arXiv:2602.03606v1 [math-ph] 3 Feb 2026

波包的贝肯斯坦界

Stefan Hollands莱比锡大学理论物理研究所，布吕德街 16 号，04103 莱比锡，德国；马克斯·普朗克数学科学研究所（MiS），因塞尔街 22 号，04103 莱比锡，德国

Roberto Longo and Gerardo Morsella罗马第二大学数学系，科学研究路 1 号，I-00133 罗马，意大利

摘要

设 B 为宽度 $2R$ 的空间区域， Φ为在零时刻局域于 B 的克莱因-戈尔登波包。我们证明不等式 $S \leq 2\pi RE$；其中， S 是区域 B内 Φ的熵，而 E 是 B内 Φ的能量含量。我们考虑更广泛的情形，并提出一个变分问题，旨在当Φ 未局域于 B时使我们的界最小化。在标准子空间的局域、庞加莱协变网这一框架下，我们的不等式适用范围更广，并且与贝肯斯坦不等式有关。我们指出一个一般界，它与 Bostelmann、Cadamuro 和 Minz 最近关于标量有质量量子克莱因–戈尔登场的单粒子模哈密顿量的数值计算相符。我们还给出了适用于波包的熵平衡公式与蚂蚁公式。

1 引言

本文讨论克莱因-戈尔登波包的线性空间，以及更一般而言，希尔伯特空间标准子空间的局部网。本文的写作有两个动机。

我们的首要目标是为自由标量量子场论中与空间球相关联的有质量模哈密顿量给出一般界。球的模哈密顿量的显式描述仅在无质量情形 [23] 下已知；在这种情形中，模群与时空共形变换所诱导的几何作用相关联 [11]。有质量情形不对应任何几何作用；人们或许希望从无质量情形推导出一个微扰公式，但迄今为止所有这方面的尝试都未能成功，见 [23]。基于这些前提，Bostelmann、Cadamuro 和 Minz 最近开展了一项有趣而细致的数值分析 [2]。在柯西数据的二乘二矩阵描述中，单位球的模群生成元是非对角的，包含两项： L 和 M （相差一个常数因子），见下文公式（20）； M 和 L在底层内积中包含与 $M^* = -L$ 相同的信息；特别是， M 项随质量 m变化的图像已在 [2] 中绘出。无质量情形下， M 是一个抛物函数（即乘法算子），$M = \frac{1}{2}(1 - x^2)$，因此 $M(\pm 1) = 0$和$M(0) = 1/2$；随着质量增加， M 的图像呈现出更高的抛物线形状；不过，$M(\pm 1) = 0$，而 $M(0)$ 增大至 1，参见 [2, 图 7 和 8]图。我们将在推论 3.4 中看到，质量无关界 $M \leq 1$ 确实成立，这是由 [20]中导出的一般界所致。

我们的第二个动机源于文献 [18, 7], 中定义的波包局域熵，另见 [8, 19]。局域熵衡量波包在给定区域中的信息内容。量子场论中的贝肯斯坦界 [5] 表明，局部熵/能量界应当成立。近期提出的量子场论贝肯斯坦型不等式 [20, 12] 将表明，波包的局部熵/能量界，或者更一般地，希尔伯特空间中标准子空间局域网络的局部熵/能量界，均成立；其中，局部能量将在下文根据波的应力能量张量作更精确的定义。本文给出了这一界，而它实际上也是推导量子场论贝肯斯坦型界 [20]的出发点。

设 B 为宽度 $2R$ 的空间区域， Φ 为一个克莱因-戈尔登波包，也就是说， Φ 是克莱因–戈尔登方程（$\Box + m^2$）$\Phi = 0$的光滑解。若 Φ 的柯西数据（f， g）支集于 B，我们将推导出以下界

$$S(\Phi|B) \leq 2\pi R \int_B T_{00\Phi}(x)|_{x_0=0} d\mathbf{x}\,,$$

其中 $S(\Phi|B)$ 是 Φ 在 B 中的熵，而 T_{00} 是应力-能量张量。如果 f， g 不再支撑于 B，那么由于熵和能量中存在边界贡献，上述不等式便不成立。为了在这种情况下也推导出一个界，我们提出一个具有独立分析意义的变分问题；其显式解超出了本文的讨论范围。这里，我们仅在第4节指出若干性质，并给出特定情形下的解。我们还简要讨论此类界向费米子情形的推广，并为局域于 B的马约拉纳场单粒子态得到上述不等式的一个版本。

在第5节中，我们给出适用于波包的熵平衡公式 [25, 6] 和反公式[6, 13] 的一个版本：在我们的语境下，第一个公式可以直接得到；第二个

公式则无法从冯·诺伊曼代数自由量子场论网的反公式推得。事实上，在该语境下，本文证明的版本只涉及对相干态取下确界，因此是一个更强的结论。

2 预备知识

2.1 熵算子

我们回顾标准子空间的设置。设 $\mathcal{H}$ 是一个复希尔伯特空间， $H \subset \mathcal{H}$ 是一个标准子空间，也就是说， H 是 $\mathcal{H}$ 的一个闭实线性子空间，满足 $H \cap iH = \{0\}$ 和 $H + iH = \mathcal{H}$。模算子 Δ_H 是作用于 $\mathcal{H}$ 上的正非奇异算子，而模共轭 J_H 是作用于 $\mathcal{H}$ 上的反酉对合，由反线性、稠密定义的对合 S_H 的极分解 $S_H = J_H \Delta_H^{1/2}$ 定义： $H + iH \to H + iH$， $S(\Phi + i\Psi) = \Phi - i\Psi$；它们满足以下基本关系

$$\Delta_H^{is} H = H\,,\ s \in \mathbb{R}\,, \quad J_H H = H'\,,$$

其中 $H' := \{\Phi \in \mathcal{H} : \Im(\Phi,\ \Psi) = 0,\ \Psi \in H\}$ 是 H 的辛正交补。详情请参阅[16]。

与 H 相关联的熵算子 $\mathcal{E}_H$ 是作用于 $\mathcal{H}$ 上的实线性正算子。 $\mathcal{E}_H$ 与任意闭实线性子空间 H （位于 $\mathcal{H}$ 中）相关联。这里，我们回顾 $\mathcal{E}_H$ 的定义，其中 H 是一个因子性标准子空间，即 $H \cap H' = \{0\}$ （这是下文所关注的情形）：

$$\mathcal{E}_H =: iP_H i \log \Delta_H\,,$$

更确切地说， $\mathcal{E}_H$ 是上述公式右侧算子的闭包。这里， P_H 是截断投影，即作用于 $\mathcal{H}$ 上的实线性算子，其定义域为 $H + H'$，定义为 $P_H(\Phi + \Phi') = \Phi$，其中 $\Phi \in H, \Phi' \in H'$。注意，由于 H 是标准的， P_H 是稠密定义的；又由于 H 具有因子性， P_H 是良定义的。

熵算子是正的、自伴的（作为作用于实希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的实算子，其标量积为 $\Re(\cdot,\cdot)$），并且当 $H \subset K$ 时 $\mathcal{E}_H \le \mathcal{E}_K$。于是，向量的熵 Φ 相对于 H 定义为

$$S(\Phi|H) := \Re(\Phi, \mathcal{E}_H \Phi) \tag{1}$$

在二次型意义下，因此当 $\Phi \in D(\mathcal{E}_H^{1/2})$ 时， $S(\Phi|H) = \|\mathcal{E}_H^{1/2}\Phi\|^2$；否则， $S(\Phi|H) = +\infty$。 $S(\Phi|H)$ 满足一些自然性质，例如正性： $S(\Phi|H) \ge 0$，以及单调性：若 $H \subset K$，则 $S(\Phi|H) \le S(\Phi|K)$。关于这一设定的参考文献，见 [18, 7, 19]。

我们注意到，如果 H 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的任意标准子空间，则相对于 H 和 H' 的熵算子之间的关系为

$$\mathcal{E}_H - \bar{\mathcal{E}}_H = -\log \Delta_H \tag{2}$$

$\bar{}$ （在定义域的交集上），其中 $\mathcal{E}_H = \mathcal{E}_{H'}$，因为 $\mathcal{E}_{H'}$ 是 $iP_{H'} i\log\ \Delta_{H'} = -i(1 - P_H) i\log\ \Delta_H$ 的闭包。

2.2 标准子空间网的贝肯斯坦不等式

设 $\mathcal{H}$ 为一个复希尔伯特空间。Poincar´e 协变的 标准子空间网络 （见 [16]） $\mathcal{H}$ 是一个映射 H : $O \mapsto H(O)$，它将 $\mathcal{H}$ 的一个标准子空间 $H(O)$与每个双锥 $O \subset \mathbb{R}^{1+d}$， $d \geq 1$对应起来，使得

- $H(O_1) \subset H(O_2)$ 若 $O_1 \subset O_2$ （单调性），
- 存在一个酉的正能量表示 U，它作用于 proper、$1+d$ 维庞加莱群 ´， $\mathcal{P}_+^{\uparrow}$ 作用在 $\mathcal{H}$ 上，使得对所有 $g \in \mathcal{P}_+^{\uparrow}$， O 双锥，都有 $U(g)H(O) = H(gO)$（庞加莱协变性），

- $H(O_1) \subset H(O_2)'$ 若 $O_1 \subset O_2'$ （局域性），
- $\Delta_{H(W)}^{-is} = U\big(\Lambda_W(2\pi s)\big)$, $s \in \mathbb{R}$，若 $W \subset \mathbb{R}^{1+d}$是一个楔形区域（比萨诺-维奇曼性质—erty);

此处 $H(W)$ 是由满足 $O \subset W$ 的 $H(O)$ 的闭实线性张成，而 Λ_W 是保持 W 不变的单参数纯洛伦兹变换群（洛伦兹推动）。若 U 是不可约的 [24]，则比萨诺-维奇曼性质自动成立。

回想一下，若 U 具有有限自旋 [1]，则如上所述，每个酉正能量表示 U 的 $\mathcal{P}_+^{\uparrow}$ 都会产生一个如上所述的标准子空间网络。若 U 具有无限自旋，则当 O 是双锥时， $H(O) = \mathbb{C}$; 但当 W 是楔形区域 [22]时， $H(W)$有定义。

若 $B \subset \mathbb{R}^d$ 是空间（时间零）区域，我们定义 $H(B) = H(\hat{}B)$，其中 $\hat{}B \subset \mathbb{R}^{1+d}$ 是 B的因果包络。若 R 是使得 B 位于两条距离为 $2R$的平行超平面之间的最小数，我们就称 B 的半宽 $R \geq 0$ 为 R 。此时，通过施加刚性运动，可以将 B 映射到条带 $\{-R \leq x_1 \leq R\}$的一个子集上。显然，半径为 R 的球，其半宽等于 R。

