arXiv:2602.03610v1 [math.DS] 3 Feb 2026

双曲球流周期射线的长度谱

VESSELIN PETKOV

Abstract. 我们研究由所有本原周期反射射线的长度 $\mathcal{L}$ 构成的若干个紧致严格凸互不相交障碍物的长度谱。我们证明，存在满足 $\{\ell_j\}$, $\{m_j\}$ 且 $\ell_j \in \mathcal{L}$, $m_j \in \mathbb{N}$ 的序列，使得与动力学 ζ 函数 $\eta_D(s)$相关的条件（LB）成立。该条件意味着狄利克雷拉普拉斯算子的散射共振数量存在下界。对于 $\mathcal{L}$中对应于具有偶数次反射的周期射线长度的一个小子集，在某个分离条件下，我们构造了这样的序列。我们的分离条件弱于长度谱 $\mathcal{L}$. 指数分离的假设。此外，我们证明相空间中的周期轨道是指数分离的。

关键词：台球流、周期反射射线、长度谱、分离条件

1. Introduction

设 D_1、.....、$D_r \subset \mathbb{R}^d$、 $r \geqslant 3$、 $d \geqslant 2$ 为具有光滑边界的紧致严格凸不相交障碍物，并设 $D = \bigcup_{j=1}^{r} D_j$. 我们假设每个 D_j 的内部均非空，且在全文中均作如下无日蚀条件假设

$$D_k \cap \text{convex hull}\,(D_i \cup D_j) = \emptyset, \tag{1.1}$$

对于任意 $1 \leqslant i, j, k \leqslant r$，使得 $i \neq k$且 $j \neq k$。在此条件下，$\Omega = \mathbb{R}^d \setminus \mathring{D}$ 中的台球流 φ_t 的所有周期轨道都是普通反射轨道，不会与边界∂D发生相切交点。我们考虑（非掠射）台球流 φ_t （定义见 [CP，第 2 节。2], [Pet25b，第 2] 节），并将周期轨道称为周期射线。对于任意周期射线 γ，用$\tau(\gamma) > 0$表示其周期，用 $\tau^\sharp(\gamma) > 0$ 表示其本原周期，并用 $m(\gamma)$表示其在障碍物处的反射次数。用 $\mathcal{P}$ 表示所有有向周期射线的集合，并用 P_γ, $\gamma \in \mathcal{P}$表示相应的线性化庞加莱映射（定义见 [PS17，第 2 节。3] ）。考虑 1

狄利克雷动力学 ζ 函数

$$\eta_{\mathrm{D}}(s)=\sum_{\gamma\in\mathcal{P}}(-1)^{m(\gamma)}\frac{\tau^{\sharp}(\gamma)\mathrm{e}^{-s\tau(\gamma)}}{|\det(\mathrm{Id}-P_{\gamma})|^{1/2}},\ \mathrm{Re}\,s\gg 1. \tag{1.2}$$

我们有如下估计（例如参见 [Pet99，附录]）

$$C_1e^{\mu_1\tau(\gamma)}\leq|\det(\mathrm{Id}-P_{\gamma})|\leq e^{\mu_2\tau(\gamma)},\ \forall\gamma\in\mathcal{P} \tag{1.3}$$

其中常数为 $C_1>0,\quad 0<\mu_1<\mu_2$。级数 $\eta_D(s)$绝对收敛，且当 $\mathrm{Re}\,s$充分大时不为零

ζ 函数 $\eta_D(s)$对于分析与 $\mathbb{R}^d\setminus D$中拉普拉斯算子相关的散射共振分布十分重要，其中在 ∂D. 上施加狄利克雷边界条件。更多详情请参见[Ika90b，第 1], [节，以及 CP，第 1]节。 [CP 的定理 1 和定理 4] 证明了 η_D 可亚纯延拓至 $\mathbb{C}$，且具有简单极点和整数留数。有人猜想 η_D 无法延拓为整函数。对于具有实解析边界的障碍物，这一猜想已由 [CP，定理 3] 证明；对于直径足够小且边界光滑的障碍物，则由 [Ika90b], [Sto09]和 C^∞证明。

考察 $\eta_D(s)$ 的解析奇点之所以困难，是因为狄利克雷级数 (1.2) 的系数会改变符号，从而可能产生抵消。为研究这些抵消，引入分布

$$\mathcal{F}_{\mathrm{D}}(t)=\sum_{\gamma\in\mathcal{P}}\frac{(-1)^{m(\gamma)}\tau^{\sharp}(\gamma)\delta(t-\tau(\gamma))}{|\det(\mathrm{Id}-P_{\gamma})|^{1/2}}\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^+).$$

设 $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}_+)$ 是一个偶函数，满足 $\mathrm{supp}\ \psi\subset[-1,1]$，且 $\psi(t)=1$（当 $|t|\leqslant 1/2.$ 时）。设 $(\ell_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 和 $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是正数序列，满足 $\ell_j\to\infty$, $m_j\to\infty$（当 $j\to\infty$ 时），并且

$$\ell_j\geqslant d_0=2\min_{k\neq m}\mathrm{dist}\,(D_k,D_m)>0,\ m_j\geqslant\max\{1,\frac{1}{d_0}\}.$$

定义

$$\psi_j(t)=\psi(m_j(t-\ell_j)),\ t\in\mathbb{R}.$$

定义 1.1。 如果存在常数 $\alpha_0>0,\alpha_1>0,c_1>0$，使得对所有 $\beta\geq\alpha_1$，都存在序列 (ℓ_j),(m_j)，其中 $\ell_j\nearrow\infty$ 在 $j\to\infty$ 时满足 $e^{\beta\ell_j}\leqslant m_j\leqslant\mathrm{e}^{2\beta\ell_j}$，则称 $F_D(t)$ 满足条件 (LB)

$$|\langle\mathcal{F}_{\mathrm{D}},\psi_j\rangle|\geqslant c_1\mathrm{e}^{-\alpha_0\ell_j},\ \forall j. \tag{1.4}$$

估计 (1.4) 为射线 $\gamma \in \mathcal{P}$ 长度对应的 $\langle F_D, \psi_j \rangle$ 中各项贡献之和给出了指数级小的下界

$$\tau(\gamma) \in (\ell_j - e^{-m_j}, \ell_j + e^{-m_j}),\ j \in \mathbb{N}.$$

若满足 (LB)，则可得到两个重要推论：

(i) Ikawa 引入的关于散射共振的修正的拉克斯-菲利普斯猜想（MLPC） [Ika90a，第 212] 页成立。（MLPC）指出，存在一个条带 $\{z \in \mathbb{C}:\ 0 < \operatorname{Im} z \leq \alpha\}$，其中包含狄利克雷拉普拉斯算子在 $\mathbb{R}^d \setminus D$ 中的无穷多个散射共振。关于散射共振的定义及更精确的结果，读者可参阅 [LP89] 中针对 d 奇数情形的第4章，以及 [DZ19]中的第4章。

(ii) 函数 $\eta_D(s)$ 在某个条带$\{s \in \mathbb{C}:\ \operatorname{Re} s \geq \delta\}$ 中有无穷多个极点，并且我们对该条带内极点的计数函数有一个下界（见 [Pet25b，定理 1。1]）。事实上， [Pet25b中的定理 11] 是在假设 $\eta_D(s)$不能延拓为整函数的条件下陈述的；然而，只要存在满足（1.4）的序列(ℓ_j)、(m_j)，证明仍然成立。

另一方面，Ikawa [Ika90a，命题 2。3] 证明了，若$\eta_D(s)$不能延拓为整函数，则（LB）对 F_D.成立。对于具有 C^∞ 边界的障碍物，$\eta_D(s$的某些条件已在[Pet25a]中建立，这些条件蕴含其不能延拓为整函数。有趣的是，找出导致（LB）成立、且与 $\eta_D(s)$的极点是否存在无关的条件。本文研究这一问题。

为了构造满足 $\{\ell_j\}$，$\{m_j\}$ （1.4）的序列，我们必须研究周期射线的周期分布，这本身也具有研究价值。令 $\Pi \subset \mathcal{P}$ 为台球流的本原周期轨道集合，φ_t 并令 $\Pi_+ \subset \Pi$ （相应地，$\Pi_- \subset \Pi$）为反射次数为偶数（相应地，为奇数）的周期射线集合。长度的计数函数满足

$$\sharp\{\gamma \in \Pi:\ \tau(\gamma) \leqslant x\} \sim \frac{\mathrm{e}^{hx}}{hx},\quad x \to +\infty, \tag{1.5}$$

