arXiv:2602.03653v1 [math.DG] 3 Feb 2026

复非 K¨ahler 流形的上同调性质与厄米度量*

Daniele Angella† Nicoletta Tardini‡

2026年2月4日

摘要

我们就复非K¨ahler流形的上同调不变量与度量性质方面的若干问题作一局部论述。在第1节中，我们回顾复几何中的一些基本概念与工具。在第2节中，我们研究复流形的上同调性质与拓扑方面。我们介绍各种复上同调及其性质，尤其关注微分形式双复形的结构。我们还讨论

*本文扩展了作者在2025年8月11日至15日于布达佩斯 Rényi 研究所举办的暑期学校“奇异 K¨ahler 度量与厄米几何”上所讲授的课程“复非 K¨ahler 流形的上同调性质与厄米度量”。本文的构思也源于首届 Critical Math“复几何中的上同调与同伦方法”，该活动于2025年8月18日至22日在黑森林举办。作者衷心感谢两场活动的组织者和参与者给予的热情邀请，并感谢他们营造了积极、鼓舞人心的氛围。我们尤其感谢 Adriano To massini、Maurizio Parton、Victor Vuletescu、Simone Calamai、Cristiano Spotti、Francesco Pediconi 和 Valentino Tosatti；本文讨论的许多成果都是与他们合作完成的。我们也感谢所有过去和未来的合作者。作者的研究部分得到了 PRIN2022 项目“实与复流形：几何与全纯动力系统”（代码 2022AP8HZ9）以及 INdAM 下属 GNSAGA 的资助。

†数学与信息学系，佛罗伦萨大学`，Morgagni 大道 67/A，50134 佛罗伦萨，意大利。邮箱：daniele.angella (at) unifi.it

‡数学、物理与信息科学系，帕尔马大学`，Parco Area delle Scienze 53/A，43124 帕尔马，意大利。邮箱：nicoletta.tardini (at)unipr.it

$\partial\bar{\partial}$-引理，并给出用Bott–Chern上同调表述的数值刻画。在第3节中，我们引入厄米度量，并提出研究典范度量的问题。特别地，我们回顾关于赋予局部共形K¨ahler度量的复三维流形之分类的部分结果。在第4节中，我们关注与厄米流形上陈联络的几何相关的分析问题，例如常陈标量曲率度量的存在性。在第5节中，我们介绍厄米度量的几何流，并特别关注陈–里奇流在井上曲面上的行为。在每一节末尾，我们汇集一些习题，用以补充讲课中略去的细节，或将讨论延伸至其他研究方向。最后的第6 节汇集一份绝非全面的清单，列出复非K¨ahler几何中的若干公开问题；作者承认其视角有所偏颇，但仍认为这些问题特别有趣。

目录

1 全纯景观 4

1.1 全纯流形与全纯映射 . . . . . 41.2 全纯向量丛与线丛 .51.3 殆复结构 .71.4 复代数几何与K¨ahler几何 81.5 习题.9

2 全纯流形的上同调不变量 11

2.1 微分形式的二重复形 .112.2 复上同调 .142.3 Fr¨olicher 谱序列 .152.4 $\partial\bar{\partial}$-引理性质与形式性.152.5 $\partial\bar{\partial}$-引理性质的数值刻画. . . . . 182.6 –$\partial\bar{\partial}$-引理性质在几何变换下的表现 . . . . . 222.7 幂零流形和可解流形的复上同调计算 .232.8 习题.28

3 规范厄米度量与联络 32
3.1 厄米几何.32 3.2 黎曼几何简述 .34 3.3 厄米联络与曲率.36 3.4 特殊 Hermitian 度量 .38 3.5 Gauduchon度量的存在性 .39 3.6 LCK三维流形的分类 .42 3.7 习题.47

4 具有常陈标量曲率的厄米度量 51
4.1 陈联络的曲率 .51 4.2 Chern-Yamabe 问题 .53 4.3 刘维尔型方程 . 54 4.4 预期陈标量曲率为零的情形 . . . . . 56 4.5 预期陈标量曲率为负的情形 . . . . . 56 4.6 预期陈标量曲率为正的情形 .59 4.7 矩映射图景 .59 4.8 习题 .61

5 非 K¨ahler 几何中的几何流 64
5.1 厄米度量的几何流 .64 5.2 陈–里奇流简介 .64 5.3 非 K¨ahler 卡拉比－丘流形上的陈–里奇流. . . . . 66 5.4 紧复曲面上的陈–里奇流 . . . . . 67 5.5 井上曲面上的陈 – 里奇流 .70 5.6 习题 .76

6 复非 K¨ahler 几何中的开放问题 80
6.1 上同调类的几何代表元 . . . . . 80 6.2 全纯几何的拓扑障碍 . . . . . 81 6.3 近复上同调 .84 6.4 厄米几何的拓扑障碍 . . . . . 85 6.5 典范厄米度量 .87 6.6 复流形与复曲面的分类 87

1 全纯景观

在这篇预备讲座中，我们将介绍后续章节研究全纯流形的几何与拓扑，以及其神秘“边界区域”的分类所需的基本工具[Ste25a]。关于复几何的优秀著作有很多，包括[Dem12b、Voi02b、Voi07a，Voi07b、GH94、MK06、Zhe00、Lee24], 此外还有一些更专门的参考文献，例如 [Dem12a、Kod05、MM07、BHPVdV04、BDIP02、Pop23]。