下一个命题给出了局部、庞加莱协变的标准子空间网络 [20] 的贝肯斯坦型不等式版本（更一般地，对于任何满足能量-动量谱条件的实希尔伯特空间局域网络，该结论也成立

命题 2.1。若 $\Phi \in H(B)$，则

$$S(\Phi|B) \leq 2\pi R\,(\Phi, P\Phi)\,, \tag{3}$$

其中 P 为哈密顿算符（时间平移单参数酉群的生成元）， R 为 B的半宽。

证明。 T该命题是由不等式 [20, Cor. 2.11] （由 [3] 可得）):

$$-\log \Delta_{H(B)} \leq 2\pi R\, P\,, \tag{4}$$

以及以下事实的推论:

$$S(\Phi|B) = -(\Phi, \log \Delta_{H(B)}\Phi)\,.$$

若 $\Phi \in H(B)$。 □

请注意，方程 (3)、(4) 的两边以及算符顺序均在二次型意义下定义，参见 [20]。

2.3 波希尔伯特空间

现在我们回顾与质量为 $m \geq 0$ 的 $\mathcal{P}_+^\uparrow$ 的幺正标量表示相关联的标准子空间网络的具体构造，例如参见 [23]。

用 $S(\mathbb{R}^d)$ 表示实施瓦茨空间，并固定 $m \geq 0$。[1] 众所周知，若 $f, g \in S(\mathbb{R}^d)$，则在 $\mathbb{R}^{1+d}$ 上存在唯一的光滑实函数 $\Phi(x_0,\mathbf{x})$，它是克莱因-戈登方程的解

$$(\Box + m^2)\Phi = 0\,,$$

$\Box\Phi \equiv \partial_{x_0}^2\Phi - \nabla_{\mathbf{x}}^2\Phi$，（一个波包，或简称为波），其柯西数据为 $\Phi|_{x_0=0} = f$、$\partial_{x_0}\Phi|_{x_0=0} = g$。我们令 $\Phi = \langle f, g\rangle$，并用 $\mathcal{T}$ 表示这些 Φ 构成的实线性空间。Poincar´e 群 $\mathcal{P}_+^\uparrow$ 自然地线性作用于 $\mathcal{T}$，并且在 $\mathcal{T}$ 上存在自然的、Poincar´e 不变的实内积；$\mathcal{T}$ 的完备化随之给出一个实希尔伯特空间；此外，该实希尔伯特空间配备有稍后描述的 Poincar´e 不变复结构（即一个等距 i，使得 $i^2 = -1$），从而我们得到一个复希尔伯特空间$\mathcal{H}_m$。于是 $\mathcal{H}_m$ 承载 $\mathcal{P}_+^\uparrow$ 的一个酉正能量表示，即质量 m的不可约标量表示。

我们将经常使用这一等同

$$S(\mathbb{R}^d) \oplus S(\mathbb{R}^d) \longleftrightarrow \mathcal{T}\,, \qquad f \oplus g \longleftrightarrow \langle f, g\rangle\,, \tag{5}$$

从而我们可以直接处理 $S(\mathbb{R}^d) \oplus S(\mathbb{R}^d)$，而不是 $\mathcal{T}$。设 $H_{m,\pm}$ 为温和分布 $f \in S(\mathbb{R}^d)'$ 的实希尔伯特空间，使得 $\hat{} f$ 是一个博雷尔函数，且

$$\|f\|_\pm^2 = \int_{\mathbb{R}^d} (|\mathbf{p}|^2 + m^2)^{\pm\frac{1}{2}} |\hat{f}(\mathbf{p})|^2 d\mathbf{p} < +\infty\,. \tag{6}$$

$S(\mathbb{R}^d)$ 在 $H_{m,\pm}$ 中稠密，若 $d > 1$。作为实希尔伯特空间，$\mathcal{H}_m$ 等于实希尔伯特空间的直和 $H_m = H_{m,+} \oplus H_{m,-}$。复结构 i 由如下等距给出，该等距由

$$i = \begin{bmatrix} 0 & \mu^{-1} \\ -\mu & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

在 $S(\mathbb{R}^d) \oplus S(\mathbb{R}^d)$ 上确定，其中 μ 是傅里叶变换中乘以 $\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$。

标量积的虚部（辛形式）由下式给出

$$\Im(f_1 \oplus g_1, f_2 \oplus g_2) = (g_1, f_2) - (f_1, g_2)\,, \tag{8}$$

f_1，f_2，g_1，$g_2 \in S(\mathbb{R}^d)$（L^2-标量积）。

取一个 $B \subset \mathbb{R}^d$ 球，记

$$H_{m,\pm}(B) = \left\{f_\pm \in S(\mathbb{R}^d) : \mathrm{supp}(f_\pm) \subset B\right\}^-\,,$$

并且标准子空间 $H_m(B) \subset \mathcal{H}_m$ 为

$$H_m(B) =: H_{m,+}(B) \oplus H_{m,-}(B)\,. \tag{9}$$

对于更一般的区域 B, $H_m(C) = \{\sum H_m(B)\colon\ B$球 $B \subset C\}^-$。

[1]在本小节中，我们假设 $d \geq 2$ 当且仅当 $m = 0$。

3 贝肯斯坦不等式与克莱因-戈尔登波

对于 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_m$，波包的局域熵 $\Phi = \langle f,\ g\rangle$ 现在由式 (1) 定义

$$S(\Phi|B) = (\Phi, \mathcal{E}_H \Phi) = (\Phi, iP_H i \log \Delta_H \Phi)\,,$$

对于任意区域 $B \subset \mathbb{R}^d$，其中 $H = H(B)$ 定义见式 (9)。

回顾一下，[7]

$$S(\Phi|x_1 > a) = 2\pi \int_{x_1>a} (x_1 - a) T_{00\Phi}(x)|_{x_0=0} d\mathbf{x} \tag{10}$$

and

$$S(\Phi|x_1 < a) = 2\pi \int_{x_1<a} (a - x_1) T_{00\Phi}(x)|_{x_0=0} d\mathbf{x}$$

其中 T_{00} 该应力-能量张量在 $\mathbb{R}^{1+d}$

$$T_{00\Phi}(x)|_{x_0=0} = \frac{1}{2}(|\nabla f|^2 + m^2 f^2 + g^2)\,.$$

可以验证

$$(\Phi, P\Phi) = \int T_{00\Phi}(0, \mathbf{x}) d\mathbf{x}\,,$$

因此，以下具体的贝肯斯坦不等式可作为命题 2.1 的推论得出。为便于今后使用，我们给出一个简短直接的证明。

命题 3.1。 若 $\mathrm{supp}(f), \mathrm{supp}(g) \subset B$，则

$$S(\Phi|B) \le 2\pi R\, E(\Phi|B)\,, \tag{11}$$

其中 $E(\Phi|B) = \int_B T_{00\Phi}(0,\ \mathbf{x}) d\mathbf{x}$，且 R B 的半宽。

证明。 由于特殊欧几里得群在 $\mathcal{H}_m$上协变且酉地作用，根据局域熵的等距协变性，我们不妨设 $B \subset \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d :\ -R \le x_1 \le R\}$。

根据熵的单调性（这可由 [7, 定理 4.5] 以及相干态之间相对熵的单调性推出），我们有

$$\begin{aligned} S(\Phi|B) \le S(\Phi|\{x_1 > -R\}) &= \pi \int_{x_1>-R} (x_1 + R)(|\nabla f|^2 + m^2 f^2 + g^2) d\mathbf{x} \\ &= \pi \int_B (x_1 + R)(|\nabla f|^2 + m^2 f^2 + g^2) d\mathbf{x}\,; \end{aligned} \tag{12}$$

类似地,

$$\begin{aligned} S(\Phi|B) \le S(\Phi|\{x_1 < R\}) &= \pi \int_{x_1<R} (-x_1 + R)(|\nabla f|^2 + m^2 f^2 + g^2) d\mathbf{x} \\ &= \pi \int_B (-x_1 + R)(|\nabla f|^2 + m^2 f^2 + g^2) d\mathbf{x}\,. \end{aligned} \tag{13}$$

对式 (12) 和 (13) 取平均值，得到

$$S(\Phi|B) \leq \frac{\pi}{2}\int_B (x_1+R)(|\nabla f|^2+m^2f^2+g^2)+\frac{\pi}{2}\int_B(-x_1+R)(|\nabla f|^2+m^2f^2+g^2)d\mathbf{x} \tag{14}$$

$$= \pi R\int_B(|\nabla f|^2+m^2f^2+g^2)d\mathbf{x} \tag{15}$$

$$= 2\pi R\int_B T_{00\Phi}(x)|_{x_0=0}d\mathbf{x} = 2\pi R\,E(\Phi|B)\,. \tag{16}$$

□

推论 3.2. 考虑微分算子 $T=-(1+r^2)\nabla^2-r\partial_r$，定义在 $L^2(B)$ 上，其中$B\subset\mathbb{R}^d$ 为单位球；该算子作用于带狄利克雷边界条件的 $C^\infty(B)$ 上。于是，

$$\lambda_1 \geq d-1$$

其中 λ_1 是 T的最低特征值。

证明. 若光滑函数 f 在边界 ∂B上消失，则由分部积分可知，下面的 (23) 等价于

$$(f,Tf)\geq(d-1)\|f\|^2$$

L^2 标量积），即 $T\geq d-1$。因此，对于所有在 ∂B上消失的 $f\in C^\infty(\bar{B})$，(23) 成立，当且仅当 T的谱包含于 $[d-1,\infty)$，也就是当且仅当 $\lambda_1\geq d-1$。□

我们用 (10) 的另一个推论结束本小节，该推论只需对 ∂_a^2求两次导数即可得到：

推论 3.3. 对于任意波包，有

$$\partial_a^2 S(\Phi|x_1>a)=2\pi\int_{\mathbb{R}^{d-2}}T_{00\Phi}(x)|_{x_0=0,x_1=a}d\mathbf{x}_\parallel\geq 0 \tag{17}$$

其中 $\mathbf{x}_\parallel=(x_2,\ .....,\ x_d)$。

本推论所表达的不等式可视为当前背景下量子主导能量条件（QDEC）的一种形式。我们将在即将发表的工作 [14] 中给出一般 Haag-Kastler量子场论的 QDEC 证明。在这种更一般的情形下，深入理解 QDEC 与贝肯斯坦界之间的关系将很有意义。

3.1 局域标量有质量模哈密顿量的界

现在考虑 $f=0$ 或 $g=0$ 的情况，其中 $f,\ g\in C_0^\infty(B)$。由 $\Phi=\langle 0,\ g\rangle$，式 (14) 给出

$$-(\Phi,\log\Delta_B\Phi)=S(\langle 0,g\rangle|B)\leq\pi R\int_B g^2d\mathbf{x}\,; \tag{18}$$

由 $\Phi = \langle f,\ 0\rangle$，式 (14) 给出

$$-(\Phi, \log \Delta_B \Phi) = S(\langle f, 0\rangle | B) \le \pi R \int_B \left(|\nabla f|^2 + m^2 f^2\right) d\mathbf{x}\,; \tag{19}$$

回顾

$$-i \log \Delta_B = \pi \begin{bmatrix} 0 & M \\ L & 0 \end{bmatrix}, \tag{20}$$

其中 i 由式 (7) 给出，$M:\ H_{m,\ -}(B) \to H_{m,\ +}(B)$，$L:\ H_{m,\ +}(B) \to H_{m,\ -}(B)$，另见[19]。因此，式 (18) 和 (19) 给出了关于 L^2-范数的估计

$$\Im(g, Mg) \le R \, \|g\|_2^2, \tag{21}$$

$$\Im(g, Lg) \le R \left\| |\nabla f| \right\|_2^2 + m^2 \|f\|_2^2 . \tag{22}$$

Coro推论 3.4。作为实线性算子 $M, L:\ \ L^2(B) \to L^2(B)$，我们有以下界

$$0 \le M \le R\,,$$
$$0 \le -L \le -R(\nabla^2 - m^2)$$

关于 $C_0^\infty(B)$.