在某些 $h > 0$ （例如，参见 [PP90，定理 6。9] 关于弱混合悬挂符号流的结果，以及 [Ika90a], [Mor91] 关于与台球流相关的符号模型的结果）。此外，我们有如下渐近式（见 [Gio10，定理 2]）

$$\sharp\{\gamma \in \Pi_\pm:\ \tau(\gamma) \leqslant x\} \sim \frac{\mathrm{e}^{hx}}{2hx},\quad x \to +\infty. \tag{1.6}$$

引入长度谱 $\mathcal{L} = \{\tau(\gamma):\ \gamma \in \Pi\}$。我们称 $\mathcal{L}$ 指数分离，如果存在 $\nu > 0$，使得对所有 $\ell,\ \ell' \in \mathcal{L}$

我们有

$$|\ell - \ell'| \geq e^{-\nu \max\{\ell,\ell'\}} \text{ if } \ell \neq \ell'. \tag{1.7}$$

由下文的定理 1.1 可知，若 $\mathcal{L}$ 指数分离，则条件 (LB) 成立。

我们回顾一些关于长度谱 $\mathcal{L}.$ 的指数分离的正面和负面结果。对于具有负曲率的紧致黎曼流形 M，使 $\mathcal{L}$ 不指数分离的度量在 $C^k, k > 3$ 拓扑中是拓扑泛型且稠密的（参见 [DJ16，定理 4.1]）。另一方面，Schenck 在 [Sch20，定理 1]）中证明，使 $\mathcal{L}$ 指数分离的度量集合在 $C^k, k \geq 2$ 拓扑中稠密，并且 (1.7) 成立，其中 $\nu = \nu_k > 0$ 取决于 k 和动力学特征。然而， $\nu_k \to +\infty$ 如 $k \to \infty$，因此用具有指数分离长度谱的 C^∞ 度量进行逼近仍是一个开放问题。

对于台球流 φ_t 长度 $\ell \in \mathcal{L}$对一般障碍物是有理无关的（见 [PS17，定理 6.2。3]）。这一结果表明，一般而言，不同周期射线的长度之间存在间隙。然而，对这些间隙的估计以及具有指数分离 $\mathcal{L}$ 的一般障碍物的存在性似乎是一个困难的未决问题。与上文所述的度量情形不同，对于障碍物，我们一般只能扰动边界，而 $\mathbb{R}^d \backslash \bar{D}$ 中的射线始终是线段的并。因此，对边界的扰动比在 [DJ16] 和 [Sch20] 中所研究的度量扰动要严格得多。在第 4 节中，我们证明相空间中的周期轨道是指数分离的。这类似于 [Sch20] 中的命题 2。这一结果可视为分析指数小间隙存在性的第一步，这些间隙出现在 $\mathcal{L}$中，且针对一般障碍物。

需要指出的是，在（1.4）中涉及迭代射线的贡献，这些射线的周期属于集合 $\{m\ell : \ \ell \in \mathcal{L}, \ m \geq 2\}$。因此，即使在 $\mathcal{L}$ 指数分离的情形下，为分析（LB），（1.4）中与这些射线相关的项也必须加以估计。本文证明，关于射线的一些非常小的子集 $\gamma \in \Pi_+$ 的分离条件蕴含（LB）。我们的主要结果如下

定理 1.1. 假设存在 $\delta > 0$、 $0 < \rho < \min\{1, h^{-1}\}$、 $c_0 > 5 - \frac{h\rho}{3}$ 以及序列 $q_j \nearrow +\infty$，使得

$$\sharp\big\{\gamma \in \Pi_+ : \ q_j - \rho < \tau(\gamma) \leq q_j,$$
$$|\tau(\gamma) - \tau(\gamma')| \geq e^{-\delta \max\{\tau(\gamma),\tau(\gamma')\}}, \ \forall \gamma' \in \Pi \setminus \{\gamma\}\big\} \geq \frac{c_0 \rho e^{\frac{hq_j}{3}}}{8q_j}. \tag{1.8}$$

则条件(LB)对 F_D. 成立

在引理 3.1 中，我们证明对于每个足够小的 $\epsilon > 0$ 和 $q_j \geq C(\epsilon)$，都有下界

$$\sharp\{\gamma \in \Pi_+ : q_j - \rho < \tau(\gamma) \leq q_j\} \geq (1-\epsilon)\frac{\rho e^{hq_j}}{8q_j},$$

而（1.8）中的分离假设仅涉及 $\mathcal{O}\left(\begin{smallmatrix}\rho e^{hq_j} \\ 8q_j\end{smallmatrix}^3\right)$ 射线。因此，我们称 $\overline{\{\gamma \in \Pi_+}$ 的一个非常小的子集： $q_j - \rho < \tau(\gamma) \leq q_j\}$ 必须是指数分离的。此外，在定理 1.1 中，对于 $\gamma \in \Pi_-$.的长度并不存在分离条件。

本文的组织如下。在第 2 节中，我们得到具有奇数和偶数次反射的迭代射线数量的上界和下界。这些界本身也具有独立的意义。特别地，我们证明，长度属于 $[d_0/2, q]$ 的迭代周期射线数量少于长度属于同一区间的本原周期射线数量。在第 3 节中，我们考察小区间 $]q_j - \rho$中 $q_j]$ 周期射线的长度数量，并证明定理 1.1。第 4 节研究相空间中周期射线的指数分离。证明的思想基于这样一个事实：不同的周期射线遵循不同的构型（参见 [PS17，推论 2.2。4]）。由于我们必须研究一些具有相切线段的射线，分析过程颇为技术性。最后，在第 5 节中，我们针对一般障碍物提出一个开放问题。

2. Estimation of the number of iterated rays

显然， $d_0 \leq \tau(\gamma) \ \forall \gamma \in \mathcal{P}$. 给定 $q \gg 1$，引入迭代射线周期的计数函数

$$N_{odd}(q) = \sharp\{\gamma \in \Pi_- : (2k+1)\tau(\gamma) \leq q,\ k \in \mathbb{N},\ k \geq 1\},$$
$$N_{even}(q) = \sharp\{\gamma \in \Pi : 2k\tau(\gamma) \leq q,\ k \in \mathbb{N},\ k \geq 1\}.$$

因此对于 $q \geq 4d_0$

$$(2k+1)d_0 \leq (2k+1)\tau(\gamma) \leq q \tag{2.1}$$

意味着 $k \leq [\frac{q}{2d_0} - 1/2] = p_q$， $p_q \geq 1$。因此，在 $N_{odd}(q)$的定义中有 $1 \leq k \leq p_q$，而在 $N_{even}(q)$中有 $1 \leq k \leq [\frac{q}{2d_0}]$. 如果 $\gamma \in \Pi_-$，— γ 的反射次数 $m(\gamma)$为奇数，并且迭代射线

$$\gamma_{2k+1} = \underbrace{\gamma \cup \gamma \cup ... \cup \gamma}_{(2k+1)\ times}$$

长度为（$2k+1$）τ（γ）也会有奇数次反射。因此， γ_{2k+1} 在（1.2）中的贡献包含一个负因子 $(-1)^{(2k+1)m(\gamma)}$.

命题 2.1。 设 $0<\epsilon<1/4$ 为固定值。那么存在 $B_\epsilon \gg 1$，使得对于 $q \geq B_\epsilon$，我们有

$$(1-\epsilon)\frac{3e^{\frac{hq}{3}}}{2hd} < N_{odd}(q) \leq (1+\epsilon)\frac{3e^{\frac{hq}{3}}}{2hq}, \tag{2.2}$$

$$(1-\epsilon)\frac{2e^{\frac{hq}{2}}}{hd} < N_{even}(q) \leq (1+\epsilon)\frac{2e^{\frac{hq}{2}}}{hq}. \tag{2.3}$$

证明。令

$$N_{odd}(q) = \sum_{k=1}^{p_q} \sharp\big\{\gamma \in \Pi_- : \tau(\gamma) \leq \frac{q}{2k+1}\big\}.$$

应用（1.6），存在 $C_\epsilon > d_0+1$ 使得对于 $x \geq C_\epsilon$ 我们有

$$(1-\frac{\epsilon}{2})\frac{e^{hx}}{2hx} \leq \sharp\{\gamma \in \Pi_\pm : \tau(\gamma) \leq x\} \leq (1+\frac{\epsilon}{2})\frac{e^{hx}}{2hx}. \tag{2.4}$$

