arXiv:2602.03628v1 [math.OA] 3 Feb 2026

局部算子空间的 $\mathcal{R}$-Shilov边界

玛丽亚·乔伊·A[1] 以及格奥尔基-约努茨·S.伊蒙[1],*[1]罗马尼亚布加勒斯特理工大学应用科学学院数学系，独立大道313号，邮编060042，布加勒斯特，罗马尼亚

Abstract. 为将含幺算子空间的内射包概念推广到局部凸情形，Dosi 在 [9] 中首先为含幺算子空间引入了内射 $\mathcal{R}$-包的概念，随后将含幺局部算子空间的内射$\mathcal{R}$-包定义为其有界部分的内射 $\mathcal{R}$-包的闭包。本文研究这一背景下 Shilov 边界理想的存在性，该概念由 Arveson 在 [2]中定义。为此，我们遵循 Hamana 构造内射包和 C^*-包时所依据的概念框架，分别定义含幺局部算子空间的内射 $\mathcal{R}$-包和 $\mathcal{R}-C^*$-包。此外，我们证明，本文给出的内射 $\mathcal{R}$-包构造与 Dosi 在 [9]中给出的构造一致。

关键词： 局部算子空间、局部 W^*-代数、量子化域、单射包、刚性。

2020年数学主题分类： 46L05；46L07；46L10；47L25

1. Introduction

具体算子空间是 C^*-代数的子空间。著名的 Gelfand-Naimark 定理指出，任何含幺交换 C^*-代数都与紧豪斯多夫空间上连续函数构成的 C^*-代数 $*$-同构。因此，在非交换几何中， C^*-代数被视为拓扑空间的非交换类比，而算子空间则被视为巴拿赫空间的非交换类比。许多经典几何概念都已用交换 C^*-代数的术语重新表述，以便推广到非交换情形。Arveson [2] 引入了算子系统（即含幺 C^* -代数的含幺自伴子空间）的边界表示概念，作为交换情形中 Choquet 点的非交换类比；还引入了算子系统的 Shilov 边界理想，作为经典 Shilov 边界的类比。

*通讯作者。电子邮箱：ionutsimon.gh@gmail.com。电子邮箱：maria.joita@upb.ro、mjoita@fmi.unibuc.ro，网址： http://sites.google.com/a/g.unibuc.ro/maria-joita。

边界表示的存在性问题近 40 年来一直悬而未决。2007年，Arveson [3] 证明，可分算子系统 $\mathcal{S}$ 具有足够多的边界表示，而且其 Shilov 理想 $\mathcal{S}$ 是所有边界表示的核的交。Choquet 边界存在性的完整证明（包括非可分情形）由 Davidson-Kennedy[6]给出。若 $\mathcal{S} \subseteq B(\mathcal{H})$ 是一个算子系统，且 $i : \mathcal{S} \to B(\mathcal{K})$ 是完全等距映射，则 $i(\mathcal{S}) \subseteq B(\mathcal{K})$ 也是一个算子系统，并且具有与 $\mathcal{S}$. 相同的矩阵序结构。然而，分别由 $\mathcal{S}$ 和 $i(\mathcal{S})$ 生成的 C^*-代数$C^*(\mathcal{S})$ 与 $C^*(i(\mathcal{S}))$ 之间通常不存在典范关系。Hamana [16] 证明，存在一个由算子系统生成的“极小” C^*-代数，它与 $\mathcal{S}$. 幺元完全序同构。这个“极小” C^*-代数称为 $\mathcal{S}$的 C^*-包络，并且它与商 C^*-代数 $C^*(\mathcal{S})/\mathcal{J}$， $\mathcal{S}$ 在 Arveson [2, 定义 2.1.3]意义下的 Shilov 边界理想为 $\mathcal{J}$。

局部 C^*-代数是 C^*-代数概念的推广。在局部C^*-代数中，拓扑由一族 C^*-半范数而非单个C^*-范数定义。若 $\mathcal{A}$ 是一个局部 C^*-代数，其拓扑由一族C^*-半范数 $\{p_\iota\}_{\iota\in\Omega}$定义，则其有界部分 $b(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} : \|a\|_\infty = \sup\{p_\iota(a) \mid \iota \in \Omega\} < \infty\}$ 是一个 C^*-代数，且在 $\mathcal{A}$.中稠密

量子化域是一个三元组 $\{\mathcal{H}; \mathcal{E} = \{\mathcal{H}_\iota\}_{\iota\in\Omega}; \mathcal{D}_\mathcal{E} = \bigcup \mathcal{H}_\iota\}$，其中 $\mathcal{H}$ 是$_{\iota\in\Omega}$希尔伯特空间，而 $\{\mathcal{H}_\iota\}_{\iota\in\Omega}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一族闭非零子空间，并且它们的代数和 $\mathcal{D}_\mathcal{E} = \bigcup \mathcal{H}_\iota$ 在 $\mathcal{H}$中稠密。族 $\{\mathcal{H}_\iota\}_{\iota\in\Omega}$ 诱导出$_{\iota\in\Omega}$相应的一族投影 $\{P_\iota\}_{\iota\in\Omega}$，定义在 $\mathcal{H}$, 上，其中对每个 $\iota \in$, Ω P_ι 表示到 $\mathcal{H}_\iota$上的正交投影。若 $\{P_\iota\}_{\iota\in\Omega}$ 是 $B(\mathcal{H})$中的一族两两可交换的投影，则称 $\mathcal{D}_\mathcal{E}$ 为交换域；若 $\{P_\iota\}_{\iota\in\Omega}$ 是 $B(\mathcal{H})$中的一族正交投影，则称 $\mathcal{D}_\mathcal{E}$ 为分次域。集合

$$C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}) := \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_\mathcal{E}) : \ P_\iota T \subseteq TP_\iota, TP_\iota = P_\iota TP_\iota \in B(\mathcal{H}), (\forall)\, \iota \in \Omega\}$$

是一个局部 C^*-代数，其对合由 $T \mapsto T^* = T^\bigstar\big|_{\mathcal{D}_\mathcal{E}}$ 给出，其中$T^\bigstar$表示 T 的伴随；其拓扑由C^*-半范数族 $\{\|\cdot\|_\iota\}_{\iota\in\Omega}$ 定义，其中 $\|T\|_\iota = \left\|T|_{\mathcal{H}_\iota}\right\| = \sup\{\|T(\xi)\| : \ \xi \in \mathcal{H}_\iota, \|\xi\| \le 1\}$.

一个局部 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 可识别为某个交换域 $\mathcal{D}_\mathcal{E}$.上的局部 C^*-子代数 $C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$。在某种意义上，局部 C^*-代数 $C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$在 C^*-代数理论中扮演着 $B(\mathcal{H})$的角色。 $C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$的有界部分，记作 $b(C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}))$，可识别为 $\{\{P_\iota\}_{\iota\in\Omega}\}'$， $B(\mathcal{H})$中投影族 $\{P_\iota\}_{\iota\in\Omega}$ 的交换子。

Effros 和 Webster [12] 开创了算子空间的局部凸版本的研究，这种空间称为局部算子空间。2008年，A. Dosiev [7] 将局部算子空间表示为量子化域 $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}$上无界算子所构成的局部 C^*-代数 $C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}})$的子空间。这一结果推广了算子空间的 Ruan 表示定理（例如，参见 [11, 定理 2.3.5]）。

若对于任意含幺局部算子空间 $\mathcal{W}$ 和任意含幺局部算子子空间 $\mathcal{W}_0 \subseteq \mathcal{W}$，从 $\mathcal{W}_0$ 到 $\mathcal{V}$ 的每个含幺局部完全压缩映射都能延拓为从 $\mathcal{W}$ 到 $\mathcal{V}$ 的含幺局部完全压缩映射，则含幺局部算子空间 $\mathcal{V} \subseteq C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}})$ 是内射的。Dosiev [9] 探讨了局部凸情形下的内射性概念，并确立了它与赋范情形下内射性之间的紧密联系。若 $\mathcal{A} \subseteq C^*_{\mathcal{E}}(\mathcal{D})$ 是一个内射的局部 C^*-代数，则其有界部分 $b(\mathcal{A})$ 是一个内射的 C^*-代数（参见 [9, 命题 3.1]）。一般而言，逆命题并不成立：完全压缩映射通常无法延拓为局部完全压缩映射。

局部 W^*-代数（即由一个 W^*-代数逆系统的逆极限构成，连接映射为 w^* -连续的 $*$-同态）可以识别为某个交换域 $\{\mathcal{H}$ 上的局部 von Neumann 代数 $\mathcal{A} \subseteq C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}})$；$\mathcal{E} = \{\mathcal{H}_\iota\}_{\iota\in\Omega}$；$\mathcal{D}_{\mathcal{E}} = \bigcup \mathcal{H}_\iota\}$（参见 [8]）。因此，$b(\mathcal{A})$ 是一个 von Neumann 代数，且 $\iota\in\Omega\{P_\iota\}_{\iota\in\Omega} \subseteq b(\mathcal{A}) \subseteq \{\{P_\iota\}_{\iota\in\Omega}\}'$。令 $\mathcal{R}$ 为由 $\{P_\iota\}_{\iota\in\Omega} \cup \{1_{\mathcal{H}}\}$ 在 $B(\mathcal{H})$ 中生成的交换子环。那么，$b(\mathcal{A})$ 和 $\mathcal{A}$ 都具有自然的 $\mathcal{R}$-模结构。$b(\mathcal{A})$ 上的完全压缩映射若同时是一个 $\mathcal{R}$ -同态，则可延拓为定义在 $\mathcal{A}$. 上的局部完全压缩映射。若含幺局部算子空间 $\mathcal{V} \subseteq C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}})$ 是内射的，且 $\mathcal{R}\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$（参见 [9]），则它是一个内射的局部 $\mathcal{R}$-模。Dosiev [9, 命题 4.1] 表明，若 $C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}})$ 是内射的，则含幺局部算子空间 $\mathcal{V} \subseteq C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}})$ 是内射的局部 $\mathcal{R}$-模，当且仅当 $b(\mathcal{V}) \subseteq b(C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}}))$ 是一个内射的 $\mathcal{R}$-模，且 $b(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$（即 $b(\mathcal{V})$ 在 $C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}})$ 中的闭包）。此外，若 $C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}})$ 是内射的，则局部 W^*-代数 $\mathcal{A} \subseteq C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}})$ 是内射的，当且仅当 $b(\mathcal{V})$ 是内射的 [9,定理 4.1]。

本文的结构如下：第 2 节汇集了关于局部 C^*-代数的一些基本事实。更多详情请参阅 [1], [7], [8], [12], [13], [14], [17], [19]和 [22] 。第 3 节分为两个小节。在第 3.1 小节中，我们回顾了 Dosiev [9,第 3] 节所述的构造，即为包含在内射冯·诺依曼代数中的算子空间构造内射 $\mathcal{R}$-包络。第 3.2 小节专门介绍为包含在内射冯·诺依曼代数中的含幺算子空间构造 $\mathcal{R}$-C^*-包络。第 4 节由两个小节组成。在第 4.1 小节中，我们介绍 Hamana 意义下含幺局部算子空间的内射 $\mathcal{R}$-包络的构造（见定义 4.7）。此外，在引理 4.5 中，我们建立了 Hamana-Ruan扩张引理的局部凸版本（见 [11, 6.1.5], [16], [21]）。我们还证明，每个含幺局部算子

空间都有一个内射 $\mathcal{R}$-包络，且在含幺局部完全序 $\mathcal{R}$-同构意义下唯一（命题 4.8）。此外，我们证明，含幺局部算子空间的内射 $\mathcal{R}$-包络的定义与 Dosi 在 [9] 中给出的定义一致（命题 4.9）。在第 4.2 小节中，我们引入含幺局部算子空间的局部 $\mathcal{R}$-C^*-包络这一概念（定义 4.13），并证明任意含幺局部算子空间都有一个（唯一的）局部 $\mathcal{R}$-C^*-包络（定理 4.14，推论 4.16）。受 Dosi 为内射 $\mathcal{R}$-包络引入的概念启发（见备注 4.17），我们还建立了含幺局部算子空间的局部 $\mathcal{R}$-C^*-包络与含幺算子空间的 $\mathcal{R}$-C^*-包络之间的联系。最后，在第 5 节中，我们给出关于含幺局部算子空间的局部 $\mathcal{R}$-Shilov边界理想存在性的主要结果（定义 5.1、定理 5.3 和推论 5.5）。