1.1 全纯流形与全纯映射

一个全纯流形 X^n ，其复维数为 n ，是豪斯多夫且第二可数的拓扑空间，并且每个点都有一个邻域 U 同胚于复数域^{n}的某个开子集。这样的同胚称为局部全纯坐标图，并记为

$$\varphi_U \colon U \xrightarrow{\sim} \varphi_U(U) \subseteq \mathbb{C}^n.$$

在定义中，我们还要求重叠坐标图之间的过渡映射

$$\varphi_V \circ \varphi_U^{-1}\big|_{\varphi_U(U\cap V)} \colon \varphi_U(U \cap V) \to \varphi_V(U \cap V),$$

是双全纯的，即它们是具有全纯逆映射的全纯双射。

我们简要回顾：复欧几里得空间的开子集之间的函数称为全纯 ，如果它属于 $\mathcal{C}^1$ 类，且其微分在每一点都是C-线性的。多复变量全纯函数理论与单变量理论有许多共同特征，尤其是从解析观点来看。然而，它也呈现出显著差异，特别是在几何方面。

Following [dB94], ，我们更倾向于使用“全纯流形”这一术语，而非更常见的“复流形”，因为这类空间自然是全纯映射范畴中的对象。全纯流形之间的全纯映射 $f\colon X^n \to Y^m$ 是一个局部由全纯函数给出的函数。更准确地说，对于任意点 $x \in X$、 X的任意局部全纯坐标图 (U, φ_U)（其中 $x \in U$），以及 Y 的任意局部全纯坐标图 (V, ψ_V)（其中 $f(x) \in V$），复合映射 $\psi_V \circ f \circ \varphi_U^{-1}\colon \varphi_U(U \cap f^{-1}(V)) \to \psi_V(V)$ 是从欧几里得空间 $\mathbb{C}^n$ 到 $\mathbb{C}^m$的开子集之间的全纯映射。

1.2 全纯向量丛与线丛

欧几里得空间之间的全纯函数（无论涉及一个还是多个复变量）的一个关键性质是，齐次柯西-黎曼方程组是椭圆的。因此，最大值原理成立。特别地，由此可知，紧致全纯流形 X 上的全纯函数空间 $f\colon X \to \mathbb{C}$ 仅由常函数构成。正因如此，人们常通过全纯线丛的截面来研究紧致全纯流形的几何。

在 X 上秩为 k 的**全纯向量丛** 由全纯满射 $\pi\colon E \to X$给出，其中每条纤维 $E_x := \pi^{-1}(x)$是一个 k维复向量空间。此外，该丛必须是局部平凡的，即对每一点 $x \in X$，存在开邻域 $U \ni x$以及平凡化 $\psi_U\colon \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{C}^k$，使得其限制到每条纤维上给出线性同构 $\psi_U|_{E_x}\colon E_x \xrightarrow{\sim} \{x\} \times \mathbb{C}^k$。在两个平凡化的重叠区域上，相应的**转移函数**

$$\psi_V \circ \psi_U^{-1}|_{\psi_U(U\cap V)}\colon (U \cap V) \times \mathbb{C}^k \to (U \cap V) \times \mathbb{C}^k$$

具有形式$(x, v) \mapsto (x, g(x)(v))$，其中 $g(x) \in$ 一般线性群$(\mathbb{C}^k)$关于 x是全纯的。全纯向量丛之间存在自然的态射概念：它是总空间之间的全纯映射，与投影交换，并且限制为纤维之间的线性映射。若一个丛与乘积丛 $X \times \mathbb{C}^k$ 同构，则称其为**平凡** 的。 E的**全纯截面** 空间，即满足 $\pi \circ s = \mathrm{id}_X$的全纯映射 $s\colon X \to E$，记为 $H^0(X, E)$。

特别地，当 $k = 1$ 时，该丛称为**全纯线丛**。在 X 上的全纯线丛按同构分类，在张量积运算下构成一个阿贝尔群，称为**皮卡群**，记作 $\mathrm{Pic}(X)$。下面简要回顾全纯线丛的定义。存在 X 的一个开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$，以及平凡化 $\psi_i\colon \pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\sim} U_i \times \mathbb{C}$，使得转移函数 $\psi_j \circ \psi_i^{-1}\big|_{\psi_i(U_i\cap U_j)}\colon (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C} \to (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}$ 具有如下形式

$$(x, v) \mapsto (x, g_{ij}(x) \cdot v),$$

其中每个 $g_{ij}\colon U_i \cap U_j \to \mathbb{C}^*$ 都是全纯函数。这组转移函数 $\{g_{ij}\}$ 满足**余循环条件**：

$$g_{ii} = 1 \quad \text{on } U_i, \qquad \text{and} \qquad g_{ki} \cdot g_{jk} \cdot g_{ij} = 1 \quad \text{on } U_i \cap U_j \cap U_k.$$

当全纯线丛是平凡的时，存在全纯函数$\{g_i\colon U_i \to \mathbf{C}^*\}_i$使得

$$g_{ij} = g_j \cdot g_i^{-1} \quad \text{on } U_i \cap U_j.$$

反过来，给定 X 的一个开覆盖 $\{U_i\}_i$，以及一组满足余循环条件的处处不为零的全纯函数 $\{g_{ij}\colon U_i \cap U_j \to \mathbf{C}^*\}_{i,\,j}$s，可以在 X 上构造一个全纯线丛。当且仅当存在上述函数 $\{g_i\}_i$ 使得 $g_{ij} = g_j \cdot g_i^{-1}$ 时，这样的线丛是平凡的。

