一种利用反向特征线追踪进行热辐射输运的方法

J. C. Dolence[a, c, d, *], H. R. Hammer[b], H. Park[b], B. Prather[c], B. R.Ryan[c] 和R. T. Wollaeger[c]

[a]*Michigan SPARC*，洛斯阿拉莫斯国家实验室，美国密歇根州安娜堡市 *Green Ct 3520* 号，邮编 *48105*[b]*T-3*，洛斯阿拉莫斯国家实验室，美国新墨西哥州洛斯阿拉莫斯市邮政信箱 *1663* 号，邮编 *87545*[c]*CCS-2*，洛斯阿拉莫斯国家实验室，美国新墨西哥州洛斯阿拉莫斯市邮政信箱 *1663* 号，邮编 *87545*[d] 航空航天工程，密歇根大学，美国密歇根州安娜堡市 *Beal Avenue 1320* 号，邮编 *48109*

arXiv:2602.03621v1 [astro-ph.IM] 3 Feb 2026

A文章信息

*K*关键词:
T热辐射输运
M特征线法

摘 要

热辐射输运是计算物理中的一项复杂问题，长期以来主要采用几种标准方法之一来处理：近似矩方法（例如 P_1 或 M_1）、隐式蒙特卡罗、离散纵标和长特征线法。本文探讨将（长）特征线法（MOC）应用于热辐射输运的效果。为此，我们提出了三个重要思路：从时间步结束时的求积网格出发，使 MOC 粒子沿时间反向输运；当射线上的光学深度足够大时，终止输运，以限制这些反向特征线的计算成本；以及针对灰色低阶系统，采用多群特征线法解构造时间步相关闭合。我们将该方法应用于一系列标准辐射输运和辐射流体力学测试问题。我们将该方法与若干标准解析解和半解析解，以及隐式蒙特卡罗、P_1，和离散纵标（S_n）进行比较。结果表明，该方法与已知结果高度吻合，在大时间步下具有稳定性，在大空间单元下达到扩散极限；在灰色 Marshak 问题和弯管问题中，当光学深度达到 O(10-100) 时终止输运，可提升 ~20-70% 的性能。然而，对于 Coax 辐射流体力学问题，按当前实现方式，MOC 的速度约比 IMC-DDMC 和 S_n 慢两到三倍。

1. 引言

热辐射输运是工程学和天体物理学许多领域中的一种重要物理效应。通常，要准确求解热辐射输运方程颇具挑战。这一挑战
i 主要源于高维（7 维）输运方程与物质之间的非线性耦合；该方程在相空间中演化辐射比强度 $I_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{\Omega}, \nu, t)$。此外，大的吸收和散射系数（不透明度）也可能使这种耦合变得刚性。这种复杂性往往使解析处理难以实现，而数值处理通常也难以在现有硬件条件下以实际可承受的成本达到令人满意的分辨率。

在过去一个多世纪的大部分时间里，热辐射输运通常采用两种数值方法之一求解。为简洁起见，在以下讨论中，我们不考虑通量限制扩散等近似矩方法[1], P_1，或 M_1 [2]。第一种是蒙特卡罗方法，其中 I_ν 被离散为粒子，并为其统计采样位置、方向和频率。随后，这些粒子的演化方式如同独立的光子，
t在空间中传播，并经历吸收和散射事件。该方法可求得
r 辐射输运方程的解，其收敛速度为 $N^{-1/2}$，其中 N 为粒子数。对于高维问题，这种收敛率具有优势，因为它不随问题维数变化；但其缺点是，随着粒子分辨率提高，解的收敛速度较慢。

当热辐射输运与底层材料之间存在强能量耦合时，通常采用隐式蒙特卡罗方法（IMC）来保证蒙特卡罗热辐射输运的稳定性（[3], 另见 [4] 综述）。该方法通过引入有效散射（吸收后立即再发射）来减轻一个时间步内的过度吸收。通常实现的这种方法实际上仅在时间上半隐式，不过也存在完全隐式的迭代技术[5]。在光学深度较大的区域，IMC 中的有效散射可能会带来极高的计算开销，因为每次相互作用事件都需要显式计算。为缓解这一问题，人们开发了加速技术，主要包括

*通讯作者 ORCID：0000-0003-4353-8751 (J.C. Dolence); 0000-0003-0745-1771 (H.R. Hammer); 0000-0002-0707-9677 (H. Park); 0000-0002-0393-7734 (B. Prather); 0000-0001-8939-4461 (B.R. Ryan); 0000-0003-3265-4079 (R.T. Wollaeger)

随机游走 [6, 7, 8] 和离散扩散蒙特卡罗 [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15]。这些方法能够有效加速扩散计算，但仍保留了蒙特卡罗方法收敛速度较慢的缺点，并且需要采用启发式方法来区分相空间中的扩散区域与输运区域 [6, 10]。

第二种主要的热辐射输运数值方法是离散纵标（S$_n$）或短特征线[16, 17]。将单位球面上光子方向的空间离散化为一种求积，其中包含离散纵标及其对应的一组权重，用于考虑立体角中 4π 的守恒。S$_n$ 具有“短”特征线，因为强度场在空间上离散化，并采用一个辅助方程来关联单元内部与单元边界上的强度。间断伽辽金（DG）有限元是保留渐近扩散极限的标准方法（例如，参见 [18, 19, 20]）；在此极限下，该方法可提供平衡扩散方程的有效离散化。S$_n$ 的主要缺点历来包括：射线效应[21], ，即光学薄介质中的局域各向同性源会呈现空间离散的射线；以及内存占用大，因为每个单元的每个有限元都存储了完整的强度求积。

输运方法，无论是蒙特卡罗方法还是确定性方法，都可以作为闭合方法，用于直接演化光子输运方程的矩以及物质方程的方案。已有多种方法，包括高阶-低阶（HOLO）([22, 23, 24])、可变埃丁顿张量（VET，或可变埃丁顿因子 VEF；例如 [25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32]）以及第二矩方法 [33, 34]。在此背景下，为保持渐近扩散极限，输运离散化不一定需要具备 [19] 所述的空间间断伽辽金单元特性（例如参见 [35, 36, 37, 32, 34]）。

近年来，特征线法（MOC）在热辐射输运领域重新受到关注，例如 [38], [39]。与 S$_n$ 不同，特征线法沿穿越网格单元的路径求解强度；在这些路径上，不透明度和发射率是离散的，但在这些近似条件下，强度解是精确的。因此，它可以利用蒙特卡罗中的粒子追踪基础设施来追踪强度射线，并达到 N^{-1} 收敛，其中 N仍表示粒子数。我们考虑的不是随机抽样粒子方向，而是采用 S$_n$ 方法中常用的离散纵标求积来进行特征线法计算。特征线法本身不保证能量守恒（尽管已有能够实现能量守恒的修正方法 [38]）。为保证能量守恒，我们采用标准的二阶空间离散，求解能量密度和辐射通量的低阶方程，并以高阶特征线法解闭合这些矩方程。特征线法强度粒子从空间单元顶点沿时间反向演化，从而能够在顶点、网格面和单元中心处计算埃丁顿张量及特征线法通量。此外，粒子沿时间反向追踪超过光学深度阈值后即终止。

本文组织如下。在第 2 节中，我们介绍所求解的输运方程形式、相应的反向特征方程、低阶系统，以及耦合高阶与低阶的一致性数据。在第 3 节中，我们讨论特征线法和低阶求解器的离散化，包括依赖于时间步的低阶系数多群折叠。在第 4 节中，我们利用热辐射输运和辐射流体力学文献中的一系列标准测试问题，对反向时间特征线法实现进行测试。最后，在第 5 节中，我们概述结论和未来工作。

2. 方程

我们将求解包含发射、吸收、各向同性弹性散射和物质运动修正的频率相关辐射输运方程 [40]:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\sigma_{\mathrm{t},\nu} I_\nu + \sigma_{\mathrm{a},\nu} c B_\nu + \frac{1}{4\pi}\sigma_{\mathrm{s},\nu} c E_\nu + \frac{1}{4\pi}\left(D_E + D_F\right) \tag{1}$$

其中， d/ds表示沿特征线方向的空间导数，$\sigma_{\mathrm{a},\,\nu}$ 为吸收不透明度，$\sigma_{\mathrm{s},\,\nu}$ 为散射不透明度，$\sigma_{\mathrm{t},\,\nu} = \sigma_{\mathrm{a},\,\nu} + \sigma_{\mathrm{s},\,\nu}$ 为总不透明度， $B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^3}\left(e^{h\nu/kT} - 1\right)^{-1}$ 为普朗克函数， T为物质温度，物质运动修正为

$$D_E = -\sigma_{\mathrm{t},\nu}\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\left[\mathbf{F}_\nu - \frac{4}{3}E_\nu\mathbf{v}\right], \tag{2}$$

$$D_F = 4\sigma_{\mathrm{t},\nu}E_\nu\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{v} \tag{3}$$

其中 $\mathbf{v}$ 是物质速度， E_ν 是与频率相关的辐射能量密度， $\mathbf{F}_\nu$ 是与频率相关的辐射通量。

2.1. 时间反向输运

显然，可以从最终时间1 开始向后积分时间，同时仍能求得最终强度 t_{f} ， $I_{\nu}\left(t_{\mathrm{f}}\right)$ [41]。从传输方程的形式解开始，

$$I(\tau)=I_{0}e^{-(\tau-\tau_{0})}+\int_{\tau_{0}}^{\tau}d\tau' S(\tau')e^{-(\tau'-\tau_{0})} \tag{4}$$

其中

$$\tau=\int_{0}^{s}\sigma(s')ds'. \tag{5}$$

边界条件 I_{0} 已通过总光学深度 $I(\tau)$与最终状态 τ相关联。对不透明度 σ 和源项 S的积分也没有方向性；因此，我们可以等价地沿时间反向特征线 $\eta'=s-s'$ 求解，其中 $s_{0}>s$，

$$\tau=\int_{0}^{s}\sigma(s')ds'=\int_{0}^{s}\sigma(\eta')d\eta' \ , \tag{6}$$

$$I(\tau_{0})=I(\tau)e^{-(\tau_{0}-\tau)}+\int_{\tau}^{\tau_{0}}d\tau' S(\tau')e^{-(\tau_{0}-\tau')} \ . \tag{7}$$

因此，沿特征线积分光学深度的步骤应保持不变，但此处 τ_{0} 现在表示从未来更远处（ η'中的一个极小点）开始计算的光学深度。

反向求解强度的动机与伴随输运方法的动机密切相关。在伴随输运方法中，解表示某个空间点对于不同探测器点处响应的重要程度 [42]。在这里，我们要在特定的（响应）点和时刻求强度解；通过从这个时空点沿时间反向演化，使特征线恰好终止于该点和时刻。时变伴随输运也采用这种做法。此外，这还建立了一种数值离散化方案，使每个时间步结束时具有理想的性质，例如，在对动量空间积分时，可在特定点进行完整的求积。采用这种时间反向输运方法，还可以在光学深度足以屏蔽更早时刻的所有源项后提前停止计算。请注意，此处假设 σ 和 τ 与时间无关；若将完整的散射核纳入 S，这很可能会首先成为问题，但如前所述，我们已经用辐射能量密度 E_{ν}近似了散射源项。我们将在第7 节3.1中讨论方程的数值离散化。

2.2. 矩方程

我们还将求解与方程 1一致的灰色矩方程：

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{F}=\sigma_{\mathrm{P}}cB-\sigma_{\mathrm{a}}cE-\sigma_{\mathrm{t}}\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\mathbf{F}+\frac{4}{3}\sigma_{\mathrm{t}}\frac{v^{2}}{c}E \tag{8}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t}+\nabla\cdot c\mathbb{P}=-\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{t}}:\mathbf{F}+\frac{4}{3}\sigma_{\mathrm{t}}\mathbf{v}E \tag{9}$$

其中 $B=aT^{4}$ 是 B_{ν} 对立体角和频率的积分， $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{t}}:\mathbf{F}$ 是向量 $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{t}}$与 $\mathbf{F}$的逐元素乘积，而不带 ν 下标的不透明度则经过适当的频率平均：

$$\sigma_{P}=\frac{4\pi}{cB}\int d\nu B_{\nu}\sigma_{a,\nu} \ , \tag{10}$$

$$\sigma_{a}=\frac{1}{cE}\int d\Omega d\nu I_{\nu}\sigma_{a,\nu} \ , \tag{11}$$

$$\sigma_{t,j}=\frac{1}{F_{j}}\int d\Omega d\nu\Omega_{j}I_{\nu}\sigma_{t,\nu} \ , \tag{12}$$

其中下标 j 表示向量的一个分量。辐射强度的矩

$$E = \frac{1}{c}\int d\Omega d\nu I_\nu \ , \tag{13}$$

$$\mathbf{F} = \int d\Omega d\nu \mathbf{\Omega} I_\nu \ , \tag{14}$$

$$\mathbb{P} = \frac{1}{c}\int d\Omega d\nu \mathbf{\Omega}\otimes\mathbf{\Omega} I_\nu \ , \tag{15}$$

分别是辐射能量密度、通量和压力张量。

请注意，方程8 和9由于表示相同的能量和动量量，方程 8 和 9 为与流体动力学物质表示耦合提供了自然途径，但需要频率平均不透明度和压力张量。我们方法的核心设计是仅使用方程1 来提供这种闭合；矩表示将作为辐射能量和动量的真实表示。这种方法使我们在求解方程1时拥有相当大的自由度；例如，我们可以毫不费力地采用非守恒方法，例如特征线法。

2.3. 一致性

我们将高阶 I_ν 、低阶 E 和 $\mathbf{F}$ 都作为动力学量进行演化。然而，对I_ν 积分会得到 E 和 $\mathbf{F}$ 的相互竞争的表示，通常与低阶系统不一致。为区分这些量，我们将前者记为 E_{HO}、 $\mathbf{F}_{\mathrm{HO}}$，将后者记为 E_{LO}、 $\mathbf{F}_{\mathrm{LO}}$。

我们的总体设计是将低阶部分视为辐射能量与动量的真实表示，并让高阶部分在演化过程中通过归一化压力张量向低阶部分提供指导

$$\mathbb{P} = E_{\mathrm{LO}}\frac{\int d\Omega d\nu \mathbf{\Omega}\otimes\mathbf{\Omega} I_\nu}{\int d\Omega d\nu I_\nu} \tag{16}$$

以及平均不透明度

$$\sigma_{\mathrm{a}} = \frac{\int d\Omega d\nu \sigma_{\mathrm{a},\nu} I_\nu}{\int d\Omega d\nu I_\nu} \ , \tag{17}$$

$$\sigma_{\mathrm{s}} = \frac{\int d\Omega d\nu \sigma_{\mathrm{s},\nu} I_\nu}{\int d\Omega d\nu I_\nu} \ . \tag{18}$$

灰平均不透明度用于辐射能量密度、物质耦合和低阶物质运动修正。在多群问题中，对于通量方程空间模板，我们使用高阶数据的另外两个平均值，分别表示平均自由时间数的通量加权调和平均与压力张量加权调和平均。这些附加平均值在第3.2节中讨论。

反过来，出现在散射和物质运动修正源项中的频率相关的低阶变量（见方程1 ）通过结合高阶系统的谱形与低阶系统的归一化来构造:

$$E_\nu = \frac{E_{\mathrm{HO},\nu}}{E_{\mathrm{HO}}}E_{\mathrm{LO}} \ , \tag{19}$$

$$\mathbf{F}_\nu = \frac{\mathbf{F}_{\mathrm{HO},\nu}}{\mathbf{F}_{\mathrm{HO}}}\mathbf{F}_{\mathrm{LO}} \ . \tag{20}$$