证明。注意到，由于熵的正定性，$\Im(g,\ Mg) \ge 0$。此外，式 (21) 和 (8) 给出 $\int_B gMg d\mathbf{x} \le R\|g\|_2^2$，其中 $g \in C_0^\infty(B)$。因此

$$0 \le (g, Mg)_2 \le R(g, g)_2$$

(L^2标量积)。另一方面，式 (22) 和 (8) $0 \le -(g,\ Lg)_2 \le R\||\nabla f|\|_2^2 + m^2\|f\|_2^2$，因此

$$0 \le -(f, Lf)_2 \le R\,(f, -\nabla^2 f + m^2 f)_2$$

通过分部积分，因此推论成立。 □

4 若 Φ 未局域化，应采用哪个界?

具体来说，当 $m = 0$ 和 B 为单位球时，不等式 (11) 为：在这种情况下，$\Phi = \langle f,\ g\rangle$ 的熵为

$$S(\Phi|B) = \pi \int_B (1 - r^2) T_{00\Phi}(x)\big|_{x_0=0} d\mathbf{x} + \pi D \int_B f^2 d\mathbf{x}\,,$$

其中 $T_{00\Phi} = |\nabla f|^2 + g^2$ 且 $D = (d-1)/2$。因此，不等式 (11) 等价于

$$\pi \int_B \frac{1 - r^2}{2} (|\nabla f|^2 + g^2) d\mathbf{x} + \pi D \int_B f^2 dx \le \pi \int_B (|\nabla f|^2 + g^2) d\mathbf{x}\,;$$

特别地，令 $g = 0$，我们得到不等式

$$\int_B (1 + r^2) |\nabla f|^2 d\mathbf{x} \ge (d-1) \int_B f^2 d\mathbf{x}\,. \tag{23}$$

因此，如果 f 的支集不包含在 B 中，则不等式 **(11)** 通常不成立；当 $f=1$ 在 B 上时即可看出这一点。

此外，我们可以考虑与波 Φ相关的“改进型”无迹应力-能量张量

$$T^i_{\mu\nu\Phi} := T_{\mu\nu\Phi} - \frac{d-1}{4d}(\partial_\mu\partial_\nu - \eta_{\mu\nu}\Box)(\Phi^2)$$

（$\eta_{\mu\nu}$ 闵可夫斯基度规），它同样是守恒的，其二次量子化版本也会生成平移。接下来，我们通过两次分部积分计算，

$$\int_B (1-r^2)\nabla^2(\Phi^2)|_{x_0=0}d\mathbf{x} = \int_B (1-r^2)\nabla^2(f^2)d\mathbf{x} = 2\int_{\partial B} f^2\, d\sigma - 2d\int_B f^2 d\mathbf{x},$$

因此， B 中 Φ 的熵也可以用改进型能量密度表示为

$$S(\Phi|B) = \pi\int_B (1-r^2)T^i_{00\Phi}(x)|_{x_0=0}d\mathbf{x} + \pi\frac{D}{d}\int_{\partial B} f^2\, d\sigma,$$

这表明，当 Φ未局域于 B 时，（**11**）中需要加入的修正项应仅取决于 f 在 B边界上的限制。

同样值得注意的是，对于半空间 B ，有

$$S(\Phi|x_1>a) = 2\pi\int_{x_1>a}(x_1-a)T^i_{00\Phi}(x)|_{x_0=0}d\mathbf{x} + \pi\frac{D}{d}\int_{x_1=a} f^2\, d\sigma,$$

这对于 $m>0$ 也成立（其中 $T^i_{\mu\nu}$ 仍是有效的应力-能量张量，但它不是无迹的）。

~现在我们回到 $m\geq 0$ 和 B 任意、且 f， g 的支集不包含在 B中的情形，并研究式（**11**）所需的额外项。

引理 4.1。 设 B 是一个有界区域，且 $f\in S(\mathbb{R}^d)$ 。若 $u\in S(\mathbb{R}^d)$ 且 $u|_{\partial B} = f|_{\partial B}$，
~ ~ ，则函数 f 在 B 上等于f，在 B^c 上等于 u ，属于$H_{m,\,+}$。

证明。 $\widetilde{f}$显然属于 $L^2(\mathbb{R}^d,\ d\mathbf{x})$。它的偏导数 $\partial_{x_i}\widetilde{f}$存在，且在零测集 ∂B之外光滑，并且有界且在无穷远处快速衰减，因此也属于$\partial_{x_i}\widetilde{f}\in L^2(\mathbb{R}^d,\ d\mathbf{x})$。因此，傅里叶变换满足

$$\int_{\mathbb{R}^d}|\widehat{\widetilde{f}}(\mathbf{p})|^2 d\mathbf{p} < \infty\,, \quad \int_{\mathbb{R}^d}|\mathbf{p}|^2|\widehat{\widetilde{f}}(\mathbf{p})|^2 d\mathbf{p} < \infty$$

~根据普朗歇雷定理。这立即推出 $f\in H_+$ ，因为

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\,|\widehat{\widetilde{f}}(\mathbf{p})|^2 d\mathbf{p} &= \int_{|\mathbf{p}|\leq 1}\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\,|\widehat{\widetilde{f}}(\mathbf{p})|^2 d\mathbf{p} + \int_{|\mathbf{p}|>1}\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\,|\widehat{\widetilde{f}}(\mathbf{p})|^2 d\mathbf{p}\\ &\leq \sqrt{1+m^2}\int_{|\mathbf{p}|\leq 1}|\widehat{\widetilde{f}}(\mathbf{p})|^2 d\mathbf{p} + \int_{|\mathbf{p}|>1}(|\mathbf{p}|^2+m^2)|\widehat{\widetilde{f}}(\mathbf{p})|^2 d\mathbf{p} < \infty\,.\end{aligned}$$

□

~ ~ ~**引理 4.2**。 设 f 与引理 ***4.1*** 中的相同。那么 f 是可测函数， ∇f 几乎处处存在，并且

$$S(\widetilde{f},0|x_1>0)=\pi\int_{x_1>0}x_1\big(|\nabla\widetilde{f}|^2+m^2\widetilde{f}^2\big)d\mathbf{x}\,. \tag{24}$$

证明。 根据引理 **4.1**， $\langle\widetilde{f}\,,\ 0\rangle\in\mathcal{H}_m$，因此 $S(\,\widetilde{f}\,,\ 0|B)$ 是良定义的。若 $\widetilde{f}\in S(\mathbb{R}^d)$，则该引理是 [18, 定理 5.4], 的一个特例；同样的证明可用于证明在我们的情形下成立的 **(24)**。□

命题 4.3。 设 $B\subset\mathbb{R}^d$ 是半宽为 $R>0$ 的区域， Φ 是一个克莱因-戈尔登波包，其零时刻柯西数据为 $f,g\in S(\mathbb{R}^d)$。则

$$S(\Phi|B)\le 2\pi RE(\Phi|B)+\Gamma_\Phi\,,$$

其中常数 Γ_Φ 仅取决于 Φ 在 B的边界∂B 上的限制 $\Phi|_{\partial B}=f|_{\partial B}$ 。

证明。 通过旋转和平移，我们可以假设 B 包含于条带 $\{0\le x_1\le 2R\}$中。

不等式（12）

$$S(\Phi|B)\le S(\Phi|\{x_1>0\})=\pi\int_{x_1>0}x_1\big(|\nabla f|^2+m^2f^2+g^2\big)d\mathbf{x}$$

由熵的单调性成立。

由熵的局域性，若将 f,g替换为 u,v，其中 $u,v\in S(\mathbb{R}^d)$与 $u=f$, $v=g$在 B上，则 $S(f,g|B)$保持不变。事实上， $f-u$与 $g-v$的支集位于 B 的补集 B^c 中，且 $H_m(B^c)$包含于$H_m(B)$的辛正交补 $H_m(B)'$ 中。

因此,

$$\begin{aligned}S(\Phi|B)&\le\pi\int_{x_1>0}x_1\big(|\nabla u|^2+m^2u^2+v^2\big)d\mathbf{x}\\&=\pi\int_B x_1T_{00\Phi}(x)d\mathbf{x}+\pi\int_{x\notin B,x_1>0}x_1\big(|\nabla u|^2+m^2v^2+v^2\big)d\mathbf{x}\\&=2\pi R\int_B T_{00\Phi}(x)d\mathbf{x}+\pi\int_{x\notin B,x_1>0}x_1\big(|\nabla u|^2+m^2u^2+v^2\big)d\mathbf{x}\,.\end{aligned}$$

So

$$S(\Phi|B)\le 2\pi R\,E(\Phi\|B)+\pi\inf_{u,v}\mathfrak{I}(u,v)\,,$$

其中

$$\mathfrak{I}(u,v)\equiv\int_{x\notin B,x_1>0}x_1\big(|\nabla u|^2+m^2u^2+v^2\big)d\mathbf{x}$$

且下确界取遍所有满足 $u,\ v\in S(\mathbb{R}^d)$ 的 $u|_{\partial B}=f|_{\partial B}$, $v|_{\partial B}=g|_{\partial B}$。

现在， $\mathfrak{I}(u,\ v) = \mathfrak{I}(u,\ 0) + \mathfrak{I}(0,\ v)$，并且

$$\inf\left\{\mathfrak{I}(0,v) : v \in S(\mathbb{R}^d), u|_{\partial B} = g|_{\partial B}\right\} = 0\,.$$

根据引理 4.1 和 4.2，我们还可以允许 u 取 $H_{m,+}$ 中的任意向量。因此，我们可以选择

$$\Gamma_\Phi = \Gamma_f := \inf\left\{\mathfrak{I}(u) : u \in H_{m,+}, u|_{\partial B} = f|_{\partial B}\right\}$$