这一对应关系可以概括为：皮卡群同构于以处处不为零的全纯函数（即*i.e.*，处处不为零）芽层为系数的第一$\check{}$切赫上同调群 $\check{}H^1(X,\ \mathcal{O}_X^*)$；而后者又自然同构于层上同调群 $H^1(X,\ \mathcal{O}_X^*)$。考虑 X 上的层指数正合列，

$$0 \to \underline{\mathbb{Z}}_X \xrightarrow{2\pi\sqrt{-1}} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \to 0,$$

并转到相应的上同调长正合列，我们得到一个映射

$$c_1\colon \operatorname{Pic}(X) \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \to H^2(X, \mathbb{Z}),$$

这称为第一陈类。

在复几何的分类结果中起核心作用，参见例如 [BHPVdV04，Uen75]，是典范丛 K_X，它定义为全纯余切丛的行列式，其张量幂称为多典范丛。一个基本不变量是*Kodaira*维数，其定义为

$$\operatorname{Kod}(X) := \limsup_{\ell \to \infty} \frac{\log \dim H^0(X, K_X^{\otimes \ell})}{\log \ell} \in \{-\infty, 0, 1, \ldots, \dim X\}.$$

得益于 Serre 和 Siegel 的工作，这个不变量也可以解释为多典范映射在其基点集之外的最大秩。

在复维数 1 的情形下，也就是对于黎曼曲面，一致化定理给出了完整的分类：每个复曲线都双全纯同构于三个模型曲面之一的商空间：开单位圆盘、复平面或黎曼球面。在复维数 2 的情形下，Enriques–Kodaira–Siu 分类已得到充分理解，所谓的 VII 类除外：综合概述请参见 [BHPVdV04]，最新进展请参见 [Tel19]。在更高维数中，我们仅提及极小模型纲领；它在代数簇的双有理分类中发挥着中心作用，此外还有其解析对应理论——里奇流 [ST17]。

1.3 殆复结构

任何复维数为 n 的全纯流形 X，特别也是实维数为 $2n$的可微流形。事实上，给定一个局部全纯坐标图 $\varphi\colon U \xrightarrow{\sim} \varphi(U) \subseteq$复数域^n，其坐标为 $\varphi =(z^1, \ldots\ldots, z^n)$，可以将每个复坐标写成 $z^i = x^i + \sqrt{-1}y^i$，其中 x^i，y^i 是 U 上的实值函数。于是，元组 $(U, (x^1, y^1, \ldots\ldots, x^n, y^n))$ 定义了 X 的一个局部可微坐标图。特别地，$\{\partial/\partial x^i, \partial/\partial y^i\}_{i=1}^n$ 构成实切丛 TX 的一个局部标架。由于任何复线性映射视为实线性映射时，其行列式均为非负数，因此 X 的底层可微流形是可定向的。

我们有一个定义良好的切丛 TX上的自同态 J，其局部表达式为

$$J\partial/\partial x^i = \partial/\partial y^i, \qquad J\partial/\partial y^i = -\partial/\partial x^i.$$

该自同态满足 $J^2 = -\mathrm{id}$，并编码了切空间上随点平滑变化的逐点线性复结构。满足 $J^2 = -\mathrm{id}$的自同态 $J \in \mathrm{End}(TX)$称为近复结构。

反过来，可微流形X 上的近复结构 J 可由全纯坐标局部诱导，当且仅当由下式定义的$\sqrt{-1}$-特征子空间丛

$$T_x^{1,0}X := \{v - \sqrt{-1}Jv : v \in T_xX\} \subset T_xX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C},$$

是对合的。这就是著名的 Newlander–Nirenberg 定理的内容 [NN57]。等价地，对于任意向量场 V和 W，当且仅当 $[V^{1,0}, W^{1,0}]^{0,1} = 0$时，该条件成立，其中 $V = V^{1,0} + V^{0,1}$ 表示相对于分解 $TX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T^{1,0}X \oplus T^{0,1}X$的分解，其中$\overline{T^{0,1}X} = T^{1,0}X$。这也等价于所谓的尼延胡斯张量 $N_J(V, W)$ $= [V, W] + J[JV, W] + J[V, JW] - [JV, JW]$为零。

在大于四的偶数实维数中，尚无已知的可定向的可微流形例子容许殆复结构却不容许任何可积复结构。例如，六维球面 S^6 是否容许可积复结构，仍是一个未决问题，参见 [ABG+18]及其中的参考文献。另见 [AM19]中Sullivan关于紧致复 n维流形的贝蒂数最小和的一个猜想，其中 $n \geq 3$ 为四。关于该问题的进一步讨论将汇集于第6节。