2. Preliminaries

2.1. 局部 C^*-代数。设 $\mathcal{A}$ 是一个含单位元的 $*$-代数，其单位元记为 $1_{\mathcal{A}}$。称定义在 $\mathcal{A}$ 上的半范数 p 是次乘的，如果 $p(1_{\mathcal{A}}) = 1$，并且对于所有 $a, b \in \mathcal{A}$，都有 $p(ab) \leq p(a)p(b)$。称定义在 $\mathcal{A}$ 上的次乘半范数 p 为 C^*-半范数，如果对于所有 $a \in \mathcal{A}$，都有$p(a^*) = p(a)$，且 $p(a^*a) = p(a)^2$。

设 $(\Lambda, \leq)$ 是一个有向偏序集，并设 $\mathcal{P} := \{p_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是定义在 $*$-代数 $\mathcal{A}$ 上的一族 C^*-半范数。若对于任意 $a \in \mathcal{A}$，只要 $\lambda_1 \leq \lambda_2$ 属于 Λ，就有 $p_{\lambda_1}(a) \leq p_{\lambda_2}(a)$，则称 $\mathcal{P}$ 是一族向上过滤族的 C^*-半范数。

定义 2.1。局部 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 是一个完备的豪斯多夫拓扑 $*$-代数，其拓扑由定义在 $\mathcal{A}$ 上的 C^*- 半范数组成的向上过滤族 $\{p_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 所确定。

如果元素 $a \in A$ 满足 $\sup\{p_\lambda(a) \mid \lambda \in \Lambda\} < \infty.$，则称其为有界的。子集 $b(A) = \{a \in A \mid \|a\|_\infty := \sup\{p_\lambda(a) \mid \lambda \in \Lambda\} < \infty\}$ 关于 C^*-范数 $\|\cdot\|_\infty$. 构成一个 C^*-代数。此外，$b(A)$ 在 $\mathcal{A}$ 中稠密。

我们看到，$\mathcal{A}$ 可以表示为如下逆族 C^*-代数的投射极限:

对于每个 $\lambda \in \Lambda$，令 $\mathcal{I}_\lambda := \{a \in A : p_\lambda(a) = 0\}$. 显然，$\mathcal{I}_\lambda$ 是一个闭的双边 $*$-理想在 $\mathcal{A}$ 中，而 $\mathcal{A}_\lambda := \mathcal{A}/\mathcal{I}_\lambda$ 是一个关于由 p_λ诱导的范数的 C^*-代数（见 [1]）。从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{A}_\lambda$ 的典范商 $*$-同态记作 $\pi^{\mathcal{A}}_\lambda$。对于每个 λ_1，$\lambda_2 \in \Lambda$ 满足 $\lambda_1 \leq \lambda_2$，都存在一个典范的满射 $*$-同态$\pi^{\mathcal{A}}_{\lambda_2\lambda_1} : \mathcal{A}_{\lambda_2} \to \mathcal{A}_{\lambda_1}$，定义为对所有 $a \in \mathcal{A}.$，$\pi^{\mathcal{A}}_{\lambda_2\lambda_1}(a + \mathcal{I}_{\lambda_2}) = a + \mathcal{I}_{\lambda_1}$。于是，$\{\mathcal{A}_\lambda, \pi^{\mathcal{A}}_{\lambda_2\lambda_1}\}$ 构成一个 C^*-代数的逆系统，因为当 $\lambda_1 \leq \lambda_2$. 时，$\pi^{\mathcal{A}}_{\lambda_1} = \pi^{\mathcal{A}}_{\lambda_2\lambda_1} \circ \pi^{\mathcal{A}}_{\lambda_2}$。该投射极限

$$\varprojlim_{\lambda} \mathcal{A}_\lambda := \left\{ \{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} \mid \pi^{\mathcal{A}}_{\lambda_2\lambda_1}(a_{\lambda_2}) = a_{\lambda_1} \ \textit{whenever} \ \lambda_1 \leq \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda \right\}$$

C^*-代数逆系统 $\{\mathcal{A}_\lambda, \pi^{\mathcal{A}}_{\lambda_2\lambda_1}\}$ 的投射极限是一个局部 C^*-代数，可通过映射 $a \mapsto \left(\pi^{\mathcal{A}}_\lambda(a)\right)_{\lambda\in\Lambda}$.与 $\mathcal{A}$ 等同。

随后，我们回顾相对于族 $\{p_\lambda$ 的 C^*-半范数 $\lambda \in \Lambda\}$ 中的局部正性 $\mathcal{A}$，如 [7] 中所述。

定义 2.2。 设 $\mathcal{A}$ 是一个局部 C^*-代数。元素 $a \in \mathcal{A}$ 称为

i) 局部自伴（或局部厄米），如果 $a = a^* + x$，其中 $x \in \mathcal{A}$ 满足 $p_\lambda(x) = 0$ 对某个 $\lambda \in \Lambda$ 成立。ii) 局部正，如果 $a = b^*b + x$，其中 b、$x \in \mathcal{A}$ 满足 $p_\lambda(x) = 0$ 对某个 $\lambda \in \Lambda$. 成立

在这种情况下，我们分别称 a 是 λ-自伴（或 λ-厄米）的，并且是 λ-正的。当 a 是 λ-正时，我们记作 $a \geq_\lambda 0$；并且每当 p_λ（a）$= 0$. 时，记作 $a =_\lambda 0$。注意，$a \in \mathcal{A}$ 是局部自伴的，当且仅当存在 $\lambda \in \Lambda$，使得 $\pi^{\mathcal{A}}_\lambda$（$a$）在 C^*-代数 $\mathcal{A}_\lambda$ 中是自伴的。类似地，$a \in \mathcal{A}$ 是局部正的，当且仅当存在 $\lambda \in \Lambda$，使得 $\pi^{\mathcal{A}}_\lambda$（$a$）在 $\mathcal{A}_\lambda$. 中为正

定义 2.3. 设 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 为两个局部 C^*-代数，其拓扑分别由 C^*-半范数族 $\{p_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 与 $\{q_\delta\}_{\delta\in\Delta}$给出。一个 $*$-态射$\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 称为局部压缩 $*$-态射，如果对每个 $\delta \in \Delta$，存在$\lambda \in \Lambda$ 使得对所有 $a \in \mathcal{A}$. 都有 $q_\delta(\pi(a)) \leq p_\lambda(a)$。若对所有 $a \in \mathcal{A}$ 都有 $\Delta = \Lambda$ 与 $q_\lambda(\pi(a)) = p_\lambda(a)$，则 π 称为局部等距 $*$-态射。

2.2. **量子化域**。 量子化域是一个三元组 $\{\mathcal{H}; \mathcal{E} = \{\mathcal{H}_\iota\}_{\iota\in\Omega}; \mathcal{D}_\mathcal{E} = \bigcup \mathcal{H}_\iota\}$，其中 $\mathcal{H}$ 是希尔伯特空间，$\{\mathcal{H}_\iota\}_{\iota\in\Omega}$ 是 $\mathcal{H}$ 的闭非零子空间族$_{\iota\in\Omega}$，且代数和 $\mathcal{D}_\mathcal{E}$ 在 $\mathcal{H}$中稠密。$\mathcal{H}$ 的闭非零子空间族 $\{\mathcal{H}_\iota\}_{\iota\in\Omega}$ 在 $\mathcal{H}$上诱导出相应的投影族 $\{P_\iota\}_{\iota\in\Omega}$，其中对每个 $\iota \in$, Ω P_ι 表示到 $\mathcal{H}_\iota$ 上的正交投影。若 $\{P_\iota\}_{\iota\in\Omega}$ 是 $B(\mathcal{H})$ 中投影的两两交换族，则称 $\mathcal{D}_\mathcal{E}$ 为交换域。若 $\{P_\iota\}_{\iota\in\Omega}$ 是 $B(\mathcal{H})$中投影的正交族，则称 $\mathcal{D}_\mathcal{E}$ 为分次域。

不妨设 $\Omega \leq$是一个有向偏序集，并且 $\mathcal{E} = \{\mathcal{H}_\iota\}_{\iota\in\Omega}$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的闭子空间的向上过滤族，使得并空间$\mathcal{D}_\mathcal{E} := \bigcup \mathcal{H}_\iota$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密。事实上，令 $\Omega^f = \{\alpha \subseteq \Omega \mid \alpha$ 为有限集$\}$. 。对于每个 $\alpha \in \Omega^f$，$_{\iota\in\Omega}$定义 $\mathcal{H}_\alpha := \bigcup \mathcal{H}_\iota$. 。那么 $\{\mathcal{H}_\alpha\}_{\alpha\in\Omega^f}$ 是一个闭子空间的向上过滤族，$_{\iota\in\alpha}$并且 $\mathcal{D}_\mathcal{E} := \bigcup \mathcal{H}_\alpha$. 。如果 Ω 是可数的，我们称 $\{\mathcal{H}; \mathcal{E} = \{\mathcal{H}_\iota\}_{\iota\in\Omega}; \mathcal{D}_\mathcal{E} = \bigcup \mathcal{H}_\iota\}_{\alpha\in\Omega}$

^{f} $_{\iota\in\Omega}$为一个 *Fr´echet* 量子化域。

设 $\{\mathcal{H}, \mathcal{E}, \mathcal{D}_\mathcal{E}\}$ 为一个量子化域。集合

$$C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}) := \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_\mathcal{E}) : \ P_\iota T \subseteq TP_\iota, TP_\iota = P_\iota TP_\iota \in B(\mathcal{H}), (\forall)\, \iota \in \Omega\},$$

其中 $\mathcal{L}(\mathcal{D}_\mathcal{E})$表示 $\mathcal{D}_\mathcal{E}$上全体线性算子的集合，是一个带对合的局部 C^*-代数，对合定义为

$$T^* := T^\bigstar \restriction_{\mathcal{D}_\mathcal{E}} \in C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$$

其中 $T^\bigstar$ 是与 T，相关联的伴随算子，以及由 C^*-半范数族 $\{q_\iota\}_{\iota\in\Omega}$诱导的拓扑，

$$q_\iota(T) := \|T \restriction_{\mathcal{H}_\iota} \|_{B(\mathcal{H}_\iota)}.$$

注意

i) $b(C^*_\mathcal{E}(\mathcal{D}))$等同于 C^*-代数

$$\{T \in B(\mathcal{H}) \mid P_\iota T = TP_\iota, (\forall)\ \iota \in \Omega\}$$

~ ~通过映射 $T \mapsto T$，其中 T 是 T 到 $\mathcal{H}$ 的延拓（见 [8, 引理 3.1.]）。

ii) 对每个 $\iota \in \Omega$，$(C^*_\mathcal{E}(\mathcal{D}))_\iota$ 是 $B(\mathcal{H}_\iota)$的一个 C^*-子代数，并且

$$\pi_\iota^{C^*_\mathcal{E}(\mathcal{D})}(T) = T \restriction_{\mathcal{H}_\iota}.$$

此外，$T \geq_\iota 0$ 当且仅当 $T \restriction_{\mathcal{H}_\iota} \geq 0$ 在 $B(\mathcal{H}_\iota)$中。

如 [7]，所述，在局部算子空间理论中，局部 C^*-代数 $C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 被视为 $B(\mathcal{H})$ 的自然类比。不过，应注意到，这个代数的作用方式与算子空间理论中的 $B(\mathcal{H})$ 不同，因此需要更加谨慎地考察。

定理 2.4 ([8], 命题 3.1)。对于任意含幺局部 C^*-代数 $\mathcal{A}$，存在一个交换域 $\{\mathcal{H}; \mathcal{E}; \mathcal{D}_\mathcal{E}\}$ 以及一个局部等距 $*$- 态射 $\pi: \mathcal{A} \to C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$。