固定 C_ϵ 并取 $q \geq B_\epsilon > \max\{5C_\epsilon, 4d_0\}$。我们有如下和式

$$N_{odd}(q) = \sum_{[\frac{q}{C_\epsilon}] \geq 2k+1 \geq 3} \sharp\big\{\gamma \in \Pi_- : \tau(\gamma) \leq \frac{q}{2k+1}\big\}$$

$$+ \sum_{[\frac{q}{C_\epsilon}] < 2k+1 \leq \frac{q}{d_0}} \sharp\big\{\gamma \in \Pi_- : \tau(\gamma) \leq \frac{q}{2k+1}\big\} = J_1(q) + J_2(q).$$

存在一个常数 $A_\epsilon > 1$，使得

$$\sharp\big\{\gamma \in \Pi_- : \tau(\gamma) \leq C_\epsilon\big\} \leq A_\epsilon.$$

根据（2.1）和（2.4），可推出

$$J_1(q) \leq (1+\frac{\epsilon}{2})\frac{3e^{\frac{hq}{3}}}{h}\Big(\frac{1}{2q} + \frac{1}{3}\sum_{k=2}^{m(\epsilon,q)} \frac{e^{\frac{hq}{2k+1}-\frac{hq}{3}}}{d_0}\Big)$$

$$\leq (1+\frac{\epsilon}{2})\frac{3e^{\frac{hq}{3}}}{h}\Big(\frac{1}{2q} + \frac{m(\epsilon,q)-1}{3d_0}e^{-\frac{2hq}{15}}\Big),$$

其中

$$m(\epsilon,q) = \begin{cases} [\frac{1}{2}[\frac{q}{C_\epsilon}] - 1/2] \text{ if } \frac{1}{2}[\frac{q}{C_\epsilon}] - 1/2 \notin \mathbb{N}, \\ \frac{1}{2}[\frac{q}{C_\epsilon}] - 1/2 \text{ if } \frac{1}{2}[\frac{q}{C_\epsilon}] - 1/2 \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

注意到，$q \geq 5C_\epsilon$ 蕴含 $m(\epsilon, q) \geq 2$. 由于在 $J_2(q)$ 中有 $2k+1 \geq [\frac{q}{C_\epsilon}] + 1 > \frac{q}{C_\epsilon}$，因此得到

$$J_2(q) \leq (p_q - m(\epsilon,q))A_\epsilon.$$

增大 B_ϵ，如有必要，可使 $q \geq B_\epsilon$ 这些不等式成立

$$\frac{1}{2q} + \frac{m(\epsilon,q)-1}{3d_0} e^{-\frac{2hq}{15}} \leq \frac{1}{2q} + \frac{\epsilon}{8q(1+\epsilon/2)} = \frac{4+3\epsilon}{8q(1+\epsilon/2)},$$

$$(p_q - m(\epsilon,q))A_\epsilon \leq \frac{3\epsilon e^{\frac{hq}{3}}}{8hq}.$$

结合上述对 $J_k(q)$ $k = 1,2$, 的估计，我们得出

$$N_{odd}(q) \leq \frac{(1+\epsilon)3e^{\frac{hq}{3}}}{2hq}.$$

为得到（2.2）的左端部分，我们应用（2.4），并且只考虑项

$$\sharp\{\gamma \in \Pi_- : \tau(\gamma) \leq q/3\},$$

有

$$(1-\epsilon)\frac{3e^{\frac{hq}{3}}}{2hq} < (1-\frac{\epsilon}{2})\frac{3e^{\frac{hq}{3}}}{2hq} \leq N_{odd}(q).$$

为证明（2.3），我们采用类似的论证，省略细节。□

3. Length spectrum in small intervals

为了估计长度位于区间（ Π_+ ， $q]$, 内的周期射线数量，我们需要以下

引理 3.1. 设 $0 < \rho < \min\{1, h^{-1}\}$ ，并设 $0 < \frac{2\epsilon}{1-\epsilon} \leq \frac{\rho h}{4}$ 。那么，对于$q \geq C(\epsilon)$ ，有

$$(1-\epsilon)\frac{\rho e^{hq}}{8q} \leq \sharp\{\gamma \in \Pi_+ : q-\rho < \tau(\gamma) \leq q\} \leq (5-h\rho)(1+\epsilon)\frac{\rho e^{hq}}{8q}. \quad (3.1)$$

证明。 应用 1.6)，并取 $q \geq C(\epsilon)$，得到

$$\sharp\{\gamma \in \Pi_+ : \ q-\rho < \tau(\gamma) \leq q\} \geq (1-\epsilon)\frac{e^{hq}}{2hq} - (1+\epsilon)\frac{e^{h(q-\rho)}}{2h(q-\rho)}$$

$$= (1-\epsilon)\frac{e^{hq}}{2hqe^{h\rho}}\Big(e^{h\rho} - \frac{(1+\epsilon)q}{(1-\epsilon)(q-\rho)}\Big).$$

接下来，选取足够大的 $C(\epsilon)$，我们得到

$$\frac{(1+\epsilon)q}{(1-\epsilon)(q-\rho)} = \Big(1+\frac{2\epsilon}{1-\epsilon}\Big)\Big(1+\frac{\rho}{q-\rho}\Big)$$

$$\leq 1 + \frac{\rho h}{4} + \frac{\rho}{q-\rho}\Big(1+\frac{2\epsilon}{1-\epsilon}\Big) \leq 1 + \frac{\rho h}{4} + \frac{\rho^2 h^2}{32} < e^{\frac{h\rho}{4}}.$$

这意味着

$$e^{h\rho} - \frac{(1+\epsilon)q}{(1-\epsilon)(q-\rho)} > e^{h\rho}(1 - e^{-\frac{3h\rho}{4}}).$$

另一方面，我们有不等式 $f(y) = 1 - e^{-3y} - y \geq 0$ 对于$0 \leq y \leq \log 3$ 3 因为

$$f'(y) \geq 0 \text{ for } 0 \leq y \leq \frac{\log 3}{3}.$$

因此 $\rho < \frac{1}{h} < \frac{4}{\log 3h^3}$得出 $\frac{h\rho}{4} < \log 3$ 3，从而

$$1 - e^{-\frac{3h\rho}{4}} \geq \frac{h\rho}{4},$$

并且我们得到（3.1）的左端。

为了建立（3.1）中的上界，注意到对于 $q \geq C(\epsilon)$，我们有

$$\sharp\{\gamma \in \Pi_+ : q - \rho \leq \tau(\gamma) \leq q\} \leq (1+\epsilon)\frac{e^{hq}}{2hq} - (1-\epsilon)\frac{e^{h(q-\rho)}}{2h(q-\rho)}$$

$$= (1+\epsilon)\frac{e^{hq}}{2hq}\Big(1 - \Big(1 - \frac{2\epsilon}{1+\epsilon}\Big)\Big(1 + \frac{\rho}{q-\rho}\Big)e^{-h\rho}\Big).$$

由于 $e^{-x} \geq 1 - x$ 对于 $x \geq 0$，且 $\frac{2\epsilon}{1+\epsilon} < \frac{h\rho}{4}$，我们得到

$$1 - \Big(1 - \frac{2\epsilon}{1+\epsilon}\Big)\Big(1 + \frac{\rho}{q-\rho}\Big)e^{-h\rho} \leq 1 - (1 - \frac{h\rho}{4})(1 - h\rho)$$

$$= h\rho\Big(\frac{5 - h\rho}{4}\Big).$$

证明至此完成。 □

需要注意的是，在估计（3.1）中，因子为区间长度 $[q-\rho, q]$. 引入

$$N_{odd}(q-\rho, q) = N_{odd}(q) - N_{odd}(q-\rho).$$

显然， $h\rho < 1$推出 $h\rho/3 < 1$。利用（2.2），我们得到如下结果

引理 3.2. 在 $q \geq C_\epsilon$ 满足引理 3.1 的假设时，我们有

$$(1-\epsilon)\frac{\rho e^{\frac{hq}{3}}}{8q} \leq N_{odd}(q-\rho, q) \leq (5 - \frac{h\rho}{3})(1+\epsilon)\frac{\rho e^{\frac{hq}{3}}}{8q}. \tag{3.2}$$

应用（2.2）可得

$$N_{odd}(q)-N_{odd}(q-\rho)\le(1+\epsilon)\frac{3e^{\frac{hq}{3}}}{2hq}-(1-\epsilon)\frac{3e^{\frac{h}{3}(q-\rho)}}{2h(q-\rho)}.$$

