arXiv:2602.03644v1 [math.AP] 3 Feb 2026

关于几乎周期椭圆算子的临界性与主特征值

Luca Rossi

罗马第一大学 G. Castelnuovo 研究所，意大利罗马

谨以此文纪念 *Ha¨ım Brezis*，他的工作是取之不尽的灵感源泉。

摘要

我们回顾无界区域上椭圆算子的广义主特征值的概念及其性质，并阐述它与临界性理论的联系。我们重点研究具有几乎周期系数的算子。我们给出一个维数为 $N \leq 2$时的刘维尔型结果。接下来，我们通过一个反例说明，临界性并不等价于存在几乎周期主特征值，即使对于自伴算子也是如此。最后，我们举出一个几乎周期算子，它是次临界的，却具有一个临界极限算子。这体现了几乎周期情形下临界性这一性质的不稳定性。

1 引言

椭圆算子的主特征值 体现了该算子的若干基本性质，例如最大值原理是否成立，以及解的存在性、唯一性和稳定性。主特征值经典地定义为具有正特征函数的特征值。对于定义在有界光滑区域内、具有光滑系数并满足不同类型边界条件（狄利克雷、诺伊曼、罗宾）的一致椭圆算子，主特征值存在，且唯一而简单。利用克雷因-鲁特曼理论可以证明这些事实；该理论是佩龙-弗罗贝尼乌斯理论在无限维空间上的推广。克雷因-鲁特曼理论所要求的关键条件是算子的预解式具有正性和紧性，而这两者都是椭圆性以及空间区域紧性的结果。事实上，同一理论也适用于周期算子，即定义在环面上的算子，并由此得到周期主特征值。为了了解周期情形以外的情况，首先可以考察几乎周期函数（下文简称 a.p. 函数）这一框架，精确定义见第 2 节。a.p. 函数与连续周期函数具有以下共同性质：

其平移集合在 L^∞中相对紧。尽管如此，与周期情形不同，对于具有殆周期系数的算子，无法在紧框架下处理这一问题。

为了研究几乎周期主特征值（即具有几乎周期正特征函数的特征值）是否存在，应当在全空间中考虑特征值问题，并事后证明该特征函数是几乎周期的。然而，在这种框架下，算子的预解式并非紧算子，因此无法应用克雷因-鲁特曼理论。事实上，对于无界区域上的算子，主特征值的唯一性和单重性通常都不成立。 [5, 6, 9] 通过引入几种不同的广义主特征值概念，研究了这些问题。

周期情形与几乎周期情形之间的差异不只是技术性的。事实上，对于具有殆周期系数的算子，几乎周期主特征值可能并不存在。对于形如 $\Delta - c(x)$ 的算子，可以构造一个反例，其中 $c(x) = K(\cos(2\pi x) + \cos(2\pi\alpha x))$，$\alpha \notin \mathbb{Q}$ 且 K 足够大；该算子是一个拟周期函数，属于几乎周期函数的子类。这可由 [10] 的一个结果（另见 [29]）以及 Ruelle-Oseledec 定理推出；该结果运用了大偏差技术和 [16] 的雪崩原理。颇为令人惊讶的是，如果 K 足够小，且 α 满足某个丢番图条件，那么如 Kozlov [17] 所示，上述算子存在几乎周期主特征值。在下文的反例 1 中，我们给出另一个一维自伴几乎周期算子的例子，它不存在几乎周期主特征值。这个反例没有运用概率工具，而是利用了我们在先前论文 [27], 中所作的一项初等构造；我们将在第4节回顾该构造。这个反例还表明，按照 Pinchover [24] 的意义，临界算子也可能不存在几乎周期主特征值。临界性理论与广义主特征值理论有关，但并不等同，见下文第 2 节。临界性尤其意味着正解在相差一个标量倍数的意义下唯一。

不难看出，对于空间维数为 $N = 1$ 的自伴算子，若几乎周期主特征值存在，则它必然是单重的，参见例如 [21, 命题 1.7]。由于 Nordmann [22] 得到了一个刘维尔型结果，在维数为 $N = 2$ 时也同样如此。将后者与 Pinchover [25], 的一项结果结合起来，可以证明一个更强的性质：如果某个算子存在几乎周期正解，那么它是临界的，当且仅当空间维数为 $N \leq 2$，见下文的推论 2.4。

我们以另一个关于几乎周期主特征值存在性的反例结束本文。该反例还表明，具有几乎周期系数的算子可以是次临界的，却拥有一个临界极限算子，参见下文的反例 2。

2 精确定义与结果陈述

我们考虑形如 $\mathcal{L}$ 的椭圆算子

$$\mathcal{L}u = \nabla \cdot (A(x)\nabla u) + b(x) \cdot \nabla u + c(x)u, \qquad x \in \mathbb{R}^N,$$

