期积分，并利用两种不同的迭代积分将其化为超几何函数。这可视为 [YZ24 中定理 3.6] 所得霍奇等距的周期积分版本。

下面列出其中一些变换。对于适当范围内的参数，我们有

(1) 定理 5.1：

$$\begin{aligned} & F_D^{(3)}\left(\begin{matrix}2-2a;1-a,1-a,1-a\\ 4-4a\end{matrix};\frac{2(\beta_2-\beta_1)t}{\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2},-\frac{2t}{\alpha_1},-\frac{2t}{\alpha_2}\right)\\ = \;& C\cdot F_D^{(3)}\left(\begin{matrix}1-a;a-\frac{1}{2},1-a,1-a\\ \frac{5}{2}-2a\end{matrix};\frac{1}{t^2},\frac{1}{\beta_1},\frac{1}{\beta_2}\right), \end{aligned}$$

其中 $C=\left(t^2\,\underline{(\alpha_1+2t)\;\;(\alpha_2+2t)\;\alpha_1\alpha_2}\,(1-t)^2\right)^{a-1}$ 以及 $\beta_i=\underline{-\,{}^{\alpha_i}\,(\alpha_i+2t)}$
$2\alpha_i+(1+t)^2$。

(2) 定理 6.1：

$$\begin{aligned} & F_1\left(\begin{matrix}\frac{3}{2}-a-b;1-a-b,1-b\\ \frac{3}{2}-b\end{matrix};s^2,t^2\right)\\ = \;& (1-t)^{2b-2}(1+s)^{2a+2b-2}\cdot F_1\left(\begin{matrix}1-b;a,2-2a-2b\\ 2-2b\end{matrix};-\frac{4t}{(1-t)^2},\frac{2(s-t)}{(1-t)(1+s)}\right), \end{aligned}$$

(3) 定理6.3：

$$\begin{aligned} & t_1^{2a+2b-1}(1-t_2^2)^{a+b-1}F_1\left(\begin{matrix}2a+2b-1;b,b\\ a+2b\end{matrix};\frac{(1-t_1)(t_2+1)}{2(t_2-t_1)},\frac{(1-t_1)(t_2-1)}{2(t_2+t_1)}\right)\\ = \;& (t_1^2-t_2^2)^{a+b-1}F_1\left(\begin{matrix}a+b;a+b-\frac{1}{2},1-a\\ a+2b\end{matrix};\frac{t_1^2-1}{t_1^2},\frac{t_1^2-1}{t_1^2-t_2^2}\right). \end{aligned}$$

某些退化会产生欧拉–Gauss 超几何函数的变换：

(1) 推论 6.6（Goursat 二次变换）：

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\ a+b-\frac{1}{2}\end{matrix};z\right)=(1-z)^{-\frac{1}{2}}{}_2F_1\left(\begin{matrix}2a-1,2b-1\\ a+b-\frac{1}{2}\end{matrix};\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-z}\right).$$

(2) 推论 6.7（Goursat 二次变换）：

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\2b\end{matrix};z\right)=(1-z)^{-\frac{a}{2}}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}a,2b-a\\b+\frac{1}{2}\end{matrix};-\frac{1}{4}(1-z)^{-\frac{1}{2}}(1-(1-z)^{\frac{1}{2}})^2\right). $$

(3) 推论 9.2：

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{4}{3}-a,2-2a\\3-3a\end{matrix};-\frac{t(2t+3)}{t+2}\right)=C\cdot{}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{5}{6},\frac{3}{2}-a\\\frac{5}{3}-a\end{matrix};-\frac{(2t+3)^3}{t^3(t+2)}\right), $$

where $C=2^{2a-2}3^{\frac{5}{2}-3a}(-t)^{3a-\frac{9}{2}}(t+2)^{\frac{1}{2}-a}(t+3)^2$.

本文结构如下：在第2节中，我们回顾高斯超几何函数、阿佩尔超几何函数和阿佩尔–劳里切拉超几何函数的定义及积分表示。在第3节中，我们回顾两个引理，用以将单变量积分化为阿佩尔–劳里切拉超几何函数。在第4节中，我们概述曲面上周期积分的类型。在其余的第5、6、7、8和9节中，我们给出若干由二重积分得到的变换公式实例。

致谢：第二作者得到国家重点研发计划（编号：2022YFA1007100）和国家自然科学基金12201337的资助。第三作者得到国家自然科学基金12301058的部分资助。

2. 超几何函数回顾

2.1. 高斯超几何函数。 高斯超几何函数 ${}_2F_1$ 由如下级数定义：

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}, $$

其中 $|z|<1$，且 $(q)_n=\frac{\Gamma(q+n)}{\Gamma(q)}$ 是 Pochhammer 符号（上升阶乘）。参数 $a,b,c\in\mathbb{C}$ 满足 $c\neq 0,-1,-2,\ldots$。

定义高斯超几何函数的另一种方式是欧拉积分表示：

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};z\right)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-zt)^{-b}dt,\quad \mathrm{Re}(c)>\mathrm{Re}(a)>0 $$

当 $|z|<1$或者更一般地，通过解析延拓，当 z位于割平面 $\mathbb{C}\setminus[1,\infty$中时).

2.2. 阿佩尔–劳里切拉超几何函数。双变量阿佩尔超几何函数记作 F_1，定义如下：

$$ F_1\left(\begin{matrix}a;b,b'\\c\end{matrix};x,y\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_m(b')_n}{(c)_{m+n}}\frac{x^m y^n}{m!\,n!}, $$

当 $|x|<1$、$|y|<1$时收敛，其中 $a,b,b',c\in\mathbb{C}$ 以及 $c\neq 0,-1,-2,\ldots$。

当 $\mathrm{Re}(c)>\mathrm{Re}(a)>0$时，阿佩尔超几何函数 $F_1\left(\begin{matrix}a;b,b'\\c\end{matrix};x,y\right)$有如下积分表示：

$$ F_1\left(\begin{matrix}a;b,b'\\c\end{matrix};x,y\right)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-xt)^{-b}(1-yt)^{-b'}dt, $$

当 $|x|<1$, $|y|<1$时收敛；更一般地，经解析延拓后，当 $x,y\in\mathbb{C}\setminus[1,\infty)$ 时收敛。

这是对 ${}_2F_1$ 的欧拉积分的推广，且当 Re(c) >Re(a) >时成立 0.

一般而言，阿佩尔–劳里切拉超几何函数定义如下 :

$$F_D^{(n)}\left(\begin{matrix}a;b_1,\cdots,b_n\\ c\end{matrix};x_1,\cdots,x_n\right)=\sum_{m_1,\cdots,m_n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m_1+\cdots+m_n}(b_1)_{m_1}\cdots(b_n)_{m_n}}{(c)_{m_1+\cdots+m_n}}\frac{x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}}{m_1!\cdots m_n!}$$

同样，当 Re(c) > Re(a) > 0 时，阿佩尔–劳里切拉超几何函数具有如下积分表示:

$$\begin{aligned}&F_D^{(n)}\left(\begin{matrix}a;b_1,\cdots,b_n\\ c\end{matrix};x_1,\cdots,x_n\right)\\ =\ &\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-x_1t)^{-b_1}(1-x_2t)^{-b_2}\cdots(1-x_nt)^{-b_n}dt.\end{aligned}$$