1.4 复代数几何与 K¨ahler 几何

紧致全纯流形的首批例子是复环面复数域$^n/\mathbb{Z}^n$ 以及复射影空间复数域P^n = 复数域$^{n+1}\setminus 0/\mathbb{C}\setminus 0$。另一种基本构造如下。考虑一个含$n+1$ 个变量且无重根的齐次多项式。它在复数域P^n 中的零点集定义了一个复维数为 $n-1$的紧致全纯流形。更一般地，有限个齐次多项式的零点集定义一个紧致全纯流形，只要这些多项式充分一般以保证光滑性。此类流形的许多几何性质的确编码于由其定义多项式所生成的理想之中（参见例如 [H¨ub92]），这解释了代数射影流形这一名称的由来。例如，光滑超曲面 X （次数为 d，位于复数域P^n 中）的典范丛同构于 $\mathcal{O}_X(-n-1+d)$。特别地，对于 $d=n+1$，超曲面X 是卡拉比－丘流形。

上文讨论的例子 X 有一个共同性质：存在一个厄米度量 g，它与复数域 C^{n}上的标准厄米内积在二阶接触。具体而言，这意味着对于每个点 $x\in X$，都存在邻域 U 上的局部全纯坐标 $(z^1,\dots,z^n)$，使得 $g=\sum_{i,j=1}^n$ $(\delta_{ij}+o(z))\,dz^i\otimes d\bar{z}^j$ 在 x处成立。这类度量称为 K¨ahler 度量，参见 [SvD30、K¨ah32], 以来的文献 [Wei58]。等价地，厄米度量是 K¨ahler 度量，当且仅当它所关联的 2-形式 ω 是辛形式，也就是说$d\omega=0$。事实上，在带有齐次坐标 $[z^0:z^1:\cdots:z^n]$的复数域 CP^n 上，福贝尼乌斯－施图迪度量 [Fub04、Stu05], 定义为 $\omega_{FS}=\frac{1}{4\pi}dd^c\log(\sum_i|z^i|^2)$，是一个 K¨ahler 度量。该度量自然地在任意子流形上诱导出 K¨ahler 度量。更准确地说，K¨ahler 几何是代数几何的一种超越类比 [Dem12a] 。众所周知[Kod54] ，紧致 K¨ahler 流形是代数射影流形，当且仅当其关联的 2-形式 ω 定义了一个有理上同调类 $[\omega]\in H^2(X,\mathbb{Q})$。K¨ahler 几何处于复几何、黎曼几何和辛几何的交汇处。这些视角各自提供了特定的工具，而它们之间的兼容性使我们能够轻松地在这些观点之间切换。这种相互作用使 K¨ahler 几何几乎与代数几何本身一样强大。

由于 K¨ähler 几何“完美融合了辛与全纯两个世界”，因此，为了更好地理解理论中不同组成部分的作用，进行“某种对辛与全纯贡献的化学分析”是有意义的 [...] [DBT13] 对于

为此，我们有兴趣研究广义的复数非 *Kähler* 流形。

1.5 习题

习题 1. 证明每个几乎复流形都是可定向的。

习题 2. 证明复射影空间$\mathbb{CP}^n$ 是一个复流形。

习题 3. 考虑球面 $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$。令 $\wedge$ 表示$\mathbb{R}^3$中的向量叉积。回忆一下，将$\mathbb{R}^3$与纯虚四元数空间$\mathrm{Im}(H)$等同后，叉积可表示为 $x \wedge y = \mathrm{Im}(x \cdot y)$，其中乘积取自四元数代数 H。注意，点 $p \in S^2$ 处的切空间由 $T_pS^2 = \{p\}^\perp$ 给出。证明自同态

$$J_p(v) = v \wedge p$$

对于 $v \in T_pS^2$，定义了 S^2上的一个近复结构，并且它是可积的。最后，证明 S^2 与$\mathbb{CP}^1$双全纯。

习题 4 ([Kir47])。考虑球面 $S^6 \subseteq \mathbb{R}^7 = \mathrm{Im}\, O$，其中 O 表示八元数代数。定义一个自同态

$$J_p(v) := \mathrm{Im}(v \cdot p),$$

对于 $v \in T_pS^6$。证明 J_p 在 S^6上定义了一个近复结构。证明八元数不满足结合律意味着该近复结构是不可可积的。

注。根据 Borel 和 Serre 的定理 [BS53], 只有维数为 2 和 6 的球面存在殆复结构，例如参见[KP18]。关于六维球面上是否存在可积的 近复结构，这是一个称为*Hopf* 问题的未解问题，参见 [ABG+18]。作为练习的延伸，请注意，六维球面上不存在与圆度量相容的复结构 [Bla53, LeB87], 另见 [Fer18]。

□

练习 5. 在复数域$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$上，考虑由全纯收缩映射生成的整数群

$$(z_1, \ldots, z_n) \mapsto \left(\tfrac{1}{2}z_1, \ldots, \tfrac{1}{2}z_n\right).$$

证明商空间$(\text{复数域}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{Z}$是一个紧复流形，称为Hopf 流形，并且它与$S^1 \times S^{2n-1}$微分同胚。

2 全纯流形的上同调不变量

在本节中，我们介绍微分形式双复形及其相关上同调。关于复流形的双复形及其同伦与上同调不变量的近期深入进展，我们参阅 [Ste25a，Ste21b，Ste22，Ste25c]以及 Jonas Stelzig 的其他工作。我们特别关注被称为 $\partial\overline{\partial}$-引理性质，并依照 [AT13], 给出数值刻画，同时研究其在自然几何构造下的行为。李群的紧商空间提供了丰富的例子来源，可在其中进行显式计算。