其中， A是矩阵场， b 是向量场， c是标量函数。我们始终假设， A、b 的各个分量以及函数 c 均为实值、可测且有界；此外，假设 A 光滑、对称且一致椭圆。

由于区域 $\mathbb{R}^N$ 无界，无法通过克雷因-鲁特曼理论以经典方式定义 $-\mathcal{L}$ 的主特征值。受非均匀介质中反应扩散方程研究的启发，我们与 H. Berestycki 和 F. Hamel 合作，在 [6] 中考虑了以下广义主特征值的概念：

$$\lambda_1 := \sup\{\lambda \in \mathbb{R} \ : \ \exists \phi > 0, -\mathcal{L}\phi \geq \lambda\phi \text{ on } \mathbb{R}^N\}.$$

上述公式中的函数 ϕ （以及一般而言，微分等式/不等式中涉及的函数）均假定属于 $W^{2,\ N}_{loc}(\mathbb{R}^N)$（且不等式几乎处处成立）。需要指出的是，对 ϕ不要求任何全局可积性条件。对于定义在有界非光滑区域上的线性椭圆算子，上述定义与 Berestycki-Nirenberg-Varadhan [8] 提出的定义一致。作者指出，只要赋予狄利克雷边界条件一种宽松的含义，这一概念便具有经典概念的所有基本性质。此前，[23]中已给出一些相关概念和部分结果。相反，在全空间（或更一般地，在无界区域）中，量λ_1 不足以涵盖主特征值的所有经典性质。事实上， [5, 6] 中采用了另一种记作 λ_1'的概念，以完整描述椭圆问题的解；此外， [9]中还引入了第三个量 λ_1''。问题在于，与有界区域的情形不同，存在正特征函数的特征值并不唯一；实际上，整个半直线（$-\infty$， λ_1] ）都满足这一性质，见 [9, 定理 1.4]。例如，对于非自伴的周期算子 $-\mathcal{L}$ ，周期主特征值通常小于 λ_1，并且实际上与 λ_1' 和 λ_1''相等，见下文第3节。

我们尤其关注具有几乎周期系数的算子。

定义 2.1。 若函数 $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ 满足：对于 $\mathbb{R}^N$ 中的任意序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ，都能抽取一个子序列 $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ，使得 $(f(x + x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$在 $x \in \mathbb{R}^N$中一致收敛，则称该函数为几乎周期（a.p.）函数。

如果椭圆算子 $\mathcal{L}$ 的系数，即矩阵场 A的分量、向量场 b 的分量以及函数 c，全都是几乎周期函数，我们就称该算子为几乎周期的。

Pinchover [24] 发展了临界性理论，旨在研究超越具有紧预解算子的情形下椭圆方程正解的存在性、唯一性和稳定性；该理论也由 [20]应用于 Schr¨odinger 算子的情形。

定义 2.2. 椭圆算子 $\mathcal{L}$ 是

- 超临界： 若正解的集合 $\mathcal{L}u = 0$ 为空;
- 临界： 若满足 $\mathcal{L}u \leq 0$ 的正函数集合是一维的;
- 其他情况下为次临界。

上述定义不同于 Pinchover [24], 的原始定义。原始定义依据 Agmon [1] 意义下正格林函数或基态的存在性来表述。关于这一主题的全面论述，涵盖偏微分方程和概率两个视角，可参阅 Pinsky [26] 的专著。上述等价定义见 [25], ，另见 [1, 13] 或 [26, 定理 3.4 和 3.9]。Simon [28] 曾给出 Schr¨odinger 算子情形下的一个先前等价定义。临界性可以与广义主特征值联系起来:

$$\begin{aligned} \lambda_1 < 0 \iff & \mathcal{L} \text{ is supercritical,} \\ \lambda_1 > 0 \implies & \mathcal{L} \text{ is subcritical,} \\ \lambda_1 = 0 \implies & \mathcal{L} \text{ is either critical or subcritical.} \end{aligned}$$

因此，临界性不能完全由 λ_1 表征。

对于临界算子， $\mathcal{L}u = 0$ 的正解集合与正超解集合重合，因此根据定义，该集合也是一维的。在维数 $N = 1$ 下，反过来也成立，即算子是临界的，当且仅当 $\mathcal{L}u = 0$ 的正解集合是一维的，见 [26, 命题5.1。3]（或自伴情形下的附录 1] , 见 [20, ）。

众所周知， $\mathbb{R}^N$ 中的拉普拉斯算子是临界的，当且仅当 $N \leq 2$。Damanik-Killip-Simon [12, 定理 5] 将这一结果推广到了算子 $\mathcal{L} = \Delta + c(x)$。Pinsky [26, 定理 8.2.7], 给出了一个相关结果，该结果通过概率方法证明：对于周期算子 $\mathcal{L}$（不一定是自伴的）， $\mathcal{L} + \lambda_1$ 是临界的，当且仅当 $N \leq 2$。利用 [4, 22, 25]的结果，还可以将其进一步推广到非周期算子。