其中

$$\mathfrak{I}(u) \equiv \int_{x\notin B, x_1>0} x_1(|\nabla u|^2 + m^2u^2)d\mathbf{x}\,, \tag{25}$$

也就是说， $\mathfrak{I}(u) \equiv \mathfrak{I}(u,0)$。显然， Γ_Φ 仅取决于 $f|_{\partial B}$。 □

推论 4.4. 如果 Φ 在 B 的边界 ∂B 上消失，那么

$$S(\Phi|B) \le 2\pi R\, E(\Phi|B)\,,$$

即 $\Gamma_\Phi = 0$。

证明. 如果 $f|_{\partial B} = 0$，我们可以选择使 u 在 B^c 上恒为零，因此 $\mathfrak{I}(u) = 0$。 □

4.1 变分问题

设 B 是半空间 $x_1 > 0$ 中一个边界正则的有界区域（例如， B 是一个球），并设 h 是定义在 B 的边界 ∂B 上的光滑函数。我们还可以将 $\mathfrak{I}(u)$ (25) 视为定义在 $\mathcal{S}_h$ 上的泛函； $\mathcal{S}_h$ 是由 $\{x \notin B, x_1 > 0\}$ 内部的光滑函数 u 构成的集合，这些函数在无穷远处快速衰减、在边界上连续，且满足 $u|_{\partial B} = h$。等价地，我们也可以将 $\mathfrak{I}(u)$ (25) 视为定义在线性空间 $\{u \in S(\mathbb{R}^d) : u|_{\partial B} = h\}$ 上的泛函。令

$$\Gamma_h \equiv \inf_{u\in\mathcal{S}_h} \mathfrak{I}(u)\,.$$

当然，我们可以考虑定义在不同函数类上的泛函 $\mathfrak{I}$。问题在于用 h 来估计 Γ_h 。

考虑希尔伯特空间 H_{x_1} （加权索博列夫空间），它是用范数将 $S(\mathbb{R}^d)$ 完备化后得到的

$$\|u\|_{x_1} \equiv \left(\int_{x\notin B, x_1>0} x_1\big(m^2u^2 + |\nabla u|^2\big)dx\right)^{1/2}.$$

命题 4.5. 设 h 是定义在 ∂B 上的光滑函数。存在一个使 $\mathfrak{I}$ 取最小值的 $u_h \in H_{x_1}$ ，即 $u_h|_{\partial B} = h$ ，并且

$$\mathfrak{I}(u_h) = \Gamma_h\,.$$

u_h 在半空间 $\{x_1 > 0\}$ 中去掉 B 后的限制是唯一确定的，并且满足

$$\partial_{x_1}u_h = x_1(m^2u_h - \nabla^2u_h)\,, \tag{26}$$

证明。 集合 $S(\mathbb{R}^d)_h = \{u \in S(\mathbb{R}^d) : u|_{\partial B} = h\}$（此处应为笔误）是凸的，因此其闭包中存在一个范数最小的向量 $u_h \in S(\mathbb{R}^d)_h$ 。由于 $\mathfrak{I}$ 是严格凸的， u_h 作为 H^1 的元素是唯一的，即 u_h 在 $B^c \cap \{x_1 > 0\}$ 上的限制是唯一确定的。于是，式 (26) 成立。□

注意

$$\Gamma_h = \mathfrak{I}(u_h) = \frac{1}{2}\int_{\partial B} x_1 \partial_{\mathbf{n}}(u_h^2) dS = \int_{\partial B} x_1 h\, \partial_{\mathbf{n}}(u_h) dS$$

（法向导数）。我们把用 h 估计该积分的问题留待解决。

注意， $\Gamma_h \equiv \Gamma(h, m, B)$ 满足以下性质。

命题 4.6。我们有：

- $\Gamma(h, m, B)$ 关于 h 和 m 都是凸的
- $\Gamma(\alpha h, m, B) = \alpha^2 \Gamma(h, m, B), \quad \alpha \in \mathbb{R}$
- $\Gamma(h, m, B)$ 关于 m单调不减，因此在 $m = 0$处达到最小值
- $\Gamma(h_\lambda, \lambda m, \lambda B) = \lambda^2 \Gamma(h, m, B)$，其中 $\lambda > 0$ 和 $h_\lambda(x) = h(\lambda^{-1}x)$

4.2 关于费米子情形的一些备注

一个自然的问题是，上述分析能否推广到费米子情形。下面我们讨论实现这一点的主要障碍。

我们先固定本小节将使用的记号。为简单起见，我们只考虑 $3+1$ 维情形，并且按照惯例， $g = [g_{\mu\nu}]_{\mu,\nu=0,\ldots,3}$ 表示 $\mathbb{R}^4$上的闵可夫斯基度规，其元素 $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x})$ 具有逆变（上）指标。指标分别通过 g 和 $g^{-1} = [g^{\mu\nu}]$ 降下和升起；我们采用重复出现的上、下指标求和约定，因此 $x \cdot y = x_\mu y^\mu = x_0 y_0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ 是闵可夫斯基内积。给定 $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ 和 $m \geq 0$，我们按照第 2.3 小节中的定义令 $\mu_m(\mathbf{p}) := \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$，并用简写 $p_+ := (\mu_m(\mathbf{p}), \mathbf{p})$ 表示与 $\mathbf{p}$ 对应的正质量 m 壳上的四矢量。伽马矩阵 γ^μ 满足

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu},$$

其中 $\{\cdot,\cdot\}$ 为反对易子，并且我们选择一种表示，使得γ^0 的转置满足 $(\gamma^0)^t = \pm\gamma^0$。此外，我们采用狄拉克记号 $\not{x} := x_\mu \gamma^\mu$ 表示 $x \in \mathbb{R}^4$。电荷共轭矩阵 C 满足 $C^t = C^* = -C = C^{-1}$ 以及 $C\gamma^\mu C^{-1} = -(\gamma^\mu)^t$。最后，三维和四维傅里叶变换分别定义为

$$\hat{g}(\mathbf{p}) := \int_{\mathbb{R}^3} g(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}, \qquad \hat{f}(p) := \int_{\mathbb{R}^4} f(x) e^{ip\cdot x} dx.$$

现在，给定质量 $m \geq 0$，我们考虑狄拉克方程的解Ψ所构成的实线性空间 $\mathcal{M} \subset C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)$

$$(i\partial_\mu \gamma^\mu - m)\Psi = 0 \tag{27}$$

具有柯西数据 $\Psi_0 := \Psi|_{x_0=0} \in S(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$，并满足马约拉纳条件 $C\gamma^0{}^t\bar{\Psi} = \Psi$ （马约拉纳波）。$\mathcal{M}$在赋予由下式定义的复结构$\imath : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 后成为一个复空间

$$(\imath\Psi)_0\hat{}(\mathbf{p}) := \frac{i}{\mu_m(\mathbf{p})}(m - p_j\gamma^j)\gamma^0\hat{\Psi}_0(\mathbf{p}), \qquad \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3.$$

庞加莱群的万有覆盖自然作用于 $\mathcal{M}$，并将 $\Psi \in \mathcal{M}$ 的正频部分定义为 $\hat{}\ \Psi_+(p) := \theta(p_0)\hat{}\Psi(p)$，$p \in \mathbb{R}^4$，则双线性形式

$$(\Psi, \Phi) := \int_{x^0=0} d\mathbf{x}\, \Psi_+(x)^*\Phi_+(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\mathbf{p}}{2\mu_m(\mathbf{p})}\hat{\Psi}_0(\mathbf{p})^*(\not{p}_+ + m)\gamma^0\hat{\Phi}_0(\mathbf{p}),$$

实际上相对于复结构 $\imath$是半双线性的，并在 $\mathcal{M}$上定义了一个庞加莱不变的标量积。我们将关于该标量积完备化 $\mathcal{M}$ 所得的复希尔伯特空间记为 $\mathcal{K}_m$ 。对于球$B \subset \mathbb{R}^3$， $\mathcal{K}_m$的闭实子空间

$$K_m(B) := \{\Psi \in \mathcal{M} : \operatorname{supp}\Psi_0 \subset B\}^-$$

是标准的。

马约拉纳场是定义在费米子福克空间$\Gamma_-(\mathcal{K}_m)$上的（旋量值）Wightman场 ψ ，定义如下：对于满足 $C\gamma^0{}^t\bar{f} = f$ 的 $f \in S(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)$，定义 $\Psi_f \in \mathcal{M}$ 为

$$\Psi_f(x) = i\int_{\mathbb{R}^4} dy\,(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)D(y-x)\gamma^0\overline{f(y)}, \qquad x \in \mathbb{R}^4,$$

其中 D 是质量为 m 的克莱因-戈尔登场的因果传播子；则用 f 涂抹的马约拉纳场为

$$\psi(f) := a(\Psi_f) + a(\Psi_f)^*,$$

其中 $a(\Psi)$、 $\Psi \in \mathcal{K}_m$ 是作用于 $\Gamma_-(\mathcal{K}_m)$ 上的正则反对易关系代数的生成元；对于任意 $f \in S(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)$，涂抹场 $\psi(f)$ 可由复线性性得到。与以 $x^0 = 0$ 平面中的球 B 为底的双锥 O 相关联的马约拉纳场的局部冯·诺依曼代数为

$$\mathcal{F}(O) := \{\psi(f) + \psi(f)^* : \operatorname{supp} f \subset O\}'' = \{a(\Psi) + a(\Psi)^* : \Psi \in K_m(B)\}'',$$

$K_m(B)$ 的费米子二次量子化。更一般双锥的代数可由庞加莱协变性得到，而更一般区域的代数则可由可加性得到。

尝试为马约拉纳波建立某种贝肯斯坦界时，首先必须面对的问题是，尚无一种有意义的熵概念适用于马约拉纳波。尤其是，目前尚不清楚是否存在一类足够广泛的马约拉纳场态，使其相对于真空的相对熵能够像克莱因-戈尔登场的相干态那样，直接用马约拉纳波来表示（请注意，物理学文献中通常使用的费米子相干态涉及辅助的“格拉斯曼变量”，因此并不由 $\Gamma_-(\mathcal{K}_m)$ 中的向量表示）。

于是可以问，对于二次量子化层次上某类态的相对熵，是否能够得到一个贝肯斯坦界。为此，自然应首先考虑单粒子态这一类。事实上，由于正则反对易关系， $\psi(f) + \psi(f)^*$ 的平方是

单位算子的倍数，进而形如 $e^{i(\psi(f)+\psi(f)^*)}\Omega$ 的态实际上是真空与一个单粒子态的线性组合。

借助比萨尼亚诺-维希曼定理，不难证明，与 [15]（其中讨论了双锥 $m=0$ 情形）类似，单粒子态 $\omega_\Psi = (\Psi, (\cdot)\Psi)$ $\Psi \in \mathcal{M}$（其中 $\operatorname{supp}\Psi_0 \subset \{x^1 > a\}$, $a \in \mathbb{R}$）与福克真空 ω 在与楔形区域 $W_a := \{x^1 > a\}''$ 相关的代数 $\mathcal{F}(W_a)$ 上的相对熵为

$$S(\omega_\Psi \| \omega)_{\mathcal{F}(W_a)} = \pi \int_{x^0=0} d\mathbf{x}\,(x^1 - a)(\Psi, T_{00}(x)\Psi), \tag{28}$$

with

$$T_{00}(x) = \frac{i}{2}[:\psi^*(x)\partial_0\psi(x): - :\partial_0\psi^*(x)\psi(x):], \qquad x \in \mathbb{R}^4,$$

马约拉纳场的量子化能量密度所对应的二次型。显然，上述关于 $S(\omega_\Psi \| \omega)_{\mathcal{F}(W_a)}$ 的表达式与式 (10) 类似。于是得到命题 3.1 的以下类比结果。

命题 4.7。若 $\Psi \in \mathcal{M}$ 满足 $\mathit{supp}\,\Psi_0 \subset \bar{B}$, $B \subset \mathbb{R}^3$ 为半径 $R > 0$的球，且O 为底面为 B的双锥，则

$$S(\omega_\Psi \,|\, \omega)_{\mathcal{F}(O)} \leq 2\pi R E(\Psi|B)$$

具有 $E(\Psi|B) := \int_B (\Psi, T_{00}(0,\mathbf{x})\Psi) d\mathbf{x}$.