我们没有像 HOLO 方法那样设置人工一致性项来推动高阶解趋近于低阶解 [22]。物理源项会使高阶和低阶部分都趋于一致的平衡状态，但剩余的不一致仅仅是截断误差（包括空间和时间离散中的截断误差）的体现；它们本身不会导致方法出现不稳定性，因为在演化过程中，高阶部分只向低阶部分提供归一化量（平均不透明度、归一化张量）。

2.4. 边界条件

对于数值测试，我们实现了真空、反射和各向同性表面源边界条件。除边界条件对埃丁顿张量的影响外，真空和反射边界条件在高阶和低阶系统中分别处理。对于表面源，我们采用 Miften-Larson边界条件 [43] 当 $E_{HO} > 0$并在 $E_{HO} = 0$时退回到完全高阶边界条件：

$$\mathbf{F}_{LO} \cdot \mathbf{n} = \begin{cases} \left(F^{+}_{HO} + F^{-}_{HO}\right) \frac{E_{LO}}{E_{HO}} - 2F^{-}_{HO} \ , & E_{HO} > 0 \ , \\ F^{+}_{HO} - F^{-}_{HO} \ , & E_{HO} = 0 \ , \end{cases} \tag{21}$$

其中 $\mathbf{n}$ 是从空间域向外指向的法向量， F^{+}_{HO} （F^{-}_{HO}）是沿 $\mathbf{n}$流出（流入）该区域的部分通量。若 $E_{LO} = E_{HO}$，则显然Miften-Larsen通量退化为完全的高阶通量。若高阶强度相对于沿 $\mathbf{n}$的方向分量呈线性各向异性，则Miften-Larsen边界条件退化为标准马尔沙克边界条件 [43]。

3. 数值离散

我们现在描述求解方程的数值方法1、8和9 ，并在高阶和低阶部分同时进行。高阶辐射输运方程采用特征线法求解，其中 I_{ν} 沿特征线确定性演化，低阶矩方程则采用二阶有限体积和有限差分方法演化。这两个部分通过通量和压力张量系数，以及发射、吸收、散射和运动材料修正源项相联系。

MOC输运沿射线更新强度，并假设每个空间单元内的发射源为分片常数，详见第 3.1 节。鉴于我们实现的 MOC-LO 耦合方案，我们预计低阶求解器能够确保扩散极限。不过，线性有限元仍应能降低空间截断误差。高阶空间单元的应用留待未来工作。

我们在 Jayenne输运库中开发了该实现 [44], ，该库为 IMC 提供粒子和网格支持，这些支持可用于特征线法。Jayenne 包含基于单元的自适应网格细化（AMR）和基于MPI的区域分解基础设施。与特征线法专门相关的自适应网格细化和区域分解细节见第 3.5 节。

3.1. 特征线法

这里，我们详细说明如何沿着在时间上反向追踪的粒子对象积分光学深度和强度；这是本工作的一个主要特点，因为它使基于光学厚度的优化成为可能。鉴于强度沿射线向前传播时会呈指数衰减，人们可能会构造一种方案，使吸收导致强度在时间反向传播时呈指数增长。然而，正指数可能导致浮点溢出，而且实际上并无必要，正如下文所示。

在每个时间步结束时，我们在每个节点的求积网格上布置样本。我们将粒子放置在节点上而非单元中心，原因有二。首先，在每个时间步开始时，根据前一时间步更新后的样本在支撑点之间进行插值会更加简单，尤其是在任意细化的网格上。其次，插值始终局限于单元内部，从而避免插值误差在扩散区间内主导弱通量。每个粒子都存储完整的多群强度和光学深度谱（蒙特卡罗示例见 [45]）。

图 1展示了样本的初始分布，以及时间反向输运至时间步开始时所在位置的过程。一般而言，由于网格细化、非笛卡尔坐标系、任意的模拟时间步以及样本传播方向各异，这组样本在时间步开始时不会构成由共置粒子组成的求积网格。

方程 7 包含两项，它们共同决定最终的时间强度 $I_{\nu}\left(t_{\mathrm{f}}\right)$：一项是初始强度经总光学深度衰减后形成的边界项，另一项是沿路径长度对源函数积分，并持续受到随路径长度变化的中间光学深度的衰减。我们可以沿每条轨迹从 t_{f} 到 t_0 进行一次遍历，同时将源项积分拆分为离散步骤，并累积总光学深度 τ，从而计算这两项。空间阶数可以任意选取。考虑对 S进行分段常数离散化。

对于从点 i 到 $i+1$ 的一步：

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} S_i e^{-(\tau-\tau')} d\tau' = S_i e^{-\tau} \left(e^{\tau_{i+1}} - e^{\tau_i}\right) \tag{22}$$

$$= S_i e^{-(\tau-\tau_{i+1})} \left(1 - e^{-(\tau_{i+1}-\tau_i)}\right) \quad . \tag{23}$$

定义 $\Delta\tau_i = \tau_{i+1} - \tau_i$ 和 $\bar{\tau}_i = \tau - \tau_{i+1}$：

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} S_i e^{-(\tau-\tau')} d\tau' = S_i e^{-\bar{\tau}_i} \left(1 - e^{-\Delta\tau_i}\right) \quad . \tag{24}$$

给定特征线上沿线分布的 $N+1$ 个空间点，且这些点之间各段上的源项和不透明度均为分段常数，则可将源项积分和光学深度积分划分为 N 段。于是，$\tau = \tau_{N+1} = \sum_{i=N}^{1} \Delta\tau_i$、$\tau_1 = 0$以及沿特征线的强度解为

$$\bar{\tau}_i = \begin{cases} \sum_{j=N}^{i} \Delta\tau_j & , \ i \leq N \\ 0 & , \ i = N+1 \end{cases} \tag{25}$$

$$I_{N+1} = I_0 e^{-\tau} + \sum_{i=N}^{1} e^{-\bar{\tau}_{i+1}} \left(1 - e^{-\Delta\tau_i}\right) S_i \quad . \tag{26}$$

$N+1$ 个空间点表示与粒子特征线相交的网格单元边界交点。粒子特征线始于点 $N+1$ 所表示的网格单元顶点，并沿时间反向传播至点 1（该点可能位于计算域边界上，也可能位于某个空间单元内部）。因此，S_i 和 $\Delta\tau_i$ 分别表示源项的值，以及在步骤 i 对应的空间单元中经过的光学深度（该步骤位于点 $i+1$ 和 i之间）。沿特征线计算光学深度 $\bar{\tau}_i$ 时，只需将粒子经过的每个单元的 $\Delta\tau_i$ 贡献相加，这与沿时间正向追踪特征线的方法相同。对于每个粒子，在其经过步骤 j （从 N 向下至 1）时，我们计算附着于该粒子的辅助强度：

$$\tilde{I}_{N+1}^{(j)} = \sum_{i=N}^{j} e^{-\bar{\tau}_{i+1}} \left(1 - e^{-\Delta\tau_i}\right) S_i \quad . \tag{27}$$

˜因此，通过递推即可更新粒子在步骤 $j-1$后的 I 值：

$$\tilde{I}_{N+1}^{(j-1)} = \tilde{I}_{N+1}^{(j)} + e^{-\bar{\tau}_j}(1 - e^{\Delta\tau_{j-1}}) S_{j-1} \quad , \tag{28}$$

其中，新增项就是步骤 $j-1$ 中源项的强度经过从点 j 返回点 $N+1$的路径光学深度衰减后的结果。粒子在 $j=1$处终止，此时将初始条件或边界条件中的 I_0 加到最终辅助强度上，即可得到粒子在 $N+1$处的真实强度：

$$I_{N+1} = I_0 e^{-\tau_{N+1}} + \tilde{I}_{N+1}^{(1)} \quad . \tag{29}$$

我们注意到，沿特征线追踪后，粒子位于点 1，但其强度值对应于端点 $N+1$，该端点被视为时间步的结束时刻（t_f）。如果粒子在时间步开始时停止于空间域内部，我们会沿粒子的方向对先前的强度进行插值，将其插值到粒子所在的位置（点 1），如图 2所示，从而得到 I_0 值（在二维情况下，我们采用双线性插值）。在曲线坐标中，方向分量会沿直线路径发生变化，因此，如果求积是在曲线坐标系中定义的，那么点 1 处的粒子方向将不再属于求积的纵坐标集合。因此，在圆柱几何中，我们的实现会同时在空间和径向方向分量上进行插值（沿对称轴方向的方向分量在特征线上保持不变，因此无需插值）。在.....之后

对 I_0 求值后，粒子会返回其原始的未来位置（以便在下一个时间步中用作 I_0）。这一返回过程很简单：每个粒子都会存储原始（未来）顶点索引，以及原始顶点所属的 MPI 秩。

对于我们基于光学深度的沿特征线粒子输运终止，如果在到达初始条件或边界条件之前已达到阈值 τ_{th}，我们便不再加入 $I_0 e^{-\tau}$ 的贡献，假定它与 $\tilde{I}^{(j)}_{N+1}$相比可忽略不计，其中 j 为步长 $\bar{\tau}_j > \tau_{\text{th}}$。因此，粒子被传回点 $N+1$，并具有最终强度 $I_{N+1} = \tilde{I}^{(j)}_{N+1}$。对于多群粒子强度，仅当所有群的光学厚度均超过 τ_{th}后，粒子才被终止。

3.2. 矩

我们现在考察低阶方程组的离散化，这是我们MOC-LO表述的下一个主要进展。一个高层目标是形成MOC-LO耦合，即低阶系统的MOC闭合，使其实现难度与完全灰体VET表述一样简单或几乎一样简单。具体而言，我们希望避免在典型完全灰体VET方法中的闭合项之外引入额外方程。另一个高层目标是获得一种闭合，能够在不透明度随频率变化很大的材料中给出强度的准确空间依赖，这并非易事。

矩方程8 与9被离散到网格上， E 位于单元中心，通量与面法向点乘所得的 $F \cdot n$ 位于单元面。该离散化在光学厚度变大时自然恢复类菲克定律的渐近行为。本文给出的多频表述在单一频率群下可恢复标准灰体VET离散化，因此无需单独考虑灰体表述。众所周知，在对频率积分以得到低阶方程组时必须谨慎；根据积分方式的不同，该系统可能出现数值不稳定（例如参见 [23]）。

我们的多频处理在MOC输运中采用多群形式，其中假定不透明度已在群区间上积分。对于频率上变化剧烈的不透明度，我们发现先对群积分不透明度再进行时间离散，可能导致低阶求解器的通量模板无法与高阶通量匹配。对低阶方程组的多群形式进行积分，可能得到通量加权的算术平均 σ_t，而调和加权可能更为准确（例如标准罗斯兰平均）。然而，对于物质运动修正项， σ_t 的算术平均可能更为合适。

将多群折叠为灰色时产生的误差，可以通过添加一致性项 [46] 或采用中阶多群角度积分系统来补救（例如参见 [32] 及其中的参考文献）。使用罗斯兰平均或通量加权算术平均 [23]可以保证稳定性。我们采用一种不同的方法：对由高阶数据构成的多群矩方程进行一致的时间离散，并将结果对各群求和，从而根据高阶数据推导低阶系数。我们尤其关注一阶矩方程，并可忽略将采用算子分裂处理的物质运动修正项（第3.3节）。沿一个维度进行时间隐式有限差分，

$$F^{(n+1)}_{g,i+1/2} = \frac{1}{1 + c\Delta t_n \sigma_{t,g,i+1/2}} F^{(n)}_{g,i+1/2} - \frac{1}{1 + c\Delta t_n \sigma_{t,g,i+1/2}} \frac{c^2 \Delta t_n}{\Delta x_{i+1/2}} \left(\mathbb{f}_{xx,g,i+1} E^{(n+1)}_{g,i+1} - \mathbb{f}_{xx,g,i} E^{(n+1)}_{g,i} \right) \quad , \tag{30}$$

其中，上标 n 表示时间步，下标 i 和 g 分别表示空间单元和群指标， Δt_n 表示时间步长，$\sigma_{t,\ g,\ i+1/2}$ 表示单元面 $i+1/2$处每群的总不透明度， $\Delta x_{i+1/2}$ 表示单元中心之间的距离，而$\mathbb{f}_{g,\ i} = \mathbb{P}_{g,\ i}/E_{g,\ i}$ 表示每群每单元的埃丁顿张量。对于任意单元面 j，我们将紧邻该单元面下方（−）和上方（+）的值取调和平均，计算$\sigma_{t,\ g,\ j}$，

$$\sigma_{t,g,j} = \frac{2}{\frac{1}{\sigma^-_{t,g,j}} + \frac{1}{\sigma^+_{t,g,j}}} \quad , \tag{31}$$

这有利于在不透明度发生剧烈变化的单元面处采用较小的不透明度。采用调和平均是我们的选择，在整套数值测试中取得了最佳结果。在低不透明度区域与高不透明度区域之间的界面处，该平均值会更接近低不透明度，因此界面处来自低不透明度区域的通量将在模板中采用低不透明度；这产生了类似于对不透明度进行迎风处理的效果。还应注意，我们在平均值中不使用 Δx_i 作为权重，这也是一种选择：用 $1/\Delta x_i$ 对不透明度倒数进行加权，会得到基于光学厚度的平均值，偏向于宽度和不透明度均较小的单元，而对不透明度倒数进行加权

本身则会偏向于宽度较大且不透明度较小的单元。我们没有理由反对任何一种加权方式，因此选择两者都不采用（或者说两者都采用，因为 $1 = \Delta x_i/\Delta x_i$）。

在式（30）中，我们忽略了与 $\mathbb{f}_{xy}$ 成正比的非对角项，因为稍后会讨论这些项，且它们不会使此处的对角项推导变复杂。只需将式30 对各群求和，即可构造灰辐射通量方程，

$$F_{i+1/2}^{(n+1)} = \sum_g \frac{F_{g,i+1/2}^{(n)}}{1 + c\Delta t_n \sigma_{t,g,i+1/2}} - \frac{c^2 \Delta t_n}{\Delta x_{i+1/2}} \left(\sum_g \frac{\mathbb{f}_{xx,g,i+1} E_{g,i+1}^{(n+1)}}{1 + c\Delta t_n \sigma_{t,g,i+1/2}} - \sum_g \frac{\mathbb{f}_{xx,g,i} E_{g,i}^{(n+1)}}{1 + c\Delta t_n \sigma_{t,g,i+1/2}} \right) \ . \tag{32}$$

令

$$A_{i+1/2} = \frac{1}{F_{HO,i+1/2,g}^{(n)}} \sum_g \frac{F_{HO,g,i+1/2}^{(n)}}{1 + c\Delta t_n \sigma_{t,g,i+1/2}} \ , \tag{33a}$$

$$\mathbb{B}_{xx,i}^{\pm} = \frac{1}{\mathbb{f}_{xx,i} E_{HO,i}^{(n+1)}} \sum_g \frac{\mathbb{f}_{xx,g,i} E_{HO,g,i}^{(n+1)}}{1 + c\Delta t_n \sigma_{t,g,i\pm1/2}} \ , \tag{33b}$$

$$\mathbb{f}_{xx,i} = \sum_g \mathbb{f}_{xx,g,i} \ , \tag{33c}$$

我们可以将灰通量方程改写为

$$F_{i+1/2}^{(n+1)} = A_{i+1/2} F_{i+1/2}^{(n)} - \frac{c^2 \Delta t_n}{\Delta x_{i+1/2}} \left(\mathbb{B}_{xx,i+1}^{-} \mathbb{f}_{xx,i} E_{i+1}^{(n+1)} - \mathbb{B}_{xx,i+1}^{+} \mathbb{f}_{xx,i} E_i^{(n+1)} \right) \ . \tag{34}$$