命题 2.3。 设 $\mathcal{L}$ 是一个系数正则的自伴算子。则有:

(i) 若 $N \leq 2$ 且方程 $\mathcal{L} = 0$ 存在一个正的有界解 φ ， 则 $\mathcal{L}$是临界的。(ii) 若 $N \geq 3$ 且方程 $\mathcal{L} = 0$ 存在一个满足下确界 $\varphi > 0$ 的解 φ ， 则$\mathcal{L}$ 是次临界的。

证明。 **(*i*)** [22, 定理 2] 表明， φ 是 $\mathcal{L}$的广义主特征函数 , 即 $\lambda_1 = 0$。设 $\psi > 0$ 满足 $\mathcal{L}\psi \leq 0$。令 $u := -\psi + k\varphi$ ，其中 $k > 0$ 足够大，使得 $\sup u > 0$。因此， u 是 $\mathcal{L} = 0$ 的下解，且有上界。由此再次根据 [22, 定理 2] 可知， u 是 φ的倍数, 从而 ψ也是如此。这说明 $\mathcal{L}$是临界的。

(ii) 反设 $\mathcal{L}$ 是临界的。于是应用 [25, 定理 1.7]（其中 $\psi \equiv 1$），可推得算子 $\nabla \cdot (A\nabla)$ 也临界。但根据 [4, 15, 3]，在维数 3 或更高维数下，情况并非如此。 □

几乎周期函数必然有界。此外，如果它是椭圆方程的正解，那么它必定具有正下确界；否则，它会在极小化序列附近局部一致（因此也一致）收敛到 0，这是不可能的。由此可根据命题 2.3 得到以下结果。

推论 2.4。设 $\mathcal{L}$ 是一个系数正则的自伴算子，并假设方程 $\mathcal{L}u = 0$ 存在正几乎周期解 φ。那么，$\mathcal{L}$ 是临界的，当且仅当 $N \leq 2$。

推论 2.4 将上述结果 [26, 定理 8.2。7] 推广到了自伴算子的情形，因为对于自伴周期算子，广义主特征值 λ_1 退化为周期主特征值，见 [6, 命题 6。6], 也就是说，$\mathcal{L} + \lambda_1$ 存在正周期解。我们可以进一步探究推论 2.4 的逆命题对于几乎周期算子是否成立，即在低维情形下，临界性是否等价于存在几乎周期主特征值。下面的结果给出了否定的回答。

反例 1. 存在一个自伴几乎周期算子 $\mathcal{L}$，其维数为 $N = 1$，该算子是临界的，但不具有任何正几乎周期特征函数。

反例 1 的证明在第4节中给出。该证明利用了我们先前论文 [27], 中所做的构造，我们将重新采用这一构造。该反例中的算子具有一个近指数衰减的基态，这与安德森局域化现象有关，参见 [11]。

最后，我们给出一个结果，它一方面表明，具有 $\lambda_1 = 0$的自伴几乎周期算子即使在一维情形下也可能不是临界的；另一方面表明，临界性在过渡到极限算子时并不保持不变，而极限算子粗略地说就是原算子的 ω极限。

定义 2.5. 与 $\mathcal{L}$ 相关联的极限算子是如下形式的算子

$$\mathcal{L}^* u = \nabla \cdot (A^*(x)\nabla u) + b^*(x) \cdot \nabla u + c^*(x)u,$$

其中，对于 $\mathbb{R}^N$中的给定序列$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$，$A^*(x)$ $b^*(x)$ $c^*(x)$分别是 $A(x + x_n)$ $b(x + x_n)$ $c(x + x_n)$的逐点极限。

反例 2。存在一个 $N = 1$维的自伴几乎周期算子 $\mathcal{L}$，它是次临界的，具有 $\lambda_1 = 0$，但它存在一个 $\mathcal{L}^*$ 临界的极限算子。

注 1. 对于几乎周期算子 $\mathcal{L}$，极限算子 $\mathcal{L}^*$ 定义中 $A(x+x_n)$、$b(x+x_n)$、$c(x + x_n)$ 的收敛实际上在 $x \in \mathbb{R}^N$ 中是一致的（取子序列后）。因此，$A^*(x - x_n)$、$b^*(x - x_n)$、$c^*(x - x_n)$ 收敛（取子序列后）到 $A(x)$ $b(x)$ $c(x)$，故 $\mathcal{L}$ 是与 $\mathcal{L}^*$ 相关的一个极限算子（它也是几乎周期的）。特别地，我们可以将反例 2 改述为：存在一个维数为 $N = 1$ 的自伴几乎周期算子，它是临界的，但它有一个次临界的极限算子。