该积分表示也定义了 $x_i\in\mathbb{C}\backslash[1,\infty)$ 的阿佩尔–劳里切拉超几何函数的解析延拓。

3. 两个引理

本节的结果将某些单变量周期积分与阿佩尔–劳里切拉超几何函数联系起来。

引理 3.1. 设 $n\geq 4$。令 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为满足 $x_1<x_2$ 且满足 $x_3,\cdots,x_n\notin(x_1,x_2)$ 的互不相同的实数。令 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 为满足 $\mu_1,\mu_2<1$ 的实数，并且所有 μ_i 之和等于 2。令

$$R_i=\frac{(x_i-x_3)(x_2-x_1)}{(x_i-x_1)(x_2-x_3)}.$$

Let

$$\omega=\frac{dx}{(x-x_1)^{\mu_1}(x_2-x)^{\mu_2}|x-x_3|^{\mu_3}|x-x_4|^{\mu_4}\cdots|x-x_n|^{\mu_n}}.$$

Then

$$\int_{x_1}^{x_2}\omega=C\cdot F_D^{(n-3)}\left(\begin{matrix}1-\mu_1;\mu_4,\cdots,\mu_n\\ 2-\mu_1-\mu_2\end{matrix};R_4,\cdots,R_n\right),$$

其中

$$\begin{aligned}C\ =\ &|x_2-x_3|^{\mu_1-1}(x_2-x_1)^{1-\mu_1-\mu_2}|x_1-x_3|^{1-\mu_1-\mu_3}|x_1-x_4|^{-\mu_4}\\ &|x_1-x_5|^{-\mu_5}\cdots|x_1-x_n|^{-\mu_n}B(1-\mu_1,1-\mu_2).\end{aligned}$$

证明。考虑莫比乌斯变换 $x\mapsto y=\frac{x-x_1}{x-x_3}\frac{x_2-x_3}{x_2-x_1}$，则~~$x_1$、$x_2$~~、$x_3$、$x_4$、$x_5$ x_6、$\cdots$、x_n分别映射到 0、1、∞、R_4^{-1}、R_5^{-1}、R_6^{-1}、$\cdots$、R_n^{-1}。

Then $x=f(y)=x_3+\frac{\alpha}{(x_1-x_3)\alpha-y}$其中 $\alpha=\frac{x_2-x_3}{x_2-x_1}$。有 $dx=f'(y)dy=\frac{|\alpha||x_1-x_3|}{(\alpha-y)^2}dy$.

相对于 $x=f(y)$，微分形式 ω 变换为

$$|x_2-x_3|^{\mu_1-1}(x_2-x_1)^{1-\mu_1-\mu_2}|x_1-x_4|^{1-\mu_1-\mu_3}\prod_{i=4}^{n}|x_1-x_i|^{-\mu_n}\frac{dy}{y^{\mu_1}(1-y)^{\mu_2}\prod_{i=3}^{n}(1-R_iy)^{\mu_i}}$$

这就证明了引理。 □

当我们令 $x_3 \to \infty$ 时，便得到其中一个极点位于无穷远处时的公式 .

推论 3.2. 设 $n \geq 3$。令 $x_1, x_2, x_4 \cdots, x_n$ 为满足$x_1 < x_2$ 且 $x_4, x_5, \cdots, x_n \notin (x_1, x_2)$的互不相同的实数。假设 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots, \mu_n$ 为实数，且满足$\mu_1, \mu_2 < 1$ ，所有 μ_i 之和等于2。记

$$R_i = \frac{x_2 - x_1}{x_i - x_1}$$

对于 $4 \leq i \leq n$。

Let

$$\omega = \frac{dx}{(x - x_1)^{\mu_1}(x_2 - x)^{\mu_2}|x - x_4|^{\mu_4} \cdots |x - x_n|^{\mu_n}},$$

then

$$\int_{x_1}^{x_2} \omega = C \cdot F_D^{(n-3)} \left(\begin{matrix} 1 - \mu_1; \mu_4, \cdots, \mu_n \\ 2 - \mu_1 - \mu_2 \end{matrix}; R_4, \cdots, R_n \right),$$

其中

$$C = (x_2 - x_1)^{1-\mu_1-\mu_3}|x_1 - x_4|^{-\mu_4}|x_1 - x_5|^{-\mu_5} \cdots |x_1 - x_n|^{-\mu_n} B(1 - \mu_1, 1 - \mu_2).$$

以下引理起到了函数类比的作用，对应于[YZ24 中定理 3.5]所用的 Leray–Hirsch 定理。其证明与引理 3.1 相同，采用莫比乌斯变换$y = \frac{x-x_1}{x-x_3}\frac{x_2-x_3}{x_2-x_1}$。

引理3.3. 设 x_1, x_2, x_3 为满足 $x_1 < x_2$ 且$x_3 \notin (x_1, x_2)$的三个互不相同的实数。令 μ_1, μ_2, μ_3 为满足 $\mu_1, \mu_2 < 1$ 和 $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 2$的实数。

Let

$$\omega = \frac{dx}{(x - x_1)^{\mu_1}(x_2 - x)^{\mu_2}|x - x_3|^{\mu_3}},$$

then

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \omega &= (x_2 - x_1)^{\mu_3 - 1}|x_2 - x_3|^{\mu_1 - 1}|x_1 - x_3|^{\mu_2 - 1} \int_0^1 \frac{dy}{y^{\mu_1}(1 - y)^{\mu_2}} \\ &= (x_2 - x_1)^{\mu_3 - 1}|x_2 - x_3|^{\mu_1 - 1}|x_1 - x_3|^{\mu_2 - 1} B(1 - \mu_1, 1 - \mu_2). \end{aligned}$$

4. 双纤维化与周期积分

我们考虑 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上的除子 D_i $(1 \leq i \leq m)$以及满足下列条件的有理数 $\mu_i \in (0, 1)$（见 [YZ24，命题3.1]）：

$$\sum_{i=1}^{m} \deg D_i = (3, 3), \ \sum_{i=1}^{m} \mu_i \deg D_i = (1, 1) \tag{1}$$

设 d 为 μ_i $(1 \leq i \leq m)$的公分母，并设 S 为$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 的 d重循环覆盖，沿每个 D_i 以重数 $d\mu_i$分歧。循环群 $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ 作用于S。条件(1)蕴含，对于 $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$的典范特征 χ ，有$\dim H^{2,0}_{\chi}(S) = 1$ 。

假设除子 D_i 由方程 $f_i(x, y) = 0$定义，其中 (x, y) 是 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 的仿射坐标。那么 S 的一个仿射开子集为

$$z^d = \prod_{i=1}^{m} f_i(x, y)^{d\mu_i}.$$

$H^{2}{}_{,\chi}{}^{0}(S)$ 的一个生成元为

$$\omega = \frac{dx \wedge dy}{\prod_{i=1}^{m} f_i(x,y)^{1-\mu_i}}.$$

对循环覆盖稍作推广以允许实参数 μ_i 如下。记$U = (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \setminus \bigcup_{i=1}^{m} D_i$。设 $\mathbb{L}$ 为 U 上的秩一局部系统，其绕 D_i 的局部单值变换由 $e^{2\pi\sqrt{-1}\mu_i}$给出。由于曲面 U 光滑且仿射，上同调$H^2(U,\ \mathbb{L})$可通过由 $\mathbb{L}$扭曲的德拉姆复形作德拉姆描述。特别地，二形式 ω 定义了 $H^2(U,\ \mathbb{L})$中的一个上同调类。设 Δ 为一个二单形，并考虑连续映射

$$\sigma\colon \Delta \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

使得 $\sigma(\partial\Delta) \subset \bigcup_{i=1}^{m} D_i$，且 Δ 的内部包含于 U中。在 Δ的内部选取$\sigma^*\mathbb{L}$ 的一个截面 e。那么循环 $\Delta \otimes e$ 表示 $H_2^{\mathrm{BM}}(U,\ \mathbb{L})$的一个截面。当$mD = \sum D_i$ 为简单正规交叉时，该循环可提升至 $H_2(U,\ \mathbb{L})$。更一般地，我们$i=1$回顾以下众所周知的事实（证明参见例如 [XY25，引理 2.4] ）：

m引理 4.1. 设 X 是光滑射影曲面，$D = \sum D_i$ 是 X 上由光滑分支 D_i 构成的简单正规交叉除子。记 U 为 D 的补集，并记 $U \to X$ 为开嵌入: 。假设 $\mathbb{L}$ 是 U 上的秩一复局部系统，且绕 D_i 的局部单值变换由 $e^{2\pi\sqrt{-1}\mu_i}$ 给出，其中 $0 < \mu_i < 1$ 为实数。那么自然映射 $H_n(U,\mathbb{L}) \to H_n^{BM}(U,\mathbb{L})$ 是一个同构。