为构造低阶部分的闭合，我们利用高阶（特征线法）数据计算 $A_{i+1/2}$ 和 $\mathbb{B}_i$；将方程中的各项加上下标，

$$F_{LO,i+1/2}^{(n+1)} = A_{i+1/2} F_{LO,i+1/2}^{(n)} - \frac{c^2 \Delta t_n}{\Delta x_{i+1/2}} \left(\mathbb{B}_{xx,i+1}^{-} \mathbb{f}_{xx,i+1} E_{LO,i+1}^{(n+1)} - \mathbb{B}_{xx,i+1}^{+} \mathbb{f}_{xx,i} E_{LO,i}^{(n+1)} \right) \ . \tag{35}$$

我们注意到，这些 A 项和 $\mathbb{B}$ 项只是由时间离散化产生的系数 $1/(1 + c\Delta t_n \sigma_t)$ 的两种加权平均，因此也只是 σ_t 的两种依赖时间步长的调和平均。

对于单群情况，这种通量方程的表述简化为一种处理低阶近似的典型可变埃丁顿张量方法。对于多群情况，假设$c\Delta t_n \sigma_{t,\ g,\ i+1/2}$ 为许多个平均自由时间，并进一步假设$\mathbb{f}_{xx,\ g,\ i} \approx \mathbb{f}_{xx,\ g,\ i+1} \approx 1/3$，则 $\mathbb{B}$项简化为

$$\mathbb{B}_{xx,i}^{\pm} = \frac{1}{c\Delta t_n E_{HO,i}} \sum_g \frac{E_{HO,g,i}}{\sigma_{t,g,i\pm1/2}} = \frac{1}{c\Delta t_n \sigma_{R,i}^{\pm}} \ . \tag{36}$$

其中，我们引入了$\sigma_{R,\ i}^{\pm}$，即沿该维度在较低（-）或较高（+）单元面处的总面不透明度的辐射能量密度加权的群调和平均值。于是，通量方程为

$$F_{LO,i+1/2}^{(n+1)} \approx -\frac{c}{3\Delta x_{i+1/2}} \left(\frac{1}{\sigma_{R,HO,i+1}^{-}} E_{LO,i+1}^{(n+1)} - \frac{1}{\sigma_{R,HO,i}^{+}} E_{LO,i}^{(n+1)} \right) \ , \tag{37}$$

这是对菲克定律的有效离散化。因此，只要满足上述导出菲克定律的假设，即使高阶方程本身无法达到扩散极限，我们仍预期该方法能够达到扩散极限。我们注意到，高阶与低阶行为之间的这种差异可能导致高阶与低阶辐射能量密度解不一致；但对于吸收-发射时间尺度较短的光学厚介质，使用低阶温度计算高阶发射率应能抑制这种偏差。

我们将一阶矩方程中非对角埃丁顿张量（“交叉”）项的贡献视为纯高阶项，这意味着这些项是低阶方程组中的源项。因此，在求解方程时构造的雅可比矩阵中，这些交叉项将消失。按照上述类似步骤，将交叉项与时间导数项分离，

$$F_{LO,j}^{(n+1)} = -\frac{c^2 \Delta t_n}{\Delta y_j} \left(\mathbb{X}_{xy,v_{j,2}} - \mathbb{X}_{xy,v_{j,1}} \right) \ , \tag{38}$$

其中，j 现在表示法向沿 x方向的单元面的索引（替代上文的 $i+1/2$），$v_{j,\ 1}$ 和$v_{j,\ 2}$分别表示界定单元面 j的下节点和上节点的索引，并且

$$\mathbb{X}_{xy,v_{j,k}} = \sum_g \frac{\mathbb{f}_{xy,g,v_{j,k}} E_{HO,g,v_{j,k}}^{(n+1)}}{1 + c\Delta t_n \sigma_{t,g,j}} \ , \ k \in \{1,2\} \ . \tag{39}$$

这些交叉项方程利用了顶点处强度的特征线法解（因此利用了逆时间输运），所以不需要将网格单元或单元角点处的高阶数据重构到顶点。不过，$\mathbb{X}$项在拓扑上不同于 $\mathbb{B}$项：对于二维矩形网格单元，每个网格单元有 4 $\mathbb{B}$个该类标量，而每个网格单元有 8 $\mathbb{X}$个该类标量。

在柱坐标中，辐射通量方程会增加两个额外的“几何”源项。具体而言，r–和 z–通量方程变为：

$$\frac{1}{c}\frac{\partial F_r}{\partial t} + \frac{\partial \left(\mathbb{f}_{rr} c E\right)}{\partial r} + \frac{\partial \left(\mathbb{f}_{rz} c E\right)}{\partial z} + \frac{\mathbb{f}_{rr} + \mathbb{f}_{\phi\phi}}{r} c E + \sigma_t F_r = 0, \tag{40}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial F_z}{\partial t} + \frac{\partial \left(\mathbb{f}_{zr} c E\right)}{\partial r} + \frac{\partial \left(\mathbb{f}_{zz} c E\right)}{\partial z} + \frac{\mathbb{f}_{zr}}{r} c E + \sigma_t F_z = 0 \tag{41}$$

这里，$\frac{\mathbb{f}_{rr}+\mathbb{f}_{\phi\phi}}{r} cE$ 和 $\frac{\mathbb{f}_{zr}}{r} cE$ 项完全源自圆柱几何中的散度算子。在我们的离散算法中，我们使用在每个单元面上求得的灰埃丁顿张量以及相应的单元面平均低阶辐射能量密度$E_{LO,\ ij}$来近似这些几何项。也就是说，对于位于半径r_{ij} 处的单元面 ij，我们写作

$$\frac{\mathbb{f}_{rr} + \mathbb{f}_{\phi\phi}}{r} c E \approx \frac{\mathbb{f}_{rr,ij} + \mathbb{f}_{\phi\phi,ij}}{r_{ij}} c E_{LO,ij}, \tag{42}$$

$$\frac{\mathbb{f}_{rz}}{r} c E \approx \frac{\mathbb{f}_{rz,ij}}{r_{ij}} c E_{LO,ij} \tag{43}$$

我们强调，A-、$\mathbb{B}$-和 $\mathbb{X}$-项的主要动机是，它们作为总面不透明度在群上的调和平均所产生的效果，σ_g。第4节通过数值结果对此进行了展示。我们看到，这些项与简单的以单元面为中心的几何项相结合后，当高阶通量中光学薄群的贡献显著时，低阶灰通量可以模拟高阶灰通量。

3.3. 物质运动修正

在算法的低阶（LO）和高阶（HO）部分，对物质运动修正（MMC）项的处理略有不同。在低阶系统中，显式计算 MMC 项；而在高阶系统中，则隐式处理这些项。低阶和高阶系统均使用低阶辐射能量密度 E_{LO} 和通量 F_{LO}。

在低阶部分，我们采用算子分裂方法。首先，应用显式的多矩方法项以获得中间量：

$$E_{LO,i}^{*} = E_{LO,i}^{(n)} - \sigma_t \Delta t \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{F}_{LO,i}^{(n)} + \frac{4}{3}\sigma_t \Delta t \frac{v^2}{c} E_{LO,i}^{(n)} \tag{44}$$

$$\mathbf{F}_{LO,ij}^{*} = \mathbf{F}_{LO,ij}^{(n)} + \frac{4}{3}\sigma_t c \Delta t \mathbf{v} E_{LO,ij}^{(n)} \tag{45}$$

随后，使用以下方法对剩余的低阶系统进行隐式推进：

$$\frac{E_{LO}^{(n+1)} - E_{LO}^{*}}{\Delta t} + \nabla \cdot \mathbf{F}_{LO}^{(n+1)} = \sigma_{\mathrm{a}} c B^{(n+1)} - \sigma_{\mathrm{a}} c E_{LO}^{(n+1)} \tag{46}$$

$$\frac{\mathbf{F}_{LO}^{(n+1)} - \mathbf{F}_{LO}^{*}}{c\Delta t} + \nabla \cdot \mathbb{f}^{(n+1)} c E_{LO}^{(n+1)} = -\sigma_{\mathrm{t}} \mathbf{F}_{LO}^{(n+1)} \tag{47}$$

实际上，单元平均辐射通量由周围的面法向通量计算得到，如下所示：

$$F_{LO,i,x} = \sum_j \mathbf{n}_{ijx} \cdot \mathbf{F}_{LO,ij} / \sum_j |\mathbf{n}_{ijx}|, \tag{48}$$

$$F_{LO,i,y} = \sum_j \mathbf{n}_{ijy} \cdot \mathbf{F}_{LO,ij} / \sum_j |\mathbf{n}_{ijy}|, \tag{49}$$

面平均辐射能量密度 E_{ij} 通过算术平均计算得到：

$$E_{LO,ij} = \frac{E_{LO,i} + E_{LO,j}}{2} \tag{50}$$

For 在高阶区域中，MMC项通过单元平均源项 D_E 和 D_F纳入：

$$D_{E,i,\nu} = -\sigma_{t,\nu} \frac{\mathbf{v}_i}{c} \cdot \left(\mathbf{F}_{LO,i,\nu}^{(n+1)} - \frac{4}{3} E_{LO,i,\nu}^{(n+1)} \mathbf{v}_i \right), \tag{51}$$

$$D_{F,i,\nu} = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{v}_i E_{LO,i,\nu}^{(n+1)},$$

这些项 $D_{E、i、\nu}$ 和 $D_{F、i、\nu}$对方程 S_i 中的单元平均源项 26作出贡献。MMC项的空间离散在低阶系统和高阶系统之间保持空间一致性，从而确保整个辐射流体力学框架的兼容性。

3.4. 初始条件和边界条件

MOC 方法区域中初始条件的应用采用基于粒子的插值，并遵循第 3.1 节所述的 I_0 应用流程，在每个时间步开始时执行。对于模拟的第一个时间步，将区域内的初始强度设为给定初始温度下的普朗克函数 T_0。对于非均匀初始温度，基于顶点的初始强度采用粒子沿时间反向追踪所到达网格单元中的温度，因此二维粒子的初始强度一般形式为：

$$\begin{aligned} I_0 = \frac{c}{4\pi} \big(& B_\nu(T_0^{--})\Theta(\Omega_1 > 0)\Theta(\Omega_2 > 0) + B_\nu(T_0^{-+})\Theta(\Omega_1 > 0)\Theta(\Omega_2 < 0) \\ & + B_\nu(T_0^{+-})\Theta(\Omega_1 < 0)\Theta(\Omega_2 > 0) + B_\nu(T_0^{++})\Theta(\Omega_1 < 0)\Theta(\Omega_2 < 0) \big) \ , \end{aligned} \tag{52}$$

其中，$T_0^{\pm\pm}$ 为网格单元中的温度，Ω_k 为方向在维度索引 k 上的分量，$\Theta(\cdot)$ 为单位阶跃函数。低阶系统使用相同的 T_0 值来初始化低阶单元中心辐射能量密度，

$$E_{LO,0} = B(T_0) = a T_0^4 \ . \tag{53}$$

我们允许初始物质温度取不同的值，即 $T_{m,\ 0}$，从而可以初始化非平衡问题。

我们将 Miften-Larsen 边界条件离散化为

$$F_{LO,j} = \left(F_{HO,j}^{+} + F_{HO,j}^{-} \right) \frac{E_{LO,i}}{E_{HO,i}} - 2F_{HO,j}^{-} \ , \tag{54}$$

其中，下标 i表示在单元中心进行评估，下标 j 表示在单元 i的单元面处进行评估。为了使用基于顶点的高阶采样，我们对在限定单元面 j的两个（四个）顶点处评估得到的部分通量进行线性平均

（单元 i）。我们注意到，在 i处进行评估与在 j 处进行评估之间的差异会在边界条件中引入空间截断误差（尽管可以重构$E_{LO,\ j}$）。

3.5. 区域分解与自适应网格细化

我们的实现兼容在 MPI 秩之间进行网格单元的动态负载均衡（DLB），也兼容基于单元的自适应网格细化（AMR）。此外，我们允许在时间步之间进行多级网格细化和粗化。这些优化对于将我们的方法应用于多维流体力学至关重要。此处讨论的细节以二维示意图展示在图3中，图中一个单元经过一级细化变为四个单元，其中一个细化后的单元被发送到另一个 MPI 秩。

我们通过新旧单元索引之间的映射来跟踪动态负载均衡和自适应网格细化带来的变化。对于低阶系统，我们按每个单元的每个网格面存储通量与面面积的乘积（即网格面处的通量与单元外法向的点积），并在单元粗化时，通过简单地累加被移除单元簇外边缘上的数值来进行限制。对于通过单元细化进行延拓的情况，在旧粗网格单元边缘处，沿与通量（及线性插值）方向正交的方向，将旧粗网格面延拓到新的细化网格面（这些网格面的并集即为旧粗网格面）：将旧粗网格通量乘以新细化网格面的面积占比，从而确保细化网格面上的通量之和等于旧粗网格面的通量。为获得旧单元内部新网格面上的通量，我们沿各个维度在旧粗网格单元的边缘之间对单位面积通量进行线性插值（并乘以细化网格面的面积，以得到新保留的数值）。细化单元内部会自动满足连续性，但在新细化单元与先前已细化区域相邻的边界处，则需要单独施加连续性条件。

对于特征线法粒子，我们首先利用 Jayenne 中现有的隐式蒙特卡罗粒子重映射功能，通过动态负载均衡映射已有的特征线法粒子。然而，与 IMC 不同，粒子并不代表守恒量，因此可以通过自适应网格细化生成和移除。粒子移除（或限制）仅使用单元映射来识别哪些旧的细化单元簇已变为新的粗网格单元，并移除新粗网格单元内部的粒子。原则上，这一移除步骤并非必需，因为粒子普查将被替换，而本应由此过程移除的粒子会因在新网格中拥有无效顶点索引而成为孤立粒子。我们使用二维双线性空间插值，在细化单元的新顶点处生成（或延拓）新粒子，并对每个方向离散坐标分别进行；每个粒子存储多群强度，因此插值使用包围旧粗网格单元的四个粒子的四个多群向量，以在新的内部顶点处得到一个粒子。我们注意到，若两个相邻网格单元均已被细化，该过程可能在单元边上的新顶点处生成重复的特征线法粒子，但由于顶点处强度的连续性，重复粒子的强度应当一致。尽管如此，移除重复粒子以尽量减少粒子普查的内存占用可能是有益的。

在区域分解动态负载均衡设置下生成粒子时，可能需要在多个 MPI 秩之间复制旧粒子，因为在旧顶点相邻的细化单元上，多个 MPI 秩可能都需要在延拓过程中使用该旧粒子。因此，在类 IMC 粒子重映射的初始遍历之后，我们使用新旧单元映射，为延拓/生成所需的粒子构建额外的通信缓冲区。具体而言，每个 MPI 秩都会为所需粒子建立粒子请求列表，参与全对全收集以汇总各秩的请求，为每个秩创建缓冲区，将其所需的粒子发送给需要这些粒子的秩；随后反转这一通信模式，使接收秩能够获知来自其他各秩的预期缓冲区大小，最后执行 MPI 发送和接收。对于粗旧单元单元面的通量，也需要采用类似的过程，因为多个秩可能需要某个特定单元面的旧值。