反例 2 中的算子 $\mathcal{L}$ 与周期算子相比，呈现出三个显著差异：

1) $\mathcal{L}$ 不具有几乎周期（或仅仅有界的）正特征函数，这是由于命题 2.3；

2) 对于周期算子 $\tilde{\mathcal{L}}$，根据 [26,定理 8.2，$\tilde{\mathcal{L}}+\lambda_1$ 在维数 $N \leq 2$中总是临界的，6], 而 $\mathcal{L}$ 则不是；

3) 周期算子与其所有极限算子（它们只是前者的平移）具有相同的临界性特征，而 $\mathcal{L}$ 则没有。

3 广义主特征值的其他概念

除了在 [8], 中引入的广义主特征值 λ_1 之外， [5, 6, 9] 还采用了另外两个概念，用于刻画无界区域上椭圆方程解的存在性、唯一性和正性，并应用于研究非均匀介质中的 Fisher-KPP 方程。在区域为全空间的情况下，它们可化为：

$$\lambda_1' := \inf\{\lambda \in \mathbb{R} \ : \ \exists \phi > 0, \ \sup \phi < +\infty, -\mathcal{L}\phi \leq \lambda\phi \text{ on } \mathbb{R}^N\},$$

and

$$\lambda_1'' := \sup\{\lambda \in \mathbb{R} \ : \ \exists \phi, \ \inf \phi > 0, \ -\mathcal{L}\phi \geq \lambda\phi \text{ on } \mathbb{R}^N\}.$$

这些其他概念的关键性质之一是：算子 $\mathcal{L}$满足最大值原理 当且仅当 $\lambda_1' \geq 0$，参见 [9, 定理 1.6]。

一般而言，不等式 $\lambda_1'' \leq \lambda_1' \leq \lambda_1$ 成立；而对于自伴算子，有 $\lambda_1' = \lambda_1$，见 [9, 定理 1.7]。此外， [9]还猜想 $\lambda_1'' = \lambda_1'$。Maillard-Tough [19] 近期采用一种将椭圆偏微分方程与分枝过程相联系的概率方法，在系数为 H¨older 连续函数的自伴算子情形下证明了这一猜想，并通过一个反例否定了它对非自伴算子的成立性。

对于周期算子，这两个量 λ_1' 和 λ_1'' 都等于周期主特征值，即唯一对应于正周期特征函数的特征值；而一般而言， λ_1 大于后者。Berestycki 和 Nadin 证明，对于系数为 H¨older 连续函数的几乎周期算子（甚至是唯一遍历算子），即使不要求自伴，也有 $\lambda_1' = \lambda_1''$。这一结果在 [7] 中借助 Lions-Souganidis 的均匀化技术 [18]推导得出。事实上，特征值问题可以在均匀化框架下重述为变换后的算子近似校正子的存在性问题。

4 临界情形下几乎周期主特征值的不存在性

在 [27], 中构造了一个几乎周期函数 b，用于举出椭圆算子刘维尔型结果的一个反例。我们使用同一个函数 b来构造——

造反例 1 中的算子 $\mathcal{L}$。回顾其定义：首先，我们设

$$\sigma(x) := \begin{cases} -1 & \text{if } x \in [-1, 0) \\ 1 & \text{if } x \in [0, 1], \end{cases}$$

然后，通过迭代，

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sigma(x) := \begin{cases} \sigma(x + 2 \cdot 3^n) - \dfrac{1}{(n+1)^2} & \text{if } x \in [-3^{n+1}, -3^n) \\ \sigma(x - 2 \cdot 3^n) + \dfrac{1}{(n+1)^2} & \text{if } x \in (3^n, 3^{n+1}]. \end{cases} \tag{1}$$

最后，为了得到一个正则函数，我们定义

$$b(x) := \sigma(x) \sin^4(\pi x).$$

函数 b如图 1 所示。它属于 C^3类，是奇函数且极限周期，也就是说，它是连续周期函数序列的一致极限。在这种情况下，这样的序列由 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 给出，其中 $b_n \equiv b$ 在 $[-3^n, 3^n]$ 上成立，然后通过周期性延拓。极限周期函数是几乎周期函数的一个子类，因为正如从定义 2.1 中容易看出的那样，几乎周期函数空间关于 L^∞ 范数是闭的（例如参见 [2, 14]）。此外，可以得到以下不等式：

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int_0^x b(t)dt \geq K \frac{|x|}{(\log_3 |x| + 1)^2} - K, \tag{2}$$