接下来的证明与引理 3.1 的证明重复，因此省略细节。

定理 1.1 的证明。首先，我们选取足够小的 $0<\epsilon<1$，使得能够安排 $c_0>\frac{1}{3}(15-h\rho+\epsilon)(1+\epsilon)\ \frac{2\epsilon}{1-\epsilon}<\frac{rh}{4}$.固定 ϵ，并考虑区间

$$(q_j-\rho-e^{-\delta q_j},q_j+e^{-\delta q_j}]=(p_j-\rho_j,p_j]$$

其中 $p_j=q_j+e^{-\delta q_j}$ 且 $\rho_j=\rho+2e^{-\delta q_j}$. 取 q_j 足够大，可得 $\rho_j<$ 最小值$\{1,h^{-1}\}$. 我们对N_{odd}3.2式中的上界$(p_j-\rho_j,\ p_j)$使用 $q_j\ge C(\epsilon)$，从而推出

$$N_{odd}(p_j-\rho_j,p_j)\le\frac{15-h\rho_j}{3}(1+\epsilon)\frac{\rho_j e^{\frac{hp_j}{3}}}{8p_j}.\tag{3.3}$$

我们声称，当 $q_j\ge m(\epsilon)\ge C(\epsilon)$ 足够大时，有

$$(15-h\rho_j)\frac{\rho_j e^{\frac{h}{3}e^{-\delta q_j}}}{p_j}<(15-h\rho+\epsilon)\frac{\rho}{q_j}.\tag{3.4}$$

这个不等式等价于

$$\Big(1-\frac{e^{-\delta q_j}}{p_j}\Big)\Big(1+\frac{2e^{-\delta q_j}}{\rho}\Big)e^{\frac{h}{3}e^{-\delta q_j}}<1+\frac{2he^{-\delta q_j}+\epsilon}{15-h\rho_j}.$$

对于 $q_j\to+\infty$ 上面不等式的左端趋于 1，因此当 q_j 足够大时，它将小于 $1+\frac{\epsilon}{15-h\rho}<1+\frac{\epsilon}{15-h\rho_j}$. 这就证明了该断言。因此，对于 $q_j\ge m(\epsilon)$，估计式 (3.4) 意味着

$$N_{odd}(p_j-\rho_j,p_j)\le\frac{1}{3}(15-h\rho+\epsilon)(1+\epsilon)\frac{\rho e^{\frac{hq_j}{3}}}{8q_j}.$$

增大 $m(\epsilon)$，并考虑到 (1.8)，对于 $q_j\ge m(\epsilon)$，我们得到

$$\sharp\big\{\gamma\in\Pi_+:q_j-\rho<\tau(\gamma)\le q_j,|\tau(\gamma)-\tau(\gamma')|\ge e^{-\delta\max\{\tau(\gamma),\tau(\gamma')\}},\forall\gamma'\in\Pi\backslash\{\gamma\}\big\}$$

$$\ge\frac{c_0\rho e^{\frac{hq_j}{3}}}{8q_j}>\frac{1}{3}(15-h\rho+\epsilon)(1+\epsilon)\frac{\rho e^{\frac{hq_j}{3}}}{8q_j}\ge N_{odd}(p_j-\rho_j,p_j).$$

这意味着，满足 $q_j-\rho<\tau(\gamma)\le q_j$且区间

$$J_{\delta,j}(\gamma)=(\tau(\gamma)-e^{-\delta q_j},\tau(\gamma)+e^{-\delta q_j})$$

只包含一个 $\tau(\gamma)$，且满足 $\gamma \in \Pi$ 的射线数量大于 $N_{odd}(p_j - \rho_j, p_j)$。因此，存在 $\gamma_j \in \Pi_+$，满足 $q_j - \rho < \tau(\gamma_j) \leq q_j$，使得 $J_{\delta,\ j}(\gamma_j)$ 不包含具有奇数次反射的周期射线的长度。另一方面，具有偶数次反射的迭代射线的一些长度可能位于区间 $J_{\delta,\ j}(\gamma_j)$。

我们选择 $\ell_j = \tau(\gamma_j)\ \ \beta = \delta,\ \ m_j = e^{\delta \ell_j}$. 那么在区间 $L_j = (\ell_j - m_j^{-1}, \ell_j + m_j^{-1})$ 中，我们只有反射次数为偶数的周期射线的长度，以及 $\psi_j(\ell_j) = 1$。利用 (1.3)，我们得出

$$\langle F_D, \psi_j \rangle = \sum_{\tau(\gamma) \in L_j} \tau^\sharp(\gamma) |\det(\mathrm{Id} - P_\gamma)|^{-1/2} \psi_j(\tau(\gamma)) \geq d_0 e^{-\frac{\mu_2}{2}\ell_j}.$$

这就完成了定理 1.1 的证明。

4. Separation of periodic orbits in phase space

我们先做一些准备。令 $ch(U)$ 表示 $U \subset \mathbb{R}^d$ 的凸包。对于 $k = 1, ..., r$, 定义

$$\epsilon_k = \mathrm{dist}\left(ch(\bigcup_{k \neq j} D_j), D_k\right).$$

Set

$$d_1 = \max_{k \neq j} \mathrm{dist}\,(D_k, D_j),\ d_2 = \frac{2d_1}{d_0} \geq 1.$$

条件 (1.1) 蕴含 $\epsilon_k \neq 0$，因此 $\eta_0 > 0$。

我们回顾一些有关台球流的记号 φ_t（更多细节请参见 [CP，第 2] 节）。设 $S\mathbb{R}^d$ 为 $\mathbb{R}^d$ 的单位切丛，并设 $\pi :\ S\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 为自然投影。对于 $x \in \partial D_j$，记n_j（x）为 ∂D_j 在 x处指向 D_j. 的内向单位法向量。设$D = \bigcup_{j=1}^r D_j$ 并且

$$\mathcal{D} = \{(x, v) \in S\mathbb{R}^d\ :\ x \in \partial D\}.$$

定义掠射集 $\mathcal{D}_{\mathrm{g}} = T(\partial D) \cap \mathcal{D}$，并记 $\langle .,\ . \rangle$ 为 $\mathbb{R}^d$中的标量积。若 x, v（$\in T_{\partial D_j}\mathbb{R}^d$）满足 $\langle v,\ n_j(x) \rangle > 0$（分别为 $\langle v,\ n_j(x) \rangle < 0$），则称其为入射（分别为出射）。引入

$$\mathcal{D}_{\mathrm{in}} = \{(x, v) \in \mathcal{D}\ :\ (x, v) \text{ is incoming}\},$$
$$\mathcal{D}_{\mathrm{out}} = \{(x, v) \in \mathcal{D}\ :\ (x, v) \text{ is outgoing}\}.$$

对于 $(x, v) \in \mathcal{D}_{\mathrm{in/out/g}}$，记 $v' \in \mathcal{D}_{\mathrm{out/in/g}}$ 为 v 在 $x \in \partial D$ 处关于 $T_x(\partial D)$ 的反射 R_x 的像，即

$$v' = v - 2\langle v, n_j(x) \rangle n_j(x), \quad v \in S_x\mathbb{R}^d, \quad x \in \partial D_j.$$

台球流 $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 是作用于 $S\mathbb{R}^d\setminus\pi^{-1}(\mathring{D})$ 上的完备流，其定义如下。对于 $(x,v)\in S\mathbb{R}^d\setminus\pi^{-1}(\mathring{D})$，令

$$\tau_\pm(x,v)=\pm\inf\{t\geqslant 0: x\pm tv\in\partial D\}.$$

按照惯例，若射线 $x\pm tv$ 与 ∂D 在 $\pm t>0$. 上没有公共点，则有 $\tau_\pm(x,v)=\pm\infty$，。对于 $(x,v)\in(S\mathbb{R}^d\setminus\pi^{-1}(D))\cup\mathcal{D}_{\mathrm{g}}$，我们定义

$$\phi_t(x,v)=(x+tv,v),\quad t\in[\tau_-(x,v),\tau_+(x,v)],$$

而对于 $(x,v)\in\mathcal{D}_{\mathrm{in/out}}$，我们设

$$\phi_t(x,v)=(x+tv,v)\quad\text{if}\quad\begin{cases}(x,v)\in\mathcal{D}_{\mathrm{out}},\ t\in[0,\tau_+(x,v)],\\ \text{or }(x,v)\in\mathcal{D}_{\mathrm{in}},\ t\in[\tau_-(x,v),0],\end{cases}$$

and

$$\phi_t(x,v)=(x+tv',v')\quad\text{if}\quad\begin{cases}(x,v)\in\mathcal{D}_{\mathrm{in}},\ t\in]0,\tau_+(x,v)],\\ \text{or }(x,v)\in\mathcal{D}_{\mathrm{out}},\ t\in[\tau_-(x,v'),0[.\end{cases}$$

将非掠碰台球桌 M 定义为

$$M=B/\sim,\quad B=S\mathbb{R}^d\setminus\left(\pi^{-1}(\mathring{D})\cup\mathcal{D}_{\mathrm{g}}\right),$$