证明。仿照命题 3.1 的证明，只需证明 (28) 中的被积函数在 B之外为零。事实上，可得

$$\begin{aligned}
&(\Psi, T_{00}(0,\mathbf{x})\Psi) \\
&\quad = \frac{1}{4(2\pi)^6}\int_{\mathbb{R}^6} d\mathbf{p}d\mathbf{q}\left(\frac{1}{\mu_m(\mathbf{p})} + \frac{1}{\mu_m(\mathbf{q})}\right)\hat{\Psi}_0(\mathbf{p})^*(\not{p}_+ + m)\gamma^0(\not{q}_+ + m)\gamma^0\hat{\Psi}_0(\mathbf{q})e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{p})\mathbf{x}} \\
&\quad = \frac{1}{4(2\pi)^6}\int_{\mathbb{R}^6} d\mathbf{p}d\mathbf{q}\hat{\Psi}_0(\mathbf{p})^*\left[\left(\frac{1}{\mu_m(\mathbf{p})} + \frac{1}{\mu_m(\mathbf{q})}\right)p_j q_k \gamma^j\gamma^k + (q_k + p_k)\gamma^0\gamma^k\right]\hat{\Psi}_0(\mathbf{q})e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{p})\mathbf{x}} \\
&\quad - \frac{1}{4(2\pi)^6}\int_{\mathbb{R}^6} d\mathbf{p}d\mathbf{q}\hat{\Psi}_0(\mathbf{p})^*\left[\frac{p_k}{\mu_m(\mathbf{p})}\mu_m(\mathbf{q}) + \mu_m(\mathbf{p})\frac{q_k}{\mu_m(\mathbf{q})}\right]\gamma^k\gamma^0\hat{\Psi}_0(\mathbf{q})e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{p})\mathbf{x}},
\end{aligned}$$

第二个等号是因为第一个积分显然为实数。现在，右侧的第一个积分显然可以表示为若干形如

$$(G * P_1\Psi_0)(\mathbf{x})^* P_2\Psi_0(\mathbf{x}) \quad \text{or} \quad P_1'\Psi_0(\mathbf{x})^*(G' * P_2'\Psi_0)(\mathbf{x})$$

其中 G, G' 为温和分布，且 P_j, P_j', $j = 1,$ 为 2 阶微分算子，因此其支集包含于 Ψ_0 的支集中；第二个积分等于

$$2\Re\left[-i(\mu_m\Psi_0)(\mathbf{x})^*\gamma^0\gamma^k\partial_k(\mu_m^{-1}\Psi_0)(\mathbf{x})\right]$$

这归因于马约拉纳条件而为零。 □

因此，尝试将命题 4.3 中针对非局域化单粒子态的界推广到费米子情形，也会很有意思。不过，尽管我们当然预期式 (28) 在这种情形下也成立，其证明却关键依赖于这样一个事实： Ψ 可以通过对真空施加一个局域于 W_a的幺正算符得到，这使得我们能够用 Ω 的模算子来表示 Ψ 与 Ω 之间的相对模算符。遗憾的是，即使对于这样的单粒子态——它们是一个柯西数据支撑于 W_a 的基底 $\{x^1 > a\}$ 中的态与一个柯西数据支撑于其补集中的态之和——计算相对模算符的问题也会困难得多。

5 T波包的熵平衡公式与蚂蚁公式

设 $\mathcal{A}$ 是希尔伯特空间上的一个庞加莱协变、楔对偶冯·诺伊曼代数网。我们将讨论范围限定在坐标为$x = \langle x_0,\ x_1\rangle \in \mathbb{R}^2$的 $1+1$ 维闵可夫斯基时空中，并用 $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(W(x))$ 表示与顶点为 x 的右楔形区域 $W(x)$ 相关联的冯·诺伊曼代数，用 U 表示平移幺正群（为简单起见，我们考虑维数为 $1+1$ 的闵可夫斯基时空；一般情形可立即由此推出）。给定一个向量 $\Phi \in \mathcal{H}$，我们考虑 $\mathcal{A}(x)$ 和 $\mathcal{A}(x)'$ 上的向量态 Φ与 Ω 之间的相对熵，并将其记为

$$S(x) = S(\Phi\|\Omega)_{\mathcal{A}(x)}\,, \qquad \bar{S}(x) = S(\Phi\|\Omega)_{\mathcal{A}(x)'}\,. \tag{29}$$

类光平移的熵平衡公式指出

$$S(a,a) - S(b,b) = \bar{S}(a,a) - \bar{S}(b,b) + 2\pi(b-a)(\Phi, P_+\Phi)\,, \tag{30}$$

$a,\ b \in \mathbb{R}$，其中 P_+ 是右向零平移单参数酉群的生成元，该公式已在 [6] 中得到证明。

上述公式的空间平移版本

$$S(0,a) - S(0,b) = \bar{S}(0,a) - \bar{S}(0,b) + 2\pi(b-a)(\Phi, P\Phi)\,, \tag{31}$$

其中 P 是哈密顿算符，即时间平移幺正群的生成元，该结果最初见于 [12]。

反公式 指出，若对某个 $a \in \mathbb{R}$， $\partial_a S(a,a)$ 存在，则

$$-\partial_a S(a,a) = 2\pi \inf_{u' \in \mathcal{A}(a,a)'} (u'\Phi, P_+ u'\Phi)\,, \tag{32}$$

其中，下确界取遍等距算子 $u' \in \mathcal{A}(a,a)'$。反公式在 [25] 中被讨论，并在 [6]中得到证明；[12]则给出了另一种证明。

公式 (31) 和 (32) 都要求其中涉及的量有定义。迄今为止，反公式已针对希尔伯特空间中向量的一个稠密子空间得到证明（该子空间在 [6] 和 [12]中可能并不相同）。

我们将讨论上述公式在波包情境下的版本。令 H 为波希尔伯特空间$\mathcal{H}$ 上的局域、庞加莱协变标准子空间网络′，如第 2.2 节所述。设 $H(x) \equiv H(W(x))$，其对应的熵算子为 $\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_{H(x)}$。因此，由 (2) 得

$$\mathcal{E}(x) - \mathcal{E}(y) = \bar{\mathcal{E}}(x) - \bar{\mathcal{E}}(y) - \left(\log\Delta_{H(x)} - \log\Delta_{H(y)}\right); \tag{33}$$

这里， $x=\langle x_0,\ x_1\rangle$ 和 $y=\langle y_0,\ y_1\rangle$ 是闵可夫斯基平面 $\mathbb{R}^2$上的任意点。因此，根据Bisognano-Wichmann性质，我们有

$$\mathcal{E}(x)-\mathcal{E}(y)=\bar{\mathcal{E}}(x)-\bar{\mathcal{E}}(y)-2\pi\big(K(y)-K(x)\big)\,, \tag{34}$$

其中， $K(x)$ 是与楔形区域 $W(x)$ 相关的洛伦兹推动所对应的单参数酉群的生成元。现在，

$$K(y)-K(x)=-(y_1-x_1)P-(y_0-x_0)P_1$$

其中 $P_1=P_+-P$ 是 x_1-平移单参数酉群的生成元，因此

$$\mathcal{E}(x)-\mathcal{E}(y)=\bar{\mathcal{E}}(x)-\bar{\mathcal{E}}(y)+2\pi(y_1-x_1)P+2\pi(y_0-x_0)P_1\,. \tag{35}$$

于是，对于波包，我们得到如下的一般熵平衡公式：给定$\Phi\in\mathcal{H}$，稍微滥用一下记号，我们也用 $S(x):=S(\Phi|H(x))$ 表示Φ 相对于 $H(x)$的熵。

命题5.1。 设 $\Phi\in\mathcal{H}$ 是公式中所有算子的定义域内的一个向量。那么 (35).

$$S(x)-S(y)=\bar{S}(x)-\bar{S}(y)+2\pi(y_1-x_1)(\Phi,P\Phi)+2\pi(y_0-x_0)(\Phi,P_1\Phi)\,, \tag{36}$$

采用(29)中的记号。

证明。 It 只需在等式（36）两边取 Φ 上的期望值).
□

现在我们在当前语境下考察反公式。为简便起见，令 $S(a)=S(a,a)$， $a\in\mathbb{R}$。命题5.1给出

$$S(a)-S(b)=\bar{S}(a)-\bar{S}(b)+2\pi(b-a)(\Phi,P_+\Phi)$$

因此，若 $b>a$，则有

$$-\frac{S(a)-S(b)}{a-b}\le 2\pi(\Phi,P_+\Phi) \tag{37}$$

由相对熵的单调性可知。由于 S 是单调的，它几乎处处可微。根据（37），若 $S(a)$ 在 a 中可微，且当 b 位于 a 的某个右邻域内时， Φ 属于 P_+ 的定义域，也属于 $\mathcal{E}(b)$ 的定义域，则有 $-\partial_a S(a)\le 2\pi(\Phi,P_+\Phi)$，因此

$$-\partial_a S(a)\le 2\pi\inf_{\Psi\sim_a\Phi}(\Psi,P_+\Psi)\,, \tag{38}$$

其中， $\Psi\sim_a\Phi$ 表示当 b 位于 a 的某个右邻域内时， Ψ 属于 P_+ 的定义域，也属于 $\mathcal{E}(b)$ 的定义域；而 $\Psi-\Phi\in H'(a,a)$，这是因为熵 $S(a)$ 仅取决于上述意义下 Φ 所属的等价类。