3.6. 算法概述

完整的 MOC 算法概述见算法 1。在一个时间步内，MOC 粒子输运在外层循环中进行，内层则由隐式迭代低阶求解器使用外层循环中的闭合数据。在此基础上，低阶数据会重置下一次外层迭代中粒子输运的源项。在此概述中，$||\cdot||_k$ k-范数在空间单元上计算，此外，向量符号 $\vec{\cdot}$ 表示空间单元索引上的向量。引入向量符号只是为了说明用于计算雅可比矩阵的每个单元方程是其他单元辐射能量密度的函数。本概述着重介绍 MOC 辐射输运求解的具体细节，为简洁起见，省略了前文各节讨论的一些公式。

算法 1MOC-LO 解算法概要

初始化强度 I_0、能量密度 $E_{LO}^{(n=0)}$、通量 $\mathbf{F}_{LO}^{(n=0)}$ 和物质温度 T_0。

对于时间步 $n=0$ 到 $n_{\max}-1$ **执行**

执行自适应网格细化/动态负载均衡和流体动力学求解。

计算单元群不透明度 $\sigma_{a,\,g}, \sigma_{s,\,g}$，单元面群不透明度 $\sigma_{t,\,g}$。

延拓+限制/重映射 I_n，$\mathbf{F}_{LO}^{(n)}$（第3.5节）。

计算 E^*_{LO} 以及通量 $\mathbf{F}^*_{LO}$ 使用显式低阶多矩方法修正（式（45））。

初始化外层迭代：$E_{LO}^{(k=0)} = E^*_{LO}, \mathbf{F}_{LO}^{(k=0)} = \mathbf{F}^*_{LO}, T^{(k=0)} = T_n.$

设置所有 _完成 = false。

while not 全部 _完成 **执行**

在 $t_p = t_n + \Delta t_n = t_{n+1}$ 处生成特征线法粒子，位于网格顶点处。

对于每个特征线法粒子 p **执行**

沿方向 $-\mathbf{\Omega}$ 将位置输运穿过单元 $_p$（沿时间反向）。

对每个 τ积分 $_{p,g}, I_{p,g}$ 在单元步长上（式（28））。

如果 $t_p = t_n$ 或$\tau_p > \tau_{\text{threshold}}$ **则**

停止粒子 p 的输运。

如果满足以下条件，则对粒子应用最终强度更新：$t_p = t_n$（式（29））。

将 p发送到 t_{n+1} 处的原始顶点坐标。

结束 if

结束 for

根据粒子计算闭合系数 $A^{(k+1)}$、$\mathbb{B}^{(k+1)}$、$\mathbb{X}^{(k+1)}$（式（$I^{(k+1)}$（33）、（39））。

计算 $E^{(k+1)}_{HO,g}$-加权吸收不透明度，σ_a。

初始化内迭代：$E^{(l=0)}_{LO} = E^{(k)}_{LO}, \mathbf{F}^{(l=0)}_{LO} = \mathbf{F}^{(k)}_{LO}.$

设置完成状态 = false

当未完成**时执行**

使用牛顿-拉夫森方法求解 $\rho c_v(T^{(l)} - T_n)/\Delta t_n = c\sigma_a E^{(l)}_{LO} - \sigma_P ca(T^{(l)})^4$ 对于 $T^{(l)}$。

设置 $r_l = \texttt{res}(E^{(l)}_{LO}, \mathbf{F}^{(l)}_{LO}, T^{(l)})$

计算低阶单元间雅可比矩阵 $\mathcal{J}_i^{(l)}{}_{,\,i'} = \left.\frac{\partial g_i}{\partial E_{LO,\,i'}}\right|_l$，对于低阶系统 $g_i(\vec{E}^{(l)}_{LO}, \vec{T}^{(l)}) = 0$。

求解 $\vec{g} = \mathcal{J}^{(l)}(\vec{E}^{(l+1)}_{LO} - \vec{E}^{(l)}_{LO})$对于 $\vec{E}^{(l+1)}_{LO}$.

计算 $\mathbf{F}^{(l+1)}_{LO}$ 用 $\mathbf{F}^*{}_{LO}, E^{(l+1)}_{LO}, A^{(k+1)}, \mathbb{B}^{(k+1)}, \mathbb{X}^{(k+1)}$。

如果 l > 0 **则**

结束 $= r_l/r_{l-1} < \varepsilon'$

结束 if

$l \leftarrow l+1$

结束 while

设置 $E^{(k+1)}_{LO} = E^{(l+1)}_{LO}, \mathbf{F}^{(k+1)}_{LO} = \mathbf{F}^{(l+1)}_{LO}, T^{(k+1)} = T^{(l+1)}$。

如果 k > 0 **则**

全部_完成 $||(E^{(k+1)}_{LO} - E^{(k)}_{LO})/E^{(k+1)}_{LO}||_\infty > \varepsilon$

结束 if

$k \leftarrow k+1$

结束 while

设置 $E^{(n+1)}_{LO} = E^{(k)}_{LO}, \mathbf{F}^{(n+1)}_{LO} = \mathbf{F}^{(k)}_{LO}, T_{n+1} = T^{(k)}$

计算能量-动量耦合项。

结束 for

过程 res（E_{LO}，$\mathbf{F}_{LO}$，T）

返回 $||(E_{LO} - E_{LO\ ,n})/\Delta t_n + \nabla\cdot\mathbf{F}_{LO} + \sigma_a c E_{LO} - \sigma_P ca T^4||_2$

结束过程

4. 测试问题

4.1. 平面平行真空

在此，我们对一维真空（不透明度为 0）问题中的特征线法和低阶系统进行联合测试 [39]。该问题由一个具有各向同性边界条件的平面平行区域构成。不透明度为 0 的条件使该问题成为对高阶特征线法部分（或任何采用离散角度求积的方法）中的射线效应以及低阶部分中的因果信号速度的压力测试。该问题的强度解析解为：

$$I(x,t) = I_0\Theta(ct - x/\mu) \ , \tag{55}$$

其中， x 为空间坐标， t为时间， μ 为沿 x方向的分量， I_0 为边界处的各向同性强度值， $\Theta(\cdot)$ 为单位阶跃函数。因此，辐射能量密度是空间坐标的线性函数：

$$E = \frac{1}{c} I_0 \left(1 - \frac{x}{ct}\right) \ , \ x \leq ct \ . \tag{56}$$

将强度解析解代入埃丁顿张量，可得沿一维坐标方向的张量对角元如下：

$$f_{xx} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{x}{ct} + \left(\frac{x}{ct}\right)^2\right) \ , \ x \leq ct \ . \tag{57}$$

注意到埃丁顿张量的对角线元素之和必须为 1，我们可以得到垂直于 x-方向的（y-）方向的对角线元素，

$$f_{yy} = \frac{1}{2}(1 - f_{xx}) \ . \tag{58}$$

非对角值 f_{xy} 在解析上为 0，所选角度求积可达到机器精度地得到这一结果。

对于纯吸收介质（忽略再发射），可以得到辐射能量密度线性公式的推广形式，

$$E(x,t) = \frac{1}{c} I_0 \left(E_2(\sigma_a x) - \frac{x}{ct} E_2(\sigma_a ct)\right) \ , \ x \leq ct \ , \tag{59}$$

其中， $E_2(\cdot)$ 是第二类指数积分函数。

我们考虑一个对应于 1 keV 的表面源、一个长 1 cm 的区域，以及 0.003 sh 的终止时间。在图 4 中，我们使用 100 个均匀空间单元和 50 个均匀时间步。因此，时间步长约为一个网格单元光穿越时间的 1.8 倍。对于方向求积，我们使用三角形切比雪夫-勒让德求积集，该求积集可在用于辐射转移的 Draco 组件库中获得[1]。该求积集的极对称轴与我们的二维网格正交，因此此处所示结果关于 x 和 y 坐标的反射对称。

埃丁顿张量的对角分量随 x坐标的变化如图5所示，这里同样采用阶数为 6（蓝色）和 24（橙色）的三角形切比雪夫-勒让德求积。与辐射能量密度类似，我们可以看到，低求积阶数下，埃丁顿张量在空间中存在射线效应。我们发现，埃丁顿张量在波前的因果极限处未达到解析值。这部分是由于问题中存在初始的微弱环境辐射场（添加该辐射场是为了避免在因果波前之后出现奇异埃丁顿张量）。

图 6 展示了辐射能量密度随以下坐标的变化 x——非零吸收不透明度下， $\sigma_a = 1$ 厘米$^{-1}$ （左图）和 $\sigma_a = 10$ 厘米$^{-1}$ （右图），时间为 $t = 0.003$ sh。空间和时间离散化与前述真空问题相同。六阶求积显示，在 $\sigma_a = 1$ 厘米$^{-1}$处射线效应有所减弱但仍然存在，而在 $\sigma_a = 10$厘米$^{-1}$处则不明显。

[1] https://github.com/lanl/Draco

4.2. 光学厚散射脉冲

以原点为中心的光学厚纯散射介质中辐射能高斯脉冲的演化具有解析的时间依赖解 [47]:

$$E\left(\mathbf{x},t\right)=E\left(\mathbf{x},t_0\right)\exp\left(\frac{-3\sigma_{\mathrm{s}}\|\mathbf{x}\|^2}{4c\left(t+t_0\right)}\right)\left(\frac{t+t_0}{t_0}\right)^{-n/2} \tag{60}$$

其中， n 是问题的维数， t_0 是初始时间。

此问题检验数值输运格式的若干关键特性：低阶和高阶部分中的弹性散射项，以及光学厚区域中的渐近保持通量。对于我们的方法，此测试还可用于衡量辐射能量密度的矩表示与特征线法表示之间的一致性；这种一致性应由MOC输运方程中的散射源项促成。这里我们考虑一维（$n=1$）扩散，并设定 $\sigma_{\mathrm{s}}=1000\ \mathrm{cm}^{-1}$、$t_0=0.025$ sh、 $t_{\mathrm{f}}=0.0125$ sh和$T_{\mathrm{r},\,0}=1\ \mathrm{keV}$，在每个方向尺寸为 1 cm 的二维区域上计算（所有情况下，对称的 y 维度上的网格单元数均为 x 维度上的一半）。我们采用的基本时间步为 0.00025 sh。

图 7 展示了在一系列分辨率下，我们的方法相对于解析解的结果。辐射能的特征线法和线性算子表示吻合良好；当时间步随空间分辨率提高而相应缩短时，我们的方案表现出二阶空间收敛。显然，我们的方法能够有效捕捉纯散射介质中的扩散极限。

此外，我们还可以对该问题施加推动，使脉冲在扩散的同时沿网格平流。这进一步检验了运动物质修正的实现。这里，我们选取的推动速度为 $0.017c$，沿 $+x$方向。图 8 展示了时间步固定为 0.00025 sh时该测试的结果。时间步保持不变时，收敛性完全丧失；当时间步随网格单元尺寸成比例缩小时，收敛性则大幅恢复，不过在最高空间分辨率下，收敛阶似乎低于二阶。 [40] 形式体系并不在 $\mathcal{O}(\beta)$下严格收敛，这可能是观测到误差的原因之一。

4.3. 马沙克波

马沙克波是一类标准的热辐射耦合与扩散极限测试，其结果取决于光学厚度；这类问题通常在某一边界施加固定表面源，从而在初始均匀介质中诱发一列波。对于本文所考察的所有形式的马沙克波问题，逆时间追踪所采用的MOC光学深度阈值为 $\tau=16$。我们在马沙克波上测试特征线法方案，其各向同性表面源为T_s =1 keV，均匀初始体积（辐射与物质）温度为1 eV，热容为0.3 GJ/keV/cm^3，且吸收不透明度满足

$$\sigma_{a,\nu}=\sigma_a=30\left(\frac{T_s}{T}\right)^3\ \ \mathrm{cm}^{-1}\ . \tag{61}$$

我们采用沿 x坐标、长度为1 cm的区域，时间范围为1 sh。每个空间单元可能的最大光学厚度与最小光学厚度之比为 10^9, , 就该区域长度而言，这将覆盖从光学极厚到光学薄的状态。

在不同空间分辨率下对该马沙克波问题进行数值测试，表明其符合渐近扩散极限，如图10的左图所示，其中每条曲线对应于1 cm区域内均匀空间单元的数量。同样，在不同时间分辨率下测试该问题，表明其符合最大值原理 [48]，其中每条曲线对应于1 sh时间跨度内均匀时间步的数量。

现在，我们用同一问题测试光学薄区间，但将表面源设为 $T_s=0.15$ keV，热容设为 0.013784 GJ/keV/cm^3, , 并设置吸收不透明度

$$\sigma_{a,\nu}=\sigma_a=10^{-3}\left(\frac{1}{T}\right)^3\ \ \mathrm{cm}^{-1}\ , \tag{62}$$

其中 T 单位为 keV。此外，我们在 2 cm 范围内使用 100 个均匀空间单元，在 5 sh 内使用 5000 个均匀时间步；对于特征线法，我们采用 S_6 三角形切比雪夫-勒让德求积。图 P_1展示了 LO、特征线法和 IMC-DDMC 的结果。图 11 给出了 5 sh 时物质温度（左图）和辐射温度随空间坐标的变化。在这个薄

马沙克波测试中，我们看到，特征线法和 IMC-DDMC 的辐射温度波前比相应的物质温度解更陡。我们还看到，P_1 未能达到正确的波速。

最后，我们测试马沙克波问题的一种多频形式，其中

$$\sigma_{a,\nu} = 30\left(\frac{1}{T}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{3} \ \text{cm}^{-1} \ , \tag{63}$$

其中 T和 ν的单位为 keV。使用该不透明度分布的标量倍数，[11] 用于测试多频行为。热容设为 0.3 GJ/keV/cm^3。我们对该问题采用 100 个均匀空间单元覆盖 5 cm、1000 个均匀时间步覆盖 1 sh 的时长，以及从 0.01 eV 到 100 keV 的 32 个对数频率群。对于逆向粒子追踪，我们再次采用光学深度阈值 $\tau = 16$，并再次使用 S_6 三角形切比雪夫-勒让德求积；值得强调的是，光学深度阈值是保守地与光学深度聚合量最低的频率群进行比较。为了说明正确处理多频行为的重要性，除 IMC-DDMC 外，我们还将其与 MOC-LO 方法的一种形式进行比较：先对总面不透明度按群求平均，再对低阶系统进行时间离散化。这种替代方法可能代表一种朴素的表述方式，不含中阶项或一致性项，而这些项有助于更好地匹配 HO 多群通量。图12展示了多频马沙克波中材料温度（左图）和辐射温度（右图）随空间的变化，对比对象为 MOC、IMC-DDMC，以及采用替代面不透明度处理的 MOC，图例标记为 MOC（灰色 σ_t）或 MOC-LO（灰色 σ_t）。显然，这种替代的朴素方法无法正确捕捉 HO 通量行为，导致出现非物理分布，并使材料温度违反最大值原理。相比之下，采用第3.2节中的系数所得的 MOC-LO 解满足最大值原理，并且辐射温度和材料温度均与 IMC-DDMC 解高度吻合。不过要注意，朴素方法采用了 σ_t 的算术通量加权多群平均；采用调和平均或许能得到更好的结果。