对于某个 $K > 0$，见 [27, 命题 3.3]。

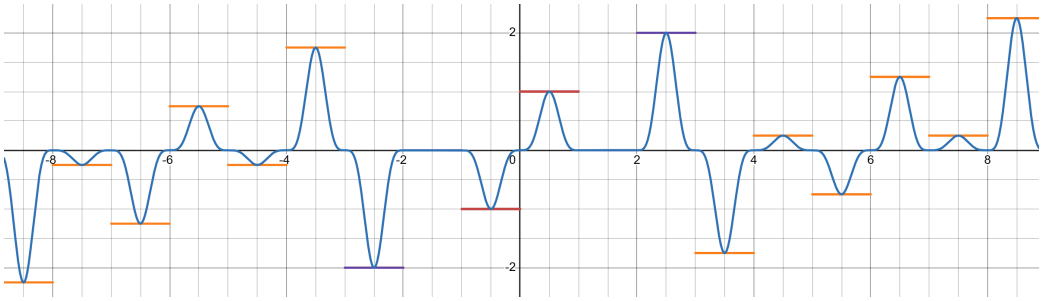

图 1： σ 和 b的图像。

反例 1 的证明。 考虑以下算子：

$$Lu := u'' - 2b(x)u', \qquad x \in \mathbb{R},$$

其中 b 如上定义。函数

$$v(x) := e^{-\int_0^x b(t)dt} u(x)$$

满足 $\mathcal{L}v = e^{-\int_0^x b_{(t)}dt} Lu$，其中

$$\mathcal{L}v := v'' + (b' - b^2)v.$$

系数 $b' - b^2$ 是几乎周期的，因为 b^2 是几乎周期的； b' 也如此，因为它一致连续。众所周知，几乎周期函数的导数是几乎周期的，当且仅当它一致连续，参见例如 [2, 性质 V]。

现在我们来研究 $\mathcal{L}$ 的临界性及其主特征值 λ_1的符号。函数

$$\varphi(x) := e^{-\int_0^x b(t)dt}$$

满足 $\mathcal{L}\varphi = 0$。由 (2) 可知， φ 在 $\pm\infty$处衰减至 0，因此它有界。回顾第3节中 λ_1 和 λ_1' 的定义，可得 $\lambda_1 \geq 0 \geq \lambda_1'$。然而，由于 $\lambda_1 = \lambda_1'$ ，根据 [9, 定理1.7(i)], ，最终可推得 $\lambda_1 = 0$。另一方面，在一维情形下，存在有界正特征函数意味着 $\mathcal{L}$ 是临界的，这可由 [20, 定理 A.9] 得出，也可由 [12, 定理 5], [25], 得出，甚至可由上文的命题 2.3 得出。反过来，临界性意味着 $\mathcal{L} = 0$ 的正解空间维数为 1。因此， $\mathcal{L}$ 不具有几乎周期的正特征函数，因为唯一的候选函数 φ衰减至 0，因而不可能是几乎周期的。

注意，与此相反， L 是临界的，其唯一正特征函数是常数 1，它是几乎周期的。 □

5 次临界情形

本节旨在构造反例 2。我们再次从上一节中重新得到的函数 b（属于 [27],）出发。定义

$$Lu := u'' + 2b(x)u', \qquad x \in \mathbb{R}.$$

与之前类似，我们通过考虑以下形式，将 L 转化为自伴算子

$$v(x) = e^{\int_0^x b(t)dt}u(x),$$

即 $\mathcal{L}v = e^{\int_0^x b\ _{(t)}\ ^{dt}} Lu$ ，其中

$$\mathcal{L}v := v'' - (b' + b^2)v.$$

正如第4节所指出的，这是一个几乎周期算子。我们首先研究 $\mathcal{L}$ 的广义主特征值和临界性特征。

命题5.1。 算子 $\mathcal{L}$ 是次临界的，并满足 $\lambda_1 = 0$。

证明。 设 L、 $\mathcal{L}$ 为上述算子。 $Lu = 0$ 的解满足

$$u'(x) = Ce^{-2\int_0^x b(t)dt},$$

对于某个 $C \in \mathbb{R}$，因此根据（2）它们有界。然后，令 u 如上并满足 $C \neq 0$，则函数

$$u_1 \equiv 1, \qquad u_2 \equiv u + \|u\|_\infty$$

是 $L=0$ 的两个线性无关的正解。这意味着 L 是次临界的，并且具有 $\lambda_1(-L) \geq 0$ （此处及下文中，我们特别强调主特征值所对应的算子）。考察函数 $e^{\int_0^x b\ (t)\ dt} u_{1,\ 2}(x)$，可以推断出 $\mathcal{L}$ 也是次临界的，且 $\lambda_1(-\mathcal{L}) \geq 0$。

剩下要证明的是 $\lambda_1(-\mathcal{L}) = 0$，也就是说， $\lambda_1(-\mathcal{L}) \leq 0$。我们将用到第3节中定义的主特征值 $\lambda_1'(-\mathcal{L})$。根据 [9,定理1.7(i)] ，我们确实知道 $\lambda_1(-\mathcal{L}) = \lambda_1'(-\mathcal{L})$。注意， $\mathcal{L}=0$ 的解增长如$e^{\int_0^x b}$，这是无界的，因此不能用于定义 $\lambda_1'(-\mathcal{L})$。不过，我们将证明，对于任意 $\lambda>0$，$(\mathcal{L}+\lambda)v=0$ 都有一个正的有界下解。固定 $\lambda>0$。定义如下函数:

$$\psi(x) := e^{\int_0^x [b(t)-\gamma(t)]dt},$$

其中 $\gamma \in C^1(\mathbb{R})$将在稍后选定。我们计算得

$$\mathcal{L}\psi = [(b-\gamma)' + (b-\gamma)^2]\psi - (b' + b^2)\psi = (\gamma^2 - 2b\gamma - \gamma')\psi.$$