这一结果可视为 Gelfand-Naimark定理的无界类比。

注 2.5. 设 $\{\mathcal{H}; \mathcal{E} = \{\mathcal{H}_\iota\}_{\iota\in\Omega}; \mathcal{D}_\mathcal{E} = \bigcup \mathcal{H}_\iota\}$ 为一个量子化域。那么，$_{\iota\in\Omega}$三元组 $\{\mathcal{K}; \mathcal{F} = \{\mathcal{H}_\iota\}_{\iota\in\Omega}; \mathcal{D}_\mathcal{F} = \bigcup \mathcal{H}_\iota\}$（其中 $\mathcal{K} = \bigoplus \mathcal{H}_\iota$）是一个分次域，并且$_{\iota\in\Omega}$ $_{\iota\in\Omega}$映射 $i: C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}) \to C^*(\mathcal{D}_\mathcal{F})$ 由 $i(T) := (T \restriction_{\mathcal{H}_\iota})_{\iota\in\Omega}$ 定义，是局部等距

$*$-态射（参见 [9, 命题 3。2]的证明）。

2.3. **局部正映射**。设 $\mathcal{A}$ 是一个单位元局部 C^*-代数，其拓扑由 C^*-半范数族 $\{p_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$定义；设 $\mathcal{B}$ 是另一个单位元局部C^*-代数，其拓扑由 C^*-半范数族 $\{q_\delta\}_{\delta\in\Delta}$定义。

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$M_n(\mathcal{A})$ 表示所有在 $\mathcal{A}$ 上的 $n \times n$ 矩阵构成的集合。注意，$M_n(\mathcal{A})$ 是一个含幺的局部 C^*-代数，其相关联的 C^*-半范数族

记为 $\{p_\lambda^n : \lambda \in \Lambda\}$，其中 $p_\lambda^n\left([a_{ij}]_{i,\ j=1}^n\right) = \|[\pi_\lambda^{\mathcal{A}}(a_{ij})]_{i,\ j=1}^n\|_{M_n(\mathcal{A}_n)}$ 对所有 $\lambda \in \Lambda$ 均成立。此外，$M_n(\mathcal{A})$ 可视为 $\varprojlim M_n(\mathcal{A}_\lambda)$。

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，线性映射 $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 的 n-放大是映射 $\varphi^{(n)} : M_n(\mathcal{A}) \to M_n(\mathcal{B})$，定义为

$$\varphi^{(n)}\left([a_{ij}]_{i,j=1}^n\right) := [\varphi(a_{ij})]_{i,j=1}^n$$

对于所有 $[a_{ij}]_{i,\ j=1}^n \in M_n(\mathcal{A})$。

若线性映射 $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 满足：对每个 $\delta \in \Delta$，存在 $\lambda \in \Lambda$ 使得当 $[a_{ij}] \geq_\lambda 0$ 时，$[\varphi(a_{ij})] \geq_\delta 0$；且若 $[a_{ij}] =_\lambda 0$，，则对所有 $n \in \mathbb{N}$，$[\varphi(a_{ij})] =_\delta 0$，则称其为局部完全正。

引理 2.6。设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个含幺局部 C^*-代数，$\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 和 $\psi : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 是含幺局部完全正映射，满足 $\varphi \circ \psi = id_{\mathcal{B}}$.。则 $\varphi\left(\psi(b)^*\psi(b)\right) = b^*b$，且 $\varphi(\psi(b)\psi(b)^*) = bb^*$，对所有 $b \in \mathcal{B}$ 均成立。

证明。该结果由 [7, 定理 7.2] 和 [7, 推论 5.5]得出。 □

下面的结果可视为 [15, 定理 2.1]的局部凸类比。

定理 2.7 ([7], 推论 5.5). 设 $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是一个幺元局部完全正映射。则以下结论成立：

(1)（施瓦茨不等式）$\varphi(a)^*\varphi(a) \leq \varphi(aa^*)$ 对所有 $a \in \mathcal{A}$. 均成立。*(2)*（乘法性质）设 $a \in \mathcal{A}$。则 *(i)* $\varphi(a)^*\varphi(a) = \varphi(a^*a)$ 当且仅当 $\varphi(ba) = \varphi(b)\varphi(a)$ 对所有 $b \in \mathcal{A}$. 均成立；*(ii)* $\varphi(a)\varphi(a)^* = \varphi(aa^*)$ 当且仅当 $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ 对所有 $b \in \mathcal{A}$ 均成立。*(3)* 集合 $\mathcal{M}_\varphi := \{a \in A \mid \varphi(a)^*\varphi(a) = \varphi(a^*a)$ 且 $\varphi(a)\varphi(a)^* = \varphi(aa^*)\}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个幺元局部 C^*子代数，并且它与 $\mathcal{A}$ 中最大的局部C^*子代数 $\mathcal{C}$ 重合，使得限制映射 $\varphi\restriction_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ 是一个幺元局部收缩 $*$态射。此外，对所有b、$c \in \mathcal{M}_\varphi$ 以及所有 $a \in \mathcal{A}$.，$\varphi(bac) = \varphi(b)\varphi(a)\varphi(c)$

2.4. **内射局部算子空间**。设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺局部 C^*-代数，其拓扑由一族 C^*-半范数 $\{p_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$定义；设 $\mathcal{B}$ 是一个含幺局部 C^*-代数，其拓扑由一族 C^*-半范数 $\{q_\delta\}_{\delta\in\Delta}$定义。

$\mathcal{A}$ 的含幺子空间 $\mathcal{V}$ 称为含幺局部算子空间（或称含幺量子空间，依照 [9]）。设 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$ 和 $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{B}$ 是两个含幺局部算子空间。含幺线性映射 $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ 称为

i) 若对每个 $\delta \in \Delta$，都存在 $\lambda \in \Lambda$ 使得下式成立，则称为局部完全压缩

$$q_\delta^n\left([\varphi(a_{ij})]\right) \leq p_\lambda^n\left([a_{ij}]\right)$$

对所有 $[a_{ij}] \in M_n(\mathcal{V})$ 以及对所有 $n \in \mathbb{N}$.

ii) 局部完全等距若 $\Delta = \Lambda$ 且

$$q_\delta^n\left([\varphi(a_{ij})]\right) = p_\lambda^n\left([a_{ij}]\right)$$

对所有 $[a_{ij}] \in M_n(\mathcal{V})$ 以及所有 $n \in \mathbb{N}$.

注意，若 $\varphi: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ 是单位局部完全等距映射，则 $\varphi(\mathcal{V})$ 是含幺局部算子空间，并且 $\varphi^{-1}: \varphi(\mathcal{W}) \to \mathcal{V}$ 是单位局部完全等距映射。

称含幺线性映射 $\varphi: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ 是单位局部完全序同构，如果 φ 是双射，且 φ 和 φ^{-1} 都是局部完全等距映射。

若含幺局部算子空间 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$ 满足单射性质，则对于任意含幺局部算子空间 $\mathcal{W}$ 及任意含幺局部算子子空间 $\mathcal{W}_0 \subseteq \mathcal{W}$，从 $\mathcal{W}_0$ 到 $\mathcal{V}$ 的任意单位局部完全压缩映射都可以延拓为从 $\mathcal{W}$ 到 $\mathcal{V}$的单位局部完全压缩映射。

若 $\{\mathcal{H};\ \mathcal{E} = \{\mathcal{H}_\iota\}_{\iota\in\Omega};\ \mathcal{D}_\mathcal{E} = \bigcup \mathcal{H}_\iota\}$ 是分次域，则 $C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 是一个单射$_{\iota\in\Omega}$局部算子空间 [9,引理 3.1]。

3. The $\mathcal{R} - C^*$ -envelope of an operator space

设 $\mathcal{A} \subseteq B(\mathcal{H})$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的单位内射冯·诺伊曼代数。定义 $\mathcal{R}$ 为由其中心投影和 $\mathrm{id}_\mathcal{H}$ 生成的 $\mathcal{A}$ 的交换子环。由于 $\mathcal{R}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}$，代数 $\mathcal{A}$ 具有典范的 $\mathcal{R}$-模结构，因此是一个（代数） $\mathcal{R}$-模。若线性映射 $\varphi: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 满足对于所有 $a \in \mathcal{A}$ 以及 $\mathcal{A}$ 的所有中心投影 e，均有 $\varphi(ea) = e\varphi(a)$，则称其为 $\mathcal{R}$-映射。我们用 $B_1^\mathcal{R}(\mathcal{A})$ 表示所有单位完全压缩 $\mathcal{R}$-映射 $\varphi: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 的集合。若单位完全压缩映射 $\varphi: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 同时也是 $\mathcal{R}$-映射，并且满足 $\varphi \circ \varphi = \varphi$，则称其为 $\mathcal{R}$-投影。

称含幺子空间 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$ 为含幺算子空间。若 $\mathcal{V}\mathcal{R} \subseteq \mathcal{V}$，则称 $\mathcal{V}$ 为 $\mathcal{R}$ -模。

设 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$ 和 $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{A}$ 是两个含幺 $\mathcal{R}$-模。若含幺线性映射 φ: $\mathcal{V} \to \mathcal{W}$ 是一个含幺完全序 $\mathcal{R}$-同构，则 φ 是双射，且 φ和这两个 φ^{-1} 都是完全等距的 $\mathcal{R}$-映射。

3.1. 算子空间的单射 $\mathcal{R}$-包络 [9]。 若含幺子空间$\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$ 满足 $\mathcal{V}$ 是单射且 $\mathcal{V}\mathcal{R} \subseteq \mathcal{V}$, 则称其为单射 $\mathcal{R}$-模。含幺算子空间 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$ 是单射 $\mathcal{R}$-模，当且仅当存在一个 $\mathcal{R}$-投影$\varphi: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$，使得 $\mathcal{V}$ =Im(φ)，即 φ [9, 的像。引理 3.2].

设 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$ 是一个含幺算子空间。 $\mathcal{V}$ 的 $\mathcal{R}$-延拓是一个有序对 $(\mathcal{W},\ i)$，其中 $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{A}$ 是一个 $\mathcal{R}$-模，且 i 是完全等距映射。若 $\mathcal{V}$ 的一个 $\mathcal{R}$-延拓$(\mathcal{W},\ i)$ 满足：恒等映射在 $\mathcal{W}$ 上是唯一一个将 $i(\mathcal{V})$ 上的恒等映射延拓出去的完全压缩 $\mathcal{R}$-映射，则称该延拓为刚性的。

含幺算子空间 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$ 的一个单射 $\mathcal{R}$-包络是 $\mathcal{V}$ 的一个 $\mathcal{R}$-刚性延拓 $(\mathcal{W}, i)$，并且 $\mathcal{W}$ 是一个单射 $\mathcal{R}$-模。

若 φ 是一个 $\mathcal{R}$-投影，满足 $\varphi|_{\mathcal{V}} = \mathrm{id}_{\mathcal{V}}$，则 $(\mathrm{Im}(\varphi) \quad i)$ 是 $\mathcal{V}$ 的一个单射 $\mathcal{R}$-延拓。

Dosiev [9] 在集合 $\mathscr{E}_V$ 上引入了偏序和等价关系 $=\left\{\varphi \in B_1^{\mathcal{R}}(A) \mid \varphi \restriction_V = \mathrm{id}_V\right\}$，定义如下：$\varphi_1 \preceq \varphi_2$ 当且仅当 $\|\varphi_1(a)\| \leq \|\varphi_2(a)\|$ 对所有 $a \in A$ 都成立；$\varphi_1 \sim \varphi_2$ 当且仅当 $\varphi_1 \preceq \varphi_2$ 且 $\varphi_2 \preceq \varphi_1$。若 $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathcal{V}}$ 满足 $\psi \preceq \varphi$ 蕴含 $\psi \sim \varphi.$，则称其为极小元。$\mathscr{E}_{\mathcal{V}}$ 中所有极小元组成的集合记为 $\min \mathscr{E}_{\mathcal{V}}$.