下述反公式将表明，不等式 (38) 实际上是等式。请注意，这个等式并不能由二次量子化网的冯·诺伊曼代数的反公式推出；后者确实只是一个较弱的不等式，因为其中出现了非相干态。

命题 5.2. 设 H 是定义在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上、作用于楔形区域的局域 *Poincar´* 协变标准子空间网络；我们假设其满足 *Bisognano-Wichmann*性质。采用上述记号，并设 Φ 是 P_+ 的定义域中的一个向量，且对于 a 的某个右邻域内的 b，它也属于 $\mathcal{E}(b)$ 的定义域，

$$-\partial_a S(a) = 2\pi \inf_{\Psi\sim_a\Phi}(\Psi, P_+\Psi)\,, \tag{39}$$

在满足 a $\partial_a S(a)$ 存在的每一点。

因此， $\partial_a S(a)$是递增的，所以 S 是凸函数。

证明。 我们考虑定义在 $\mathbb{R}$半直线上的标准子空间网 $a\in\mathbb{R}\mapsto H(a) \equiv H(a,a)$，并证明这个一维网 $H(a)$ 的相关结论。现在， $H(a)$ 除了重数之外，是与 $U(1)$-流代数相关联的共形网，参见 [16, 第 2.6 节。1], 因此我们假设 $H(a)$ 就是这个网。正如附录 B 所述，在这种情况下，希尔伯特空间向量 $\Phi=\Phi_f$ 可以用 $\mathbb{R}$ 上实广义函数 f 的（等价类）来描述；若 Φ_f 满足假设，则 $\partial_a S(a)$ 存在当且仅当 $f'\in L^2((a,+\infty)\ dx)$，并且

$$-\partial_a S(a) = \pi\int_a^\infty f'(t)^2 dt.$$

这很容易推出

$$-\partial_a S(a) = \pi \inf_{h\sim f}\int_{-\infty}^{+\infty} h'(t)^2 dt = 2\pi \inf_{h\sim f}(\Phi_h, P_+\Phi_h) = 2\pi \inf_{\Psi\sim_a\Phi_f}(\Psi, P_+\Psi)\,,$$

其中，下确界取遍希尔伯特空间中所有满足 $h'\in L^2(\mathbb{R})$ 的实数 h ，而 $h\sim f$ 的意思是 $h=f$ 在 $[a,+\infty$ 上）。第三个等号由第二个等号和不等式 (38) 得出。

现在，结论的最后一部分立即可得，直接证明见 [8].□

对上述证明作一般化，可以得到命题 5.2 的二维版本，如下所示。与证明中所考察的网 $a\in\mathbb{R}\mapsto H^+(a) \equiv H(x^0+a,\ x^1+a)$ 相比（两者仅相差平移 $x=\langle x^0,\ x^1\rangle\in\mathbb{R}^2$ ），我们也可以考虑标准子空间的网 $a\in\mathbb{R}\mapsto H^-(a) \equiv H(x^0-a,\ x^1+a)$。于是，对于一般的二分量向量 $x\in\mathbb{R}^2$，我们定义等价关系 $\Psi\sim_x\Phi$ ，使其表示 $\Psi-\Phi\in H(x)'$；并像上文一样，定义与标准子空间 $H(x)$ 和向量 Φ 相关联的熵 $S(x)$。接着，依次将命题 5.2 应用于各个网 $a\in\mathbb{R}\mapsto H^{\pm}(a)$，并将所得的变分原理乘以权重 $s^+,\ -s^-\geq 0$ 后相加，得到

$$-s^\mu\partial_\mu S(x) = 2\pi\inf\{s^+(\Psi_+, P_+\Psi_+) - s^-(\Psi_-, P_-\Psi_-)\ :\ \Psi_\pm\sim_x\Phi\}\,, \tag{40}$$

其中 $P_-=P-P_1\geq 0$, $s=\langle s^0,\ s^1\rangle$ 是一个指向右侧的类空向量，其零分量为$s^\pm=(s^0\pm s^1)/2$ 。通过考虑二维变分原理 (39)，而不是将 x 用于 $y\in\mathbb{R}^2$ 相对于 x 向右的类空向量（因此，在 (40) 右侧所取的向量集合更小），可得到$x\mapsto S(x)$的凸性：

$$S(x+r+s)+S(x)\geq S(x+r)+S(x+s) \tag{41}$$

对于所有指向右侧的类空向量 $r,\ s$ 。这一性质可以视为（17）的一种推广。它与 QDEC 有关，我们将在 [14] 中讨论。

A 基本公式

¯设 f, g, u 为光滑函数，$\mathbf{V}$ 为 B 上的光滑向量场。根据散度定理，我们有

$$\int_B f\,\mathrm{div}(\mathbf{V})d\mathbf{x} = \int_{\partial B} f\,\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,dS - \int_B \nabla f\cdot\mathbf{V}d\mathbf{x}$$

其中 $\mathbf{n}$ 是边界的外向单位法向量，并按照其标准黎曼体积形式 dS 在 ∂B上积分。

取 $\mathbf{V} = u\nabla g$，我们有

$$\mathrm{div}(\mathbf{V}) = \mathrm{div}(u\nabla g) = \sum_i \partial_i(u\partial_i g) = \nabla u\nabla g + u\nabla^2 g$$

$$\int_B uf\,\nabla^2 g\,d\mathbf{x} + \int_B f\nabla u\nabla g\,d\mathbf{x} = \int_{\partial B} uf\,\partial_{\mathbf{n}} g\,dS - \int_B u\nabla f\nabla g\,d\mathbf{x}\,;$$

设 $u(\mathbf{x}) = 1 + r^2$，则有

$$\int_B (1+r^2)\nabla f\nabla g\,d\mathbf{x} = -\int_B (1+r^2)f\,\nabla^2 g\,d\mathbf{x} - 2\int_B f\,r\partial_r g\,d\mathbf{x} + \int_{\partial B}(1+r^2)f\,\partial_{\mathbf{n}} g\,dS\,,$$

即

$$\int_B (1+r^2)\nabla f\nabla g\,d\mathbf{x} = (f, Tg) + \int_{\partial B}(1+r^2)f\,\partial_{\mathbf{n}} g\,dS\,,$$

其中 $T = -(1+r^2)\nabla^2 - r\partial_r$。

我们也关注情形$f = g$, $u(\mathbf{x}) = x_1$ ； 我们有：

$$\int_B x_1 f\,\nabla^2 f\,d\mathbf{x} + \int_B f\partial_{x_1} f\,d\mathbf{x} = \int_{\partial B} x_1 f\,\partial_{\mathbf{n}} f\,dS - \int_B x_1|\nabla f|^2\,d\mathbf{x}\,;$$

B U(1)流的有限熵向量

在本附录中，我们计算 U(1)流在实直线上的单粒子空间中的向量，这些向量相对于有界区间或半直线的标准子空间具有有限熵。

为统一记号，我们先回顾 U(1)流的标准子空间网络的构造。我们对 $\mathbb{R}$ 上的傅里叶变换和逆变换的约定为

$$\hat{\varphi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{ipx}dx, \qquad \check{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(p)e^{-ipx}dp.$$

此外，所考虑的所有函数空间都由实值函数构成。

ˆ 我们用 $S_1(\mathbb{R})$ 和 $S_1(\mathbb{R})$ 表示 $S(\mathbb{R})$ 的子空间，其中包含满足下列条件的（实值）函数 $\varphi \in S(\mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = 0 \qquad \text{and} \qquad \varphi(0) = 0,$$

分别赋予诱导的局部凸拓扑。当然，当且仅当 $\hat{\varphi} \in \hat{S}_1(\mathbb{R})$ 时，$\varphi \in S_1(\mathbb{R})$。因此，给定 $f \in S_1'(\mathbb{R})$，其傅里叶变换是 $\hat{f} \in \hat{S}_1'(\mathbb{R})$，其导数则是由对偶定义的 $f' \in S'(\mathbb{R})$:

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle, \quad \varphi \in \hat{S}_1(\mathbb{R}); \qquad \langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle, \quad \varphi \in S(\mathbb{R}).$$

于是我们考虑分布 $f \in S_1'(\mathbb{R})$ 构成的实线性空间 $\mathfrak{L}$，其中其傅里叶变换 $\hat{f}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的可测函数，且满足

$$\|\hat{f}\|^2 := \int_0^{+\infty} p|\hat{f}(p)|^2 dp < +\infty.$$

命题 B.1. 赋予实内积后，空间 $\mathfrak{L}$

$$\langle f, g \rangle := \Re \left[\int_0^{+\infty} p\hat{f}(-p)\hat{g}(p)\, dp \right], \qquad f, g \in \mathfrak{L},$$

是一个实希尔伯特空间。

证明。若 $\{f_n\} \subset \mathfrak{L}$ 是一个柯西序列，则 $\{\hat{f}_n\} \subset L^2(\mathbb{R}_+, pdp)$ 也是柯西序列（关于 L^2 范数）。令 $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}_+, pdp)$ 为其极限。现在，若 $\varphi \in S_1(\mathbb{R})$，则

$$\langle \hat{f}, \check{\varphi} \rangle := \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(p)\check{\varphi}(p)dp = \frac{1}{2i}\Im \left[\int_0^{+\infty} p\overline{\hat{f}(p)}\frac{\check{\varphi}(-p)}{p} \right]$$

$\hat{}$ 是良定义的，因为 $\check{\varphi} \in S_1(\mathbb{R})$ 满足 $\check{\varphi}(p) \sim p$，对于 $p \to 0$ 均成立，因此 $p \mapsto \check{\varphi}(-p)/p$ 属于 $L^2(\mathbb{R}_+, pdp)$。由此可知 $\hat{f} \in \hat{S}_1'(\mathbb{R})$，且 $f \in S_1'(\mathbb{R})$ 是 $\{f_n\}$ 在 $\mathfrak{L}$ 中的极限。□

$\hat{}$我们还考虑复结构 $\imath$: $\mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$，其定义为 $(\imath f)\hat{}(p) = i\,\mathrm{sign}(p)\hat{f}(p), f \in \mathfrak{L}$。因此，$\mathfrak{L}$ 成为一个复希尔伯特空间，其复内积为

$$(f, g) := \langle f, g \rangle - i\langle f, \imath g \rangle = \int_0^{+\infty} p\hat{f}(-p)\hat{g}(p)\, dp, \qquad f, g \in \mathfrak{L},$$

and

$$\beta(f, g) := \Im(f, g) = -\langle f, \imath g \rangle = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(-p)\widehat{g'}(p)\, dp, \qquad f, g \in \mathfrak{L},$$