当 D 不是简单正规交叉时，我们对 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 进行爆破，使得 D 的全变换为简单正规交叉。然后，我们可以将循环 $\Delta\otimes e$ 提升到补集的 Borel– Moore 同调中，其系数取为拉回局部系统。如果 $\mathbb{L}$ 绕每个例外除子的单值化非平凡，那么上述引理仍保证循环 $\Delta \otimes e$ 可以进一步提升到同调群中。

ω 与 $\Delta \otimes e$ 的配对产生周期积分

$$I = \int_{\Delta} \omega = \int_{\Delta} \frac{dx \wedge dy}{\prod_{i=1}^{m} f_i(x,y)^{1-\mu_i}}.$$

根据 [YZ24 定理 3.6], 沿 x （或 y）方向进行迭代积分，可将周期积分化为穿孔 $\mathbb{P}^1$ 上的周期积分，其形式为

$$\int_{\gamma} \frac{C dz}{\prod_{j=1}^{n} (z - z_j)^{\nu_j}}.$$

这里，点 $z_j \in \mathbb{P}^1$ 是映射 $D \to \mathbb{P}^1$ 的判别点，该映射由投影到 y （或 x）坐标所诱导。实数 $\nu_j \in (0,1)$是 μ_i 与$_1$ $_2$的某些整数线性组合，关于 μ_i 与 ν_j之间的详细关系，参见 [YZ24 第 4] 节。 $\mathbb{P}^1$ 上的常数C 取决于 f_i的选择。

令截面 f_i 变化，同时保持 D的奇点类型不变。记 $\mathcal{M}$ 为此类 f_i的GIT模空间。假设在 $\mathcal{M}$的适当仿射开子集 $\mathbb{A}$ 上，我们有 Δ的平坦选取以及代数函数 f_i。周期积分 I 成为 $\mathbb{A}$上的多值函数。根据[YZ24，命题 5.3], ，从 $\mathcal{M}$ 到点的模空间（z_j）的映射 $\subset \mathbb{P}^1$ 是有限代数

映射。依赖于 f_i 的常数结果是模空间上的代数函数。因此，经过适当的变量替换，上述二重积分可以用阿佩尔–劳里切拉超几何函数表示。于是，两种不同的迭代积分次序给出了两个阿佩尔–劳里切拉超几何函数之间的变换公式。

按照这种方法，我们可以得到 [YZ24 命题 3.3] 中列出的所有除子组的变换公式。选择不同的 Δ 可能会为同一除子组得到不同的变换公式。另一方面，Deligne–Mostow 理论所产生的单值化表示是不可约的，因此，预期由不同的 Δ 选择所得到的所有变换公式在单值化作用下等价。

在接下来的各节中，我们将举例说明由二重积分得到的超几何函数的变换律。我们按照 (3，3) 的分拆对这些例子进行分类（见 [YZ24，命题 3.2]）。

5. Partition $(1,2)+(1,1)+(1,0)$

本节考虑除子 D 分解为三个分量 D_1，D_2，D_3，其次数分别为 (1，2)、(1，1) 和 (1，0) 的情形。

5.1. 参数化与循环：图1。设 t，α_1，α_2 为满足 $t<-1$ 和 $\alpha_1<\alpha_2<-\frac{(1+t)^2}{2}$ 的实数。记

$$\beta_i=-\frac{\alpha_i(\alpha_i+2t)}{2\alpha_i+(1+t)^2}.$$

我们在仿射坐标 $(x,y)\in\mathbb{C}^2$ 下定义三个除子如下：

$$\begin{aligned} D_1 &: y^2+2(x+t)y+(1+t)^2x=0\\ D_2 &: q_1y-q_2x-q_3=0\\ D_3 &: x=0, \end{aligned}$$

其中 q_1,q_2,q_3 分别等于 $\beta_2-\beta_1$、$\alpha_2-\alpha_1$ 和 $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1$。

设 $a<1$ 为实数。我们考虑二形式的周期积分：

$$\omega=\frac{dx\wedge dy}{x^a(-y^2-2(x+t)y-(1+t)^2x)^a(q_1y-q_2x-q_3)^{2-2a}}.$$

固定 $x\in(0,1)$，设 $0<y_-(x)<y_+(x)$ 是 $y^2+2(x+t)y+(1+t)^2x=0$ 的两个实根。除子 D_1 可写为 $x=x(y)=-\frac{y^2+2ty}{2y+1+t}()^2$。指定的积分周期 σ（见图1）定义为

$$\begin{aligned} \sigma &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x<1\ ,\ y_-(x)<y<y_+(x)\}\\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<y<-2t\ ,\ 0<x<x(y)\}. \end{aligned}$$

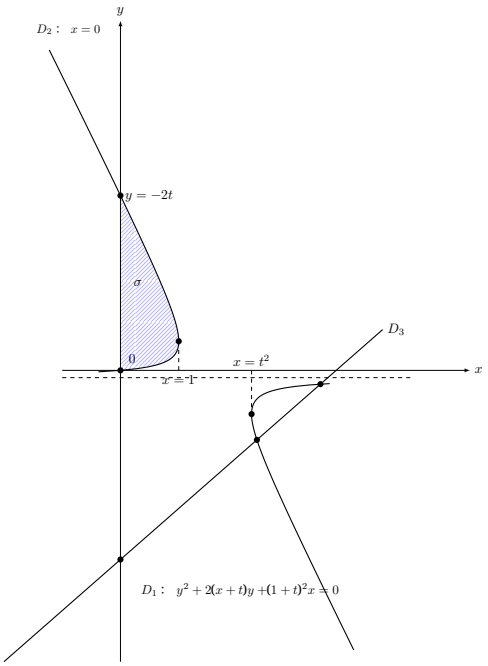


图1. (2,1) $+$(1, 1) $+$(0,1)

5.2. **图1中的周期积分**。

5.2.1. 第一种积分次序。 我们首先关于 y积分。

$$\int_\sigma \omega = \int_0^1 \frac{dx}{q_1^{2-2a}x^a} \int_{y_-(x)}^{y_+(x)} \frac{dy}{(y-y_-(x))^a(y_+(x)-y)^a(y-\frac{q_2x+q_3}{q_1})^{2-2a}}.$$

利用引理3.3（指数 $a, a, 2-2a$ 之和为 2），内层积分的结果为:

$$I_y(x) = \frac{B(1-a,1-a)}{x^a(y_+(x)-y_-(x))^{2a-1}((q_1y_-(x)-(q_2x+q_3)(q_1y_+(x)-(q_2x+q_3)))^{1-a}}.$$

代入 $y_+(x)+y_-(x) = -2(x+t)$, $y_+(x)y_-(x) = (1+t)^2x$ 以及 $y_+(x)-y_-(x) = 2\sqrt{(1-x)(t^2-x)}$, 可得:

$$I_y(x) = \frac{2^{1-2a}B(1-a,1-a)}{(q_2^2+2q_1q_2)^{1-a}x^a((1-x)(t^2-x))^{a-\frac{1}{2}}((\beta_1-x)(\beta_2-x))^{1-a}}.$$