4.4. Mach 45 激波

物质运动修正（包括动量耦合）对于匹配 [40], 基于 [49] 推导给出的 Mach 45 半解析辐射激波解至关重要（另见其中的参考文献）。这是辐射流体力学代码的标准基准问题：若未能正确考虑动量耦合或多普勒频移的整体效应，可能会导致结果显著偏离半解析解。

对于此问题，我们采用阶数为 S_4 的三角形切比雪夫-勒让德求积，并设置光学深度阈值为$\tau = 16$。我们使用此问题来测试平面几何下的三级自适应网格加密，其中最粗层对应于 x方向上从 1500 到 2500 cm 范围内的 200 个均匀网格单元，以及横向 y方向上的 2 个网格单元（因此，若整个区域均采用最粗分辨率，则总计为 400 个网格单元）。图13 显示了 35.06 sh 时物质温度随 x坐标的变化（左图），以及单元数随时间的变化（右图）。除 MOC-LO 解外，作为初始条件的半解析解也按激波速度乘以 35.06 sh 的距离在空间上进行了平移（黑色点线）。可以看到，在 35.06 sh 时，MOC-LO 解与半解析解在激波前沿的整体结构上吻合良好，不过插图显示峰值形状略有差异。单元数立即跃升，并稳定在约 1800 个，表明激波穿过网格时，网格分辨率大致得以保持。到 100 sh 时，单元数开始下降，此时激波已移动 ~500cm，因此开始离开模拟空间域。由于空间网格为二维，该问题还检验了自适应网格细化能否在横向保持一维剖面；随着细化进行，横向网格单元数也会增加。

4.5. 弯曲管道

我们接下来进行“弯曲管道”或“平顶”测试（见 [9], [27]）。我们在笛卡尔坐标下进行测试，从而使我们的解最直接地可与 [27]相比较。与该文中的设置相比，我们的区域沿对称轴减半，并且坐标轴被反转——因此我们在 $(0,2)\times(0,7)$ cm的区域上求解。为形成正方形网格单元，我们总共使用 100×350 个网格单元，每个边长为 0.02 cm——在 x 方向的分辨率略高，但在 y 方向略低于 [27]中可比区域上的128×512 个网格单元。在 $x=0$ 边界处使用了反射边界。管道几何结构、材料密度和不透明度以及源项温度与 [27]完全保持相似。时间步设为 10^{-11} s，即五个分区的光穿越时间。

图 14 显示了使用特征线法进行模拟时的物质温度，时刻为 8×10^{-9} 秒，随后在 9.4×10^{-8} 秒。来自 $y=0$ 的均匀高温源的辐射首先加热中央挡板，中央挡板再发射辐射并加热外壁，如此继续，直到辐射到达并加热后方的管道直线段。在图中所示的每个点测量物质温度，结果见图 15。这些探针的位置与 [27]完全相似——在我们的坐标系中，

停止时间（ns）	IMC-DDMC+PDLB	IMC-DDMC	S_n	MOC
0.1	88 / 72	403 / 72	252 / 125	240 / 72
1.0	835 / 252	1499 / 252	1079 / 353	2326 / 252

表1
使用50个MPI秩时，各方法在总时间步数上的运行时间（单位：秒）。每一行对应于一个模拟的物理终止时间，单位为纳秒。

$(0, 0.25)$、$(0, 2.75)$、$(1.25, 3.5)$、$(0, 4.25)$，以及$(0, 6.75)$，测量两个由源项直接加热的点、挡板内的一个点以及后方的两个点。请注意，这种布置使探针 1、2、4 和 5 紧贴区域左侧边缘的反射边界，但边界条件对结果没有显著影响——在 $x = 0.1$ 处的探针得到的结果在视觉上无法区分。

图 15 比较了在使用IMC-DDMC、S_n和MOC输运运行相同问题时各探针处的加热情况。使用IMC-DDMC的模拟在整个模拟过程中均采用了400,000个粒子。S_n 采用六阶求积，而MOC采用六阶水平对称求积。这些参数旨在代表最佳情况下的收敛行为，重点考察不可避免的方法偏差，而非评估在固定精度下的收敛性或相对性能。特别是，该测试对将面中心不透明度插值到单元中心时所采用的加权方案差异非常敏感——只有调和平均不透明度才能产生后续探针正确的初始加热时间。

4.6. Coax

接下来，我们将这些方法应用于一个圆柱几何中的多频辐射流体力学测试问题，其中辐射流经一根管道（$\rho = 1.845[g/cc]$），管道内衬泡沫（$\rho = 0.070[g/cc]$）[50]。管道材料采用铍不透明度。系统初始处于T=4eV的平衡状态，并由位于z=0.00 cm处的各向同性150 eV辐射源驱动。管道的内径和厚度分别为0.12 cm和0.016cm，频率域被划分为55个群。图16 给出了 $t = 1.0ns$处的密度和物质温度等值线图，而图17比较了沿原始界面（$r = 0.06cm$）的物质温度，该温度分别由MOC和Sn（均采用 S_6 水平对称求积）以及IMC（每个时间步约使用500万个粒子）计算得到。三种方法均表现出极好的一致性。

对于这三种方法实现，我们还比较了各自使用 50 个 MPI秩、在 Intel Xeon Platinum 8479 CPU 上的 Coax 运行时间性能。IMC-DDMC 的粒子总数设为 1000 万，并按照各网格单元的表面源和发射能将粒子分配到网格单元。IMC-DDMC 的负载均衡既可按空间单元数量进行，也可按每个进程的粒子工作量进行（基于粒子的动态负载均衡，PDLB。PDLB 与采用 ParMETIS 的流体动力学分解相解耦 [51],针对 Jayenne IMC-DDMC 实现作了详细描述，由 [52]。特征线法和 S_n 再次设置为使用 S_6 水平对称求积。结果见表 1，其中给出了模拟时间达到 0.1 ns 和 1.0 ns 时的总运行时间与时间步数。

我们看到，按当前实现，特征线法在 1.0 ns 时间内是这些方法实现中性能最差的，大约慢一倍。正如预期，特征线法和 IMC-DDMC+PDLB 的运行时间大致随所模拟的物理时间量而变化，因为粒子轨迹长度随时间变化，而 S_n 的运行时间则随时间步数变化。此外，我们还可以看到，PDLB 在早期显著帮助了 IMC-DDMC，此时 IMC-DDMC 在各进程之间的负载均衡较差 [52]。S_n 由于库内部时间步控制器对其他方法实现未启用而需要更多时间步；而且超过三分之一的时间步位于最初的 0.1 ns 内。

需要指出的是，对于这个问题，应用光学深度阈值并不会加快特征线法（MOC）的计算速度（第4.7节），这是因为在使用多群不透明度确定粒子终止时，阈值的应用较为保守。不过，考虑到除软件优化（例如GPU移植）之外，还可能通过空间或角度自适应求积进一步提升性能，这些初步比较结果颇具前景。

4.7. 光学深度阈值测试

最后，我们考察光学深度阈值对特征线法运行时间性能的影响。对于 100 个时间步的弯曲管道（见第 $\tau = \infty$ 节）、32 个时间步的 Coax（见第节）以及 1000 个时间步的马沙克波（第一个版本见第 节）模拟，相对于 4.5的加速比列于表 2 中，表中比较了三种不同的光学深度阈值。所有测试均使用 S_6 水平对称求积。所有模拟

τ	弯曲管道	Coax	马沙克波
16	1.27	1.00	1.66
32	1.27	0.99	1.66
64	1.23	1.00	1.66
10^9	-	-	1.53

表2光学深度阈值 $\tau = 16$、32、64 下特征线法运行时间相对于 $\tau = \infty$ 的加速比，保留两位小数。所有模拟均采用 S_6 级对称角度求积。

均在中央处理器上运行，多核运行时采用区域分解：弯曲管道使用 112 个核心，Coax 使用 64 个核心，马沙克波使用 1 个核心。这些比较结果取决于软件实现细节，可能无法代表完全优化的实现，也不一定反映图形处理器上的相对性能。

对于弯曲管道模拟，我们注意到，所测试的光学深度阈值之间的速度没有显著差异；这与光学深度相对于厚壁中穿越的网格单元数迅速增加的情况一致，因为特征线法粒子沿反向传播。壁面网格单元的光学深度为 40 个平均自由程，因此，输运超过这些网格单元后，性能从 $\tau = 32$ 到 $\tau = 64$ 略有下降，这与预期一致。

Coax 问题的运行时间性能显然不受光学深度阈值影响：未观察到显著的性能变化（为减轻比较中的运行间噪声，4 次模拟各运行了 3 次）。由于 Coax 问题是多群问题，且只有当与粒子相关联的最低光学深度超过阈值时，特征线法粒子才会终止，因此这种不敏感性与光学薄群导致粒子到达每个时间步起点的情况一致。

对于所测试的光学深度阈值，灰色马沙克波模拟表现出与弯曲管道模拟相似的行为：与无限光学深度模拟相比，只有在性能显著提升时才能观察到明显差异。我们还测试了光学深度阈值为 10^9, 的情况；对于 128 个空间单元，这相当于在最低温度下每个粒子穿越 4 个网格单元，因此这是唯一一个在最低温度下网格单元内存在非平凡输运计算的光学深度阈值。我们发现，当光学深度阈值达到或超过这一数值时，加速效果会受到影响。

5. 结论

我们开发了一种采用长特征线法（MOC）的热辐射输运方法，该方法在一个时间步内沿时间反向追踪粒子。粒子的反向运动使我们能够在达到光学深度阈值时终止粒子射线，从而实现优化，并精确设定强度解点。我们将解点设为空间网格的顶点，因此无需在顶点处进行重构即可计算角度和频率积分，并可在网格面和网格单元内进行简单平均。此外，我们将高阶特征线法解与隐式灰色低阶（LO）解耦合，以确保能量守恒并与物质耦合。我们使用对频率组求和得到的系数，将低阶解与多群特征线法耦合：先离散时间，再进行求和，因此这些系数类似于按通量或埃丁顿张量加权的每个时间步平均自由时间数的调和平均。特征线法强度解则在源项中使用低阶辐射能量密度和通量，以表示散射和物质运动修正。

此外，部分得益于对现有软件基础设施的利用，我们使 MOC 和 LO 解能够兼容辐射流体动力学、自适应网格细化（AMR）和动态负载均衡（DLB）。对于 LO 通量解，AMR 和 DLB 分别需要实现标准的延拓/限制操作以及 MPI 发送/接收。对于表示强度的 MOC 粒子普查，我们在标准粒子通信（通常用于蒙特卡洛粒子）的基础上，增加了由插值强度生成粒子的功能，从而形成一种基于粒子的延拓操作。

我们已将该方法应用于一系列热辐射输运和辐射流体力学的标准数值测试。各项测试的结果总结如下。

- **平面平行真空**测试表明，正如预期，使用标准角度求积时，我们的方法会产生射线效应。我们还观察到，由于低阶方程组的隐式性而产生的非严格因果性效应，即波前之外出现了非零强度。

• **光学厚散射脉冲**测试表明，我们的方法能够再现辐射能量密度的标准展宽高斯形状。我们还对脉冲进行平流，以测试物质运动修正。该测试显示，当时间步随空间网格单元尺寸成比例减小时，可实现二阶空间收敛。当时间步保持固定而网格单元尺寸减小时，收敛性可能完全丧失（趋于饱和）。

• 灰色光学厚、灰色光学薄以及多频形式的**马沙克波**测试表明，在足够高的分辨率下，我们的方法与 IMC-DDMC 高度吻合。光学厚测试表明，我们的方法及其实现不会出现传送误差或最大值原理违例。光学薄测试表明，我们的方法比简单的 P_1 闭合具有更高的精度。多频测试表明，采用依赖时间步长的闭合的多群公式相对于 IMC-DDMC 解可获得良好精度；我们也证明了朴素灰色 LO 解的精度非常差。

• **Mach 45** 非平衡灰色辐射激波测试表明，我们的方法能够复现半解析解，该解由以激波速度平流的稳态激波形态构成。鉴于该解对动量耦合和物质运动修正较为敏感，此测试表明我们对这些项的处理是正确的。借助自适应网格细化，我们还可以看到，波前附近的特征线法与 LO 延拓限制操作不会显著降低解的质量。

• **"弯曲管道"**（或"平顶"）测试表明，我们的方法适用于二维平面几何。在相同的空间和时间分辨率下，就辐射波在管道中的传播速度而言，MOC 的表现与 IMC-DDMC 和 S_n 相当；这一速度通过一组标准示踪点处的温度来表征。不过，我们注意到，MOC-LO 解对厚薄界面处面不透明度的计算方式较为敏感；我们发现，要准确模拟壁面加热，需要采用面不透明度调和平均。

• **Coax** 问题在物理保真度方面是最复杂的测试；它涵盖了真实的多频（多群）不透明度、圆柱几何、多维流体力学、自适应网格细化和动态负载均衡。我们还发现，该测试对是否排除依赖时间步的闭合较为敏感；这些闭合涉及通量中对角和非对角 Eddington 张量贡献。换言之，与朴素的灰色闭合相比，我们发现这些闭合能使结果与 IMC-DDMC 和 S_n 相符。三种方法所得结果彼此高度一致（或至少达到了我们所能预期的最佳一致程度）。

通过 Marshak、弯曲管道和 Coax 测试，我们探索了利用光学深度阈值进行优化的影响。与不使用光学深度阈值相比，在厚 Marshak 和弯曲管道测试中，速度分别提升了 ~20% 和 ~66%。对于 Coax，我们没有观察到速度提升，这与每个粒子的终止都由光学上最薄的组决定相一致，因此在粒子到达时间步起始处之前不会触发。我们还注意到，对于 Coax 问题，在这些方法采用合理输入参数时，我们的特征线法实现比 IMC-DDMC 和 S_n 慢两到三倍。

未来工作的计划是启用空间自适应角度求积，从而在强度各向同性或较低，或对模拟目标不太重要的区域进一步优化。我们还计划探索角度自适应求积，即利用强度和其他信息来确定在方向单位球面上何处采用更高分辨率。角度自适应性对于某些问题尤其有用，例如平面平行真空问题；在该问题中，随着远离表面源，强度会变得高度各向异性。此外，我们计划研究使用双线性有限元沿 MOC 射线积分，并使用双线性重构求取低阶温度，以降低空间截断误差。与此相应，我们打算重新审视面不透明度平均，因为可能存在更精细或较少依赖启发式的方法，且这些方法易于应用（例如，使用渐近边界层分析， [53, 10],或利用更多来自 MOC 的信息）。

未来工作还应考虑其他事项，例如物理保真度，包括相对论精确的材料运动修正（例如参见 [54, 55, 39, 56, 57]）以及更复杂的散射模型（例如 [58, 59] 所探讨的康普顿散射模型）。最后，或许值得考虑如何使用张量列车对 MOC-LO 离散化进行压缩和进一步优化；近期已有研究对 S_n开展了这方面的探索，见 [60]。鉴于长特征线和低阶系统，张量化我们的方法预计将具有不同于 S_n的要求。

6. 致谢

感谢 M. Cleveland 和 J. Warsa 提供有益的讨论。本文的文件发布编号为 LA-UR-25-29734。本工作得到美国能源部通过洛斯阿拉莫斯国家实验室提供的支持。洛斯阿拉莫斯国家实验室由 Triad National Security, LLC 运营，为美国能源部国家核安全管理局服务（合同编号：89233218CNA000001）。