是 $\mathfrak{L}$ 上的辛形式。

命题 B.2. $C_c^\infty(\mathbb{R})$ 在 $\mathfrak{L}$中稠密。

证明。我们先注意到，对于 $f \in \mathfrak{L}$，有

$$\|f - (\chi_{[\varepsilon, +\infty)}\hat{f})\check{}\|^2 = \int_0^{\varepsilon} p|\hat{f}(p)|^2 dp \to 0$$

如 $\varepsilon \to 0$，因此只需证明，对于任意 $\varepsilon > 0$，$C_c^\infty(\mathbb{R})$ 在由其傅里叶变换在 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 中为零的元素 $f \in \mathfrak{L}$ 所构成的子空间中稠密。设 f 是 $\mathfrak{L}$ 中的这样一个元素。那么显然，$\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$，因此 $f \in L^2(\mathbb{R})$。现在，给定一个非负的

$\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$，其支集包含于 $[-1,1]$，且满足 $\int_{\mathbb{R}} \rho = 1$，通过 $\rho_n(x)$ 可得到一列磨光子：$= n\rho(nx)$， $x \in \mathbb{R}$， $n \in \mathbb{N}$。于是，对所有 $n \in \mathbb{N}$， $\rho_n * f$ 属于 $C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{L}$，且其所有导数均为 $(\rho_n * f)^{(h)} = \rho_n^{(h)} * f$（由杨不等式），并且

$$\|\rho_n * f - f\|^2 = \int_0^{+\infty} p|\sqrt{2\pi}\hat{\rho}(p/n) - 1|^2 |\hat{f}(p)|^2 \to 0$$

当 $n \to +\infty$ 时，由控制收敛。于是只需证明：若 f 及其所有导数都属于$C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$，则它可在 $\mathfrak{L}$ 中用 $C_c^\infty(\mathbb{R})$ 函数来逼近。为此，取一个非负的 $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$，使得 supp $\chi \subset [-2,2]$ 且 $\chi = 1$ 在$[-1,1]$上，并由 $\chi_n(x) := \chi(x/n)$， $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ 定义一列截断函数。则$g_n := \chi_n f - f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$ 且

$$\|g_n\|^2 = -\beta(\imath g_n, g_n) = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (\imath g_n)(x) g_n'(x)\, dx \le \frac{1}{2}\|g_n\|_{L^2(\mathbb{R})}\|g_n'\|_{L^2(\mathbb{R})}, \tag{42}$$

因此它is足以证明 g_n， $g_n' \to 0$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中。显然 $g_n \to 0$。此外 ，

$$\|\chi_n' f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{n^2}\int_{\mathbb{R}} |\chi'(x/n) f(x)|^2 dx \le \frac{\|\chi'\|_\infty^2}{n^2}\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \to 0,$$

而

$$\|(\chi_n - 1) f'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \le \int_{|x|>2n} |f'(x)|^2 dx \to 0.$$

因此当 $n \to +\infty$ 时， $g_n' \to 0$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中，证明完毕。 □

由于唯一的常数 $f \in \mathfrak{L}$ 处处为零，我们可以考虑（代数）直和 $X := \mathfrak{L} + \mathbb{R}$，其商空间 $\mathcal{H} := X/\mathbb{R}$ 与元素 $f \in \mathfrak{L}$的等价类集合相同，我们将其记作 $[f]$；若不会引起混淆，也可简记为 f。因此，复结构 $\imath$、复内积 $(\cdot,\ \cdot)$ 和辛结构 β 都可提升到 $\mathcal{H}$ 上，从而

$$\imath[f] := [\imath f], \quad ([f],[g]) := (f,g), \quad \beta([f],[g]) := \beta(f,g), \quad f,g \in \mathfrak{L},$$

使 $\mathcal{H}$ 成为一个复希尔伯特空间。

从 $\mathfrak{L}$ 转到 $\mathcal{H}$ 的原因是，在 $\mathcal{H}$ 上存在 PSL(2， $\mathbb{R}$) 的自然酉作用，定义如下。我们通过立体投影，将圆 $\mathbb{S}^1$ （视为 $\mathbb{C}$的子集）与 $\mathbb{R}$ 的一点紧化 $\bar{\mathbb{R}}$ 相认同，该投影将 $-1 \in \mathbb{S}^1$ 映射到 $\infty \in \bar{\mathbb{R}}$。因此，我们可以将 $\mathbb{S}^1$ 上的函数与 $\bar{\mathbb{R}}$ 上的函数（以及它们在 $\mathbb{R}$上的限制）相认同。

命题 B.3. 若 $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$，则 $f - f(\infty) \in \mathfrak{L}$。

证明。 事实上， $g(x) := f(x) - f\,\infty \sim \frac{1}{x}$对于 $|x| \to +\infty$，这意味着 $g \in L^2(\mathbb{R})$。此外，由于 g是光滑的，$\hat{}g$是快速衰减的，因此 $\hat{}g \in L^2(\mathbb{R}_+,\ p\,dp)$。□

因此，根据命题 B.2， $\mathcal{H}$ 是关于范数 $\|\cdot\|$的 $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ 的完备化，进而它与 U(1)流[10]的单粒子空间重合。Möbius 群 PSL(2，$\mathbb{R}$) 的最低权为 1 的酉不可约正能量表示 U 随后作用于 $\mathcal{H}$，并由以下内容确定

$$(U(g)f)(x) = f(g^{-1}x), \qquad f \in C^\infty(\mathbb{S}^1),\, x \in \mathbb{R},$$

其中 $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 在 $\mathbb{R}$ 上的作用为 $gx = \frac{ax+b}{cx+d}$，

$x \in \mathbb{R}$。

命题 B.4. $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 U-不变复子空间。

证明. U-不变性显然。接下来，若 $f_k(z) := z^k$, $z \in \mathbb{S}^1$, $k \in \mathbb{Z}$，通过围道积分计算关于 $x \in \mathbb{R}$ 的傅里叶变换，容易看出 $(\iota(f_k - f_k(\infty)))\hat{}(p) = i\,\mathrm{sign}(p)(f_k - f_k(\infty))\hat{}(p) = i\,\mathrm{sign}(k)(f_k - f_k(\infty))\hat{}(p)$， $k \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{R}$。此外，$f \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ 当且仅当它可以展开为 $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k f_k$，其中 $c_k = \overline{c_{-k}} \in \mathbb{C}$ 快速衰减；并且，由于我们在 $\mathcal{H}$ 中将常数商去，因此可以假设 $c_0 = 0$。然后，根据控制收敛，级数 $f - f(\infty) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f_k - f_k(\infty))$ 在 $L^2(\mathbb{R}, dx)$ 中收敛，$(f - f(\infty))\hat{} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f_k - f_k(\infty))\hat{}$ 也同样如此。进而，这意味着 $(f - f(\infty))\hat{}(p) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f_k - f_k(\infty))\hat{}(p)$ 对几乎处处的 $p \in \mathbb{R}$ 成立，因此作为 $\mathcal{H}$ 中的元素，$\iota f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} i\,\mathrm{sign}(k) c_k f_k \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$。□

令 $\mathcal{I}$ 为 $\mathbb{S}^1 \equiv \mathbb{R}$的真开非稠密区间集合。对每个 $I \in \mathcal{I}$，我们都可以关联一个 $\mathcal{H}$的闭实子空间

$$H(I) := \{f \in \mathcal{H} : f \in C^\infty(\mathbb{S}^1),\, \mathrm{supp}\, f \subset I\}^-$$

（范数闭包），从而得到一个莫比乌斯协变的闭实子空间网 $I \mapsto H(I)$。因此，对所有 $I \in \mathcal{I}$， $H(I)$ 在 $\mathcal{H}$ 中都是标准的，并满足 Bisognano-Wichmann性质

$$\Delta_{H(I)}^{it} = U(\delta_I(-2\pi t)), \qquad t \in \mathbb{R},$$

其中 δ_I： $\mathbb{R} \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 是区间 I的“膨胀变换”单参数群，即 $\delta_I(s) = g_I^{-1}\delta_{\mathbb{R}_+}(s)g_I$， $s \in \mathbb{R}$，其中 $g_I \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 满足 $g_I I = \mathbb{R}_+$，且 $\delta_{\mathbb{R}_+}(s)x = e^s x$， $x \in \mathbb{R}$。特别地，当 $B := (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ 时，可得

$$\delta_B(s)x = \frac{\cosh(s/2)x + \sinh(s/2)}{\sinh(s/2)x + \cosh(s/2)} = \frac{1 + x - e^{-s}(1-x)}{1 + x + e^{-s}(1-x)}, \qquad x, s \in \mathbb{R}.$$

命题 B.5。 对于所有 $I \in \mathcal{I}$、 $C^\infty(\mathbb{S}^1)$，都是模哈密顿量 $\log \Delta_{H(I)}$ 的核。此外，对于 $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$，

$$(\iota \log \Delta_{H(\mathbb{R}_+)} f)(x) = 2\pi x f'(x), \qquad (\iota \log \Delta_{H(B)} f)(x) = 2\pi(1 - x^2) f'(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \quad (43)$$

证明。 根据命题 B.4，只需证明 $C^\infty(\mathbb{S}^1)$包含于 $\log\ \Delta_{H(I)}$ 的定义域中；由 M¨obius 协变性，只需对 $I = \mathbb{R}_+$ 证明这一点。为此，首先注意到，由于 $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ 蕴含 $f'(x) \sim \frac{c}{x^2}$ for $|x| \to +\infty$，函数

$h(x) := xf'(x)$，$x \in \mathbb{R}$，属于 $C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$，因此也属于 $\mathfrak{L}$。于是我们定义

$$g_t(x) := \frac{1}{t}[\Delta_{H(\mathbb{R}_+)}^{it} f - f](x) - 2\pi h(x) = \frac{2\pi}{t}\int_0^t ds\,[h(x) - e^{2\pi s} h(e^{2\pi s} x)], \qquad x \in \mathbb{R},$$

并注意到，由于（42），

$$\left\| \frac{1}{t}[\Delta_{H(\mathbb{R}_+)} f - f] - 2\pi h \right\|^2 = \|g_t\|^2 \le \frac{1}{2}\|g_t\|_{L^2(\mathbb{R})}\|g_t'\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

显然，当 $t \to 0$ 时，$g_t \to 0$ 在 $\mathbb{R}$ 上逐点成立；又由于 $h(x) \sim \frac{c}{x}$ 对 $|x| \Rightarrow +\infty$ 成立，且 h 在 $\mathbb{R}$ 上有界，容易看出，在零点的某个邻域内，对 t，g_t 都可以一致地被一个 $L^2(\mathbb{R})$ 函数所控制。因此，根据控制收敛定理，$\|g_t\|_{L^2(\mathbb{R})} \to 0$。由于当 $|x| \to +\infty$ 时，$h'(x) = 2f'(x) + xf''(x) \sim \frac{c'}{x^2}$，同样的论证也可用于证明 $\|g_t'\|_{L^2(\mathbb{R})} \to 0$，从而证明 $f \in D(\log \Delta_{H(\mathbb{R}_+)})$，并且（43）中的第一个公式成立。考虑到 $x \mapsto (1-x^2)f'(x)$ 属于 $\mathfrak{L} + \mathbb{R}$，即可类似地得到（43）中的第二个公式。□

我们也记录如下一般事实。

命题 B.6. 设 H 为复希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的标准子空间。则 $\log \Delta_H$ 的任一核也是熵算子 $\mathcal{E}_H$ 的核。

证明。 我们回顾 [7, 定理 2.2]，即 $\mathcal{E}_H$ 是以下算子的闭包

$$-(1-\Delta_H)^{-1}\log\Delta_H + J(1-\Delta_H)^{-1}\Delta_H^{1/2}\log\Delta_H,$$

并且由于函数 $\lambda \mapsto \log\frac{\lambda}{1-\lambda}$、$\lambda \mapsto \sqrt{\lambda}\log\frac{\lambda}{1-\lambda}$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上连续，且对 $\lambda \to 0^+$ 与 $\lambda \to +\infty$ 以 $c|\log\lambda|$ 为界，故由谱演算可得该结论。□

推论 B.7. 对所有 $I \in \mathcal{I}$，$C^\infty(\mathbb{S}^1)$ 是熵算子 $\mathcal{E}_{H(I}$ 的核 $)$.