将 $I_y(x)$ 代回积分中，我们得到:

$$\int_\sigma \omega = \frac{2^{1-2a}B(1-a,1-a)}{(q_2^2+2q_1q_2)^{1-a}} \int_0^1 \frac{dx}{x^a(1-x)^{a-\frac{1}{2}}(t^2-x)^{a-\frac{1}{2}}((\beta_1-x)(\beta_2-x))^{1-a}}.$$

此积分在 0、1、 ∞、 t^2、 β_1、 β_2 处有奇点。根据推论 3.2，我们可以用阿佩尔–劳里切拉超几何函数 $F_D^{(3)}$ 表示该积分:

$$\int_\sigma \omega = C_1F_D^{(3)}\left(\begin{matrix}1-a; a-\frac{1}{2}, 1-a, 1-a \\ \frac{5}{2}-2a\end{matrix}; \frac{1}{t^2}, \frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{\beta_2}\right).$$

常数 C_1 由下式给出

$$C_1 = B(1-a,1-a)B(1-a,\frac{3}{2}-a)(2t)^{1-2a}((q_2^2+2q_1q_2)\beta_1\beta_2)^{a-1}.$$

5.2.2. 第二次积分顺序。 先对 x积分，得

$$\int_\sigma \omega = \int_0^{-2t} \frac{dy}{q_2^{2-2a}(2y+(1+t)^2)^a} \int_0^{x(y)} \frac{dx}{x^a(x(y)-x)^a(\frac{q_1y-q_3}{q_2}-x)^{2-2a}}.$$

根据引理3.3（指数 a、 a、 $2-2a$ 之和为 2），内层积分的结果为:

$$I_x(y) = B(1-a,1-a)((1+t)^2+2y)^a(x(y))^{2a-1}(q_1y-q_3)^{1-a}(q_1y-q_3-q_2x(y))^{1-a}.$$

将 $I_x(y)$ 代回积分，并注意到

$$x(y) = -\frac{y^2+2ty}{2y+(1+t)^2}.$$

化简积分，得到:

$$\int_\sigma \omega = \frac{B(1-a,1-a)}{q_1^{1-a}(2q_1+q_2)^{1-a}} \int_0^{-2t} \frac{dy}{y^{2a-1}(-2t-y)^{2a-1}(y-\frac{q_3}{q_1})^{1-a}((y-\alpha_1)(y-\alpha_2))^{1-a}}.$$

该积分在 0， $-2t$， ∞， $\frac{q_3}{q_1}$， α_1， α_2 处有奇点。根据推论 3.2，我们可以用阿佩尔–劳里切拉超几何函数 $F_D^{(3)}$ 表示该积分:

$$\int_\sigma \omega = C_2 F_D^{(3)}\left(\begin{matrix}2-2a;1-a,1-a,1-a\\ 4-4a\end{matrix}; -\frac{2q_1t}{q_3}, -\frac{2t}{\alpha_1}, -\frac{2t}{\alpha_2}\right).$$

常数 C_2 为

$$C_2 = \frac{B(1-a,1-a)B(2-2a,2-2a)(-2t)^{3-4a}}{(-q_3(2q_1+q_2)\alpha_1\alpha_2)^{1-a}}.$$

5.2.3. 变换公式。 比较 $\int_\sigma \omega$ 的两个结果，我们得到以下变换公式:

定理 5.1。 设 t、 α_1、 α_2、 a 为实数，使得 $t<-1$、 $\alpha_1<\alpha_2<-\frac{(1+t)^2}{2}$ 和 $a \neq 1$。设 β_i 为 $-\frac{\alpha_i}{(\alpha_i+2t)}$ ~~$2\alpha_i+(1+t)^2$~~、 $i=1$、2。我们有以下联系 $F_D^{(3)}$ 的变换公式:

$$\begin{aligned} & F_D^{(3)}\left(\begin{matrix}2-2a;1-a,1-a,1-a\\ 4-4a\end{matrix}; \frac{2(\beta_2-\beta_1)t}{\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2}, -\frac{2t}{\alpha_1}, -\frac{2t}{\alpha_2}\right) \\ = \; & C\cdot F_D^{(3)}\left(\begin{matrix}1-a;a-\frac{1}{2},1-a,1-a\\ \frac{5}{2}-2a\end{matrix}; \frac{1}{t^2}, \frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{\beta_2}\right), \end{aligned}$$

其中 $C=\frac{C_1}{C_2}=\underline{(t^2(\alpha_1+2t)(\alpha_2+2t)\ \alpha_1\alpha_2(1-t)^2}\ )^{a-1}$。

6. Partition $(1,2)+(1,0)+(1,0)+(0,1)$

本节中，我们给出一个例子，说明由分别对应于次数为 (1，2)、(1，0)、(0，1)、(1，0) 的除子 D_1、 D_2、 D_3、 D_4 所对应的二重积分导出的超几何函数变换公式。

6.1. 图2中的周期积分。 令 a、 b 为满足 a和 $b>0$ 以及$\frac{1}{2}<a+b<1$的两个实数。考虑满足 $0<t_1<1$ 和 $0<t_2^2<t_1^2$的两个参数 t_1 和 t_2。设除子为

$$\begin{aligned} D_1 &: x-y^2=0 \\ D_2 &: x-t_2^2=0 \\ D_3 &: y-t_1=0 \\ D_4 &: x-1=0 \end{aligned}$$

令 ω 为一个二形式

$$\omega=\frac{dx\wedge dy}{(x-y^2)^{a+b}(1-x)^{1-b}(t_2^2-x)^{1-a}(y-t_1)^{2-2a-2b}}.$$

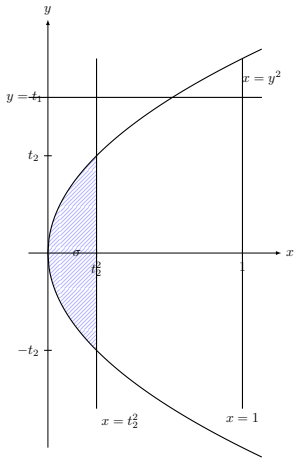


图2。（1，2）+（1，0）+（1，0）+（0，1），线段区域

令 σ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的一个区域（见图2），其定义如下

$$\begin{aligned} \sigma &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ 0<x<t_2^2, -\sqrt{x}<y<\sqrt{x}\} \\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ -t_2<y<t_2, y^2<x<t_2^2\} \end{aligned}$$

6.1.1. 第一种积分次序。 首先对 y 进行积分。

$$\int_\sigma\omega=\int_0^{t_2^2}\frac{dx}{(1-x)^{1-b}(t_2^2-x)^{1-a}}\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\frac{dy}{(y+\sqrt{x})^{a+b}(\sqrt{x}-y)^{a+b}(t_1-y)^{2-2a-2b}}.$$

对内层积分使用引理3.3，可得积分为：

$$2^{1-2a-2b}B(1-a-b,1-a-b)\int_0^{t_2^2}\frac{dx}{x^{a+b-\frac{1}{2}}(t_2^2-x)^{1-a}(t_1^2-x)^{1-a-b}(1-x)^{1-b}}.$$

该积分在 0，t_2^2，∞，t_1^2，1 处具有奇点。根据引理3.2，我们得到阿佩尔函数 F_1 的如下表示：

$$C_1\cdot F_1\left(\begin{matrix}\frac{3}{2}-a-b;1-a-b,1-b\\ \frac{3}{2}-b\end{matrix};(\frac{t_2}{t_1})^2,t_2^2\right),$$

其中

$$C_1=2^{1-2a-2b}B(1-a-b,1-a-b)B(\frac{3}{2}-a-b,a)(t_2)^{1-2b}(t_1)^{2a+2b-2}.$$