参考文献

[1] CD Levermore 和 GC Pomraning。《通量限制扩散理论》。《天体物理学报》，第1部分，第248卷，1981年8月15日，第321–334页，248:321–334，1981。[2] C David Levermore。《将埃丁顿因子与通量限制器联系起来》。《定量光谱学与辐射输运杂志》，31 160，1984 2 149( ): – 。[3] Jr. Fleck, J. A. 和 J. D. Cummings。《用于计算时变和频率相关非线性辐射输运的隐式蒙特卡罗格式》。《计算物理学杂志》，8(3):313–342，1971年12月。[4] Allan B. Wollaber。《隐式蒙特卡罗的四十年发展》。《计算与理论输运杂志》，2，2016。[5] M. A. Cleveland 和 A. B. Wollaber。《修正隐式蒙特卡罗》。《计算物理学杂志》，359:20–44，2018年4月。[6] J.A Fleck 和 E.H Canfield。《一种提高非线性辐射输运隐式蒙特卡罗方法计算效率的随机游走过程》。《计算物理学杂志》，54(3):508–523，1984。[7] Kendra P Keady 和 Mathew A Cleveland。《一种改进的隐式蒙特卡罗方法随机游走算法》。《计算物理学杂志》，328:160–176，2017。[8] Sherwood Richers、Hiroki Nagakura、Christian D Ott、Joshua Dolence、Kohsuke Sumiyoshi 和 Shoichi Yamada。《核坍缩超新星中多维玻尔兹曼中微子输运方法的详细比较》。《天体物理学杂志》，847(2):133，2017。[9] N. A. Gentile。《隐式蒙特卡罗扩散——蒙特卡罗时变辐射转移模拟的加速方法》。《计算物理学杂志》，172(2):543–571，2001年9月。[10] Jeffery D. Densmore、Todd J. Urbatsch、Thomas M. Evans 和 Michael W. Buksas。《一种用于蒙特卡罗辐射转移模拟的混合输运-扩散方法》。《计算物理学杂志》，222(2):485–503，2007年3月。[11] Jeffery D Densmore、Kelly G Thompson 和 Todd J Urbatsch。《一种用于频率相关辐射转移模拟的混合输运-扩散蒙特卡罗方法》。《计算物理学杂志》，231(20):6924–6934，2012。[12] Ernazar Abdikamalov、Adam Burrows、Christian D Ott、Frank Löffler、Evan O’Connor、Joshua C Dolence 和 Erik Schnetter。《一种用于时变中微子辐射输运的新型蒙特卡罗方法》。《天体物理学杂志》，755(2):111，2012。[13] Mathew A Cleveland 和 Nick Gentile。《减小频率相关混合隐式蒙特卡罗扩散方法中的传送误差》。《计算与理论输运杂志》，43(1-7):6–37，2014。[14] Aaron Smith、Benny TH Tsang、Volker Bromm 和 Miloš Milosavljević。《离散扩散莱曼 α 辐射转移》。《皇家天文学会月报》，479(2):2065–2078，2018。[15] Kai Yan 和 Chengbao Yao。《热辐射输运中混合输运-扩散蒙特卡罗方法的扩展：差分表述与全局最优参考场》。《计算物理学杂志》，531:113916，2025。[16] Bengt C Carlson。《通过SN近似求解输运方程》。《技术报告》，洛斯阿拉莫斯国家实验室（LANL），洛斯阿拉莫斯，新墨西哥州（美国），1955。[17] 苏布拉马尼扬·钱德拉塞卡。《辐射转移》，1960。[18] Marvin L Adams 和 Paul F Nowak。《时变和频率相关辐射转移计算方法的渐近分析》。《计算物理学杂志》，146(1):366–403，1998。[19] Marvin L Adams。《厚扩散问题中的间断有限元输运解》。《核科学与工程》，137(3):298–333，2001。[20] Ryan G McClarren、Thomas M Evans、Robert B Lowrie 和 Jeffery D Densmore。《PN热辐射转移的半隐式时间积分》。《计算物理学杂志》，227(16):7561–7586，2008。[21] Kaye D Lathrop。《离散纵标方程中的射线效应》。《核科学与工程》，32(3):357–369，1968。[22] L. Chacón、G. Chen、D.A. Knoll、C. Newman、H. Park、W. Taitano、J.A. Willert 和 G. Womeldorff。《多尺度高阶/低阶（HOLO）算法及其应用》。《计算物理学杂志》，330:21–45，2017。[23] B. C. Yee、A. B. Wollaber、T. S. Haut 和 H. Park。《一种稳定的一维多群高阶-低阶方法》。《计算与理论输运杂志》，46(1):46–76，2017年7月。[24] HyeongKae Park。《面向保持渐近扩散极限的高阶、低阶方法》。《数学与应用于核科学与工程的计算方法国际会议（M&C 2019）》，美国俄勒冈州波特兰，2019。美国核学会。[25] James M Stone、Dimitri Mihalas 和 Michael L Norman。《ZEUS-2D：用于二维空间天体物理流的辐射磁流体力学代码。III——辐射流体动力学算法与测试》。《天体物理学杂志增刊系列》（ISSN 0067-0049），第80卷，第2期，1992年6月，第819–845页。研究获伊利诺伊大学支持。，80:819–845，1992。[26] Nickolay Y Gnedin 和 Tom Abel。《采用可变埃丁顿张量形式的多维宇宙学辐射转移》。《新天文学》，6(7):437–455，2001。[27] Yan-Fei Jiang、James M Stone 和 Shane W Davis。《基于可变埃丁顿张量的多维辐射磁流体力学戈杜诺夫方法》。《天体物理学杂志增刊系列》，2012。

[28] Samuel S. Olivier 和 Jim E. Morel。《采用集总间断伽辽金空间离散、并与采用混合有限元离散的漂移-扩散加速方程耦合的SN方程可变埃丁顿因子方法》。《计算与理论输运杂志》，46(6-7):480–496，2017年11月。[29] Dmitriy Y. Anistratov 和 James S. Warsa。《一维平板几何中准扩散矩方程的DFEM离散》。《M&C 2017——数学与应用于核科学与工程的计算方法国际会议》，韩国济州，2017-04-16/2017-04-20。[30] Dmitriy Y Anistratov 和 James S Warsa。《间断有限元准扩散方法》。《核科学与工程》，191(2):105–120，2018。[31] Jijie Lou 和 Jim E. Morel。《辐射输运方程与流体动力学/辐射矩方程采用不同空间离散的可变埃丁顿因子方法》。《计算物理学杂志》，439:110393，2021年8月。[32] Dmitriy Y Anistratov 和 Terry S Haut。《具有混合类型低阶方程和光子能量双网格的热辐射输运多层方法》 arXiv预印本 arXiv:2412.17989，2024。[33] EE Lewis 和 WF Miller Jr.《P1合成加速技术的比较》。《美国核学会汇刊》，23，1976。[34] Samuel Olivier、Ben S Southworth、James S Warsa 和 HyeongKae Park。《具有可扩展线性求解器的一致二阶矩方法用于辐射输运》。《SIAM科学计算杂志》，47(3):A1383–A1407，2025。[35] James S Warsa 和 Dmitriy Y Anistratov。《具有独立离散的两层输运方法》。《计算与理论输运杂志》，47(4-6):424–450，2018。[36] Jijie Lou、Jim E. Morel 和 N. A. Gentile。《采用间断伽辽金和混合有限元空间差分的一维灰辐射输运方程可变埃丁顿因子方法》。《计算物理学杂志》，393:258–277，2019年9月。[37] Yan-Fei Jiang。《一种基于离散纵标法求解时变辐射输运方程的隐式有限体积格式》。《天体物理学杂志增刊系列》，253(2):49，2021。[38] Hans Hammer、HyeongKae Park 和 Luis Chacón。《一种用于时变、多频热辐射输运问题的多维矩加速确定性粒子方法》。《计算物理学杂志》，386:653–674，2019。[39] Benjamin R. Ryan 和 Joshua C. Dolence。《MOCMC：特征线矩闭合方法，一种用于协变辐射磁流体力学的数值方法》。《天体物理学杂志》，891(2):118，2020年3月。[40] Robert B. Lowrie 和 Allan B. Wollaber。《热辐射输运的简单物质运动修正》。《计算与理论输运杂志》，43(1-7):148–161，2014。[41] Joshua C. Dolence。《低光度活动星系核的自洽动力学与辐射模型》。《博士论文》，伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校，2012。[42] George I Bell 和 Samuel Glasstone。《核反应堆理论》。《技术报告》，美国原子能委员会，华盛顿特区（美国），1970。[43] MM Miften 和 Edward L Larsen。《平面与球形几何中求解输运问题的准扩散方法》。《输运理论与统计物理》，22(2-3):165–186，1993。[44] Kelly Glen Thompson、Mathew Allen Cleveland、Alex Roberts Long、Kendra Phyllis Long、Ryan Thomas Wollaeger、Benjamin Ransom Ryan 和 Timothy M. Kelley。《Jayenne物理手册，第1.0版——用于热辐射转移的隐式蒙特卡罗代码》，8 2021。[45] Jackson Porter Morgan、Alex Roberts Long 和 Kendra Phyllis Long。《一种新型蒙特卡罗热辐射输运方法：能谱的可向量化方差缩减》。《技术报告》，洛斯阿拉莫斯国家实验室（LANL），洛斯阿拉莫斯，新墨西哥州（美国），2021。[46] Allan Benton Wollaber、H Park、Robert Byron Lowrie、Rick M Rauenzahn 和 Mathew Allen Cleveland。《采用高阶–低阶方法的多群辐射流体力学》。《核科学与工程》，185(1):117–129，2017。[47] Jonathan C. McKinney、Alexander Tchekhovskoy、Aleksander Sadowski 和 Ramesh Narayan。《使用具有M1闭合的新代码HARMRAD进行的超埃丁顿吸积三维广义相对论辐射磁流体力学模拟》。《皇家天文学会月刊》，441(4):3177–3208，2014年7月。[48] Edward W Larsen 和 Bertrand Mercer。《非线性辐射转移蒙特卡罗方法的分析》。《计算物理学杂志》，71(1):50–64，1987。[49] Robert B Lowrie 和 Jarrod D Edwards。《采用灰色非平衡扩散的辐射激波解》。《冲击波》，18(2):129–143，2008。[50] Chris L Fryer、Abdourahmane Diaw、Chris J Fontes、Aimee L Hungerford、John Kline、Heather Johns、NE Lanier、Suzannah Wood 和 Todd Urbatsch。《辐射输运测试设计：同轴温度诊断的不确定性量化模拟驱动方法》。《高能量密度物理》，35:100738，2020。[51] George Karypis、Kirk Schloegel 和 Vipin Kumar。《ParMETIS：并行图划分与稀疏矩阵排序库》，第2版，2003。[52] Kendra P Long。《通过ParMETIS实现隐式蒙特卡罗的自动动态负载均衡》。《M&C 2023——数学与应用于核科学与工程的计算方法国际会议》。美国核学会，2023年8月。[53] GJ Habetler 和 BJ Matkowsky。《具有小平均自由程的输运理论中的一致渐近展开及扩散近似》。《数学物理学杂志》，16(4):846–854，1975。[54] Richard W Lindquist。《相对论输运理论》。《物理学年鉴》，37(3):487–518，1966。[55] Masaru Shibata、Kenta Kiuchi、Yu-ichiro Sekiguchi 和 Yudai Suwa。《数值相对论中辐射流体力学的截断矩形式》。《理论物理进展》，125(6):1255–1287，2011。[56] Robert B Lowrie、Ryan T Wollaeger 和 Jim E Morel。《牛顿流体动力学与辐射输运耦合的反常行为》。《定量光谱学与辐射输运杂志》，310:108744，2023。[57] M Paul Laiu、Eirik Endeve、J Austin Harris、Zachary Elledge 和 Anthony Mezzacappa。《用于辐射输运双矩模型的DG-IMEX方法：O(v/c)极限》。《计算物理学杂志》，520:113477，2025。[58] Andrew T Till、Kendra P Long、James S Warsa 和 Jim E Morel。《确定性热辐射输运中康普顿散射的表述与分析》。《计算物理学杂志》，400:108990，2020。

[59] Carolyn McGraw、Andrew Till 和 James Warsa。《一种新的算子分裂康普顿散射方法》。《计算物理学杂志》，478:111980，2023。[60] Alex A Gorodetsky、Patrick D Mullen、Aditya Deshpande、Joshua C Dolence、Chad D Meyer、Jonah M Miller 和 Luke F Roberts。《采用张量列车的热辐射输运》。*arXiv* 预印本 *arXiv:2503.18056*，2025。

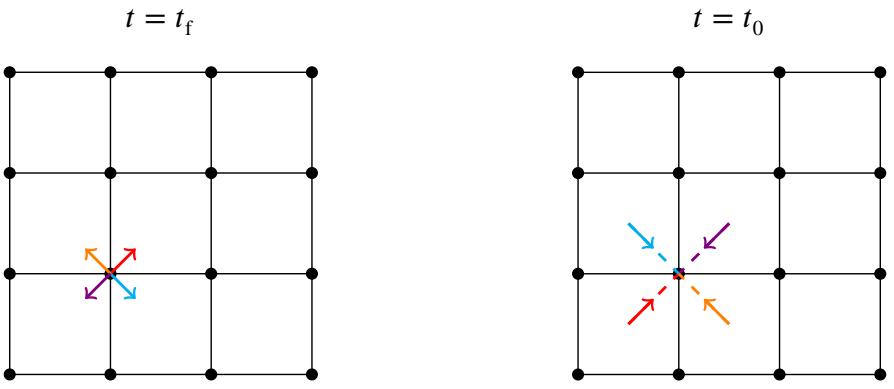


图1： 二维网格上的特征线法样本及其求积网格。样本显示为经过反向时间输运后，循环结束时（t_f；左）和循环开始时（t_0；右）的位置。箭头方向表示粒子随时间向前运动的方向，与数值更新期间粒子的实际移动方向相反。循环结束时，样本汇聚于一个顶点，并位于指定的求积网格上，因此可以快速、准确地对立体角进行积分。

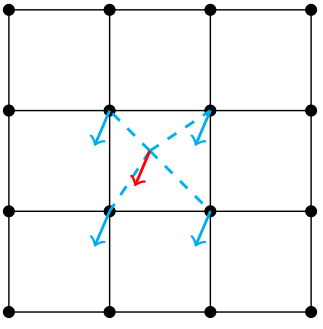


图2： 示意图显示，如何将特征线法粒子强度从上一个时间步结束时的支撑点粒子（青色）插值到当前时间步开始时的位置；这些支撑点粒子与顶点处的方向相同，而当前的特征线法粒子（红色）经过反向时间输运后到达该位置。请注意，此算法可推广至自适应网格细化。

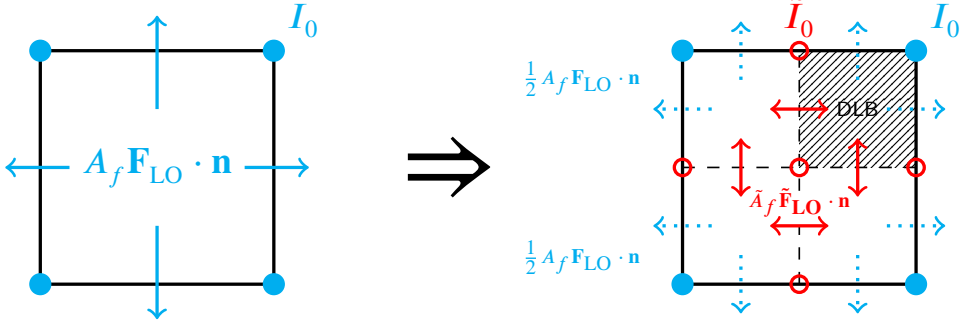


图3： 示意图显示空间单元经历一级细化（灰色虚线）时，高阶和低阶系统的自适应网格细化与动态负载均衡；右上方单元被发送至另一个 MPI 秩（阴影区域）。蓝色实心节点和箭头分别表示原有的基于顶点的特征线法/高阶强度和基于面的低阶法向通量。红色节点和箭头分别表示通过插值得到的新特征线法强度粒子和内部法向通量。蓝色点状箭头表示原单元的分区低阶法向通量：第一遍根据新旧面面积比确定，第二遍进行连续性修正。为评估阴影区域内的细化，需要在包含该阴影区域的 MPI 秩上获得原始的蓝色箭头和节点数据。