其中 $(x,v)\sim(y,w)$ 当且仅当 $(x,v)=(y,w)$ 或

$$x=y\in\partial D\quad\text{and}\quad w=v'.$$

集合 M 赋予商拓扑。

非掠碰流 φ_t 在 M 上定义如下。对于 $(x,v)\in(S\mathbb{R}^d\setminus\pi^{-1}(D))\cup\mathcal{D}_{\mathrm{in}}$，我们令

$$\varphi_t([(x,v)])=[\phi_t(x,v)],\quad t\in]\tau_-^{\mathrm{g}}(x,v),\tau_+^{\mathrm{g}}(x,v)[,$$

其中 $[z]$ 表示在关系 $\sim$下 $z\in B$ 的等价类，并且

$$\tau_\pm^{\mathrm{g}}(x,v)=\pm\inf\{t>0:\phi_{\pm t}(x,v)\in\mathcal{D}_{\mathrm{g}}\}.$$

注意，对于 $(x,v)\in\mathcal{D}_{\mathrm{in}}$，$\tau_\pm^{\mathrm{g}}(x,v)\neq 0$；而有可能出现$\tau_\pm^{\mathrm{g}}(x,v)=\pm\infty$.。上述公式在 M上定义了一个流，因为每个 $(x,v)\in B$在 $(S\mathbb{R}^d\setminus\pi^{-1}(\mathring{D}))\cup\mathcal{D}_{\mathrm{in}}$中都有唯一的代表。因此 φ_t 是连续的，但点 (x,v) 的流轨迹在时间 $t\notin]\tau_-^{\mathrm{g}}(x,v)\ \tau\mathrm{g}+(x,v)[$上未定义。对于捕获集 K 中的 z，流 φ_t对所有 $t\in\mathbb{R}$ 都有定义；该捕获集由满足$-\tau_-^{\mathrm{g}}(z)=\tau\mathrm{g}+(z)=+\infty$的点 $z\in M$ 组成，并且

$$\sup A(z)=-\inf A(z)=+\infty,\ \text{when } A(z)=\{t\in\mathbb{R}:\pi(\varphi_t(z))\in\partial D\}.$$

（更多详情请参见 [CP，第 2]节）。容易看出，条件（1.1）蕴含存在 $\psi_0\in(\pi/2,\pi)$，并具有以下性质：若三个点 x、y、z 属于 ∂D_{i_1}、∂D_{i_2}、∂D_{i_3}、$i_1\neq i_2$、$i_2\neq i_3$、

分别地，开线段（x， y）和（y， z）与 D 没有公共点，并且 $[x,y]$ 和 $[y,z]$ 在 y处满足反射定律，则 $\psi>\psi_0$，其中 $\psi\in$ （$\pi/2$， π）是 $[y,z]$ 与∂D_{i_2} 在 y处的法向量 n_{i_2}（y）之间的角。引入

$$\mathcal{D}_{\mathrm{out},0}=\{(x,v)\in\partial D\times\mathbb{S}^{d-1}:\ \langle v,n(x)\rangle\leq\cos\psi_0<0\}$$

并定义弹球映射

$$\mathbf{B}:\mathcal{D}_{\mathrm{out},0}\ni(x,v)\longmapsto(y,w)\in\overline{\mathcal{D}}_{\mathrm{out}},$$

其中

$$(y,w)=(x+\tau_+^{\mathrm{g}}(x,v)v,R_xv),$$

且 $R_x:\ v\in S_x\mathbb{R}^d\to v'\in S_x\mathbb{R}^d$ 称为反射映射。当$\tau_+^{\mathrm{g}}(x,v)<+\infty$时，映射$\mathbf{B}(x,v)$有定义。

考虑一点 $\rho=(x,v)\in B$. 假设 $\phi_t(\rho)$是一条反射射线，它从 $\rho\in B$ 出发，经过 $p\geq1$ 次反射，历时 $t=0$，并到达

$$\phi_t(\rho)=\Big(\phi_\sigma\circ\mathbf{B}^p\circ R\circ\phi_\tau\Big)(\rho)\in\mathring{B},\ t>0,\ p\geq1,\ \tau>0,\ \sigma>0\quad(4.1)$$

其中 $R\circ\phi_\tau(\rho)\in\mathcal{D}_{\mathrm{out},\ 0}$，

$$R:\ (y,w)\in\mathcal{D}_{\mathrm{in}}\to(y,R_yw)\in\mathcal{D}_{\mathrm{out}}.$$

映射 $\mathbf{B}$：$\mathcal{D}_{\mathrm{out},\ 0}\to\mathcal{D}_{\mathrm{out},\ 0}$ 是 C^∞ 光滑的，并且

$$\|\mathrm{d}\mathbf{B}\|_{T(\partial D)\to T(\partial D)}\leq A_0$$

具有常数 $A_0>1$，它取决于 d_1， ψ_0 以及 ∂D 的截面曲率（例如参见 [CP，附录 A]）。另一方面， $R\circ\phi_\tau$也 C^∞ 是光滑的，并且我们有如下图

$$\begin{array}{ccc}\mathring{B} & \xrightarrow{\phi_t} & \mathring{B}\\ \Big\downarrow{\scriptstyle R\circ\phi_\tau} & & \Big\uparrow{\scriptstyle \phi_\sigma}\\ \mathcal{D}_{\mathrm{out},0} & \xrightarrow{\mathbf{B}^p} & \mathcal{D}_{\mathrm{out},0}\end{array}$$

因此，$\mathrm{d}\phi_t=\mathrm{d}\phi_\sigma\circ\mathrm{d}\mathbf{B}^p\circ\mathrm{d}R\circ\mathrm{d}\phi_\tau$. 令 $\beta=2\log\ A_0/d_0$，可得

$$\|\mathrm{d}\mathbf{B}^p\|\leq A_0^p=e^{\beta pd_0/2}<e^{\beta t},$$

其中 $t>pd_0/2$ 是 γ 的长度，并可得到估计

$$\|\mathrm{d}\phi_t(\rho)\|_{T(\mathring{B})\to T(\mathring{B})}\leq C_0e^{\beta t}\qquad(4.2)$$

其中 $C_0\geq1$， $\beta>0$ 与 ρ， τ， σ 和 p. 无关。这里 $\|.\|$ 是由 $S\mathbb{R}^d$.中的标准范数在 $T(\mathring{B})$ 上诱导的范数

每一条周期反射射线 γ 都由一个构型确定

$$\alpha_\gamma=(i_1,\ldots,i_k),$$

其中 $i_j \in \{1,\dots,r\}$，且 $i_k \neq i_1$，$i_j \neq i_{j+1}$对于 $j=1$，...，$k-1$，并且α_γ使得 γ在 ∂D_{i_1}，$\dots$，∂D_{i_k}上相继发生反射。构型 α_γ 在模循环置换的意义下是良定义的。我们称 γ 具有类型 α_γ，且 α_γ 具有长度 k。此外，根据 [PS17，推论2.2.4]，，对于固定的构型 α_γ，在 $\mathbb{R}^d \setminus \mathring{D}$.中至多存在一条周期射线 γ

给定一条周期射线 γ in $\mathbb{R}^d \setminus \mathring{D}$，用 $\tilde{\gamma}$ 表示两种可能的提升之一

$$\tilde{\gamma}(t) = \{\varphi_t(x, \pm v) \in M : \, 0 \le t < \tau(\gamma),\, x \in \gamma,\, x \notin \partial D\}$$

在 M 上，其中 $v \in \mathbf{S}^{d-1}$ 是 γ 在 $x.$ 处的方向。下面固定一个提升 $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(t)$，对应于 (x, v)，并按长度参数化。如果 $\pi(\tilde{\gamma}(t))$ 跟随构型 $\alpha.$，我们就称 $\tilde{\gamma}(t)$ 跟随构型 $\alpha_\circ$ 令

$$\mathcal{G}(T) = \{\tilde{\gamma} : \, \pi(\tilde{\gamma}) = \gamma \in \Pi,\, \tau(\gamma) \le T\}.$$

若存在。 $w \in \tilde{\gamma} \cap B$ 使得 $\sigma z + (1-\sigma)w \in B$, $\forall \sigma \in [0,1].$，则称点 $z \in B$ 与 $\tilde{\gamma}$ 线性连通。对于这样的点 $z \in B$，定义

$$\text{距离}(z,\ \tilde{\gamma}) = \text{最小值}\{\|z-w\| : \, w \in \tilde{\gamma} \cap B,\ \ \sigma z + (1-\sigma)w \in B,\ \ \forall \sigma \in [0,1]\},$$

$$\Theta_{\tilde{\gamma}}^{\epsilon} = \{z \in B : \ \ z \text{与} \tilde{\gamma},\ \mathrm{dist}(z,\ \tilde{\gamma}) \le \epsilon\}.\text{线性连通}$$