命题 3.1. [9, 引理 3.3] 设 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$ 是一个含幺算子空间。那么$\min \mathscr{E}_{\mathcal{V}}$ 非空，且由 $\mathscr{E}_{\mathcal{V}}$ 中的投影构成。此外，对于 $\varphi \in \min \mathscr{E}_{\mathcal{V}}$，$\mathcal{V}$ 的延拓 $(Im(\varphi) \quad i)$ 是 $\mathcal{R}$-刚性的；如果 $(\mathcal{W}, i)$ 是一个 $\mathcal{R}$-刚性延拓，且 $\mathcal{W}$ 是一个单射 $\mathcal{R}$-模，那么 $\mathcal{W} = Im(\varphi)$ 在含幺完全序 $\mathcal{R}$-同构意义下唯一。

因此，任意含幺算子空间 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$ 都有唯一的单射 $\mathcal{R}$-包络，记作 $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{V})$。

3.2. **算子空间的 $\mathcal{R} - C^*$-包络**。设 $\mathcal{A} \subseteq B(\mathcal{H})$ 是一个单位内射冯·诺依曼代数，且 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$ 是一个保单位算子子空间。$\mathcal{R} - C^*$- 延拓 是指 $\mathcal{V}$ 的一个 $\mathcal{R}$- 延拓（$\mathcal{B}, \kappa$），满足 $\mathcal{B}$ 是由 $\mathcal{R}\kappa(\mathcal{V})$ 生成的 C^*-代数。

定义 3.2。 $\mathcal{V}$ 的一个 $\mathcal{R} - C^*$-包络是一个 $\mathcal{R} - C^*$-延拓 $(\mathcal{B}, \kappa)$，并满足以下泛性质：给定 $\mathcal{V}$的任意一个 $\mathcal{R} - C^*$-延拓 $(\mathcal{C}, i)$，存在唯一的含幺满射 $\mathcal{R} - C^*$-同态 $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$，使得 $\pi \circ i = \kappa.$

注 *3.3*。设 $(\mathcal{B}, i)$ 是 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$的一个 $\mathcal{R} - C^*$-延拓。那么，$(\mathcal{B}, \odot)$ 是一个含幺 C^*-代数。我们可以将 $\mathcal{B}$ 视为 $\mathcal{A}$的一个保单位算子子空间，因此可将其与它的单射 $\mathcal{R}$-包络（$\mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{B})$ $\widetilde{\kappa}$）相关联。因此，由命题 *3.1*，$\mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{B}) = Im(\varphi)$，其中 $\varphi \in min\,\mathscr{E}_{\mathcal{B}}$，且（$\mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{B})$ $\odot_{\varphi}$）成为一个含幺C^*-代数 [5, 定理 *1.3*.13]。由 $\mathcal{R}$-刚性，恒等映射 $id_{\mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{B})}$ 是使下图交换的唯一完全压缩 $\mathcal{R}$-映射。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{\widetilde{\kappa}} & \mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{B}) \\ {\scriptstyle id_{\mathcal{B}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id_{\mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{B})}} \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{\widetilde{\kappa}} & \mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{B}) \end{array}$$

因此，$\odot = \odot_{\varphi}$ 与 $\widetilde{\kappa}$ 是一个保单位的完全等距 $*$-态射。

定理 3.4. 任意保单位算子子空间 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$ 都有一个 $\mathcal{R} - C^*$-包络。此外，它在保单位 $\mathcal{R} - C^*$-同构意义下唯一。

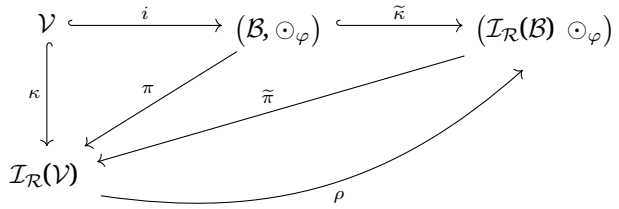
证明. 设 $(\mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{V})\ \kappa)$ 是 $\mathcal{V}$ 的一个单射 $\mathcal{R}$-包络。根据 [9, 引理 3.3], , 存在 $\psi \in \min \mathscr{E}_{\mathcal{V}}$，使得 $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{V}) = \mathrm{Im}(\psi)$。此外，$(\mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{V})\ \odot_{\psi})$ 是一个保单位C^*-代数，其乘法由 $v_1 \odot_{\psi} v_2 := \psi(v_1 v_2)$ 给出，对合和 C^*-范数继承自 $\mathcal{A}$ [5,定理 1.3.13],，且它也是一个 $\mathcal{R}$-模。

令 $C^*_{e\mathcal{R}}(\mathcal{V}) := C^*(\mathcal{R}\kappa(\mathcal{V})) \subseteq \mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{V})$ 为由 $\mathcal{R}\kappa(\mathcal{V})$ 生成的 C^*-代数。那么，数对 $(C^*_{e\mathcal{R}}(\mathcal{V})\ \kappa)$ 是 $\mathcal{V}.$ 的一个 $\mathcal{R} - C^*$-延拓。我们将证明此延拓满足泛性质。

设 $(\mathcal{B}, i)$ 是 $\mathcal{V}$ 的一个 $\mathcal{R} - C^*$-延拓，且 $(\mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{B})\ \tilde{\kappa})$ 是 $\mathcal{B}$ 的一个单射 $\mathcal{R}$-包络。根据 [9, 引理 3.3], , 存在 $\varphi \in \min \mathscr{E}_{\mathcal{B}}$，使得 $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{B}) = \mathrm{Im}(\varphi)$。那么，数对 $(\mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{B})\ \odot_{\varphi})$ 是一个含幺 C^*-代数，同时也是一个 $\mathcal{R}$-模，而 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{B})$ 的一个含幺 C^*-子代数。

由于 $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{V})$ 是一个单射 $\mathcal{R}$-模，映射 $\kappa \circ i^{-1} : i(\mathcal{V}) \to \mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{V})$ 可以延拓为一个含幺完全压缩 $\mathcal{R}$-映射 $\pi : \mathcal{B} \to \mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{V})$，使得$\pi \circ i = \kappa.$。类似地，映射 $\pi \circ \tilde{\kappa}^{-1} : \tilde{\kappa}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{B}) \to \mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{V})$ 可以延拓为一个含幺完全压缩 $\mathcal{R}$-映射 $\tilde{\pi} : \mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{B}) \to \mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{V})$，使得 $\tilde{\pi} \circ \tilde{\kappa} = \pi.$

由于 $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{B})$ 是一个单射 $\mathcal{R}$-模，映射 $\tilde{\kappa} \circ i \circ \kappa^{-1} : \kappa(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{V}) \to \mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{B})$ 可以扩张为一个含幺完全压缩 $\mathcal{R}$-映射 $\rho : \mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{V}) \to \mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{B})$，使得 $\rho \circ \kappa = \tilde{\kappa} \circ i.$



于是 $\tilde{\pi} \circ \rho \circ \kappa = \tilde{\pi} \circ \tilde{\kappa} \circ i = \pi \circ \kappa = \kappa$，这意味着 $\tilde{\pi} \circ \rho \restriction_{\kappa(\mathcal{V})} = \mathrm{id}^{\kappa(\mathcal{V})}$；又由于 $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{V})$ 是 $\mathcal{V}$ 的一个单射 $\mathcal{R}$-包络，因此可得 $\tilde{\pi} \circ \rho = \mathrm{id}_{\mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{V})}$。另一方面，根据 [11, 推论 5.1.2], , 映射 $\tilde{\pi}$ 和 ρ 是含幺完全正的；由施瓦茨不等式（[11, 推论 5.2.2]），我们有

$y^* \odot_{\psi} y = \tilde{\pi}(\rho(y^* \odot_{\psi} y)) \geq \tilde{\pi}\left(\rho(y)^* \odot_{\varphi} \rho(y)\right) \geq \tilde{\pi}(\rho(y))^* \odot_{\psi} \tilde{\pi}(\rho(y))$
$= y^* \odot_{\psi} y$对所有 $y \in \mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{V})$ 均成立，因此

$$\tilde{\pi}\left(\rho(y)^* \odot_{\varphi} \rho(y)\right) = y^* \odot_{\psi} y = \tilde{\pi}(\rho(y))^* \odot_{\psi} \tilde{\pi}(\rho(y)).$$

类似地，我们得到

$$\tilde{\pi}(\rho(y) \odot_{\varphi} \rho(y)^*) = y \odot_{\psi} y^* = \tilde{\pi}(\rho(y)) \odot_{\psi} \tilde{\pi}(\rho(y))^*$$

对所有 $y \in \mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{V})$ 均成立。于是，由 [11, 推论 5.2.2] , $\tilde{\pi} \restriction_{C^*(\rho(\mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{V})))}$可知： $C^*(\rho(\mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{V}))) \to \mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{V})$ 是一个含幺 $\mathcal{R}-C^*$-态射，其中 $C^*(\rho(\mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{V})))$ 是由 $\rho(\mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{V}))$ 生成的 $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{B})$ 的含幺 C^*-子代数。

另一方面，由于 $\mathcal{B} = C^*(\mathcal{R}i(\mathcal{V}))$，且 $\widetilde{\kappa}$ 是一个含幺完全等距的$\mathcal{R} - C^*$-态射（参见注 3.3），我们有

$$\widetilde{\kappa}(\mathcal{B}) = \widetilde{\kappa}(C^*(\mathcal{R}i(\mathcal{V})) = C^*\left(\mathcal{R}\rho(\kappa(\mathcal{V}))\right) = C^*\left(\rho(\mathcal{R}\kappa(\mathcal{V}))\right) \subseteq C^*\left(\rho(\mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{V}))\right).$$

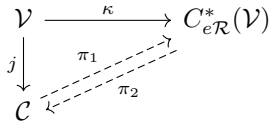
由上文可知，且由于 $\pi = \widetilde{\pi} \circ \widetilde{\kappa}$，可得 π 是一个从 $\mathcal{B}$ 到 $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{V})$ 的含幺 $\mathcal{R} - C^*$-态射。此外，

$$\pi(\mathcal{B}) = \overline{\pi(\mathcal{B})} = \overline{\pi\left(C^*(\mathcal{R}i(\mathcal{V}))\right)} = C^*\left(\mathcal{R}\kappa(\mathcal{V})\right) = C^*_{e\mathcal{R}}(\mathcal{V}).$$

因此，我们证明了存在一个含幺满射 $\mathcal{R} - C^*$-态射 $\pi : \mathcal{B} \to C^*_{e\mathcal{R}}(\mathcal{V})$，使得 $\pi \circ i = \kappa$。

含幺满射 $\mathcal{R} - C^*$-态射 π 的唯一性，由含幺 C^*-代数 $\mathcal{B}$ 和 $C^*_{e\mathcal{R}}(\mathcal{V})$ 的定义以及关系 $\pi \circ i = \kappa$. 得出。

设 $(\mathcal{C}, j)$ 是 $\mathcal{V}$. 的另一个 $\mathcal{R} - C^*$-包络。根据泛性质，存在含幺满射 $\mathcal{R} - C^*$-态射 $\pi_1 : \mathcal{C} \to C^*_{e\mathcal{R}}(\mathcal{V})$，使得 $\pi_1 \circ j = \kappa$；并且存在含幺满射 $\mathcal{R} - C^*$-态射 $\pi_2 : C^*_{e\mathcal{R}}(\mathcal{V}) \to \mathcal{C}$，使得 $\pi_2 \circ \kappa = j$。于是 $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \kappa = \kappa$ 且 $\pi_2 \circ \pi_1 \circ j = j$.