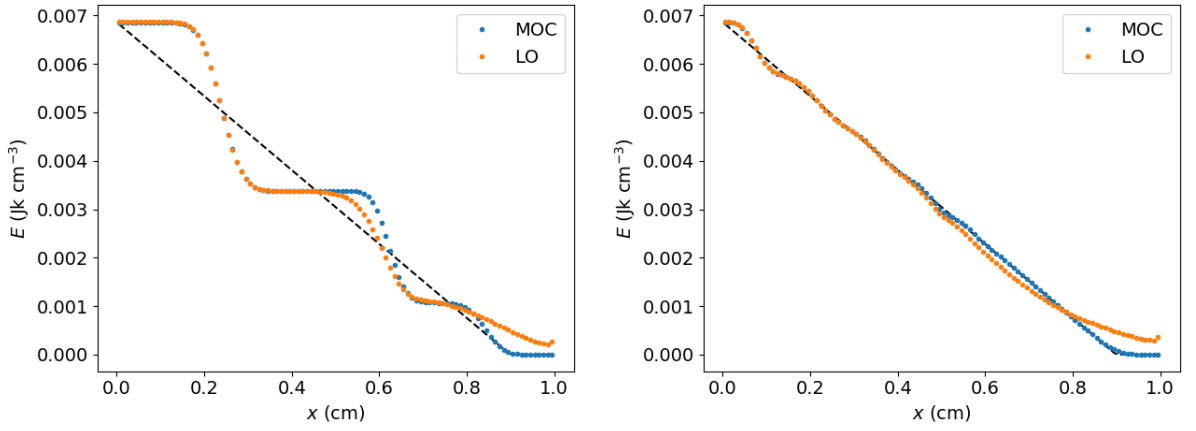


图4： 平面平行真空问题在 $t = 0.003$ sh时辐射能量密度随位置的变化。将解析解（黑色虚线）与特征线法（蓝色）和低阶（橙色）解进行比较。左图：6阶三角形切比雪夫-勒让德离散纵标求积。右图：同一求积，但阶数为24。低阶解并非严格因果。我们还观察到，低阶解受到来自特征线方法区域的射线效应的强烈影响。

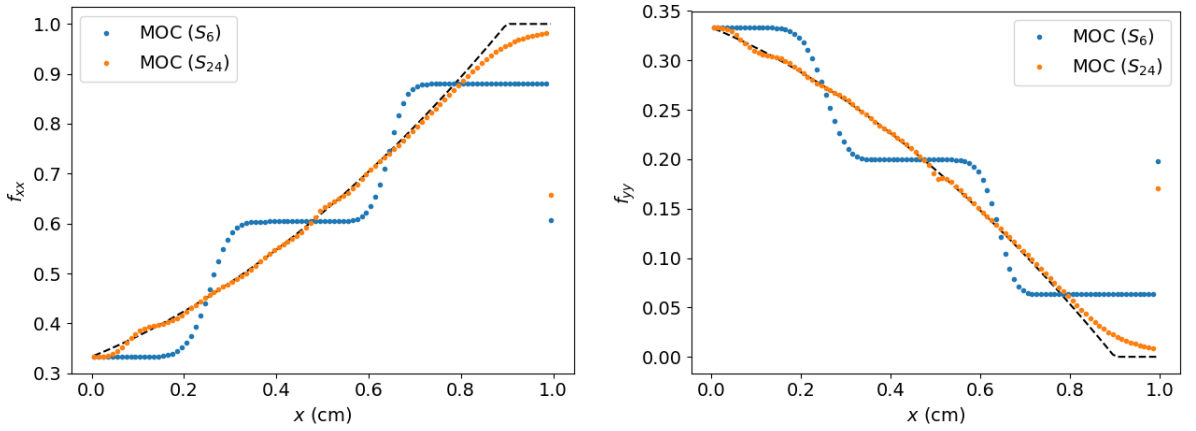


图5： 平面平行真空问题在 $t = 0.003$ sh时爱丁顿张量分量随位置的变化。将解析解（黑色虚线）与采用6阶（蓝色）和24阶（橙色）三角形切比雪夫-勒让德求积的特征线法解进行比较。左图：对角 xx分量。右图：对角 yy分量。

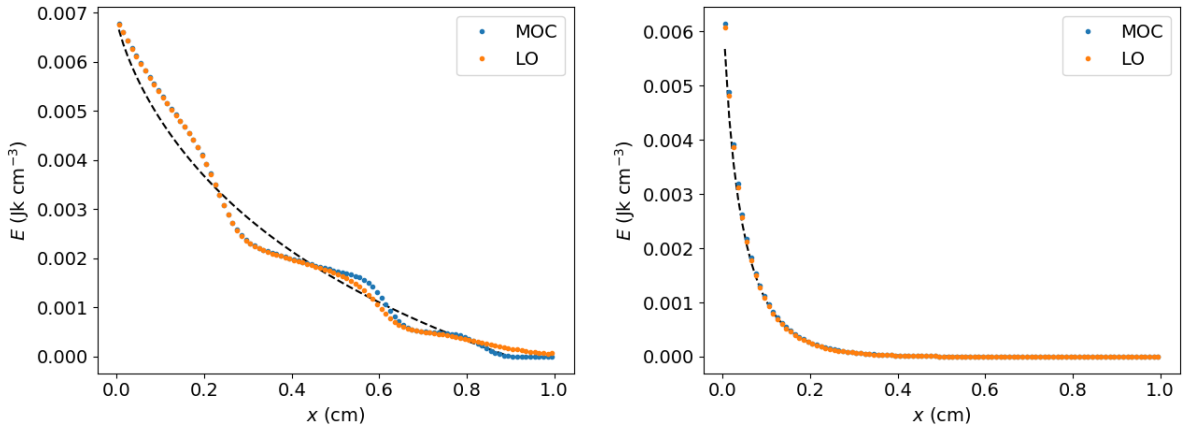


图 6： 平面平行非真空纯吸收问题中，辐射能量密度随位置的变化，时间为 $t = 0.003$ sh。将式 (59)给出的解析解（黑色虚线）与采用 6 阶三角形切比雪夫-勒让德求积得到的特征线法（蓝色）和低阶（橙色）解进行比较。左图：吸收不透明度为 $\sigma_a = 1$ cm^{-1}，可见明显的射线效应。右图：吸收不透明度为 $\sigma_a = 10$ cm^{-1}，射线效应受到抑制。

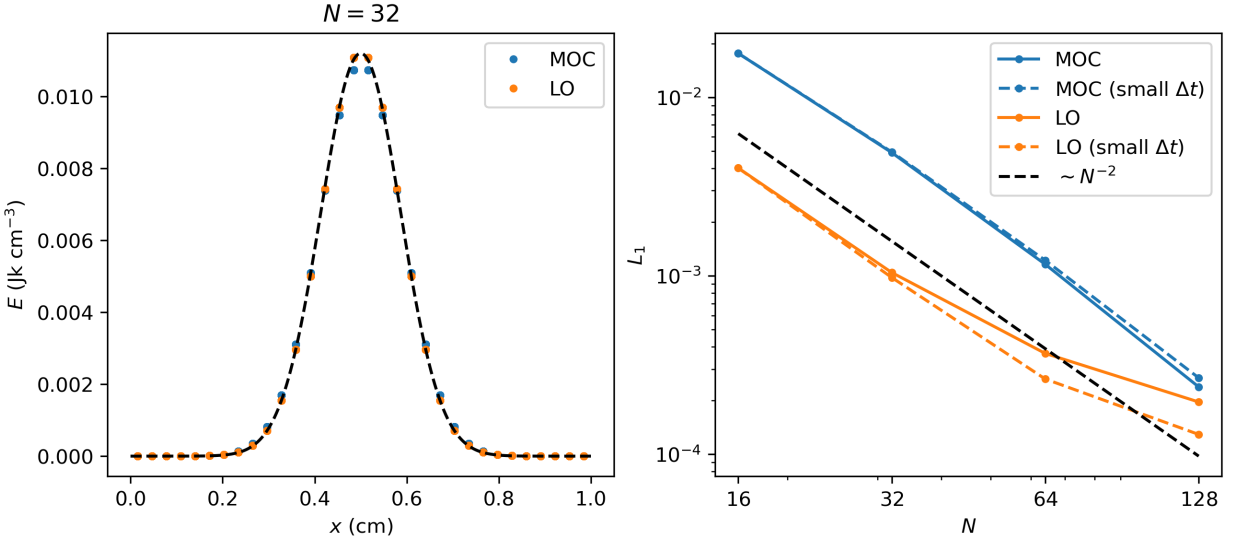


图 7： 扩散高斯检验问题。所有情况下，均将特征线法结果与 $t_f = 0.0125$ sh 时的解析解进行比较。左图展示了沿 x 轴取 $N = 32$ 个网格单元时的结果（包括“真实”低阶能量，以及由样本直接积分得到的非守恒特征线法能量密度）。右图展示了特征线法和线性算子表示相对于 N^{-2} 的收敛率。实线对应固定时间步 $\Delta t = 0.00025$ sh；而分辨率提高时，较小的 Δt 计算采用按比例缩短的时间步。前一种情况下，由于时间精度为一阶，低阶解在高分辨率下开始呈一阶收敛。

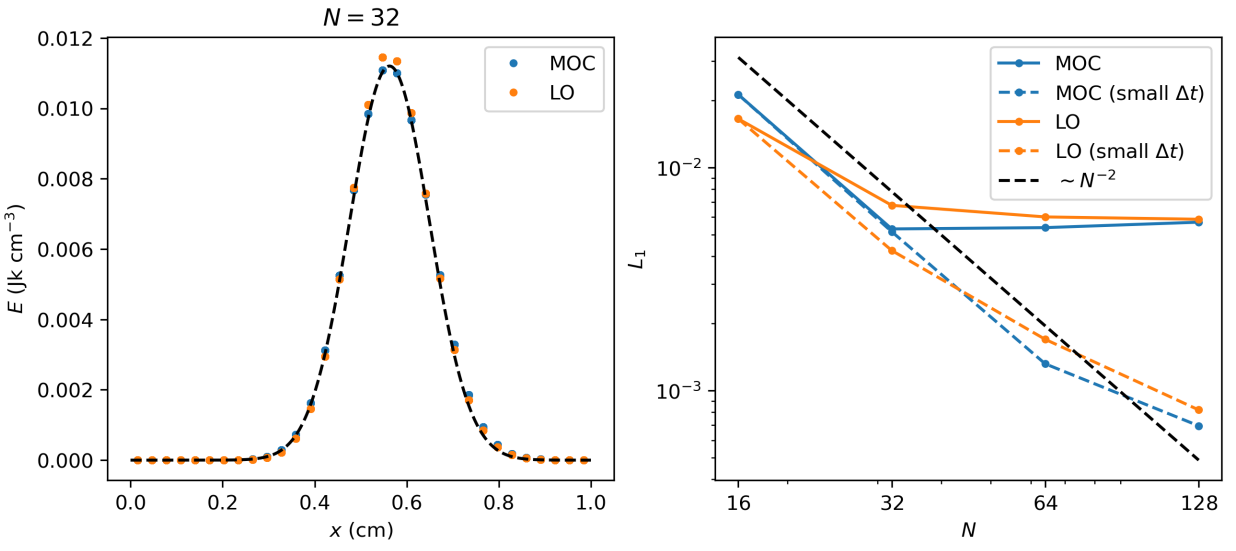


图8： 采用速度 $0.017c\hat{\mathbf{x}}$进行平移的扩散高斯检验问题。在所有情况下，均将 MOC 和 LO（真实）结果与 $t_f = 0.0125$ sh处的解析解进行比较。左图显示沿 x 轴的 $N = 32$ 个网格单元的结果，其中脉冲沿 x 轴平移。右图显示 MOC 和线性算子表示相对于 N^{-2} 的收敛率。时间步保持不变时，收敛性较静态情形下降得更为严重。

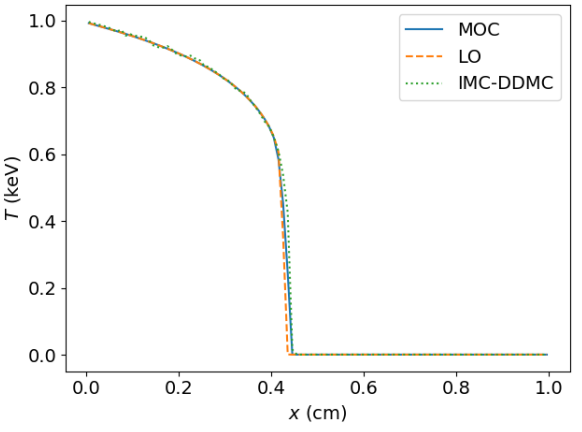


图9： 马沙克波测试中辐射温度随 x坐标的变化。

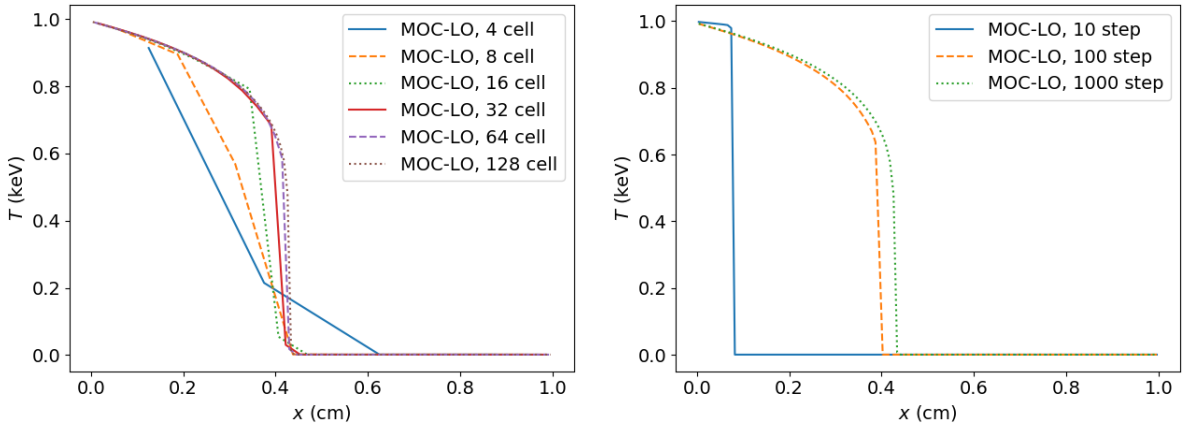


图10： 左图显示了马沙克波测试中不同空间分辨率下物质温度随 x 坐标的变化。右图与左图相同，但采用了不同的时间分辨率。

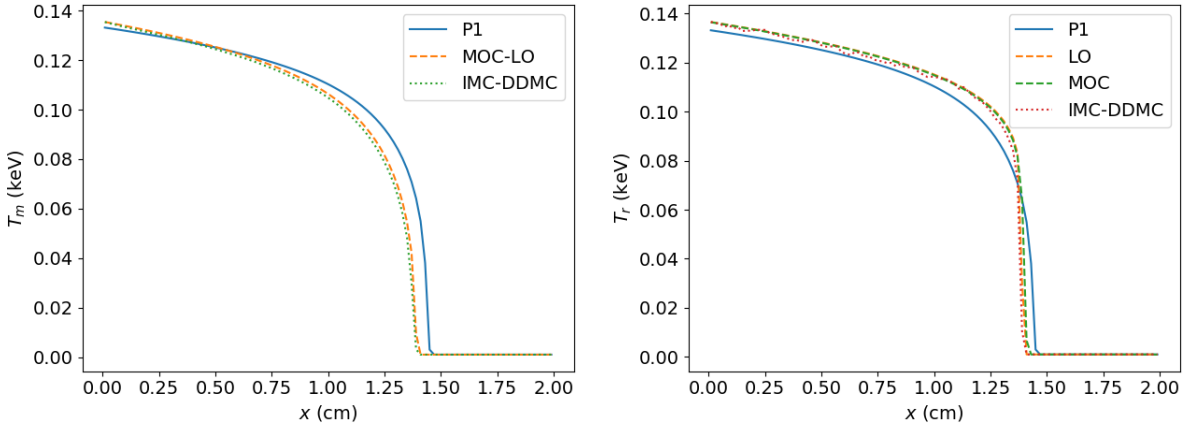


图11： 左图显示了薄 Marshak 波测试中 5 sh 时 P1（蓝色实线）、特征线法（橙色虚线）和 IMC-DDMC（绿色点线）的物质温度随 x 坐标的变化。右图与左图相同，但显示的是辐射温度，并将低阶（橙色虚线）和特征线法（绿色虚线）区段分开（此处 IMC 为红色虚线）。