我们选择 γ 足够小（按 C^1 范数），使得 $\gamma^2 - 2b\gamma - \gamma' \geq -\lambda$ 属于 $\mathbb{R}$，并且 $\gamma(-\infty) < 0 < \gamma(+\infty)$。由此可得 $-\mathcal{L}\psi \leq \lambda\psi$。为了说明 ψ 有界，我们利用 b 具有零平均值这一事实。回想一下，对于一个几乎周期函数 f，其平均值

$$\langle f \rangle := \lim_{h\to\pm\infty} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$$

相对于 x_0 一致存在（且独立于 x_0）。由于它是 b奇函数且几乎周期，因此其平均值为零，因为对于所有 $h \in \mathbb{R}$， $\int_{-h}^{h} b = 0$。因此，

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} \int_0^x (b-\gamma) = -\gamma(\pm\infty),$$

这立即意味着，当 $x \to \pm\infty$ 时， $\psi \to 0$。最终，根据定义，我们推得 $\lambda_1'(-\mathcal{L}) \leq \lambda$，因此由 $\lambda>0$ 的任意性可得 $\lambda_1'(-\mathcal{L}) \leq 0$。我们已证明 $\lambda_1(-\mathcal{L}) = \lambda_1'(-\mathcal{L}) \leq 0$，如所求。

□

剩下需要证明的是，次临界算子 $\mathcal{L}$ 存在一个临界极限算子。根据命题 2.3，只需找出一个极限算子，使其存在一个特征值为 0 的正有界特征函数（另见 [21, 命题 1.7]以及 [20] 中对临界算子的刻画）。现在，我们利用 Harnack不等式，通过放宽对特征函数有界性的要求，进一步改进这些结果。

引理5.2。 设 $\mathcal{L}$ 是作用于 $\mathbb{R}$ 上的自伴算子，并假设存在 $\lambda \in \mathbb{R}$和一个满足 $-\mathcal{L}\varphi = \lambda\varphi$ 且

$$\liminf_{x\to-\infty} \varphi(x) < +\infty \qquad and \qquad \liminf_{x\to+\infty} \varphi(x) < +\infty.$$

那么必然有 $\lambda = \lambda_1$，此外 $\mathcal{L}+\lambda$ 是临界的。

证明。令 ψ 为 $-\mathcal{L}$的另一个特征函数，它不恒等于 φ，并且与 φ对应于相同的特征值 λ。不妨设$\psi(0) \neq 0$。令 φ，ψ归一化，使得 $\varphi(0) = \psi(0) = 1$。利用 φ 和 ψ 都满足的方程（$\mathcal{L}+\lambda$）$= 0$，我们得到，对所有 $x \in \mathbb{R}$，

$$\int_0^x (A\varphi')'\psi = \int_0^x (A\psi')'\varphi,$$

由此可推得

$$A(x)(\varphi'\psi - \psi'\varphi)(x) = A(0)(\varphi' - \psi')(0),$$

或者等价地

$$(\psi/\varphi)'(x) = \frac{A(0)(\psi' - \varphi')(0)}{A(x)\varphi^2(x)}. \tag{3}$$

由于 $\psi \not\equiv \varphi$，我们知道 $(\psi' - \varphi')(0) \neq 0$。将函数 φ, ψ 及 $\mathcal{L}$ 的系数反射后，不妨假设 $(\psi' - \varphi')(0) > 0$（注意，反射不会影响关于 φ 的假设）。于是由 (3) 可推得，ψ/φ 在 $\mathbb{R}$ 上递增。接下来，根据假设，存在一个序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$，属于 $\mathbb{R}$，使得

$$x_n \to -\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) \in [0, +\infty).$$

我们可以假设 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足（取子序列后）$x_{n+1} \leq x_n - 1$，其中 $n \in \mathbb{N}$。现在使用 Harnack不等式。由此可知，存在一个正的常数 C，使得

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x \in [x_n - 1, x_n + 1], \quad \varphi(x) \leq C.$$

结合 (3)，这一事实给出

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x \in [x_n - 1, x_n + 1], \quad (\psi/\varphi)'(x) \geq \frac{A(0)(\psi' - \varphi')(0)}{C^2 \sup A},$$