6.1.2. 第二次积分顺序。 对 x 积分。

$$\int_\sigma \omega = \int_{-t_2}^{t_2} \frac{dy}{(t_1-y)^{2-2a-2b}} \int_{y^2}^{t_2^2} \frac{dx}{(x-y^2)^{a+b}(t_2^2-x)^{1-a}(1-x)^{1-b}}.$$

对内层积分应用引理3.3，得到：

$$B(1-a-b,a)(1-t_2^2)^{a+b-1} \int_{-t_2}^{t_2} \frac{dy}{(y+t_2)^b(t_2-y)^b((1-y)(1+y))^a(t_1-y)^{2-2a-2b}}.$$

该积分在 $-t_2$、 t_2、1、 -1、 t_1 处有奇点。根据引理 3.1，可得阿佩尔函数 F_1 的如下表示：

$$C_2 \cdot F_1\left(\begin{matrix}1-b; a, 2-2a-2b \\ 2-2b\end{matrix}; -\frac{4t_2}{(1-t_2)^2}, \frac{2t_2(1-t_1)}{(1-t_2)(t_1+t_2)}\right),$$

其中

$$C_2 = B(1-a-b,a)B(1-b,1-b)(2t_2)^{1-2b}(1-t_2)^{2b-2}(t_1+t_2)^{2a+2b-1}.$$

6.1.3. 变换公式。令 $s = \frac{t_2}{t_1}$ 和 $t = t_2$，可得以下联系阿佩尔超几何函数的变换公式。

定理 6.1。对于取值范围为 $a>0$、 $a+b<1$、 $0<t<1$ 和 $t<s<1$ 的实数 a、 b、 t_1、 t_2，有

$$\begin{aligned} & F_1\left(\begin{matrix}\frac{3}{2}-a-b; 1-a-b, 1-b \\ \frac{3}{2}-b\end{matrix}; s^2, t^2\right) \\ = \; & C \cdot F_1\left(\begin{matrix}1-b; a, 2-2a-2b \\ 2-2b\end{matrix}; -\frac{4t}{(1-t)^2}, \frac{2(s-t)}{(1-t)(1+s)}\right), \end{aligned}$$

其中 $C = (1-t)^{2b-2}(1+s)^{2a+2b-2}$。

注记 6.2。 定理 5.1 中的变换公式可以退化为定理 6.1 中公式的一个特例。

若 $\alpha_1 < -t(t+1) < \alpha_2$ 且令 $\beta_1 \to \beta_2$，则除子 D_2 退化为 $x = \beta_1$ 与$y = \infty$的并。这发生在紧化 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$中。事实上，在射影坐标中，$D_2$ 由 $q_1yz_1 - q_2xz_2 - q_3z_1z_2 = 0$定义。当 $\beta_1 \to \beta_2$时，它退化为 $(x-\beta_1)z_2 = 0$。

经过坐标变换后，该形式

$$\omega = \frac{dx \wedge dy}{x^a(-y^2-2(x+t)y-(1+t)^2x)^a(q_1y-q_2x-q_3)^{2-2a}}$$

退化为

$$\omega = \frac{dx \wedge dy}{(x-y^2)^a(1-x)^{2-2a}(t_2^2-x)^a(y-t_1)^{2-2a}}.$$

该形式给出了定理 6.1 中 $2a+b=1$ 的特例。

6.2. **图 3 中的周期积分**。 设 σ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的另一个区域（见图 3），定义为

$$\begin{aligned} \sigma &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\; t_1^2 < x < 1, t_1 < y < \sqrt{x}\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\; t_1 < y < 1, y^2 < x < 1\} \end{aligned}$$

且 ω 为一个二形式

$$\omega = \frac{dx \wedge dy}{(x-y^2)^{a+b}(1-x)^{1-b}(x-t_2^2)^{1-a}(y-t_1)^{2-2a-2b}}.$$

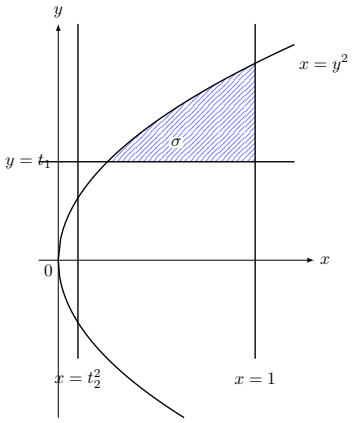


图 3. (1, 2) + (1,0) + (1, 0) + (0,1)，扇区区域

接下来，我们根据图 3 给出变换关系。

对 y 积分。

$$\int_\sigma \omega = \int_{t_1^2}^1 \frac{dx}{(1-x)^{1-b}(x-t_2^2)^{1-a}} \int_{t_1}^{\sqrt{x}} \frac{dy}{(y-t_1)^{2-2a-2b}(x-y^2)^{a+b}}$$

对内层积分应用引理3.3，得到：

$$2^{1-2a-2b}B(2a+2b-1, 1-a-b)\int_{t_1^2}^1 \frac{dx}{(x-t_1^2)^{1-a-b}(1-x)^{1-b}x^{a+b-\frac{1}{2}}(x-t_2^2)^{1-a}}.$$

该积分在 $t_1^2, 1, \infty, 0, t_2^2$ 处有奇点。根据推论 3.2，我们得到阿佩尔函数 F_1 的如下表示：

$$C_1 \cdot F_1\left(\begin{matrix} a+b; a+b-\frac{1}{2}, 1-a \\ a+2b \end{matrix}; \frac{t_1^2-1}{t_1^2}, \frac{t_1^2-1}{t_1^2-t_2^2}\right),$$

其中

$$C_1 = 2^{1-2a-2b}B(2a+2b-1, 1-a-b)B(a+b, b)t_1^{1-2a-2b}(1-t_1^2)^{a+2b-1}(t_1^2-t_2^2)^{a-1}.$$

考虑第二次积分顺序。首先对 x进行积分。

$$\int_\sigma \omega = \int_{t_1}^1 \frac{dy}{(y-t_1)^{2-2a-2b}} \int_{y^2}^1 \frac{dx}{(x-y^2)^{a+b}(1-x)^{1-b}(x-t_2^2)^{1-a}}.$$

对内层积分应用引理3.3后，积分变为：

$$\frac{B(1-a-b, b)}{(1-t_2^2)^{1-a-b}} \int_{t_1}^1 \frac{dy}{(y-t_1)^{2-2a-2b}(1-y)^a(1+y)^a(y^2-t_2^2)^b}.$$

该积分在 t_1、1、-1、t_2、$-t_2$ 处有奇点。根据引理 3.1，我们得到阿佩尔函数 F_1 的如下表示：

$$C_2 \cdot F_1\left(\begin{matrix} 2a+2b-1; b, b \\ a+2b \end{matrix}; \frac{(1-t_1)(1+t_2)}{2(t_2-t_1)}, -\frac{(1-t_1)(1-t_2)}{2(t_2+t_1)}\right),$$

其中

$$C_2 = 2^{1-2a-2b}B(1-a-b,b)B(2a+2b-1,1-a)(1-t_1^2)^{a+2b-1}(t_1^2-t_2^2)^{-b}.$$

比较 $\int_\sigma \omega$ 的两种表示，我们得到阿佩尔超几何函数的如下变换公式:

定理6.3。 对于以下范围内的实数 a、 b、 t_1、 t_2： $b>0$、 $\frac{1}{2}<a+b<1$、 $0<t_1<1$ 和 $0<t_2<t_1$，有

$$\begin{aligned} & t_1^{2a+2b-1}(1-t_2^2)^{a+b-1}F_1\left(\begin{matrix}2a+2b-1;b,b\\ a+2b\end{matrix};\frac{(1-t_1)(t_2+1)}{2(t_2-t_1)},\frac{(1-t_1)(t_2-1)}{2(t_2+t_1)}\right) \\ = \ & (t_1^2-t_2^2)^{a+b-1}F_1\left(\begin{matrix}a+b;a+b-\frac{1}{2},1-a\\ a+2b\end{matrix};\frac{t_1^2-1}{t_1^2},\frac{t_1^2-1}{t_1^2-t_2^2}\right). \end{aligned}$$

注 6.4。 我们考虑这种二次情形的另一种参数化。设 $0<t_1<1<t_2$，并令区域 σ 属于 $\mathbb{R}^2$，其定义为

$$\sigma = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ t_1<x<t_2^2, 1<y<\sqrt{x}\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ 1<y<t_2, y^2<x<t_2^2\}.$$

考虑二形式

$$\omega = \frac{dx\wedge dy}{(x-y^2)^{2-a-b}(t_2^2-x)^b(x-t_1)^a(y-1)^{2a+2b-2}}.$$

利用 Fubini公式，我们可以得到如下等式:

$$\int_1^{t_2}\eta = c\cdot\int_1^{t_2^2}\omega,$$

其中

$$\eta = (t_2^2-t_1)^{1-a-b}\frac{dz}{(z-1)^{2a+2b-2}(t_2^2-z^2)^{1-a}(z^2-t_1)^{1-b}},$$

$$\omega = \frac{dz}{(z-t_1)^a(t_2^2-z)^b(z-1)^{a+b-1}z^{\frac{3}{2}-a-b}}$$

and

$$c = 2^{2a+2b-3}\frac{\Gamma(3-2a-2b)\Gamma(a)}{\Gamma(2-a-b)\Gamma(1-b)}.$$

这与公式 [DM93, 13.9 Page 134]一致，常数 c 可由引理3.3直接读出。

6.3. 退化为图 4。 如果取 $t_2\to 0$，我们得到

$$t_1F_1\left(\begin{matrix}2a+2b-1;b,b\\ a+2b\end{matrix};\frac{t_1-1}{2t_1},\frac{t_1-1}{2t_1}\right) = F_1\left(\begin{matrix}a+b;1-a,a+b-\frac{1}{2}\\ a+2b\end{matrix};\frac{t_1^2-1}{t_1^2},\frac{t_1^2-1}{t_1^2}\right). \quad (2)$$

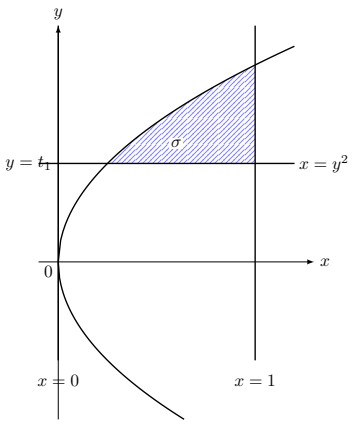


图 4. (1,2)+(1,0)+(1,0)+(0,1)，退化 1

下面的引理说明了阿佩尔超几何函数的一种退化与经典超几何函数之间的关系。

引理 6.5. 对于复数 a, b, b', c，满足 $\mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(a) > 0$ 且 $x \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$

$$F_1\left(\begin{matrix} a; b, b' \\ c \end{matrix}; x, x\right) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b+b' \\ c \end{matrix}; x\right)$$

将此引理应用于 (2)，得到：

$$t \cdot {}_2F_1\left(\begin{matrix} 2a+2b-1, 2b \\ a+2b \end{matrix}; \frac{t-1}{2t}\right) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} a+b, b+\frac{1}{2} \\ a+2b \end{matrix}; \frac{t^2-1}{t^2}\right),$$

对于 $b > 0$, $\frac{1}{2} < a+b < 1$ 和 $0 < t < 1$。

取 $z = 1 - \frac{1}{t^2}$，这与 Goursat 二次变换 [Gou81]，一致，另见 [Ee53，第 111 页，(13)]：

推论 6.6 (Goursat 二次变换). 对于满足以下范围条件的实数 a, b, z： $b < 1$，以及 $\frac{1}{2} < a < b + \frac{1}{2}$ 和 $z < 0$，高斯超几何函数具有如下变换公式：

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ a+b-\frac{1}{2} \end{matrix}; z\right) = (1-z)^{-\frac{1}{2}} {}_2F_1\left(\begin{matrix} 2a-1, 2b-1 \\ a+b-\frac{1}{2} \end{matrix}; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-z}\right).$$

6.4. 退化为图 5。 考虑另一种退化情形，令 $t_2 \to t_1$。将 t_1 替换为 t，得到：

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} 2a+b-1, a+b-\frac{1}{2} \\ 2a+2b-1 \end{matrix}; \frac{t^2-1}{t^2}\right) = t^{2a+b-1} {}_2F_1\left(\begin{matrix} 2a+b-1, b \\ a+b \end{matrix}; -\frac{(1-t)^2}{4t}\right),$$

对于 $a, b > 0$, $\frac{1}{2} < a+b < 1$ 和 $0 < t < 1$。

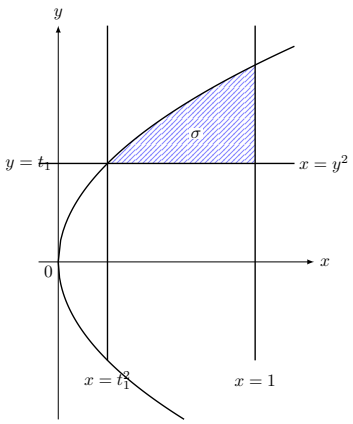


图 5. (1,2)+(1,0)+(1,0)+(0,1)，退化2

取 $z = 1 - \frac{1}{t^2}$ 后，这与 Goursat 二次变换 [Gou81], 相吻合，另见 [Ee53, Page 113, (30)]:

推论 6.7 (Goursat 二次变换)。对于满足以下范围条件的实数 a、b、z：$0 < b < \frac{1}{2}$、$a < 2b$ 和 $z < 0$, ¯我们有

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}a, b\\ 2b\end{matrix}; z\right) = (1-z)^{-\frac{a}{2}}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix}a, 2b-a\\ b+\frac{1}{2}\end{matrix}; -\frac{1}{4}(1-z)^{-\frac{1}{2}}(1-(1-z)^{\frac{1}{2}})^2\right). $$

7. Partition $(2,2)+(1,0)+(0,1)$

本节中，我们考虑除子 D 分解为三个分量 D_1、D_2、D_3，其次数分别为 (2，2)、(1，0) 和 (0，1) 的情形。

设 a、p、q 为满足 $\frac{1}{2} < a < 1$ 和 $1 < p < q$的实数。

设 $x_1 < x_2$ 为 $-2px^2 + (1-pq)x + 2q = 0$ 的两个实根，$y_1 < y_2$ 为 $-2qy^2 + (1-pq)y + 2p = 0$的两个实根。

考虑函数

$$ \begin{aligned} f(x,y) &= (qy-1)^2 + x(-2p+2qy^2) + x^2(y+p)^2 \\ &= (px-1)^2 + y(-2q+2px^2) + y^2(x+q)^2. \end{aligned} $$

对于固定的 $0 < x < x_2$，记 $y_-(x) < y_+(x)$ 为 $f(x,y) = 0$ 的两个根。对于固定的 $0 < y < y_2$，记 $x_-(y) < x_+(y)$ 为 $f(x,y) = 0$ 的两个根。

设 s, t 是满足 $\frac{1}{q} < s < y_2$ 和 $0 < t < x_=(s)$ 的两个实数。

我们定义除子如下:

$$ \begin{aligned} D_1 &: f(x,y) = 0 \\ D_2 &: x - t = 0 \\ D_3 &: y - s = 0. \end{aligned} $$