2.1 微分形式双复形

近复结构 J 在可微流形 X上的作用诱导了复化切丛的分解,

$$TX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T^{1,0}X \oplus T^{0,1}X,$$

分别分解为 J 对应于特征值 $\sqrt{-1}$与 $-\sqrt{-1}$的特征子空间。该分解自然延拓至其对偶，即复化余切丛，并更一般地延拓至其所有外幂。更确切地说，微分形式丛分解为如下双分次分量

$$\wedge^k T^*X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} \wedge^{p,q}X, \text{ where } \wedge^{p,q} X := \wedge^p T^{*\,1,0}X \otimes \wedge^q T^{*\,0,1}X.$$

用 $\Omega^{p,q}(X)$ 表示相应的光滑截面空间。因此，作用于 (p,q)-微分形式上的外微分 $d\colon \Omega^{p,q}(X) \to \Omega^{p+q+1}(X)$ 可分解为若干分量。一般来说，外微分有四个分量:

$$d\colon \Omega^{p,q}(X) \to \Omega^{p+2,q-1}(X) \oplus \Omega^{p+1,q}(X) \oplus \Omega^{p,q+1}(X) \oplus \Omega^{p-1,q+2}(X).$$

J 的可积性等价于只有以下微分算子非零:

$$\partial\colon \Omega^{p,q}(X) \to \Omega^{p+1,q}(X), \qquad \overline{\partial}\colon \Omega^{p,q}(X) \to \Omega^{p,q+1}(X).$$

在这种情况下，方程 $d^2 = 0$ 保证

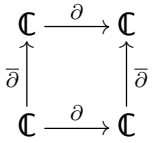
$$\partial^2 = \partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = \overline{\partial}^2 = 0.$$

换言之，$(\Omega^\bullet_{\bullet}(X), \partial, \overline{\partial})$具有双复形的结构。

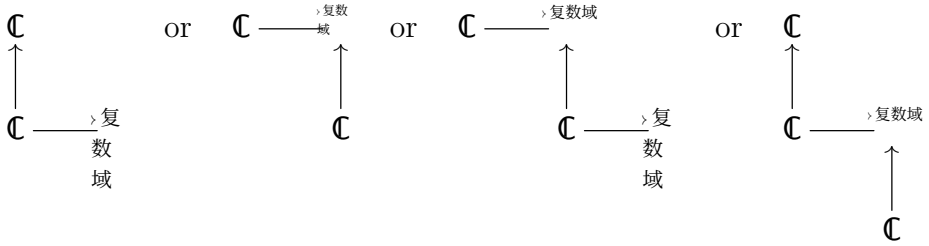
下面的定理描述了双复形由其基本组成部分构成的结构。

定理 1 ([Ste21b, KQ20])。 每个双复形都是不可分解双复形的直和，其中每个不可分解双复形都与一个方块或一个之字形同构。

在下列图表中，我们只画出非零态射，它们分别对应于 ∂ （水平箭头）和 $\overline{\partial}$ （垂直箭头）。方块 是由反交换同构构成的双复形：



其中所有映射在相差一个符号的意义下都是恒等映射。之字形 是一个至多集中于两条反对角线上的双复形，其中所有非零向量空间都与复数域同构，所有非零映射都是恒等映射，并且所有非零向量空间都由映射链连接：



之字形的总维数，即顶点的数量，称为其长度。长度为一的之字形也称为点，对应于所有微分均为零的一维双复形。

例如，基于 Ugarte 的研究结果 [Uga00] 关于¨六维球面上假设存在的复结构所对应的 Frölicher 谱序列，可以构造与这种结构相关的双复形 [Ang18], 如第2.1节所示。

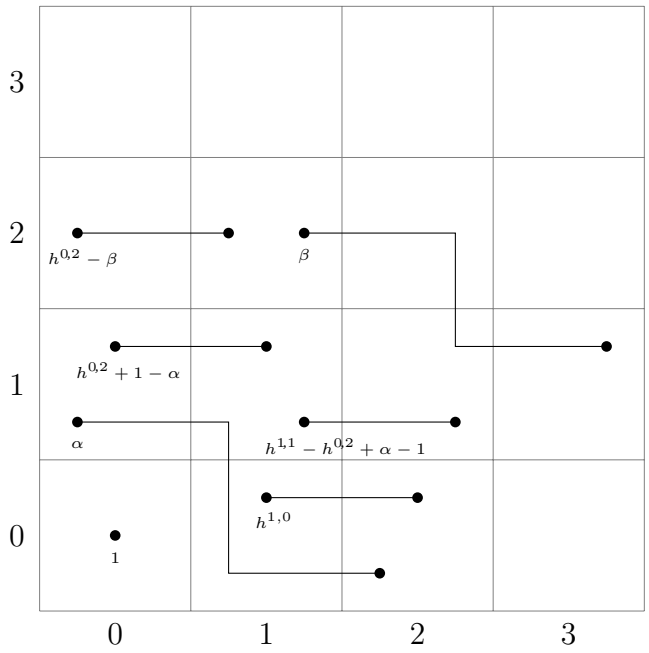


图1： 与六维球面上的假想复结构相关联的双复形的主要结构。标签表示相应对象的重数，且 α, $h^{0,2}$、 β, $h^{1,0}$, $h^{1,1}$ 表示尚未确定的非负整数。在此图表中，省略了无穷多个方块族以及由对称性产生的箭头（复共轭产生关于左下/右上对角线的对称性，而 Serre对偶产生关于右下/左上对角线的对称性）。