由此可推得

$$\begin{aligned}(\psi/\varphi)(x_{n+1}) \leq (\psi/\varphi)(x_n - 1) &\leq (\psi/\varphi)(x_n) - \frac{A(0)(\psi' - \varphi')(0)}{C^2 \sup A} \\ &\leq \cdots \leq (\psi/\varphi)(x_1) - n\frac{A(0)(\psi' - \varphi')(0)}{C^2 \sup A}.\end{aligned}$$

最终我们得到，当 $n \to \infty$ 时，$(\psi/\varphi)(x_n) \to -\infty$ $n \to \infty$。这表明，φ 是 $-\mathcal{L}$ 对应特征值 λ的唯一正特征函数（相差一个标量倍数）。根据 [26, 命题5.1.3], ，这意味着 $\mathcal{L}+\lambda$ 是临界的，因此尤其有$\lambda = \lambda_1$。 □

为完成反例 2 的证明，还需要找到一个与 $\mathcal{L}$ 相关联、满足引理5.2 假设的极限算子。我们声称，函数 b（在第4节中定义）满足以下条件：

$$\forall k, n \in \mathbb{N},\ k \leq n, \qquad \int_{3^n - 3^k}^{3^n} b(x)dx \geq 0. \tag{4}$$

我们先证明，当 $n = k$ 时，式 (4) 成立，即 $\int_0^{3^n} b(x)dx \geq 0$。该不等式对 $n = 0$ 成立。假设它对某个 $n \in \mathbb{N}$ 成立，利用 (1) 可得

$$\begin{aligned}\int_0^{3^{n+1}} b(x)dx &= \int_0^{3^n} b(x)dx + \int_{3^n}^{3^{n+1}} [\sigma(x - 2 \cdot 3^n) + (n+1)^{-2}] \sin^4(\pi x)dx \\ &\geq \int_{-3^n}^{3^n} b(x)dx,\end{aligned}$$

而后一积分等于 0，因为 b 是奇函数。因此 (4) 对 $n = k$ 成立。现在我们固定$k \in \mathbb{R}$，并对 n 进行迭代。利用 (1)，我们得到

$$\int_{3^{n+1}-3^k}^{3^{n+1}} b(x)dx = \int_{3^{n+1}-3^k}^{3^{n+1}} [\sigma(x - 2 \cdot 3^n) + (n+1)^{-2}] \sin^4(\pi x)dx \geq \int_{3^n-3^k}^{3^n} b(x)dx,$$

因此，若 (4) 对某个 n 成立，则它对 $n+1$ 也成立。这就证明了 (4).

接下来，再次利用 (1)，我们对 $k \leq n$ 推出，

$$\begin{aligned}\int_{3^n}^{3^n+3^k} b(x)dx &= \int_{3^n}^{3^n+3^k} [\sigma(x - 2 \cdot 3^n) + (n+1)^{-2}] \sin^4(\pi x)dx \\ &= \int_{-3^n}^{-3^n+3^k} b(x)dx + \frac{C3^k}{(n+1)^2},\end{aligned}$$

其中 $C = \int_0^1 \sin^4(\pi x)dx$。然后，由于 b 是奇函数，我们得到

$$\int_{3^n}^{3^n+3^k} b(x)dx = \int_{3^n}^{3^n-3^k} b(y)dy + \frac{C3^k}{(n+1)^2},$$

因此，由 (4)，我们最终得到

$$\forall k, n \in \mathbb{N},\ k \leq n, \quad \int_{3^n}^{3^n+3^k} b(x)dx \leq \frac{C3^k}{(n+1)^2}. \tag{5}$$

我们考虑由下式定义的 b 的平移序列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$b_n(x) := b(x + 3^n).$$

根据几乎周期性，$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和$(b'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 一致收敛（取子序列后）到某个函数 b_∞ 及其导数 b'_∞。由（4）可得

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_{-3^k}^{0} b_\infty(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-3^k}^{0} b_n(x)dx \geq 0,$$

而由（5）可知，

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_{0}^{3^k} b_\infty(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{0}^{3^k} b_n(x)dx \leq \lim_{n\to\infty} \frac{C3^k}{(n+1)^2} = 0.$$

最后，我们考虑极限算子

$$\mathcal{L}^* u := u'' - (b'_\infty + b_\infty^2)u.$$

该函数

$$\varphi(x) := e^{\int_0^x b_\infty(t)dt}$$

满足 $\mathcal{L}^*\varphi = 0$ 此外，

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \varphi(\pm 3^k) = e^{\int_0^{\pm 3^k} b_\infty(t)dt} \leq 1.$$