我们将证明以下结果。

定理 4.1。存在依赖于 $\epsilon_0 > 0$ 、 C_0、 d_0 和 η_0 的 $\epsilon_0 > 0$，使得对于任意不同的周期射线 $\tilde{\gamma}_1$、$\tilde{\gamma}_2 \in \mathcal{G}$（$T$），有

$$\Theta_{\tilde{\gamma}_1}^{\epsilon_0 e^{-\beta(1+d_2)T}} \cap \Theta_{\tilde{\gamma}_2}^{\epsilon_0 e^{-\beta(1+d_2)T}} = \emptyset.$$

证明。取 $\epsilon_0 = \min\{\frac{\eta_0}{2C_0}, \frac{d_0}{4C_0}\}$.令 $\tilde{\gamma}_k = \tilde{\gamma}_k(t) \in \mathcal{G}(T)$ $k=1$，2为两条不同的周期射线，其构型分别为 α_k，长度分别为 p_k。下文中的射线均按长度 $t \ge 0.$ 参数化。令$\tilde{\gamma}_k(t)$的周期为 $T_k \le T$， $k=1$，2，并令 $\alpha_1 = (i_1,\ \dots\dots,\ i_{p_1})$。假设

$$\Theta_{\tilde{\gamma}_1}^{\epsilon_0 e^{-\beta(1+d_2)T}} \cap \Theta_{\tilde{\gamma}_2}^{\epsilon_0 e^{-\beta(1+d_2)T}} \neq \emptyset. \tag{4.3}$$

那么存在点 $\rho_k = (x_k,\ \xi_k) \in B \cap \tilde{\gamma}_k$， $k=1$，2，以及 $\rho = (y,\ \xi) \in \mathring{B}$，使得 $\|\rho - \rho_k\| \le \epsilon_0 e^{-\beta(1+d_2)\ T}$， $k=1$，2，并且

$$\nu_k(\sigma) = (x_k(\sigma), \xi_k(\sigma)) = (1-\sigma)\rho_k + \sigma\rho \in \mathring{B},\ \sigma \in [0,1],\ k = 1,2.$$

假设 x_1 位于连接 $u_{i_{p_1}} \in \partial D_{i_{p_1}}$ 与 $u_{i_1} \in \partial D_{i_1}$的线段上，而 x_2 位于连接 $w_{j_{p_2}} \in \partial D_{j_{p_2}}$ 与 $w_{j_1} \in \partial D_{j_1}.$的线段上。如果 $i_1 = j_1$，由于 $\alpha_1 \neq \alpha_2$，存在 i_n， $i_m \in \{1,...,r\}$， $i_n \neq i_m$，使得从 ρ_1 出发的射线 $\tilde{\gamma}_1(t)$遵循构型 $\beta_1 = (i_1,\ \dots\dots\ i_{n-1},\ i_n)$ $2 \le n \le p_1$，而从 ρ_2出发的射线 $\tilde{\gamma}_2(t)$遵循

构型 $\beta_2 = (i_1, \ldots\ldots i_{n-1}, i_m)$。更准确地说，$i_n$ 和 i_m 是构型 β_1，β_2中首次出现差异的指标。若$i_1 \neq j_1$，我们有构型 $\beta_1 = (i_1, \ldots\ldots)$ $\beta_2 = (j_1, \ldots\ldots)$。由于我们证明了下文定义的 $\tilde{\gamma}_\omega(t)$遵循构型 β_1 和 β_2，这一情形可用相同的论证处理。细节从略。

不失一般性，我们可以假设 β_1, β_2 的长度小于或等于 p_1,，即 $n \leq p_1$.。事实上，若

$$\beta_1 = (\underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_1}_{\text{k times}}, i_1, \ldots, i_{n-1}, i_n),\ \beta_2 = (\underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_1}_{\text{k times}}, i_1, \ldots, i_{n-1}, i_m),\ n \leq p_1,$$

我们可以消去 $\underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_1}_{\text{k times}}$.

当 σ 足够小时，从 $\nu_1(\sigma)$出发的射线 $\tilde{\gamma}_\sigma(t)$ $t \geq 0$将沿着构型 β_1 运动，并在 $\partial D_{i_1}, \ldots, \partial D_{i_n}$ 上发生反射；而从 $\mu_1(\sigma)$ 出发的射线 $\tilde{\gamma}_\sigma(t)$ $t \geq 0$ 射线 $\zeta_\sigma(t)$ $t \geq 0$ $= (x_1(\sigma) - \xi_1(\sigma)) \in B$ 沿着构型 $\beta_1 = (i_{p_1}, \ldots)$ 运动。当 σ 足够小时，$\tilde{\gamma}_\sigma(t)$ 的连续反射点属于 $\mathcal{D}_{\text{out}}$,0，$\zeta_\sigma(t)$ 在 $\partial D_{i_{p_1}}$. 上的反射点也如此。一般而言，射线 $\tilde{\gamma}_\sigma(t)$ 不是周期的，因此在 $\partial D_{i_1}, \ldots, \partial D_{i_n}$ 上连续反射后，它们可能还会发生其他反射或出现掠射点，也可能逃逸到无穷远。

设B 对于 $0 \leq t \leq d_2 T$ 并假设 $\sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_1(\sigma)$ 具有形式（4.1）。因此

$$\|\phi_t(v_1(\sigma_0)) - \phi_t(v_1(\sigma_1))\| = \|\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \frac{d}{ds}(\phi_t(v_1(\sigma))d\sigma\| \leq C_0 e^{\beta t}\|v_1(\sigma_0) - v_1(\sigma_1)\|$$

$$\leq C_0 e^{\beta d_2 T}\|\rho_1 - \rho\| \leq \min\{\frac{\eta_0}{2}, \frac{d_0}{4}\}e^{-\beta T}, \tag{4.4}$$

其中我们使用了（4.2）。设

$$\omega = \max\{\sigma \in [0,1] : \tilde{\gamma}_\sigma(t) \text{ does not follow } \beta_1$$

在 $\partial D_{i_1}, \ldots\ldots, \partial D_{i_n}$ 上具有反射，它们属于 $\mathcal{D}_{\text{out},\ 0}$

或者 $\zeta_\sigma(t)$ 在$\partial D_{i_{p_1}}$ 上没有位于 $\mathcal{D}_{\text{out},\ 0}$ 中的反射。}

对于射线 $\tilde{\gamma}_\omega(t)$ $\zeta_\omega(t)$，有若干种情形。

(a1). $\tilde{\gamma}_\omega(t)$ 沿着构型 $\zeta = (i_1、\ldots\ldots、i_s)$ $2 \leq s \leq n$，在 $\partial D_{i_1}、\ldots\ldots、\partial D_{i_{s-1}}$ 上发生反射（若 $s = 2$，则在 ∂D_{i_1} 上），并在 ∂D_{i_s} 处相切。

(a2). $\tilde{\gamma}_\omega(t)$ 沿着构型 $\zeta = (i_1、\ldots\ldots、i_{s-1}, i_q)$ $2 \leq s \leq n$，$q \neq s$ 在 $\partial D_{i_1}、\ldots\ldots、\partial D_{i_{s-1}}$，上发生反射，并在 ∂D_{i_q}. 处发生反射或相切

(a3). $\tilde{\gamma}_\omega(t)$遵循构型 $\zeta = (i_1, \ldots\ldots, i_{s-1})$ $2 \leq s \leq n$，在 $\partial D_{i_1}, \ldots\ldots, \partial D_{i_{s-1}}$ 上发生反射。在 $\partial D_{i_{s-1}}$ 反射后，射线 $\tilde{\gamma}_\omega(t)$不会与 ∂D 相交，而是延伸至无穷远。

在(a1)-(a3)这些情形中，我们有 $\beta_1=(i_1,\ \ldots\ldots,\ i_s,\ \ldots\ldots)$。

(b1). $\tilde{\gamma}_\omega(t)$ 按照构型 $\zeta=(i_1,\ldots)$ 运动，并在∂D_{i_1}.处相切

(b2). $\tilde{\gamma}_\omega(t)$ 按照构型 $\zeta=(i_q,\ldots)$ $q\neq 1,\ q\neq p_1$ 运动，并在 ∂D_{i_q}. 处发生反射或相切