根据这些关系以及 $C^*_{e\mathcal{R}}(\mathcal{V})$ 和 $\mathcal{C}$ 的定义，并考虑到 π_1 和 π_2 是 $\mathcal{R}-C^*$-态射，我们得出 π_1 是一个 $\mathcal{R}-C^*$-同构。

□

4. The $\mathcal{R} - C^*$ -envelope of a local operator space

4.1. 局部算子空间的单射 $\mathcal{R}$-包络。 设 $\{\mathcal{H};\ \mathcal{E};\ \mathcal{D}_{\mathcal{E}}\}$ 为交换量子域，其中 $\mathcal{E} := \{\mathcal{H}_\iota : \iota \in \Omega\}$ 是闭子空间的向上过滤族，且并空间 $\mathcal{D}_{\mathcal{E}} := \bigcup_{\iota\in\Omega} \mathcal{H}_\iota$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密。注意，量子化族 $\mathcal{E} := \{\mathcal{H}_\iota : \iota \in \Omega\}$ 确定了 $B(\mathcal{H})$ 中一个向上过滤的两两交换投影族 $\{P_\iota : \iota \in \Omega\}$，其中 P_ι 表示将 $\mathcal{H}$ 正交投影到闭子空间 $\mathcal{H}_\iota$ 上的投影。然后

$$\{\{P_\iota\}_{\iota\in\Omega}\}' := \{T \in B(\mathcal{H}) \mid TP_\iota = P_\iota T,\ (\forall)\ \iota \in \Omega\} = b\left(C^*_{\mathcal{E}}(\mathcal{D})\right)$$

是作用于 $\mathcal{H}$ 上的单位内射冯·诺伊曼代数（参见 [4, IV. 2.2.7]）。令 $\mathcal{R}$ 为由 $\{P_\iota\}_{\iota\in\Omega} \cup \{1_{\mathcal{H}}\}$ 生成的 $B(\mathcal{H})$ 的交换子环。满足 $\mathcal{R}\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$（或等价地，满足 $\mathcal{V}\mathcal{R} \subseteq \mathcal{V}$）的单位局部子空间 $\mathcal{V} \subseteq C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}})$ 称为（代数）局部 $\mathcal{R}$-模。

设 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{W}$ 是 $C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}})$ 中的两个局部 $\mathcal{R}$-模。若线性映射 $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ 对所有 $\iota \in \Omega$ 和 $T \in \mathcal{V}$. 都满足 $\varphi(P_\iota T) = P_\iota \varphi(T)$，则称其为 $\mathcal{R}$-映射

含幺子空间 $\mathcal{V} \subseteq C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 称为含幺局部算子空间。含幺局部算子空间 $\mathcal{V} \subseteq C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 称为单射局部 $\mathcal{R}$-模，如果 $\mathcal{V}$ 是单射的并满足 $\mathcal{R}\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$（见 [9]）。注意，$\mathcal{V}$ 是单射局部 $\mathcal{R}$-模，当且仅当它是一个含幺局部完全压缩 $\mathcal{R}$-模投影 $\varphi: C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}) \to C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 的值域（[9, 命题 4.1]）。

Dosi [9, 命题 4.1] 表明，若 $C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 是单射的，则含幺局部算子空间 $\mathcal{V} \subseteq C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 是单射局部 $\mathcal{R}$-模，当且仅当 $b(\mathcal{V}) \subseteq b(C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}))$ 是单射 $\mathcal{R}$-模，且 $b(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$，即 $b(\mathcal{V})$ 在 $C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 中的闭包。他将含幺局部算子空间 $\mathcal{V} \subseteq C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 的单射 $\mathcal{R}$-包络定义为含幺算子空间 $b(\mathcal{V}) \subseteq b(C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}))$ 的单射 $\mathcal{R}$-包络的闭包，其中$C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 是单射局部算子空间；也就是说，$\mathcal{I}_\mathcal{R}(\mathcal{V}) = \mathcal{I}_\mathcal{R}(b(\mathcal{V}))$。

本节中，类比赋范情形并遵循 Hamana-Ruan 的构造（例如参见 [16], [5], 和 [20]），我们将含幺局部算子空间 $\mathcal{V} \subseteq C^*_\mathcal{E}(\mathcal{D})$ 的单射$\mathcal{R}$-包络定义为 $\mathcal{V}$ 的局部 $\mathcal{R}$-刚性延拓 $(\mathcal{W}, i)$，其中 $\mathcal{W}$ 是单射 $\mathcal{R}$-模，并证明该定义与 Dosi [9] 给出的定义一致（参见命题 4.9）。

设 $C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 是一个内射空间，且 $\mathcal{V} \subseteq C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 是一个含幺局部算子空间。

定义 4.1。 $\mathcal{V}$ 的局部 $\mathcal{R}$-延拓是一个局部 $\mathcal{R}$-模 $\mathcal{W} \subseteq C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$，连同一个单位局部完全等距映射 $i: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$。

定义 4.2。 若 $\mathcal{V}$ 的局部 $\mathcal{R}$-延拓 $(\mathcal{W}, i)$ 是 $\mathcal{V}$ 的局部 $\mathcal{R}$-刚性延拓，当且仅当 $id_\mathcal{W}$ 是唯一的单位局部完全压缩 $\mathcal{R}$-映射，且该映射在 $\mathcal{V}$ 上延拓恒等映射。

记 $B_1^\mathcal{R}(C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}))$ 为所有单位局部完全压缩$\mathcal{R}$-映射 $\varphi: C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}) \to C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 的集合。

注 4.3。 我们注意到，以下陈述成立。

(1) 如果 $\varphi \in B_1^\mathcal{R}(C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}))$，那么对于所有 $\iota \in \Omega$，有 $\varphi(TP_\iota) = \varphi(T)P_\iota$，因此，

$$\|\varphi(T)\|_\iota = \|\varphi(T)P_\iota\| = \|\varphi(TP_\iota)\| \leq \|TP_\iota\| = \|T\|_\iota$$

对所有 $T \in C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 及所有 $\iota \in \Omega$。 (2) 若 $\varphi: C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}) \to C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 是单位局部完全压缩映射，则$\varphi(b(C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}))) \subseteq b(C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}))$，因为对于所有 $T \in b(C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}))$ 及所有 $\iota \in \Omega$，$\|\varphi(T)\|_\iota \leq \|T\|$。

令 $\varphi \in B_1^\mathcal{R}(C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}))$。则映射 $\varphi\restriction_{b(C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}))}: b(C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})) \to b(C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}))$ 是一个幺完全压缩 $\mathcal{R}$-映射。因此，$\varphi\restriction_{b(C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}))} \in B_1^\mathcal{R}(b(C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})))$。

因此，存在映射 Φ：$B_1^{\mathcal{R}}(C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}})) \to B_1^{\mathcal{R}}(b(C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}})))$，定义如下：

$$\Phi(\varphi) = \varphi \restriction_{b(C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}}))}.$$

引理 4.4. 上述定义的映射 Φ 在$B_1^{\mathcal{R}}(C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}}))$与 $B_1^{\mathcal{R}}(b(C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}})))$之间建立了双射对应。

证明。设 $\varphi_1, \varphi_2 \in B_1^{\mathcal{R}}(C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}}))$ 满足 $\Phi(\varphi_1) = \Phi(\varphi_2)$。由此可得$\varphi_1 \restriction_{b(C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}}))} = \varphi_2 \restriction_{b(C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}}))}$。由于 $\varphi_1 \restriction_{b(C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}}))}$ 和 $\varphi_2 \restriction_{b(C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}}))}$ 关于半范数族 $\left\{\|\cdot\|_\iota \restriction_{b(C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}}))}\right\}_{\iota\in\Omega}$ 连续，并考虑到注 4.3 (2) 以及 $b(C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}}))$ 在 $C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}})$ 中稠密这一事实，可得 $\varphi_1 = \varphi_2$. 因此，映射 $\Phi : \varphi \mapsto \varphi \restriction_{b(C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}}))}$ 是单射。

令 $\psi \in B_1^{\mathcal{R}}(b(C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}})))$。由于 ψ 是一个 $\mathcal{R}$-映射，因此它关于半范数族 $\left\{\|\cdot\|_\iota \restriction_{b(C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}}))}\right\}_{\iota\in\Omega}$ 连续。于是，存在一个含幺的 $\widetilde{\ }$局部完全压缩 $\mathcal{R}$-映射 ψ：$C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}}) \to C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}})$，使得 $\psi \restriction_{b(C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}}))} = \widetilde{\varphi}$. 因此，我们有 $\Phi(\psi) = \psi$. 。所以，映射 $\Phi : \varphi \mapsto \varphi \restriction_{b(C_{\mathcal{E}}^*(\mathcal{D}))}$ 是满射。□

Let

$$\mathscr{E}_{\mathcal{V}} := \left\{\varphi \in B_1^{\mathcal{R}}\left(C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}})\right) \mid \varphi \restriction_{\mathcal{V}} = \mathrm{id}_{\mathcal{V}}\right\}.$$

对于 $\varphi, \psi \in \mathscr{E}_{\mathcal{V}}$，我们定义关系 $\varphi \prec \psi$ 当且仅当

$$\|\varphi(T)\|_\iota \leq \|\psi(T)\|_\iota$$

对所有 $T \in C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}})$ 以及所有 $\iota \in \Omega$。该关系在 $\mathscr{E}_{\mathcal{V}}$ 上是自反且传递的。我们记 $\varphi \approx \psi$ 当且仅当 $\varphi \prec \psi$ 且 $\psi \prec \varphi$. 。称元素 $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathcal{V}}$ 为极小的，如果 $\psi \prec \varphi$ 蕴含 $\psi \approx \varphi$. 。我们用 $\min \mathscr{E}_{\mathcal{V}}$ 表示 $\mathscr{E}_V$ 的所有极小元构成的集合。

引理 4.5. 设 $\mathcal{V} \subseteq C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}})$ 是一个含幺局部算子空间。那么集合 极小 $\mathscr{E}_{\mathcal{V}}$非空，且由 $\mathscr{E}_{\mathcal{V}}$ 中的投影构成。此外，将映射 Φ 限制在 极小 $\mathscr{E}_{\mathcal{V}}$ 上，可在 极小 $\mathscr{E}_{\mathcal{V}}$ 与 极小 $\mathscr{E}_{b(\mathcal{V})}$之间建立双射对应。

证明。 显然， $\Phi(\mathscr{E}_{\mathcal{V}}) = \mathscr{E}_{b(\mathcal{V})}$，并且 φ是 $\mathscr{E}_{\mathcal{V}}$中的投影，当且仅当 $\varphi \restriction_{b(C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}}))}$是 $b(\mathcal{V})$中的投影。

设 $\varphi \in$极小$\mathscr{E}_{b(\mathcal{V})}$，由于根据引理 3.3], $\min \mathscr{E}_{b(\mathcal{V})} \neq \emptyset$。由引理 4.4，存在 $\widetilde{\varphi} \in B_1^{\mathcal{R}}(C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}}))$，使得 $\widetilde{\varphi} \restriction_{b(C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}}))} = \varphi$. 显然， $\widetilde{\varphi} \restriction_{\mathcal{V}} = \mathrm{id}_{\mathcal{V}}$。因此，$\widetilde{\varphi} \in \mathscr{E}_{\mathcal{V}}$. 现在，设 $\psi \in \mathscr{E}_{\mathcal{V}}$ 满足 $\psi \prec \widetilde{\varphi}$. 那么，$\psi \restriction_{b(C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}}))} \in \mathscr{E}_{b(\mathcal{V})}$ 且$\psi \restriction_{b(C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}}))} \preceq \varphi$。由于 φ 是极小的，可得 $\psi \restriction_{b(C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}}))} \sim \varphi$，并由连续性， $\psi \approx \widetilde{\varphi}$. 因此， $\widetilde{\varphi} \in$极小 $\mathscr{E}_{\mathcal{V}}$. 于是，极小 $\mathscr{E}_{b(V)} \subseteq \Phi$(极小 $\mathscr{E}_V$)。

设 $\varphi \in$极小 $\mathscr{E}_{\mathcal{V}}$。那么，$\varphi \restriction_{b(C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}}))} \in \mathscr{E}_{b(\mathcal{V})}$。设 $\psi \in \mathscr{E}_{b(\mathcal{V})}$ 满足 $\psi \preceq \widetilde{\ }\varphi \restriction_{b(C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}}))}$。那么，存在 $\psi \in \mathscr{E}_{\mathcal{V}}$ 使得 $\psi \restriction_{b(C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}}))} = \psi$。显然， $\psi \prec \varphi$。 $\widetilde{\ }$由于 φ 是极小的，因此可得 $\psi \approx \varphi$。于是，$\psi \sim \varphi \restriction_{b(C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}}))}$。因此，$\Phi$(极小 $\mathscr{E}_V$) $\subseteq$极小$\mathscr{E}_{b(V)}$. □