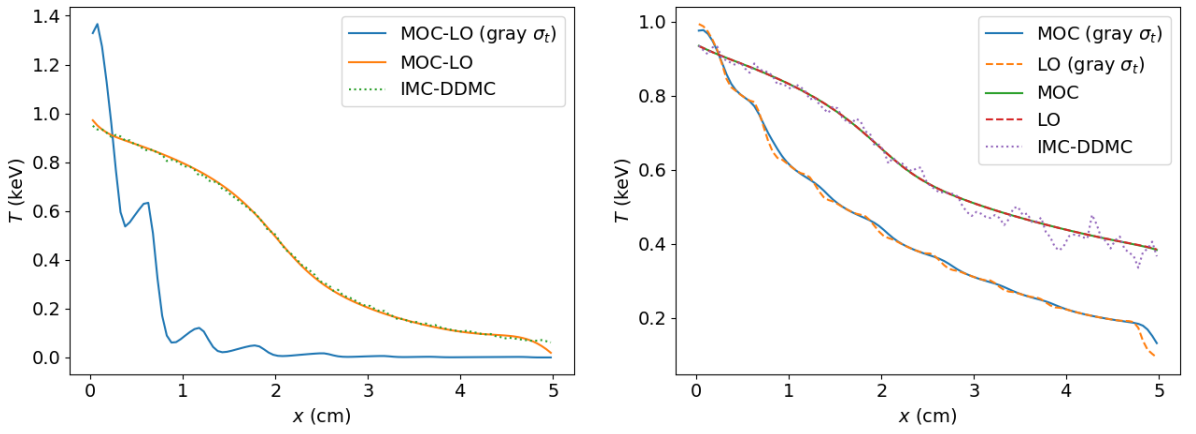


图 12： 左图显示了多频 Marshak 波测试中，在 5 sh 时，MOC-LO（使用灰平均总面不透明度（σ_t），蓝色实线）、MOC-LO（使用依赖于 Δt 的系数，实线）和 IMC-DDMC（绿色点线）的物质温度随 x 坐标的变化。右图与左图相同，但显示的是辐射温度，并分别标出了灰-σ_t LO（橙色虚线）和 MOC（蓝色实线）扇区，以及 LO（红色虚线）和 MOC（绿色实线）扇区（IMC 对应紫色虚线）。

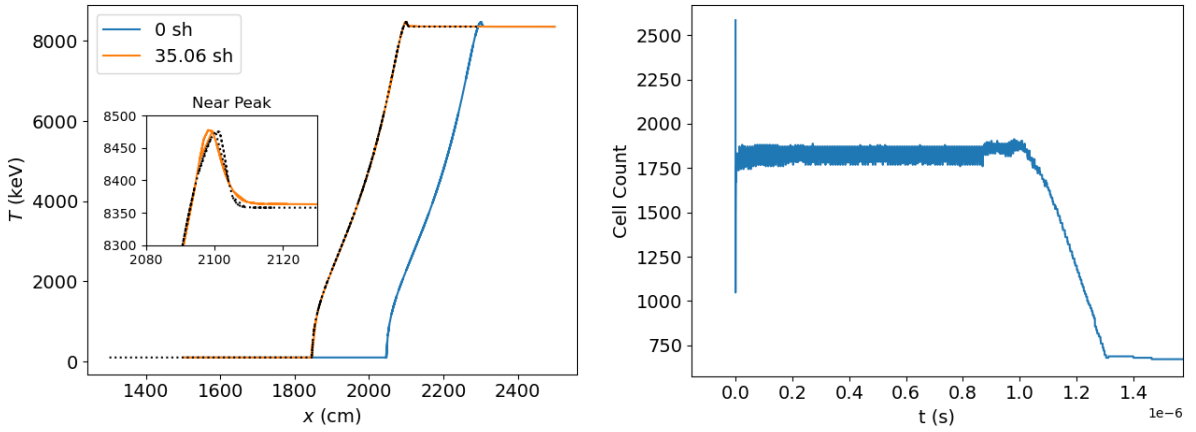


图 13： 左图显示了 Mach 45 辐射激波测试中，35.06 sh 时 MOC-LO（橙色实线）的物质温度随 x 坐标的变化。同时绘出了初始剖面（蓝色），以及沿激波速度方向平移 35.06 sh 内激波行进距离后的初始剖面（黑色点线）。插图放大显示了峰值温度附近的区域。右图显示了同一模拟中空间单元总数随时间的变化。

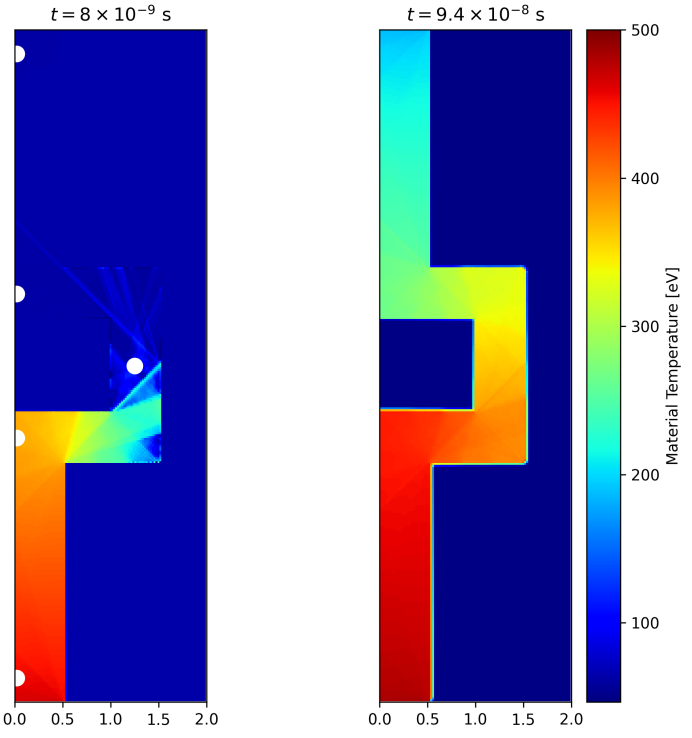


图14：通过特征线法求解的弯曲管道中的温度，时刻为 8×10^{-9}s 和 9.4×10^{-8}s。白点表示下一幅图中测得的温度探针位置。

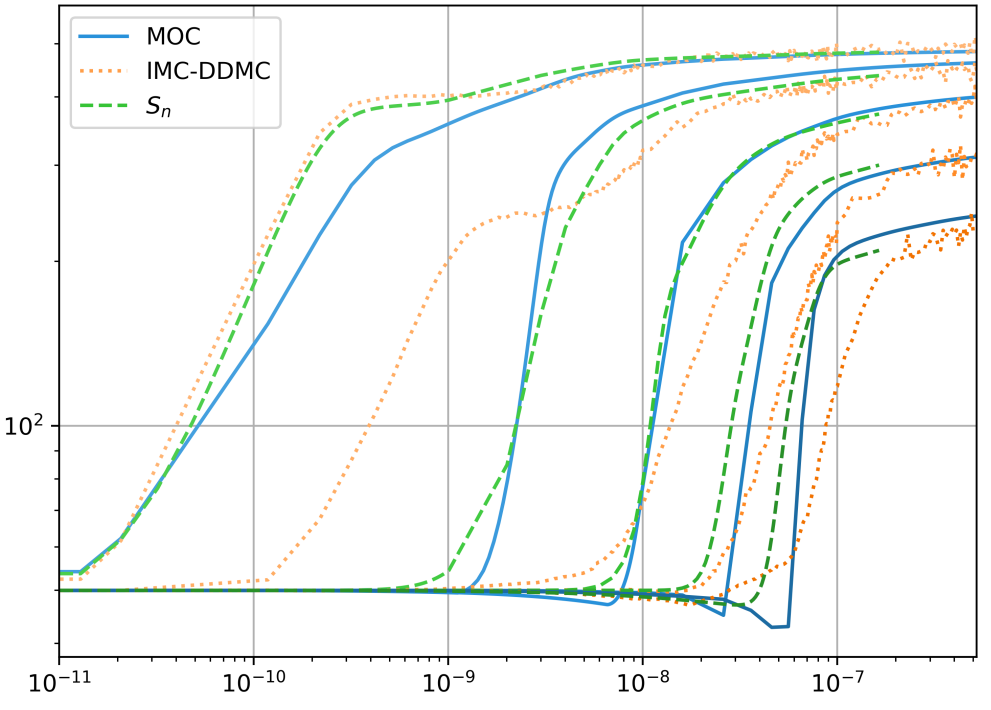


图15： 图中所示探测点的辐射温度随时间的变化 14，分别采用三种方法计算：特征线法、IMC-DDMC 和 S_n。图中叠加了所有点，较深的曲线表示较晚的探测点。特征线法在定性上与 IMC 和 S_n 的到达时间和加热速率相符。剩余差异取决于分辨率：空间和时间分辨率过低会使特征线法解的变化较慢，而更高的分辨率则会使加热略微提前且速度更快。

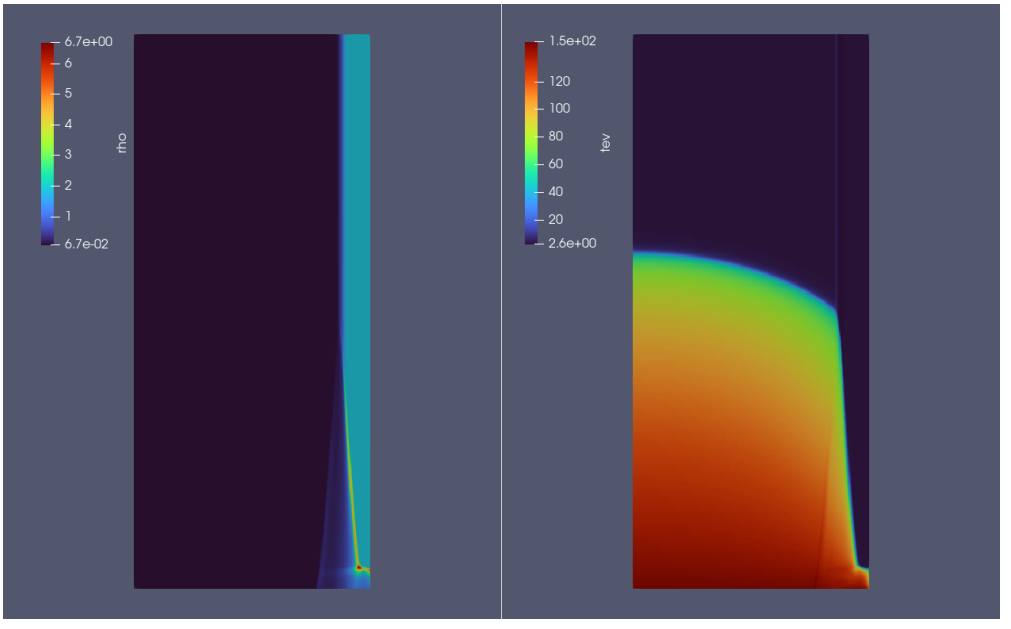


图16： 密度（左）和物质温度（右）的等值线。

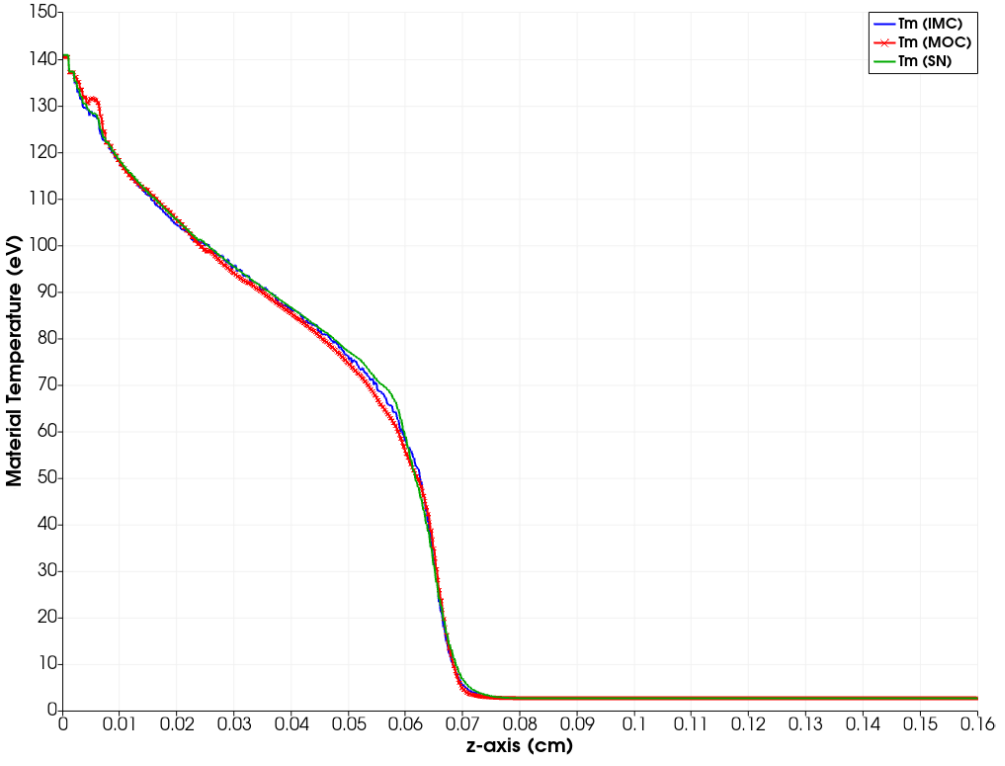


图17： r=0.06cm、t=1.0ns时的材料温度比较。