我们考虑如下形式的周期积分:

$$\omega = \frac{dx \wedge dy}{(-f(x,y))^a (t-x)^{2-2a}(s-y)^{2-2a}}.$$

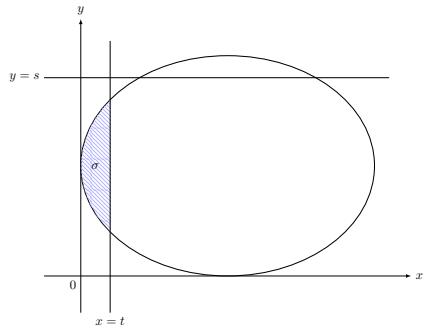


图6. (2,2)+(1,0)+(0,1) 线段区域

指定的积分周期 σ （见图6）定义为

$$\begin{aligned}\sigma &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < t, y_-(x) < y < y_+(x)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y_-(t) < y < y_+(t), x_-(y) < x < t\}.\end{aligned}$$

使用与 §5 中类似的论证，我们得到以下联系阿佩尔–劳里切拉超几何函数 $F_D^{(4)}$ 的变换公式。

定理7.1。设 a、p、q、s、t 是满足 $\frac{1}{2} < a < 1$、$1 < p < q$、$\frac{1}{q} < s < y_2$ 以及 $0 < t < x_-(s)$ 范围条件的实数。我们有以下联系 $F_D^{(4)}$ 的变换公式:

$$\begin{aligned}&F_D^{(4)}\left(\begin{matrix}\frac{3}{2}-a; a-\frac{1}{2}, a-\frac{1}{2}, 1-a, 1-a \\ \frac{1}{2}+a\end{matrix}; \frac{t}{x_1}, \frac{t}{x_2}, \frac{t}{x_-(s)}, \frac{t}{x_-(s)}\right) \\ = \; & C \cdot F_D^{(4)}\left(\begin{matrix}a; 2-2a, a-\frac{1}{2}, a-\frac{1}{2}, a-\frac{1}{2} \\ 2a\end{matrix}; \frac{\delta}{s-y_-(t)}, -\frac{\delta}{y_-(t)}, \frac{\delta}{y_2-y_-(t)}, \frac{\delta}{y_1-y_-(t)}\right),\end{aligned}$$

其中

$$\delta = (4(pq-1)t(t+q)^{-4}(-2pt^2+(1-pq)t+2q))^{\frac{1}{2}}$$

and

$$C = \frac{2^{1-2a}}{(t+q)^{2a}}\left(\frac{s-y_-(t)}{qs-1}\right)^{2a-2}\left(\frac{(pq-1)(-2pt^2+(1-pq)t+2q)}{y_-(t)(-y_-(t)^2+\frac{1-pq}{2q}y_-(t)+\frac{p}{q})}\right)^{a-\frac{1}{2}}.$$

8. Partition $(1,2)+(2,1)$

在本节中，我们考虑 deg $D_1 =$ (1，2) 和 deg $D_2 =$ (2，1) 的情形。

设 $a, b, c > 0$ 为满足 $b^2 - 4ac > 0$ 的实参数。设 $t > 0$ 为满足 $t > (a+b+c)^2$ 的实参数。设除子为

$$\begin{aligned}D_1 &: y(ax^2+bx+c) - x^2 = 0 \\ D_2 &: x - ty^2 = 0.\end{aligned}$$

设 $r_+(y) > r_-(y)$ 是关于 x 的二次方程 $(1-ay)x^2 - byx - cy = 0$ 的两个实根。考虑方程

$$at^2y^4 - t^2y^3 + bty + c = 0,$$

其中 y_0 是其最小的正实根。令 y_1, y_2, y_3 为另外三个根。

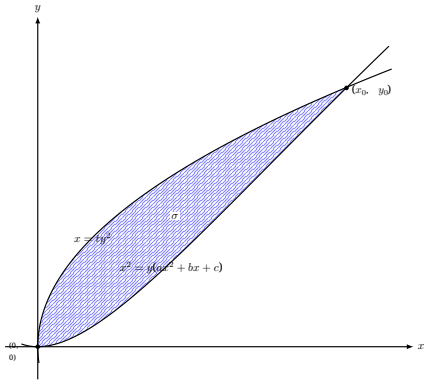


图7。(1,2)+(2,1) 区域

设 σ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个区域（见图7），其定义为

$$\begin{aligned}\sigma &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ 0<y<y_0,\ ty^2<x<r_+(y)\}\\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ 0<x<ty_0^2,\ \frac{x^2}{ax^2+bx+c}<y<\sqrt{\frac{x}{t}}\}.\end{aligned}$$

令 ω 为一个二形式

$$\omega = \frac{dx\wedge dy}{(y(ax^2+bx+c)-x^2)^{\frac{2}{3}}(x-ty^2)^{\frac{2}{3}}}.$$

采用与 §5 类似的论证，我们得到如下将阿佩尔–劳里切拉超几何函数 $F_D^{(3)}$ 联系起来的变换公式。

定理8.1。设 a,b,c,t 为范围 $a,b,c,t>0$, $b^2-4ac>0$ 内的实数，且$t>(a+b+c)^2$。设 y_0,y_1,y_2,y_3 为 $at^2y^4-t^2y^3+bty+c$ 的四个根。设 y_0 为最小的正实根。我们有

$$\begin{aligned}&c^{\frac{1}{6}}F_D^{(3)}\left(\begin{matrix}\frac{1}{2};\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{6}\\ \frac{7}{6}\end{matrix};\frac{y_0(y_2-y_1)}{y_2(y_0-y_1)},\frac{y_0(y_3-y_1)}{y_3(y_0-y_1)},\frac{y_0((b^2-4ac)y_1+4c)}{4c(y_0-y_1)}\right)\\ =\ &(\frac{y_0y_1}{y_0+y_1})^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{3}}F_D^{(3)}\left(\begin{matrix}\frac{1}{2};\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{6}\\ \frac{7}{6}\end{matrix};\frac{y_0^2(y_2^2-y_1^2)}{y_2^2(y_0^2-y_1^2)},\frac{y_0^2(y_3^2-y_1^2)}{y_3^2(y_0^2-y_1^2)},\frac{y_0^2}{y_0^2-y_1^2}\right).\end{aligned}$$

9. Partition $(1,3)+(1,0)+(1,0)$

在本节中，我们考虑 deg D_1 =(1，3)、deg D_2 =(1，0) 和 deg D_3 =(1，0) 的情形。

9.1. 图 8 中的周期积分。 设 t, a, s, w 为满足 $-\frac{3}{2} < t < -1$、$a < 1$ 和 $0 < s < w < 1$ 的实数。我们考虑如下关于 y 的三次多项式:

$$f(x,y) = y^3 + ty^2 - (3+2t)xy + (2+t)x,$$

其判别式为

$$\Delta(x) = 4x(x-1)((3+2t)^3x + (t^4+2t^3)).$$

考虑这些除子:

$$\begin{aligned} D_1 &: f(x,y) = 0 \\ D_2 &: x - s = 0 \\ D_3 &: x - w = 0. \end{aligned}$$

对于任意固定的 $0 < x < 1$, 关于 y 的三次多项式 $f(x,y)$ 有 3 个实根 $r_1(x) < r_2(x) < r_3(x)$。另一方面, 固定 $y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{2+t}{3+2t}\}$, 令 $F_t(y) = \frac{y^3+ty^2}{(3+2t)y-(2+t)}$ 为 ~~$f(x,y)$~~ 的根, 将其视为关于 x 的一次多项式。