命题 4.6. 设 $\mathcal{V} \subseteq C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 是一个含幺局部算子空间。假设$\varphi \in$ 极小 $\mathscr{E}_\mathcal{V} \neq \emptyset$。那么 $(Im(\varphi)\ i)$ 是 $\mathcal{V}$的一个局部 $\mathcal{R}$-刚性延拓。

证明。 根据 [9, 命题 4.1],Im(φ) 是一个单射局部 $\mathcal{R}$-模。于是，存在一个单位的局部完全压缩 $\mathcal{R}$-映射 ψ :Im(φ) $\to$Im(φ)，使得$\psi \restriction_\mathcal{V}$=id$_\mathcal{V}$。令 $\widetilde{\varphi} = \psi \circ \varphi$。显然，$\widetilde{\varphi} \in B_1^\mathcal{R}(C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}))$ $\widetilde{\varphi} \restriction_\mathcal{V}$=id$_\mathcal{V}$，且 Im($\widetilde{\varphi}$) $\subseteq$Im(φ)。因此， $\widetilde{\varphi} \in \mathscr{E}_\mathcal{V}$，并且对于所有 $T \in C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 以及所有 $\iota \in \Omega$， $\|\widetilde{\varphi}(T)\|_\iota \leq \|\varphi(T)\|_\iota$。于是，$\widetilde{\varphi} \preceq \varphi$，由于 φ 是极小的，故可得 $\widetilde{\varphi} \approx \varphi$。因此， $\widetilde{\varphi} \in$ min $\mathscr{E}_\mathcal{V}$。现在，对任意 $T \in C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$，我们有

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\varphi}(T) - \varphi(T)\|_\iota &= \| \left(\varphi \circ \widetilde{\varphi}\right)(T) - \varphi(T)\|_\iota \\ &= \|\varphi\left(\widetilde{\varphi}(T) - T\right)\|_\iota \\ &= \|\widetilde{\varphi}\left(\widetilde{\varphi}(T) - T\right)\|_\iota \\ &= 0 \end{aligned}$$

对所有 $\iota \in \Omega$。 因此， $\widetilde{\varphi} = \varphi$， 所以， ψ =id$^{\mathrm{Im}(\varphi)}$。证明至此完成。□

定义 4.7。 设 $\mathcal{V} \subseteq C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 是一个含幺局部算子空间。我们将 $\mathcal{V}$ 的单射 $\mathcal{R}$-包络定义为一个局部 $\mathcal{R}$-刚性延拓$(\mathcal{W}, i)$ ，其中 $\mathcal{V}$ 带有一个单射$\mathcal{R}$ -模 $\mathcal{W}$ 。

设 $\mathcal{V} \subseteq C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 和 $\mathcal{W} \subseteq C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 是两个含幺局部 $\mathcal{R}$-模。若含幺线性映射 φ : $\mathcal{V} \to \mathcal{W}$ 是含幺局部完全序 $\mathcal{R}$-同构 ，则称其为含幺局部完全序同构，即 φ是局部完全序同构且是一个 $\mathcal{R}$-映射。

命题 4.8。 任意含幺局部算子空间 $\mathcal{V} \subseteq C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 都有一个单射$\mathcal{R}$-包络，并且该包络在含幺局部完全序 $\mathcal{R}$-同构意义下唯一。

证明。 由命题 4.6 和 [9, 命题 4.1], 可得，(Im(φ) i) 是 $\mathcal{V}$ 的一个内射 $\mathcal{R}$-包络，其中 $\varphi \in$ min $\mathscr{E}_\mathcal{V}$.

为证明唯一性，设 $(\mathcal{W}_1, i_1)$ 和 $(\mathcal{W}_2, i_2)$ 是 $\mathcal{V}$ 的两个内射 $\mathcal{R}$-包络。由 $\mathcal{W}_1$ 和 $\mathcal{W}_2$ 的内射性，存在恒等映射 id$_\mathcal{V}$: $\mathcal{V} \to \mathcal{V}$ 的酉局部完全压缩$\mathcal{R}$-延拓，分别记为 Φ 和 Ψ。

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{W}_1 & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{W}_2 & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{W}_1 \\ {\scriptstyle i_1}\uparrow & & {\scriptstyle i_2}\uparrow & & {\scriptstyle i_1}\uparrow \\ \mathcal{V} & \xrightarrow{id_\mathcal{V}} & \mathcal{V} & \xrightarrow{id_\mathcal{V}} & \mathcal{V} \end{array}$$

由于 $(\Psi \circ \Phi)$ $\restriction_\mathcal{V}$=id$_\mathcal{V}$，由 $\mathcal{R}$-刚性性质可得 $\Psi \circ \Phi$ =id$_{\mathcal{W}_1}$。类似地，有 $\Phi \circ \Psi$ =id$_{\mathcal{W}_2}$。因此， Φ 是一个酉局部完全序 $\mathcal{R}$-同构。□

命题 4.9. 设 $\mathcal{V} \subseteq C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 是一个含幺局部算子空间，且 $b(\mathcal{V})$ $=\mathcal{V}$。那么， $\overline{b(\mathcal{I}_\mathcal{R}(}$ $\mathcal{V}))$ $= \mathcal{I}_\mathcal{R}\left(b(\mathcal{V})\right)$，在含幺完全序 $\mathcal{R}$-同构意义下成立。

证明. 由推论 4.8，存在 $\varphi \in \min \mathscr{E}_{\mathcal{V}}$，使得 $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{V})$。此外，由引理 4.5 及 [9, 第 1026], 页可得 $\mathrm{Im}\big(\varphi \restriction_{b(C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}))}\big) = \mathcal{I}_{\mathcal{R}}(b(\mathcal{V}))$，在含幺完全序 $\mathcal{R}$- 同构意义下成立。显然，我们有 $\varphi(b(C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}))) \subseteq b(\varphi(C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})))$。因此可得 $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}(b(\mathcal{V})) \subseteq b(\mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{V}))$。

现在我们证明 $b(\varphi(C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}))) \subseteq \varphi(b(C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})))$。为此，设 $T \in b(\varphi(C_\mathcal{E}^*(\mathcal{D})))$，也就是说，$T = \varphi(S)$ $S \in C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 且 $\|T\| < \infty$。对最后一个等式应用 φ，得到

$$\varphi(T) = \varphi(\varphi(S)) = \varphi(S) = T.$$

因此，$T \in \varphi(b(C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})))$。证明至此完成。 □

设 $\{\mathcal{H}; \mathcal{E} = \{\mathcal{H}_n\}_{n\geq 1}; \mathcal{D}_\mathcal{E}\}$ 是希尔伯特空间$\mathcal{H}$中的 Fr´echet 量子化域。对每个 ξ，$\eta \in \mathcal{D}_\mathcal{E}$，秩一算子 $\theta_{\xi,\,\eta}$: $\mathcal{D}_\mathcal{E} \to \mathcal{D}_\mathcal{E}$，$\theta_{\xi,\,\eta}(\zeta) = \xi\langle\eta,\ \zeta\rangle$ 是 $C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 的一个元素。由这些秩一算子生成的线性空间的闭包是 $C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 的一个闭双边 $*$-理想，记为 $K^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$（更多详情见 [18] 和 [17]）。

此外，对于每个 $n \geq 1$, $C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})\mathcal{P}_n$ 和 $K^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})\mathcal{P}_n$ 都是 C^*-子代数，且它们分别同构于 $(C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}))_n$ 和 $(K^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}))_n$（参见 [10]）。

另一方面，对于每个 $n \geq 1$，$\mathcal{P}_n$ 表示 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{H}_n$ 上的正交投影。那么，当且仅当 $T \in C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{id}_\mathcal{H} - \mathcal{P}_{n-1})\,\mathcal{P}_n T\,(\mathrm{id}_\mathcal{H} - \mathcal{P}_{n-1})\,\mathcal{P}_n \restriction_{\mathcal{D}_\mathcal{E}}$$

其中 $\mathcal{P}_0 = 0$（参见 [7, 命题 4.2]）。因此，对于每个 $n \geq 1$,

$$(C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}))_n = B(\mathcal{H}_1) \oplus B((\mathcal{H}_1)^\perp \cap \mathcal{H}_2) \oplus \cdots \oplus B((\mathcal{H}_{n-1})^\perp \cap \mathcal{H}_n)$$

and

$$(K^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}))_n = K(\mathcal{H}_1) \oplus K((\mathcal{H}_1)^\perp \cap \mathcal{H}_2) \oplus \cdots \oplus K((\mathcal{H}_{n-1})^\perp \cap \mathcal{H}_n).$$

由上述关系，并考虑到 $B(\mathcal{H})$ 是 $K(\mathcal{H})$ 的内射包，我们得出结论：$(C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}))_n$ 上的恒等映射是唯一一个将 $(K^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}))_n$ · 上的恒等映射延拓出去的完全压缩映射。

例 4.10. 设 $\{\mathcal{H};\ \mathcal{E} = \{\mathcal{H}_n\}_{n\geq 1};\ \mathcal{D}_\mathcal{E}\}$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 中的 Fr´echet 量子化域，且 $\mathcal{V} \subseteq C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 是一个含幺局部算子空间。如果 $K^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{V}$，那么 $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{V}) = C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$。事实上，$C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 是单射且为一个 $\mathcal{R}$-模。若$\varphi : C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}) \to C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 是一个含幺局部完全压缩 $\mathcal{R}$-映射，满足$\varphi \restriction_{\mathcal{V}} = \mathrm{id}_{\mathcal{V}}$，则 $\varphi \restriction_{K^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})} = \mathrm{id}_{K^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})}$ · 。由于 φ 是一个 $\mathcal{R}$-映射，对每个 $n \geq 1$，映射 $\varphi_n : (C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}))_n \to (C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}))_n$ 定义为 $\varphi_n(T \restriction_{\mathcal{H}_n}) = \varphi(T)\,\mathcal{P}_n$，是完全

压缩的，并且满足 $\varphi_n\restriction_{(K^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}))_n}=id_{(K^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}))_n}$. 因此， $\varphi_n=id_{(C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}))_n}$ 对所有 $n\geq 1$, 进而 $\varphi=id_{C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})}$

4.2. **局部算子空间的 $\mathcal{R}-C^*$-包络。类比赋范情形，我们引入含幺局部算子空间的局部 -包络这一概念，并证明任意含幺局部算子空间都有一个局部 -包络，且在含幺局部等距 -同构意义下唯一。与含幺局部算子空间的单射 -**包络的情形一样, 我们证明，含幺局部算子空间的局部 $\mathcal{R}-C^*$-包络 $\mathcal{V}$ 是其有界部分的$\mathcal{R}-C^*$-包络 $b(\mathcal{V})$ 的闭包。

注 *4.11*。根据 [7, 定理 *8.*3], , 含幺局部完全压缩投影 $\varphi\colon C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})\to C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 的值域具有含幺 $*$-代数结构，其中乘法定义为 $T\odot_\varphi S:=\varphi(TS)$，对合则继承自$C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$。一般而言， $\{\|\cdot\|_\iota\}_{\iota\in\Omega}$ 这一族 C^*-半范数未必满足关于此新乘法的C^*-半范数条件。然而，如果 φ 也是一个 $\mathcal{R}$-映射，那么根据注 *4.3 (1)*，$(Im(\varphi)\odot_\varphi)$ 构成一个含幺局部C^*-代数，其拓扑由 $C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 诱导。

假设 $C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 是一个内射空间，并令 $\mathcal{V}\subseteq C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 为一个含幺局部算子空间。

定义 4.12。 设 $\mathcal{V}\subseteq C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 是一个含幺局部算子空间。 $\mathcal{V}$ 的局部 $\mathcal{R}-C^*$-延拓是一个局部 $\mathcal{R}$-延拓 $(\mathcal{B},i)$ ，满足以下性质： $\mathcal{B}$ 是由 $\mathcal{R}i(\mathcal{V})$ 生成的含幺局部 C^*-代数。（注意，一般而言， $\mathcal{B}$ 的局部 C^*-代数结构可能不同于 $C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 的局部 C^*-代数结构。）

定义 4.13。 设 $\mathcal{V}\subseteq C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 是一个含幺局部算子空间。 $\mathcal{V}$ 的局部 $\mathcal{R}-C^*$-包络是一个局部 $\mathcal{R}-C^*$-延拓 $(\mathcal{D},\kappa)$ ，具有以下泛性质：给定 V 的任意局部 $\mathcal{R}-C^*$-延拓 $(\mathcal{C},i)$ ，存在唯一的含幺局部压缩 $\mathcal{R}-*$-态射 $\pi\colon\ \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ ，其值域稠密，且满足 $\pi\circ i=\kappa$.