(b3). $\tilde{\gamma}_\omega(t)$ 不相交 ∂D ，并趋于无穷远。

(c1). $\tilde{\gamma}_\omega(t)$ 按照构型 $\zeta=(i_{p_1},\ldots)$ 运动，并在 $\partial D_{i_{p_1}}$. 处相切

(c2)。 $\tilde{\gamma}_\omega(t)$ 遵循 β_1，而 $\zeta_\omega(t)$ 遵循构型 $\zeta=(i_{q_1},\ \ldots\ldots)$ $q_1\neq p_1$，$q_1\neq i_1$ 在 ∂D_{i_q}. 处发生反射或相切

(c3)。 $\tilde{\gamma}_\omega(t)$ 遵循 β_1，而 $\zeta_\omega(t)$ 不与 ∂D 相交，并趋于无穷远。

我们将证明，情形 (a1) - (c3) 会导致矛盾。

(a1)。设 $\tilde{\gamma}_\omega(t)$ 在时刻 t_ω 于 $v_{i_s}\in\partial D_{i_s}\times\mathbb{S}^{d-1}$ 处相切。具有 $0<\sigma<\omega$ 的射线 $\tilde{\gamma}_\sigma(t)$ 的反射属于 $(\partial D_{i_s}\times\mathbb{S}^{d-1})\cap D_{\text{out},\,0}$ 对于 $t_{s,\,\sigma}$ 以及 $t_{s,\,\sigma}\to t_\omega$ 因为 $\sigma\to\omega$. 根据连续性，我们得到$v_{i_s}\in\mathcal{D}_{\text{out},\,0}$ 这与 v_{i_s}. 的相切相矛盾

(a2). 设 $\tilde{\gamma}_\omega(t)$ 在 $v_{i_{s-1}}\in\partial D_{i_{s-1}}$ 处发生反射，持续时间为 t_{s-1} ；在 $v_{i_q}\in\partial D_{i_q}$ 处发生反射或相切，持续时间为 t_q。设 $\tilde{\gamma}_\sigma(t)$ 满足 $0<\sigma<\omega$ ，并分别在 $w_{i_{s-1},\,\sigma}\in\partial D_{i_{s-1}}$ 和 $w_{i_s,\,\sigma}\in\partial D_{i_s}$ 处发生反射，持续时间分别为 $t_{s-1,\,\sigma}$ 和 $t_{s,\,\sigma}$。当 σ 接近 ω 时，由 (4.2) 可推得 $t_{s-1,\sigma}$ 接近 t_{s-1}. 。这意味着当 σ. 足够小时，$t_q>t_{s-1,\sigma}$ 。我们固定具有此性质的 $0<\sigma<\omega$。注意，

$$t_q\le sd_1\le\frac{2d_1}{d_0}T_1\le d_2T.$$

同理，$t_{s,\,\sigma}\le d_2T$.有两种可能：(I). $t_{s,\,\sigma}<t_q$，(II).$t_{s,\,\sigma}\ge t_q$. 在情形 (I) 中，我们将 (4.4) 应用于 $t=t_{s,\,\sigma}$，$\sigma_0=\sigma$，$\sigma_1=\omega$，得到

$$\|\pi(\phi_{t_{s,\sigma}}(v_1(\omega)))-w_{i_s,\sigma}\|\le\frac{\eta_0}{2}.$$

另一方面，$\pi(\phi_{t_{s,\,\sigma}}(v_1(\omega)))$ 位于连接 $v_{i_{s-1}}$ 与 v_{i_q}. 的线段上。因此，该点属于 $ch(\bigcup_{j\neq s}D_j)$，而上述不等式蕴含矛盾。

转到情形 (II)，首先假设 $\tilde{\gamma}_\omega(t)$ 在v_{i_q}. 处发生反射。我们应用 (4.4)，取 $t=t_q$，$\sigma_0=\sigma$，$\sigma_1=\omega$，从而得出

$$\|\pi(\phi_{t_q}(v_1(\sigma)))-v_{i_q}\|\le\frac{\eta_0}{2}.$$

由于 $\pi(\phi_{t_q}(v_1(\sigma)))$ 位于连接 $w_{s-1,\,\sigma}$ 和 $w_{s,\,\sigma}$的线段上，我们再次得到矛盾，因为 $v_{i_q}\notin ch(\bigcup_{j\neq q}D_j)$。现在假设 $\tilde{\gamma}_\omega(t)$ 在 v_{i_q}. 处相切。那么对于充分小的 $\epsilon>0$ ，我们

°有 $t_{s、\sigma} > t_q - \epsilon$ 和 $v_{q、\epsilon} = \pi(\tilde{\gamma}_\omega(t_q - \epsilon)) \in B$. 此外，对于足够小的 ϵ，我们有 dist $\left(v_{q,\epsilon}, ch(\bigcup_{j\neq q} D_j)\right) > \frac{\eta_0}{2}$. 我们重复上述论证，应用 (4.4)，其中 $t = t_q - \epsilon$、，从而得到矛盾。

(a3)。我们沿用 (a1) 和 (a2) 中的记号。对于 $t > t_{s-1}$，射线 $\pi(\tilde{\gamma}_\omega(t))$ 不与 D 相交；对于 $t > t_{s-1} + \epsilon_0 > t_{s-1}$，有 dist $(\pi(\tilde{\gamma}_\omega(t))\ D) \geq \epsilon_1 > 0$.。由于 $t_{s-1,\ \sigma}$ 在 σ 足够接近ω, 时接近 t_{s-1}，我们有 $t_{s,\ \sigma} \geq t_{s-1,\ \sigma} + d_0/2 > t_{s-1} + \epsilon_0$。取$0 < \epsilon_0 < \frac{d_0}{4}$和 σ充分接近 ω.，如上所述，我们得到 $t_{s,\ \sigma} \leq d_2 T_1$.。现在应用 (4.4)，令 $t = t_{s,\ \sigma}$，$\sigma_0 = \sigma$，$\sigma_1 = \omega$，得到

$$\|\pi(\phi_{t_{s,\sigma}}(v_1(\sigma))) - \pi(\phi_{t_{s,\sigma}}(v_1(\omega)))\| \leq C_0 e^{\beta d_2 T} \|v_1(\sigma) - v_1(\omega)\|.$$

取 σ 充分接近 ω，则上述不等式右端将小于 ϵ_1，从而得到与.....矛盾

$$\text{dist}\ (\pi(\tilde{\gamma}_\omega(t_{s,\sigma})), D) \geq \epsilon_1 > 0.$$

(b1). 利用以下事实，我们重复 (a1) 中的论证：射线$\tilde{\gamma}_\sigma(t)$（其中 $0 < \sigma < \omega$）的反射属于 $(\partial D_{i_1} \times \mathbb{S}^{d-1}) \cap \mathcal{D}_{\text{out},0}$.

(b2). 设 $\tilde{\gamma}_\omega(t)$ 在 $v_{i_q} \in \partial D_{i_q}$ 处发生反射或相切，时间为t_q；设 $\tilde{\gamma}_\sigma(t)$ $0 < \sigma < \omega$ 在 $w_{i_1,\sigma} \in \partial D_{i_1}$ 处发生反射，时间为$t_{i_1,\sigma}$。设 $\zeta_\sigma(t)$ 在 $w_{i_{p_1},\sigma} \in \partial D_{i_{p_1}}$. 处发生反射。对于足够小的 σ，有 $t_q < t_{i_1,\sigma}$.。事实上，若 $t_q \geq t_{i_1,\sigma}$，则射线 $\pi(\tilde{\gamma}_\sigma(t))$ 在时间$0 < t \leq t_q$ 内位于补集 $\mathbb{R}^d \setminus D_{i_1}$中。这不可能，因为$\pi(\tilde{\gamma}_\sigma(t))$ 在$t = t_{i_1,\sigma}$. 时发生反射。我们固定具有此性质的 $0 < \sigma < \omega$。假设 $\tilde{\gamma}_\omega(t)$ 在 v_{i_q}. 处发生反射。将 (4.4) 应用于 $t = t_q, \sigma_0 = \sigma, \sigma_1 = \omega$，得到 $\|\pi(\tilde{\gamma}_\sigma(t_q)) - v_{i_q}\| \leq \eta_0/2$.。另一方面，$\pi(\tilde{\gamma}_\sigma(t_q))$ 属于连接 $w_{i_1,\sigma}$ 与 $w_{i_{p_1},\sigma}$ 的线段，该线段位于 $ch(\bigcup_{j\neq q} D_j)$ 中，因此得到矛盾。在°情形下，当 $\tilde{\gamma}_\omega(t)$ 在 v_{i_q} 处相切时，我们考虑点 $\tilde{\gamma}_\omega(t_q - \epsilon) \in B$，令 $\epsilon > 0$ 足够小，并且 $t_q - \epsilon < t_{i_1,\sigma}$.。对于较小的 ϵ，有 dist $\left(\pi(\tilde{\gamma}_\omega(t_q - \epsilon)), ch(\bigcup_{j\neq q} D_j)\right) \geq \frac{2\eta_0}{3}$.。将 (4.4) 应用于 $t = t_q - \epsilon$，同样可得矛盾。