因此，我们可以应用引理5.2，并推断出 $\mathcal{L}^*$ 是临界的。

参考文献

[1] S. Agmon. 黎曼流形上二阶椭圆方程解的正性与衰减. 收录于泛函分析方法与椭圆方程理论（那不勒斯，*1982*），第 19–52 页。Liguori，那不勒斯，1983.[2] L. Amerio 和 G. Prouse. 几乎周期函数与函数方程。Van Nostrand Reinhold Co.，纽约，1971.[3] M. T. Barlow. 关于散度型算子的刘维尔性质. 加拿大数学杂志，50(3):487–496，1998.[4] H. Berestycki、L. Caffarelli 和 L. Nirenberg. 无界区域中椭圆方程的进一步定性性质. 比萨高等师范学院科学类年刊（第 *4* 辑），25(1-2):69–94 (1998)，1997。谨以此文献献给 Ennio De Giorgi.[5] H. Berestycki、F. Hamel 和 L. Roques. 周期性破碎环境模型分析：I. 物种持久性. 数学生物学杂志，51(1):75–113，2005.[6] H. Berestycki、F. Hamel 和 L. Rossi. 无界区域中半线性椭圆方程的刘维尔型结果. 纯粹与应用数学年刊，186(4):469–507，2007.[7] H. Berestycki 和 G. Nadin. 一般异质 Fisher-KPP 型方程的渐近扩散. 美国数学会回忆录，280(1381):vi+100，2022.[8] H. Berestycki、L. Nirenberg 和 S. R. S. Varadhan. 一般区域中二阶椭圆算子的主特征值与最大值原理. 纯粹与应用数学通讯，47(1):47–92，1994.[9] H. Berestycki 和 L. Rossi. 无界区域中椭圆算子主特征值的推广及其性质. 纯粹与应用数学通讯，68(6):1014–1065，2015.[10]K. Bjerkl¨ov. 连续准周期 Schr¨odinger 方程的正 Lyapunov 指数. 数学物理杂志，47(2):022702，4，2006。

[11] J. Bourgain 和 C. E. Kenig. 高维连续 Anderson-Bernoulli 模型中的局域化. 数学发明，161(2):389–426，2005.[12] D. Damanik、R. Killip 和 B. Simon. 少束缚态的 Schr¨odinger 算子. 《数学物理通讯》，258(3):741–750，2005.[13] U. Das 和 Y. Pinchover. 通过刘维尔比较原理与临界性理论研究兰迪斯猜想. 预印本，*arXiv: 2405.11695*.[14] A. M. Fink. 几乎周期微分方程。施普林格出版社，柏林，1974。数学讲义，第 377 卷。[15] N. Ghoussoub 和 C. Gui. 关于 De Giorgi 猜想及若干相关问题. 数学年刊，311(3):481–491，1998.[16] M. Goldstein 和 W. Schlag. 准周期 Schr¨odinger 方程积分态密度的 H¨older 连续性及次调和函数平移的平均. 数学年刊（第 *2* 辑），154(1):155–203，2001.[17] S. M. Kozlov. 准周期算子的基态. 苏联科学院院刊，271(3):532–536，1983.[18] P.-L. Lions 和 P. E. Souganidis. 凸非线性项的哈密顿-雅可比方程与“黏性”哈密顿-雅可比方程的随机均匀化——再探.数学科学通讯，8(2):627–637，2010.[19] P. Maillard 和 O. Tough. 分枝马尔可夫过程的广义主特征值与全局存活. 预印本，*arXiv: 2505.12127*.[20] M. Murata. $(-\Delta+V)u=0$ 在$\mathbf{R}^n$中的正解结构. 杜克数学杂志，53(4):869–943，1986.[21] G. Nadin 和 L. Rossi. 一维几乎周期 Fisher-KPP 方程的广义过渡前沿. 《纯粹与应用数学档案》，223(3):1239–1267，2017.[22] S. Nordmann. 一般边界条件下无界区域的最大值原理与主特征值. 预印本，*arXiv: 2102.07558*.[23] R. D. Nussbaum 和 Y. Pinchover. 二阶椭圆算子广义主特征值的变分原理及其若干应用. 《分析数学杂志》，59:161–177，1992。纪念 Shmuel Agmon 七十寿辰专辑。[24] Y. Pinchover. 关于二阶椭圆方程的正解、稳定性结果与分类. 杜克数学杂志，57(3):955–980，1988.[25] Y. Pinchover. Schr¨odinger 算子的刘维尔型定理. 《数学物理通讯》，272(1):75–84，2007。

[26] R. G. Pinsky. 正调和函数与扩散，剑桥高等数学研究丛书第45卷。剑桥大学出版社，剑桥，1995年。[27] L. Rossi. 周期与几乎周期线性算子的刘维尔型结果。《庞加莱研究所年报 ´非线性分析 ´》，26(6):2481–2502，2009年。[28] B. Simon. 布朗运动、 L^p 施¨罗丁格算子的性质及束缚态局域化。《函数分析杂志》，35(2):215–229，1980年。[29] E. Sorets 和 T. Spencer. 准周期势下施¨罗丁格算子的正 Lyapunov 指数。《数学物理通讯》，142(3):543–566，1991年。