定理 4.14. 任意含幺局部算子空间 $\mathcal{V}\subseteq C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 都有一个局部 $\mathcal{R}-C^*$- 包络。

证明。 利用引理 2.6 和定理 2.7，本定理的证明与定理 3.4 的证明类似。 □

命题 4.15. 设 $\mathcal{V}_1\subseteq C^*_\mathcal{E}(\mathcal{D})$与 $\mathcal{V}_2\subseteq C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 为两个含幺局部算子空间，并设 $(\mathcal{D}_1,\kappa_1)$ 与 $(\mathcal{D}_2,\kappa_2)$ 分别为 $\mathcal{V}_1$ 与 $\mathcal{V}_2$ 的局部 $\mathcal{R}-C^*$- 包络。若 $\theta:\mathcal{V}_1\to\mathcal{V}_2$ 是含幺局部完全序 $\mathcal{R}$-同构，则存在唯一的含幺局部等距 $\mathcal{R}-*$-同构 $\pi\colon\ \mathcal{D}_1\to\mathcal{D}_2$ ，使得 $\pi\circ\kappa_1=\kappa_2\circ\theta$.

证明. 显然，$(\mathcal{D}_2, \kappa_2 \circ \theta)$ 与 $\left(\mathcal{D}_1, \kappa_1 \circ \theta^{-1}\right)$ 分别是 $\mathcal{V}_1$ 与 $\mathcal{V}_2$ 的局部 $\mathcal{R}-C^*$-延拓。由于 $(\mathcal{D}_1, \kappa_1)$ 与 $(\mathcal{D}_2, \kappa_2)$ 分别是 $\mathcal{V}_1$ 与 $\mathcal{V}_2$ 的局部 $\mathcal{R}-C^*$-包络，故存在唯一的具稠密值域的局部压缩 $\mathcal{R}-*$-态射，$\rho\colon \mathcal{D}_2 \to \mathcal{D}_1$ 与 $\pi\colon \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_2$，使得 $\rho \circ \kappa_2 \circ \theta = \kappa_1$ 与 $\pi \circ \kappa_1 \circ \theta^{-1} = \kappa_2$,分别成立。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_1 & \xrightarrow{\kappa_1} & \mathcal{D}_1 \\ {\scriptstyle \iota}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \uparrow{\scriptstyle \rho} \\ \mathcal{V}_2 & \xrightarrow{\kappa_2} & \mathcal{D}_2 \end{array}$$

那么 $\rho \circ \pi\colon \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_1$ 和 $\pi \circ \rho\colon \mathcal{D}_2 \to \mathcal{D}_2$ 是局部压缩 $\mathcal{R}-*$-态射 s 且具有稠密值域。此外,

$$\rho \circ \pi \circ \kappa_1 = \rho \circ \kappa_2 \circ \theta = \kappa_1$$

and

$$\pi \circ \rho \circ \kappa_2 = \pi \circ \kappa_1 \circ \theta^{-1} = \kappa_2 \circ \theta \circ \theta^{-1} = \kappa_2.$$

由上述关系，并考虑到 $(\mathcal{D}_1, \kappa_1)$ 和 $(\mathcal{D}_2, \kappa_2)$ 分别是 $\mathcal{V}_1$ 和 $\mathcal{V}_2$的局部 $\mathcal{R}-C^*$-包络，可得 $\rho \circ \pi = \mathrm{id}_{D_1}$ 和$\pi \circ \rho = \mathrm{id}_{D_2}$。因此，$\pi$ 可逆，且 $\pi^{-1} = \rho$。于是，π 是局部压缩 $\mathcal{R}-*$-同构。另一方面，对每个 $d_1 \in \mathcal{D}_1$，存在$d_2 \in \mathcal{D}_2$ 使得 $d_1 = \rho(d_2)$, 于是

$$p_\iota(d_1) = p_\iota(\rho(d_2)) \leq p_\iota(d_2) = p_\iota(\pi(\rho(d_2))) = p_\iota(\pi(d_1)) \leq p_\iota(d_1)$$

对所有 $\iota \in \Omega$。因此，π 是局部等距 $\mathcal{R}-*$-同构，命题得证。□

推论 4.16. 设 $\mathcal{V} \subseteq C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 是一个含幺局部算子空间。则 $\mathcal{V} \subseteq C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 的局部 $\mathcal{R}-C^*$-包络在含幺局部等距 $\mathcal{R}-*$-同构意义下唯一。

对于含幺局部算子空间 $\mathcal{V}$ 的任意局部 $\mathcal{R}-C^*$-包络，我们记作 $(C^*_{e\mathcal{R}}(\mathcal{V}), \kappa)$。

备注 4.17. 设 $\mathcal{V} \subseteq C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 是满足 $b(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$ 的含幺局部算子空间。则 $\overline{C^*_{e\mathcal{R}}(\mathcal{V})} = C^*_{e\mathcal{R}}(b(\mathcal{V}))$。此外，我们有 $C^*_{e\mathcal{R}}(b(\mathcal{V})) \subseteq b(C^*_{e\mathcal{R}}(\mathcal{V}))$。

5. The $\mathcal{R}$-Shilov boundary ideal for a local operator space

本节中，我们受 Arveson 的开创性工作 [2] 启发，引入含幺局部算子空间的局部 $\mathcal{R}$-Shilov边界理想这一概念。

设 $\mathcal{A}$ 是一个局部 C^*-代数，其拓扑由一族 C^*-半范数 $\{p_\iota\}_{\iota\in\Omega}$ 定义。假设 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个闭双侧 $*$-理想。则

商 $*$-代数 $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ 关于一族C^*-半范数 $\{\widehat{p}_\iota\}_{\iota\in\Omega}$ 是一个拓扑 $*$-代数，其中 $\widehat{p}_\iota(a+\mathcal{I})$ $=\inf\{p_\iota(a+b)\mid b\in\mathcal{I}\}$。一般而言， $\mathcal{A}/\mathcal{I}$关于一族 C^*-半范数 $\{\widehat{p}_\iota\}_{\iota\in\Omega}$ 并不完备（进一步细节参见 [14]）。注意，对每个 $\iota\in\Omega$， C^*-代数 $(\mathcal{A}/\mathcal{I})_\iota$ 与 $\mathcal{A}_\iota/\mathcal{I}_\iota$ 同构，其中 $(\mathcal{A}/\mathcal{I})_\iota$ 是赋范 $*$-代数 $(\mathcal{A}/\mathcal{I})/\ker(\widehat{p}_\iota)$ 的完备化，而 $\overline{\mathcal{I}_\iota}$ 是 $\pi_\iota^{\mathcal{A}}(\mathcal{I})$ 在 $\mathcal{A}_\iota$. 中的闭包。因此，局部 C^*-代数 $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ 可与 $\varprojlim \mathcal{A}_\iota/\mathcal{I}_\iota$ 等同，且典范 $*$-态射 $\sigma:$ $\mathcal{A}\to\mathcal{A}/\mathcal{I}$ 是一个逆 ι 极限 $*$- 态射， $\sigma=\varprojlim^{\sigma_\iota}$，其中 σ_ι 是对所有 $\iota\in\Omega$ 从 $\mathcal{A}_\iota$ 到 $\mathcal{A}_\iota/\mathcal{I}_\iota$ 上的典范同态。

定义 5.1。设 $\mathcal{V}\subseteq C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 为一个含幺局部算子空间，设 $\mathcal{C}\subseteq C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$为由 $\mathcal{R}\mathcal{V}$ 生成的含幺局部 C^*-代数。 $\mathcal{C}$ 的闭双边 $*$-理想 $\mathcal{I}$ 称为 $\mathcal{V}$ 的局部边界 $\mathcal{R}$-理想，如果典范映射 $\sigma:\mathcal{C}\to\mathcal{C}/\mathcal{I}$ 在 $\mathcal{V}$ 上局部完全等距。若 $\mathcal{R}$-局部边界理想包含其他所有局部边界 $\mathcal{R}$-理想，则称其为 $\mathcal{V}$ 的局部 $\mathcal{R}$-*Shilov*边界。

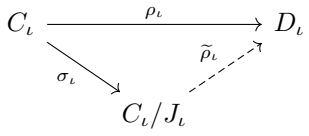
尽管以下结果可能以某种形式为人所知，但我们未能在拓扑 $*$-代数的框架下找到确切的参考文献。鉴于该结果对我们的工作至关重要，我们给出证明以求完整。

引理5.2。设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是两个局部 C^*-代数，其拓扑分别由 $\{p_\iota\}_{\iota\in\Omega}$ 和 $\{q_\iota\}_{\iota\in\Omega}$ 这族 C^*- 半范数定义。设 $\rho:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是一个局部压缩 $*$- 态射，且其值域稠密，并满足对所有$c\in\mathcal{C}$ 及所有 $\iota\in\Omega$，均有 $q_\iota(\rho(c))\leq p_\iota(c)$，且 $\mathcal{I}:=\ker(\rho)$。那么，存在唯一的局部等距
$*$-同构 $\widetilde{\rho}:\ \mathcal{C}/\mathcal{I}\to\overline{\mathcal{D}}$满足 $\widetilde{\rho}\circ\sigma=\rho$，其中 $\sigma:\ \mathcal{C}\to\mathcal{C}/\mathcal{I}$是典范商映射。

证明。由于 $\rho:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是一个具有稠密值域的局部压缩 $*$-态射，且满足$q_\iota(\rho(c))$ $\leq p_\iota(c)$，对于所有 $c\in\mathcal{C}$ 以及所有 $\iota\in\Omega$，对于每个 $\iota\in\Omega$，都存在一个满射C^*-态射 $\rho_\iota:\mathcal{C}_\iota\to\mathcal{D}_\iota$ 满足

$$\rho_\iota\left(\rho_\iota^{\mathcal{C}}(c)\right)=\rho_\iota^{\mathcal{D}}\left(\rho(c)\right)$$

对所有 $c\in C$。对每个 $\iota\in\Omega$ $\mathcal{I}_\iota=\overline{\rho_\iota^{\mathcal{C}}(\mathcal{I})}$ 是 $\mathcal{C}_\iota$ 的一个闭双侧 $*$-理想，因此存在唯一的 C^*-同构 $\widetilde{\rho}_\iota:\ \mathcal{C}_\iota/\mathcal{I}_\iota\to\mathcal{D}_\iota$ 使得 $\widetilde{\rho}_\iota\circ\sigma_\iota=\rho_\iota$.