对于 $x \neq r_1(s)$, 令 $R(x) = \frac{(r_2(s)-r_1(s))(x-r_3(s))}{(r_2(s)-r_3(s))(x-r_1(s))}$。令 $x_0 = -\frac{t^3}{(t+2)(2t+3)^3}$。

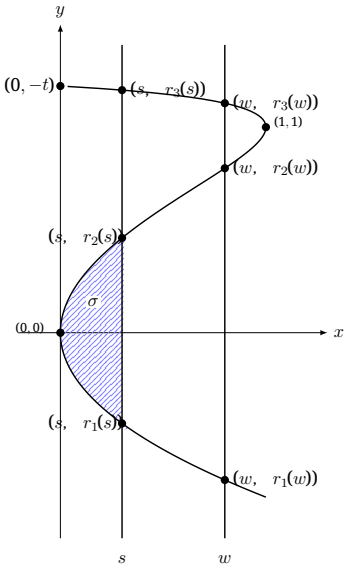


图 8. (3,1)+(0,1)+(0,1) 线段区域

考虑以下循环 $\sigma \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \sigma &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < s,\ r_1(x) < y < r_2(x)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid r_1(s) < y < r_2(s),\ F_t(y) < x < s\} \end{aligned}$$

以及一个二形式 ω

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{dx \wedge dy}{f(x,y)^{\frac{2}{3}}(s-x)^a(w-x)^{\frac{4}{3}-a}} \\ &= \frac{dx \wedge dy}{(y^3+ty^2-(3+2t)xy+(2+t)x)^{\frac{2}{3}}(s-x)^a(w-x)^{\frac{4}{3}-a}}. \end{aligned}$$

我们得到如下变换公式。

定理 9.1. 设 t、a、s、w 为满足 $-\frac{3}{2} < t < -1$、$a < 1$-和 $0 < s < w$ 的实数。我们有

$$\begin{aligned} & F_D^{(3)}\left(\begin{matrix}\frac{5}{6};\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{4}{3}-a\\ \frac{11}{6}-a\end{matrix};s,\frac{s}{x_0},\frac{s}{w}\right) \\ = \;& C\cdot F_D^{(3)}\left(\begin{matrix}\frac{4}{3}-a;1-a,1-a,1-a\\ \frac{8}{3}-2a\end{matrix};R(r_1(w)),R(r_2(w)),R(r_3(w))\right), \end{aligned}$$

其中

$$C=\frac{(-t)^{\frac{1}{2}}(t+2)^{\frac{1}{6}}w^{\frac{4}{3}-a}((s-1)((3+2t)^3s+t^4+2t^3))^{\frac{5}{6}-a}}{(w-s)^{\frac{1}{3}}(r_3(s)-r_2(s))^{3-3a}f(w,r_1(s))^{1-a}}.$$

9.2. **退化到图 9**。若取 $s\to 1$ 和 $w\to x_0$，则该形式退化为:

$$\omega \;=\; \frac{dx\wedge dy}{f(x,y)^{\frac{2}{3}}(1-x)^a(x_0-x)^{\frac{4}{3}-a}}.$$

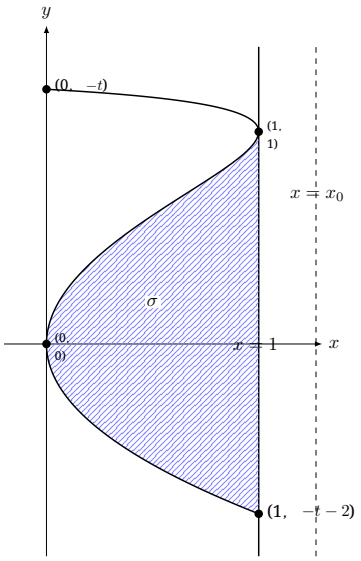


图 9. (3,1)+(0,1)+(0,1)，退化

于是循环 σ （见图 9）变为

$$\begin{aligned}\sigma \;&=\; \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x<1,\ r_1(x)<y<r_2(x)\}\\ &=\; \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -t-2<y<1,\ F_t(y)<x<1\}.\end{aligned}$$

We 得到如下高斯超几何函数的变换公式 :

推论 9.2. 设 t, a 为以下范围内的实数 $-\frac{3}{2} < t < -1$和 $a < \frac{5}{6}$，则有 -

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{4}{3}-a,2-2a\\ 3-3a\end{matrix};-\frac{t(2t+3)}{t+2}\right)=C\cdot{}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{5}{6},\frac{3}{2}-a\\ \frac{5}{3}-a\end{matrix};-\frac{(2t+3)^3}{t^3(t+2)}\right),$$

其中 $C=2^{2a-2}3^{\frac{5}{2}-3a}(-t)^{3a-\frac{9}{2}}(t+2)^{\frac{1}{2}-a}(t+3)^2$。

参考文献

[DM93] P. Deligne 和 G. D. Mostow，《PU(1, n) 中格的可公度性》，《数学年刊研究》，第 132 卷，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1993年。[Ee53] A. Erdélyi 编，《高等超越函数》，第 I 卷，贝特曼手稿项目，麦格劳-希尔图书公司，1953年。[Fuc66] L. Fuchs，《论变系数线性微分方程理论》，《纯粹与应用数学杂志》66（1866年），121–160页（德文）。[Gau66] C.F. Gauss，《通过二阶微分方程确定我们的级数》，遗著，《全集》第 3 卷（1866年），207–230页。[Gou81] É. Goursat，《论以超几何级数为积分的线性微分方程》，《高等师范学校科学年刊》，第 10 卷，1881年，第 3–142 页。[KS07] K. Koike 和 H. Shiga，《皮卡模形式的同源公式与三项算术几何平均》，《数论杂志》124（2007年），第 1 期，123–141页。[KS08] ，《扩展高斯算术几何平均及相应的皮卡模形式》，《数论杂志》128（2008年），第 7 期，2097–2126页。[Kum36] E. Kummer，《论超几何级数……》，《纯粹与应用数学杂志》15（1836年），39–83页（德文）。[Mat10] K. Matsumoto，《Appell 超几何函数的一个变换公式》 F_1 及通过平均迭代得到的三重数列的共同极限，《东北数学杂志》第二辑 62（2010年），第 2 期，263–268页。[MO09] K. Matsumoto 和 K. Ohara，《Lauricella 超几何函数 F_D的一些变换公式》，《函数方程》52（2009年），第 2 期，203–212页。[Ots21] N. Otsubo，《超几何变换公式的新方法》，《拉马努金杂志》55（2021年），第 2 期，793–816页。[Rie57] B. Riemann，《对由高斯级数 $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ 表示的函数理论的贡献》，《哥廷根皇家科学学会论文集》VII（1857年）。[Sau90] J.K. Sauter，《单值化群之间的同构及其在 PU(1,2) 中格上的应用》，《太平洋数学杂志》146（1990年），第 2 期，331–384页。[Sch73] H. A. Schwarz，《关于高斯超几何级数表示其第四个元素的代数函数的情形》，《纯粹与应用数学杂志》75（1873年），292–335页（德文）。[XY25] B. Xie 和 C. Yu，《实直线排列补空间上局部系统的同调》，arXiv 预印本 arXiv:2512.21531（2025年）。[YZ24] C. Yu 和 Z. Zheng，《Deligne–Mostow 单值化群的可公度性》，arXiv: 2411.09682（2024年）。

S. Wang，清华大学，北京，中国

电子邮箱地址：wangshihao112@gmail.com

C. Yu，数学与交叉科学中心，复旦大学和上海数学与交叉科学研究院（SIMIS），上海，中国

电子邮箱地址：yuchenglong@simis.cn

Z. Zheng，清华大学，北京，中国

电子邮箱：zhengzhiwei@mail.tsinghua.edu.cn