2.2 复上同调

与双复形相关联的，可以定义几种上同调。正如我们将在第3.1节看到的，在紧致全纯流形上，它们总是有限维的。

多尔博上同调

$$H_{\overline{\partial}}^{\bullet,\bullet}(X) = \frac{\ker \overline{\partial}}{\operatorname{im} \overline{\partial}}$$

是全纯函数芽层 $\mathcal{O}_X$ 的上同调；其共轭 $H^{\bullet}{}_{,\partial}{}^{\bullet}(X)$ 的定义类似。就不可分解分量而言，多尔博上同调的计算方法是从双复形图中移除所有垂直箭头及其端点，然后对剩余顶点计数。类似地，擦除水平箭头即可得到共轭多尔博上同调。特别要注意，方块对这两种上同调都没有贡献，而点总是有贡献。此外还要注意，奇数长度的之字形不会对多尔博上同调与德拉姆上同调之差产生贡献。

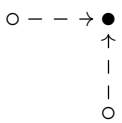
Bott-Chern上同调 [BC65] 定义为

$$H_{BC}^{\bullet,\bullet}(X) = \frac{\ker \partial \cap \ker \overline{\partial}}{\operatorname{im} \partial\overline{\partial}},$$

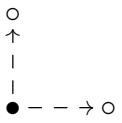
及其“对偶”，即*Aeppli*上同调 [Aep65],as

$$H_{A}^{\bullet,\bullet}(X) = \frac{\ker \partial\overline{\partial}}{\operatorname{im} \partial + \operatorname{im} \overline{\partial}}.$$

关于博特-陈上同调和Aeppli上同调的层超上同调解释，参见 [Dem12b, Sch07]。从双复形图中的不可分解元素来看，博特-陈上同调统计的是可能有入箭头的角元素，但方块除外：



对偶地，Aeppli上同调计算可能具有出射箭头的角元素，但方块除外：



2.3 Fr¨olicher谱序列

双复形的结构在复微分形式的全复形 $(\Omega^\bullet(X;\mathbb{C}),\ d)$ 上诱导出一个自然的滤过，定义如下：

$$F^p\Omega^k(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{\substack{r+s=k\\ r\geq p}} \Omega^{r,s}(X).$$

根据谱序列的一般理论，例如参见 [McC01], 可得*Fr¨olicher*谱序列 [Fr¨o55], ，即一列微分复形 $\{(E^{\bullet,\bullet}_r, d_r)\}_r$，其中 d_r： $E^{p,q}_r \to E^{p+r,q-r+1}$，使得

$$\begin{aligned} E_1^{\bullet,\bullet} &= H^{\bullet,\bullet}_{\bar\partial}(X), \quad \text{with } d_1 = [\partial],\\ E_{r+1}^{\bullet,\bullet} &= H^{\bullet,\bullet}(E_r, d_r),\\ E_r^{p,q} &\Rightarrow H^{p+q}_{dR}(X,\mathbb{C}). \end{aligned}$$

最后一个条件意味着 $d_r = 0$ 对所有充分大的 r成立，从而该序列在某个 $E^{\bullet,\bullet}_\infty$处稳定，并且

$$E^{p,q}_\infty \simeq \frac{F^pH^k_{dR}(X,\mathbb{C})}{F^{p+1}H^k_{dR}(X,\mathbb{C})},$$

其中 F 表示上同调中的诱导滤过。特别地，由于$H^k_{dR}(X,\text{复数域}) = \bigoplus_p {}^{F^pH^k_{dR}(X,\text{复数域})}\big/_{F^{p+1}H^k_{dR}(X,\text{复数域})}$，并且由于在谱序列的每一步均有$\dim\ E_{r+1} \leq \dim\ E_r$，我们得到*Fr¨olicher*不等式：

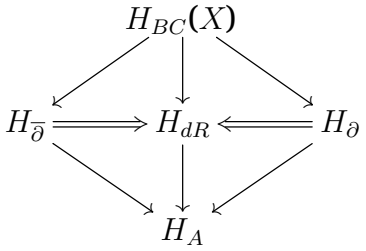
$$b_k \leq \sum_{p+q=k} h^{p,q},$$

其中 b_k 表示第 k个Betti数（即de Rham上同调群 $H^k_{dR}(X,\mathbb{R})$的维数），并且 $h^{p,q}$ 表示第(p,q)个霍奇数（即Dolbeault上同调群 $H^{p,q}_{\bar\partial}(X)$的维数）。最近，Bei与Piovani [BP25] 提出了Fr¨olicher不等式的一个新证明，该证明基于调和形式的运用。

2.4 $\partial\bar\partial$-引理性质与形式性

注意，恒等映射在上文所引入的各个上同调群之间诱导出自然态射。连同Fr¨olicher谱

序列由此得到如下图表：



若由恒等映射诱导的自然映射 $H_{BC}(X) \to H_A(X)$是单射，则称紧致全纯流形满足 $\partial\partial$-引理性质。由 [DGMS75引理5.15]可知，这等价于上述图表中的所有映射均为同构。换言之，每个d-闭的(p,q)-微分形式是 d-恰当的，当且仅当它是$\partial\partial$-恰当的。该条件还等价于：(i) Fr¨olicher谱序列在第一页退化，即 $E_\infty = E_1$，(ii) 以及滤过在de Rham上同调群 $H^k_{dR}(X,$复数域$)$上诱导出权为 k 的Hodge结构，即，

$$H^k_{dR}(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} \left(F^p H^k_{dR}(X,\mathbb{C}) \cap \overline{F^q H^k_{dR}(X,\mathbb{C})} \right),$$