现在我们考虑定义在 $\mathcal{H}$ 上的实二次型 $q_{\mathbb{R}_+}$：$D(q_{\mathbb{R}_+}) \to \mathbb{R}$ 与 q_B：$D(q_B) \to \mathbb{R}$，定义如下：

$$D(q_{\mathbb{R}_+}) := \{f \in \mathcal{H} : f'|_{\mathbb{R}_+} \in L^2(\mathbb{R}_+, x\,dx)\}, \qquad q_{\mathbb{R}_+}(f) := \pi\int_0^{+\infty} x|f'(x)|^2 dx,$$
$$D(q_B) := \{f \in \mathcal{H} : f'|_B \in L^2(B, (1-x^2)\,dx)\}, \qquad q_B(f) := \pi\int_{-1}^{1} (1-x^2)|f'(x)|^2 dx.$$

我们将使用相同的符号来表示通过极化由这些二次型诱导的双线性型。

命题 B.8. 形式$q_{\mathbb{R}_+}$、q_B 是闭的。

证明. 我们对 q_B证明该陈述，$q_{\mathbb{R}_+}$ 的证明完全类似。设$\{f_n\} \subset D(q_B)$依范数收敛于某个 $f \in \mathcal{H}$，并且当$n, m \to +\infty$时有 $q_B(f_n - f_m) \to 0$。于是 $\{f_n'|_B\}$ 在 $L^2(B, (1-x^2)\,dx)$中收敛于某个 $g \in L^2(B, (1-x^2)\,dx)$，因此只需证明 $f'|_B = g$。为此，取 $\varphi \in C_c^\infty(B)$并计算

$$\begin{aligned}\langle f', \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle = -2\Im(f, \varphi) = \lim_{n\to+\infty} -2\Im(f_n, \varphi) = \lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^{1} dx f_n'(x)\varphi(x)\\ = \lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^{1} dx(1-x^2)f_n'(x)\frac{\varphi(x)}{1-x^2} = \int_{-1}^{1} dx(1-x^2)g(x)\frac{\varphi(x)}{1-x^2} = \langle g, \varphi\rangle,\end{aligned}$$

其中，在第二个等式中，我们根据 $\mathcal{H}$ 中标量积的定义使用了傅里叶变换 f、φ；在第三个等式中，使用了 $\{f_n\}$ 范数收敛到 f；在第四个等式中，再次使用了标量积的定义以及 f_n' 是定义在 supp $\varphi \subset B$上的函数这一事实；在第六个等式中，使用了 $\{f_n'|_B\}$ 在 $L^2(B, (1-x^2)\,dx)$中收敛到 g。至此，命题得证。□

由于 q_B 显然非负，因此存在一个定义在 $\mathcal{H}$ 上的实自伴算子 A_B（将 $\mathcal{H}$ 视为实希尔伯特空间，其标量积取原标量积的实部），使得

$$q_B(f, g) = \Re(f, A_B g), \qquad f, g \in D(q_B),$$

对于$q_{\mathbb{R}_+}$，也有类似的结论。

现在我们可以证明本附录的主要结果了。

定理 B.9。二次型$q_{\mathbb{R}_+}$、q_B 分别与熵二次型$S(\cdot|H(\mathbb{R}_+))$、$S(\cdot|H(B))$一致。

证明。同样，我们只证明 q_B 的情形。首先注意到，显然$C^\infty(\mathbb{S}^1) \subset D(q_B)$。此外，给定 $g \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$，令 $h_a(x) := (a^2 - x^2)g'(x)$，$a, x \in \mathbb{R}$。然后，再次利用 (42) 可验证 $\chi_{(-1+\varepsilon,1-\varepsilon)}h_{1-\varepsilon} \to \chi_B h_1$ 属于 $\mathcal{H}$，其中 $\varepsilon \to 0$；接着如命题 B.2 的证明中那样对 $\chi_{(-1+\varepsilon,1-\varepsilon)}h_{1-\varepsilon}$ 进行磨光，得到一列 $C_c^\infty(\mathbb{R})$ 函数，由此可得 $\chi_B h_1 \in H(B)$。类似地，$(1-\chi_B)h_1 \in H(B^c) = H(B)'$，因此，由 (43) 可得，

$$\mathcal{E}_{H(B)}g = \imath P_{H(B)}\imath \log \Delta_{H(B)}g = \imath\chi_B h_1,$$

并且，对所有 $f \in D(q_B)$，

$$q_B(f, g) = \pi\int_{-1}^{1} dx\,(1-x^2)f'(x)g'(x) = \Re(f, \mathcal{E}_{H(B)}g) = \Re(f, A_B g).$$

因此，A_B 是$\mathcal{E}_{H(B)}|_{C^\infty(\mathbb{S}^1)}$ 的自伴扩张。根据推论 B.7，它本质自伴，因此最终有 $A_B = \mathcal{E}_{H(B)}$ 和 $q_B = S(\cdot|H(B))$。□

因此，对于所有 $f \in \mathcal{H}$，我们可以写成:

$$S(f|H(B)) = \pi\int_{-1}^{1}(1-x^2)|f'(x)|^2 dx, \qquad S(f|H(\mathbb{R}_+)) = \pi\int_0^{+\infty} x|f'(x)|^2 dx,$$

按照惯例，如果（相应的限制） f'不属于 $L^2(B,\ (1-x^2)\ dx)$ 和 $L^2(\mathbb{R}_+,\ x\,dx)$，则右侧分别为 $+\infty$ 。

致谢。 我们感谢 Vincenzo Morinelli 就附录 B 的相关主题进行了多次有益的讨论。R.L. 和 G.M. 对数学系、罗马第二大学授予的 Excellence Project 2023-2027 Mat-Mod@TOV 表示感谢。G.M. 的工作部分得到 INdAM-GNAMPA 以及罗马第二大学 OANGQS 项目资助，CUP E83C25000580005。

参考文献

[1] R. Brunetti, D. Guido, R Longo, 模局域化与维格纳粒子，《数学物理评论》14 (7 & 8), (2002) 759–786.[2] H. Bostelmann, D. Cadamuro, C. Minz, 双锥的模算子对质量的依赖，《安利·庞加莱年鉴》24, 3031–3054 (2023)[3] D. Buchholz, C. D'Antoni, R. Longo, 共形场论中的核性与热态，《数学物理通讯》270 (2007), 267–293.[4] C.G. Callan, S. Coleman, R. Jackiw, 一种新的改进型能量动量张量，《物理年鉴》59, 42-73 (1970)[5] H. Casini, 相对熵与贝肯斯坦界，《经典与量子引力》25 (2008), 205021.[6] F. Ceyhan, T. Faulkner, 从平均零能条件推出量子零能条件，《数学物理通讯》377, no.2, 999–1045 (2020).[7] F. Ciolli, R. Longo, G. Ruzzi, 波中的信息，《数学物理通讯》379, 979–1000, (2020).[8] F. Ciolli, R. Longo, A. Ranallo, G. Ruzzi, 相对熵与弯曲时空，《几何物理杂志》172 104416 (2022).[9] F. Figliolini, D. Guido, 自由标量场的 Tomita 算子，《亨利·庞加莱研究所理论物理年鉴》51(4), 419–435 (1989).[10] D. Guido, R. Longo, H.-W. Weisbrock, 超共形网的扩张与超选择结构，《数学物理通讯》192 (1998), 217–244.[11] P.D. Hislop, R. Longo, 与自由无质量标量场论相关的局部代数的模结构，《数学物理通讯》84, (1982), 71–85.[12] S. Hollands, R. Longo, 近似局域带电态的贝肯斯坦界，《数学物理评论》（即将刊出），H. Araki 纪念专刊.[13] S. Hollands, R. Longo, 量子零能条件的新证明，《数学物理通讯》《数学物理通讯》406, 269 (2025), H. Araki 纪念专刊.[14] S. Hollands, R. Longo, G. Morsella, 研究进行中[15] F. La Piana, G. Morsella, 费米无质量模哈密顿量，《数学物理通讯》81, (2025) 406, H. Araki 纪念专刊.[16] R. Longo, 实希尔伯特子空间、模理论、 $SL(2,R)$与共形场论，载于：《锡比乌的冯·诺伊曼代数》，Theta 高等数学丛书, 10, 33–91, Theta，布加勒斯特，(2008).[17] R. Longo, 局域态的熵分布，《数学物理通讯》373, 473–505 (2020).

[18] R. Longo，相干激发的熵，《数学物理快报》109, 2587-2600 (2019)。
[19] R. Longo，信号通信与模理论，《数学物理通讯》403, 473– 494 (2023)。
[20] R. Longo，量子场论中的贝肯斯坦型界，《数学物理通讯》406, 95 (2025)。
[21] R. Longo， V. Morinelli，由对称性导出的熵界，《数学物理评论》H. Araki 纪念专刊（即将刊出）。[22] R. Longo， V. Morinelli， K.H. Rehren，无限自旋粒子局域于何处，《数学物理通讯》345 (2016), 587–614。[23] R. Longo， G. Morsella，无质量模哈密顿量，《数学物理通讯》400(2), 1181–1201 (2023)。[24] V. Morinelli，标准子空间网上的比萨尼亚诺–维希曼性质：若干充分条件，《安利·庞加莱年鉴´e 19, 937–958 (2018)。[25] A. C. Wall，经典与量子场论中的能量密度下界，《物理评论快报》118, 151601 (2017)。