(b3). 我们利用 $\tilde{\gamma}_\sigma(t)$ $0 < \sigma < \omega$，在 ∂D_{i_1}上有一次反射这一事实，并重复 (a3) 中的论证。

(c1). 射线 $\zeta_\sigma(t)$ $0 < \sigma < \omega$，的反射点属于 $(\partial D_{i_{p_1}} \times \mathbb{S}^{d-1}) \cap D_{\text{out},\ 0}$，因此我们处于 (a1) 中讨论的情形。我们重复 (a1) 中的论证，得出矛盾。

(c2). 这一情形与 (b2) 类似，可用同样的论证处理。我们略去细节。

(c3). 这一情形与情形 (a3) 和 (b3) 类似，可用类似的论证涵盖。我们略去细节。

最后，注意到由连续性可知，射线 $\tilde{\gamma}_\omega(t)$ 在 $\partial D_{i_1}, \ldots, \partial D_{i_s}$ 上的反射，以及射线 $\zeta_\omega(t)$ 在 $\partial D_{i_{p_1}}$ 上的反射，均位于 $\mathcal{D}_{\mathrm{out},0}$。

结合上述各种情况，我们推得，不可能存在具有上述性质的 $0 < \omega \leq 1$。因此，我们得出结论：从 ρ 出射的射线 $\tilde{\gamma}_\rho(t)$遵循构型 β_1.我们对周期射线 $\tilde{\gamma}_2(t)$重复上述论证，该射线从 ρ_2 出射，并推得 $\tilde{\gamma}_\rho(t)$ 遵循构型 β_2. 由于 $\beta_1 \neq \beta_2$，这与假设（4.3）矛盾。□

推论 4.1。设 δ_1、 δ_2 是两条周期本原射线，其周期分别为 $T_k \leq T$、 $k = 1, 2$，且经过点 $\rho_k = (x, \xi_k) \in B$、 $k = 12$。设(x_k, v_k) 为 ρ_k的出射代表。于是我们有

$$\|v_1 - v_2\| \geq \epsilon_0 e^{-\beta(1+d_2)T}. \tag{4.5}$$

若 $x \notin \partial D$，我们取（x, ξ_k） 作为出射代表。

证明。 若 $x \notin \partial D$，该结论是定理 4.1 的直接推论。若 $x \in \partial D$，考虑 $\mathbb{R}^d \setminus D$ 中满足 $\|y_k - x\| = \eta < \min\{1, \frac{d_0}{2}\}$. 的点 $y_k \in \pi(\delta_k)$。假设

$$\|v_1 - v_2\| < \epsilon_0 e^{-\beta(1+d_2)T}.$$

于是 $\|y_1 - y_2\| = 2\eta \sin\frac{\psi}{2}$，其中 ψ 是方向 $v_1 \in \mathbb{S}^{d-1}$ 与 $v_2 \in \mathbb{S}^{d-1}$ 之间的角。显然,

$$\|v_1 - v_2\|^2 = 2(1 - \cos\psi) = 4\sin^2\frac{\psi}{2}.$$

对于点 $\rho_k = (y_k, v_k) \in B$，我们可推出

$$\|\rho_1 - \rho_2\| \leq \sqrt{1+\eta^2}\|v_1 - v_2\| \leq \epsilon_0\sqrt{1+\eta^2}e^{-\beta(1+d_2)T}.$$

而对于 $\rho = \frac{\rho_1+\rho_2}{2} \in \mathring{B}$, 这意味着

$$\|\rho - \rho_k\| < \epsilon_0 e^{-\beta(1+d_2)T},\ k = 1, 2.$$

应用定理 4.1，我们得到矛盾。 □

5. Open problem

定理 4.1 的陈述对于满足（1.1）的障碍物成立。要应用扰动论证，重要的是知道，对于每个 $\tilde{\gamma} \in \mathcal{G}(T)$，满足 $T \geq T_0$ 且 $x \in \pi(\tilde{\gamma}) \cap \partial D$，都存在 $\alpha \gg 1$、 $T_0 \gg 1$ 以及一个邻域

$$B(x, e^{-\alpha T}) = \{y \in \partial D : \|x - y\| \leq e^{-\alpha T}\}$$

使得

$$\forall \zeta \in \mathcal{G}(T) \setminus \tilde{\gamma},\ B(x, e^{-\alpha T}) \cap \zeta = \emptyset. \tag{5.1}$$

一般而言，这并不成立，因为有不同的周期射线经过同一点 $x \in \partial D$，且方向各异（例子见 [PS17, 第 2 节。1] ）。另一方面， [PS17, 定理 6.23] 证明了：对于一般障碍物，对每个 $x \in \partial D$，至多存在一个方向 $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$ （在关于 ∂D 在 x 处的法向量对称的意义下），使得 (x, ξ) 能生成一条周期射线。读者可参阅 [PS17, 第 6 节2]），了解一般障碍物的精确定义。由于周期为 T 的周期射线只有有限条，因此对于一般障碍物，每个点 $x \in \partial D$ 都有一个足够小的邻域，满足上述性质。然而，这些邻域可能极小，而且它们的大小如何依赖于 T 尚不清楚。我们猜想存在 $\alpha \gg 1, T_0 \gg 1$，使得对于一般障碍物，所有 $\zeta \in \mathcal{G}(T) \setminus \tilde{\gamma}, T \geq T_0$ 都满足性质 (5.1)。对于具有负曲率的紧黎曼流形上的度量，[Sch20, 命题 4]）在不作一般性假设的情况下证明了类似于 (5.1) 的关系。

References

[CP] Yann Chaubet 和 Vesselin Petkov。双曲台球的动力学 ζ 函数。傅里叶研究所年刊, *(Grenoble), doi:10.5802/aif.3743*，在线优先发表：56 页。[DJ16] Dmitry Dolgopyat 和 Dmitry Jakobson。长度谱中的小间隙。现代动力学杂志，10:339–352，2016。[DZ19] S. Dyatlov 和 M. Zworski。散射共振的数学理论。数学研究生教材。美国数学学会，2019。[Gio10] Julien Giol。某类开放台球闭轨道的渐近分布。塞尔迪卡数学杂志，36(1):89–98，2010。[Ika90a] Mitsuru Ikawa。多个凸体散射矩阵极点的分布。载于偏微分方程的泛函分析方法（东京，*1989*），第1450卷数学讲义，第210–225页。施普林格，柏林，1990。[Ika90b] Mitsuru Ikawa。符号流的奇异扰动与 ζ 函数的极点。大阪数学杂志，27(2):281–300，1990。[LP89] Peter D. Lax 和 Ralph S. Phillips。散射理论，纯粹与应用数学第26卷。学术出版社，波士顿，马萨诸塞州，第二版，1989。附录由 Cathleen S. Morawetz 和 Georg Schmidt 撰写。[Mor91] Takehiko Morita。无边界条件台球的符号表示。美国数学会汇刊，325(2):819–828，1991。[Pet99] Vesselin Petkov。动力学 ζ 函数的解析奇点。非线性，12(6):1663–1681，1999。[Pet25a] Vesselin Petkov。台球流的狄利克雷 ζ 函数。*Archiv der Mathematik*，125(2):201–212，2025。

[Pet25b]Vesselin Petkov。台球流的动力学 ζ 函数的极点数量。离散与连续动力系统，95(9):3174–3194，2025。[PP90] William Parry 和 Mark Pollicott。双曲动力学的 ζ 函数与周期轨道结构。*Ast´erisque*，（187-188），1990。268页。[PS17] Vesselin M. Petkov 和Luchezar N. Stoyanov。广义测地流的几何与逆谱问题。John Wiley & Sons, Ltd.，奇切斯特，第二版，2017。[Sch20] E mmanuel Schenck。长度谱中的指数间隙。现代动力学杂志，16:207–223，2020。[Sto09] Luchezar Stoyanov。多个小凸体的散射共振与 Lax-Phillips猜想。美国数学会回忆录，199(933)，2009。vi+76 页。

Université de Bordeaux, Institut de Mathématiques de Bordeaux，351, Cours de la Libération, 33405 Talence, France电子邮件地址：
petkov@math.u-bordeaux.fr