参见 [DGMS75，注 5.21]。我们将用 $H^{p,\,q}(X)$表示右侧的子群；在 $\partial\partial$-引理下，它们与 $H^{p,\,q}_{\overline{\partial}}(X)$规范同构，也与任何其他上同调同构。就不可分解元而言，这意味着不存在长度大于一的之字形，只有方块与点。

例如，在描述一个实 de Rham 上同调类的 (1，1) 型代表元集合时，这一性质至关重要。事实上，给定$[\alpha] \in H^{1,\,1}(X)$，我们有

$$[\alpha] = \left\{ \alpha + \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial} f \,:\, f \in \mathcal{C}^\infty(X;\mathbb{R}) \right\},$$

因此，上同调条件归结为一个标量问题。

另一个重要的 $\partial\partial$-引理推论如下。根据 Sullivan理论 [Sul77], ，可微流形的有理同伦型由微分形式的微分分次代数（DGA）编码。若流形的 de Rham复形（$\Omega^\bullet(X)\ d$）

通过一系列微分分次代数的拟同构与其上同调代数（$H^\bullet(X,\ \mathbb{R})\ d=0$）相连。特别地，这意味着形式流形的有理同伦型完全由其 de Rham上同调决定。

定理 2 ([DGMS75])**.** 满足 $\partial\bar{\partial}$- 引理的紧复流形具有形式性。

证明。 考虑算子 $d^c = J^{-1}dJ = -\sqrt{-1}(\partial - \bar{\partial})$，以及如下图表：

$$\begin{array}{ccc} & (\ker d^c, d) & \\ {\scriptstyle i}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle p} \\ (\Omega^\bullet(X), d) & & (H^\bullet_{d^c}(X), d) \end{array}$$

其中 $H^\bullet_{d^c}(X) := \ker d^c / \operatorname{im} d^c$。为了证明形式性，只需证明在满足 $\partial\bar{\partial}$-引理性质的假设下， i和 p 都在上同调中诱导同构，并且 $H^\bullet_{d^c}(X)$上的诱导微分为零。注意， $\partial\bar{\partial}$-引理也可以用实算子 d 和 d^c来表述，以取代 ∂ 和 $\bar{\partial}$；在处理实值微分形式时，这种表述通常更为可取。

我们先证明 i^* 是满射。设 $a = [x] \in H_{dR}(X, \mathbb{R})$。那么$d^c x$ 既是 d-闭的，也是 d^c-恰当的。 $\partial\bar{\partial}$-引理保证 $d^c x$ 也是 dd^c-恰当的，也就是说，存在 z 使得 $d^c x = dd^c z$。由此可知，$\alpha + dz$ 是 d^c-闭的，并且与 $[x]$表示相同的德拉姆上同调类，因此$a = i^*([x + dz])$。所以， i^* 是满射。为了证明 i^* 也是单射，假设 $y \in \ker d^c$ 是 d-恰当的。那么 $y = dz$，而 $\partial\bar{\partial}$-引理蕴含 y 也是 dd^c-恰当的，即存在某个 w使得 $y = dd^c w$ 。因此， $y = d(d^c w)$，且$d^c w \in \ker d^c$，所以 y 是某个 d^c-闭微分形式的 d-微分。于是，β 在 $H(\ker d^c, d)$中表示零类，从而证明了单射性。

注意，由 d 在 $H_{d^c}(X)$上诱导的微分是平凡的。事实上，若$d^c y = 0$，则将 $\partial\bar{\partial}$-引理应用于 dy 可得，对于某个w，有 $dy = dd^c w$ 。特别地， $dy \in \operatorname{im} d^c$，因此 $[dy] = 0$ 属于 $H_{d^c}(X)$。

最后，我们证明 p^* 是一个同构。设 $[y] \in H^\bullet_{d^c}(X)$。那么 dy既是 d^c-闭的，又是 d-恰当的。由$\partial\bar{\partial}$-引理可知，对于某个微分形式 w，有 $dy = dd^c w$。因此，

$$[y] = [y + d^c w] \quad \text{in } H^\bullet_{d^c}(X),$$

且 $d(y + d^c w) = dy + dd^c w = dy - dy = 0$，因此 $y + d^c w \in \ker d$。这证明了 p^* 是满射。反过来，设 $y \in \ker d^c$ 满足 $dy = 0$ ，并且

$[y] = 0$ 属于 $H^{\bullet}_{d^c}(X)$，也就是说，存在某个 w，使得 $y = d^c w$ 。再次应用 $\partial\partial$-引理，得到存在某个 z，使得 $y = dd^c z$ ，这意味着 y 在复形 $(\ker d^c,\ d)$ 中是正合的。因此， p^* 是单射。 □