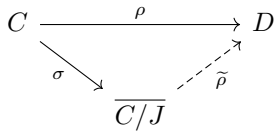


现在，设 $\iota_1, \iota_2 \in \Omega$ 且 $\iota_1 \leq \iota_1$. 由于

$$\begin{aligned}\rho^D_{\iota_1\iota_2}\big(\widetilde{\rho}_{\iota_2}(\sigma_{\iota_2}(c_{\iota_2}))\big) &= \rho^D_{\iota_1\iota_2}\big(\rho_{\iota_2}(c_{\iota_2})\big)\\ &= \rho_{\iota_1}\big(\rho^C_{\iota_1\iota_2}(c_{\iota_2})\big)\\ &= \widetilde{\rho}_{\iota_1}\big(\sigma_{\iota_1}(\rho^C_{\iota_1\iota_2}(c_{\iota_2}))\big)\\ &= \widetilde{\rho}_{\iota_1}\big(\rho^{C/J}_{\iota_1\iota_2}(\sigma_{\iota_2}(c_{\iota_2}))\big), \quad (\forall)\ c_{\iota_2} \in C_{\iota_2}\end{aligned}$$

由此可知，族 $\{\widetilde{\rho}_\iota\}_{\iota\in\Omega}$ 构成一个由 C^*-同构组成的逆系统。同样，族 $\{\widetilde{\rho}_\iota^{-1}\}_{\iota\in\Omega}$ 也构成一个由 C^*-同构组成的逆系统。令 $\widetilde{\rho} := \varprojlim \widetilde{\rho}_\iota$ 和 $\widetilde{\rho}^{-1} := \varprojlim \widetilde{\rho}_\iota^{-1}$. 。那么 $\widetilde{\rho}$ 和 $\widetilde{\rho}^{-1}$ 是局部等距的 $*$-态射。ι ι由于 $\widetilde{\rho}\circ\widetilde{\rho}^{-1} = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ 和 $\widetilde{\rho}^{-1}\circ\widetilde{\rho} = \mathrm{id}_{\mathcal{C}/\mathcal{I}}$，由此可知 $\widetilde{\rho}$ 和 $\widetilde{\rho}^{-1}$ 是局部等距的

$*$-同构。



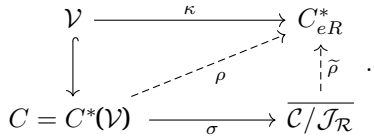
□

定理 5.3. 任意含幺局部算子空间 $\mathcal{V} \subseteq C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 都有局部 $\mathcal{R}$-*Shilov*边界。

证明. 设 $(C^*_{e\mathcal{R}}(\mathcal{V}) \quad \kappa)$ 是 $\mathcal{V}$ 的局部 $\mathcal{R} - C^*$-包络，且 $\mathcal{C} \subseteq C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ 是由 $\mathcal{R}\mathcal{V}$ 生成的局部 C^*-代数。由于对 $(\mathcal{C}, i_\mathcal{V})$, , 其中 $i_\mathcal{V}$ 是包含映射 $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{C}$, , 是 $\mathcal{V}$ 的局部 $\mathcal{R}$-C^*-延拓，因此存在唯一的局部压缩 $\mathcal{R} - *$-态射 $\rho\colon \mathcal{C} \to C^*_{e\mathcal{R}}(\mathcal{V})$，其值域稠密，并且满足 $\rho\restriction_\mathcal{V} = \kappa$.

令 $\mathcal{J}_\mathcal{R} := \ker\rho$. 显然， $\mathcal{J}_\mathcal{R}$ 是 $\mathcal{C}$ 的闭双边 $*$-理想，也是一个 $\mathcal{R}$-模。我们断言， $\mathcal{J}_\mathcal{R}$ 是 $\mathcal{V}$ 的局部 $\mathcal{R}$-Shilov边界。

由于 ρ 是一个 $\mathcal{R}$-映射，对于所有 $\iota \in \Omega$和所有 $c \in C$，我们有 $\|\rho(c)\|_\iota \leq \|c\|_\iota$ 。根据引理5.2，存在一个保幺的局部等距 $*$-同构 $\widetilde{\rho}$ ，使得下图交换



由于 $\widetilde{\rho}\circ\sigma\restriction_\mathcal{V} = \rho\restriction_\mathcal{V} = \kappa$，可知 $\sigma\restriction_\mathcal{V} = \widetilde{\rho}^{-1}\circ\kappa$是一个保幺的局部完全等距映射，因此 $\mathcal{J}_\mathcal{R}$ 是 $\mathcal{V}$的局部边界 $\mathcal{R}$-理想。此外， $\Big(\mathcal{C}/\mathcal{J}_\mathcal{R}, \sigma\restriction_\mathcal{V}\Big)$ 是 $\mathcal{V}$的局部 $\mathcal{R}-C^*$-包络，因为 $\widetilde{\rho}\colon \mathcal{C}/\mathcal{J}_\mathcal{R} \to C^*_{e\mathcal{R}}(\mathcal{V})$是一个保幺的局部等距$\mathcal{R}$-$*$-同构，使得 $\widetilde{\rho}\circ\sigma\restriction_\mathcal{V} = \kappa$.

令 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{C}$ 为 $\mathcal{V}$的任意局部边界 $\mathcal{R}$-理想，并令 $\upsilon : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{I}$ 为典范的 $*$-态射。由于 $\upsilon\restriction_\mathcal{V}$是局部完全等距映射， $\Big(\mathcal{C}/\mathcal{I}, \upsilon\restriction_\mathcal{V}\Big)$ 是一个

$\mathcal{V}$的局部 $\mathcal{R}-C^*$-延拓。现在，由于 $\left(\mathcal{C}/\underline{\mathcal{J}_{\mathcal{R}},\sigma\restriction_{\mathcal{V}}}\right)$ 是 $\mathcal{V}$的局部 $\mathcal{R}-C^*$-包络，存在唯一的局部压缩 $\mathcal{R}-*$-态射 $\varphi\colon \mathcal{C}/\mathcal{I}\to\mathcal{C}/\mathcal{J}_{\mathcal{R}}$，其值域稠密，并且满足 $\varphi\circ\upsilon\restriction_{\mathcal{V}}=\sigma\restriction_{\mathcal{V}}$.

如果 $x\in\mathcal{I}$，那么

$$x+\mathcal{J}_{\mathcal{R}}=\varphi\left(x+\mathcal{I}\right)=\varphi\left(0+\mathcal{I}\right)=0+\mathcal{J}_{\mathcal{R}}$$

因此， $x\in\mathcal{J}_{\mathcal{R}}$。于是， $\mathcal{I}\subseteq\mathcal{J}_{\mathcal{R}}$。因此， $\mathcal{J}_{\mathcal{R}}$ 包含所有局部边界$\mathcal{R}$-理想，所以 $\mathcal{J}_{\mathcal{R}}$ 是 $\mathcal{V}$的局部 $\mathcal{R}$-Shilov边界。□

推论 5.4。 设 $\mathcal{V}\subseteq C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}})$ 是一个含幺局部算子空间。那么 $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}\left(\mathcal{V}\right)=\mathcal{I}_{\mathcal{R}}(C^*(\mathcal{V}))$ 当且仅当 $\mathcal{V}$ 具有平凡的局部 $\mathcal{R}$-*Shilov*边界。

推论 5.5。 设 $\mathcal{V}_1\subseteq C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}})$ 和 $\mathcal{V}_2\subseteq C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}})$ 是两个含幺局部算子空间，且设 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 分别是由 $\mathcal{R}\mathcal{V}_1$ 和$\mathcal{R}\mathcal{V}_2$生成的含幺局部 C^*-代数。如果 $\varphi\colon \mathcal{V}_1\to\mathcal{V}_2$ 是一个含幺局部完全序 $\mathcal{R}$-同构，并且 $\mathcal{V}_1$ 和 $\mathcal{V}_2$ 都具有平凡的局部 $\mathcal{R}$-*Shilov*边界，那么 φ 可唯一地延拓为含幺局部等距 $\mathcal{R}-*$- 同构 $\rho\colon \mathcal{C}_1\to\mathcal{C}_2$.

证明。 由于 $\mathcal{V}_1$ 和 $\mathcal{V}_2$ 的局部 $\mathcal{R}$-Shilov边界均为平凡边界，因此，$(\mathcal{C}_1,i_{\mathcal{V}_1})$ 和 $(\mathcal{C}_2,i_{V_2})$ 分别是 $\mathcal{V}_1$和 $\mathcal{V}_2$的局部 $\mathcal{R}-C^*$-包络。根据命题 4.15，存在唯一的含幺局部等距 $\mathcal{R}-*$-同构 $\rho\colon \mathcal{C}_1\to\mathcal{C}_2$，使得 $\rho\restriction_{\mathcal{V}_1}=\varphi$.

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{V}_1 & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & \mathcal{V}_2\\ \big\downarrow & & \big\downarrow\\ \mathcal{C}_1=C^*(\mathcal{V}_1) & \xrightarrow{\quad\rho\quad} & \mathcal{C}_2=C^*(\mathcal{V}_2)\end{array}$$

□

例 5.6。 设 $\{\mathcal{H};\mathcal{E}=\{\mathcal{H}_n\}_{n\geq1};\mathcal{D}_{\mathcal{E}}\}$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$中的一个 *Fr´echet* 量子化域，且 $\mathcal{V}\subseteq C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}})$ 是一个含幺局部算子空间。若 $\mathcal{V}$ 的局部 $\mathcal{R}$-*Shilov*边界为平凡边界，且 $K^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}})\subseteq C^*\left(\mathcal{V}\right)$，则 $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\mathcal{V})=C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}})$。

经费。 本研究未获得来自公共、商业或非营利部门资助机构的任何专项经费。

数据可用性。 本文没有相关数据。

声明。 作者没有需要披露的相关财务或非财务利益。

References

[1] C. Apostol, *b^*-algebras and their representation*, 伦敦数学会杂志 (2) 3 (1971), 30–38.[2] W. Arveson, *Subalgebras of C^*-algebras*, 数学学报, 123: 141-224, 1969.

[3] W. Arveson, *The noncommutative Choquet boundary*, 《美国数学会杂志》21（2008），第4期，1065–1084页。[4] B. Blackadar, *Operator algebras; Theory of C^*-algebras and von Neumann algebras*, 《数学科学百科全书》122，Springer，2006年。[5] D. P. Blecher、C. Le Merdy, *Operator algebras and their modules: an operator space approach*，牛津大学出版社，2004年。[6] K. R. Davidson、M. Kennedy, *The Choquet boundary of an operator system*, 《杜克数学杂志》164（15），2989–3004页，2015年。[7] A. Dosiev, *Local operator spaces, unbounded operators and multinormed C^*-algebras*, 《泛函分析杂志》255（2008），1724–1760页。[8] A. Dosiev, *Multinormed W^*-algebras and unbounded operators*。《美国数学会会刊》140（2012），第12期，4187–4202页。[9] A. Dosi, *Injectivity in the quantum space framework*, 《算子矩阵》8（2014），第4期，1013–1039页。[10] A. Dosi, *Quantum duality, unbounded operators, and inductive limits*, 《数学物理杂志》51：6（2010），063511。[11] E. G. Effros、Z.-J. Ruan, *Operator spaces*，牛津大学出版社，2000年。[12] E. G. Effros、C. Webster, *Operator analogues of locally convex spaces*，载于：《算子代数与应用》，Springer，163–207页，1997年。[13] M. Fragoulopoulou, *On locally W^* -algebras*, 《横滨数学杂志》34（1–2）（1986），35–51页。[14] M. Fragoulopoulou, *Topological algebras with involution* , Elsevier，2005年。[15]A. Gheondea, *On propagation of fixed points of quantum operations and beyond*, https://doi.org/10.48550/arXiv.1611.04742。[16] M. Hamana, *Injective envelopes of operator systems*, 《京都大学数理科学研究所刊物》15：773–785，1979年。[17] A. Inoue, *Locally C^*-algebra*, 《九州大学理学部纪要，A辑》25（1971），第2期，197–235页。[18] D. J. Karia、Y. M. Parmar, *Operators on locally Hilbert space*, 《分析学杂志》23（2015），59–73页。[19] N. C. Phillips, *Inverse limits of C^* -algebras*, 《算子理论杂志》19（1988），第1期，159–195页。[20] V. Paulsen, *Completely bounded maps and operator algebras*, 剑桥大学出版社，2002年。[21] Z.-J. Ruan, *Injectivity of operator spaces*, 《美国数学会汇刊》315（1），89–104页，1989年。[22] K. Schm¨udgen, *Über LMC*-Algebren*, 《数学新进展》68（1975），167–182页。