楔积赋予德拉姆上同调分次交换代数的结构。然而，一般而言，不可能选择一组对楔积封闭的微分形式代表元。例如，正如 Sullivan [Sul77]，首次观察到的，在一个紧致可微黎曼流形上存在“楔积与微分形式的调和性之间的不相容性”。根据同伦传递原理 [Kad80]，，任意选择的上同调代表元都会继承 Stasheff [Sta63]意义下的一个 A_∞-代数结构。第一个运算是 $m_1 = 0$，第二个运算 m_2 由楔积后再进行投影诱导，而高阶运算 m_k （对于 $k \geq 3$ ）则与马西积 [LPWZ09, BMFM20, Pos17]有关。当这个 A_∞-结构退化为严格代数，即对于 $k \neq 2$所有 $m_k = 0$ 时，该流形是形式的。关于博特-陈上同调和 Aeppli 上同调中的马西积与 A_∞-结构的研究，参见 [AT15, TT17, Ste25c, CGVSG25, PTW25, MMS25]。

2.5 $\partial\,\partial$-引理性质的数值刻画

$\partial\,\partial$ $\partial\overline{\partial}$-引理性质可以仅通过 Bott-Chern上同调来进行数值刻画（注意，在紧致流形上，$\dim H^{p,q}_A(X) = \dim H^{n-p,n-q}_{BC}(X)$，正如我们将在第 3.1 节中看到的那样）。

定理 3 ([AT13]). 设 X 是一个紧致全纯流形。对任意$k \in$整数群，定义整数

$$\Delta_k := \sum_{p+q=k} (\dim H^{p,q}_{BC}(X) + \dim H^{p,q}_A(X)) - 2b_k,$$

其中 b_k 是 X的第 k 个 ***Betti***数。于是，对所有 k， $\Delta_k \geq 0$ 。此外，X 满足 $\partial\partial$-引理性质，当且仅当对所有 k， $\Delta_k = 0$ 。

证明。 其思路是：多尔博上同调不考虑水平箭头，而共轭Dolbeault上同调忽略垂直箭头。Bott-Chern上同调统计可能有入箭头的不可分解角元素，Aeppli上同调则统计那些

可能有出箭头的不可分解角元素；在所有情况下，方块均不计入。因此，通过纯组合论证可知，Bott-Chern上同调与Aeppli上同调的维数之和大于或等于Dolbeault上同调与共轭Dolbeault上同调的维数之和；根据Fr¨olicher不等式，后者又大于或等于Betti数的两倍。此外，当且仅当该双复形可分解为方块与点的直和时，这两个不等式均取等号，也就是说，该流形满足 $\partial\overline{\partial}$-引理性质。 _

为给出更详细的论证，我们回顾 Varouchas 引入的正合列 [Var86]。定义以下有限维双分次向量空间：

$$A^{\bullet,\bullet} := \frac{\operatorname{im}\overline{\partial}\cap\operatorname{im}\partial}{\operatorname{im}\partial\overline{\partial}},\quad B^{\bullet,\bullet} := \frac{\ker\overline{\partial}\cap\operatorname{im}\partial}{\operatorname{im}\partial\overline{\partial}},\quad C^{\bullet,\bullet} := \frac{\ker\partial\overline{\partial}}{\ker\overline{\partial}+\operatorname{im}\partial},$$

$$D^{\bullet,\bullet} := \frac{\operatorname{im}\overline{\partial}\cap\ker\partial}{\operatorname{im}\partial\overline{\partial}},\quad E^{\bullet,\bullet} := \frac{\ker\partial\overline{\partial}}{\ker\partial+\operatorname{im}\overline{\partial}},\quad F^{\bullet,\bullet} := \frac{\ker\partial\overline{\partial}}{\ker\overline{\partial}+\ker\partial}.$$

为简化记号，以下用小写字母表示相应向量空间的维数，例如 $a^{p,q} := \dim A^{p,q}$, $h^{p,q}_{BC} := \dim H^{p,q}_{BC}(X)$，其他情形亦然。我们还定义 $a^k := \sum_{p+q=k} a^{p,q}$, $h^k_{BC} := \sum_{p+q=k} h^{p,q}_{BC}$，等等。

有以下正合列 [Var86, §3.1]:

$$0 \to A^{\bullet,\bullet} \to B^{\bullet,\bullet} \to H^{\bullet,\bullet}_{\overline{\partial}}(X) \to H^{\bullet,\bullet}_{A}(X) \to C^{\bullet,\bullet} \to 0, \tag{1}$$

$$0 \to D^{\bullet,\bullet} \to H^{\bullet,\bullet}_{BC}(X) \to H^{\bullet,\bullet}_{\overline{\partial}}(X) \to E^{\bullet,\bullet} \to F^{\bullet,\bullet} \to 0. \tag{2}$$

如 [Var86, §3.1], 所述，共轭与同构

$$\overline{\partial} : C^{\bullet,\bullet} \xrightarrow{\sim} D^{\bullet,\bullet+1},\quad \partial : E^{\bullet,\bullet} \xrightarrow{\sim} B^{\bullet+1,\bullet}$$

可推出以下关系 $a^{p,q} = a^{q,p}$, $f^{p,q} = f^{q,p}$, $d^{p,q} = b^{q,p}$, $e^{p,q} = c^{q,p}$，以及$c^{p,q} = d^{p,q+1}$, $e^{p,q} = b^{p+1,q}$。

现在我们可以证明 Bott-Chern上同调的 Fr¨olicher 型不等式。对于任意 p, q，利用共轭对称性和上述正合

列，我们有

$$\begin{aligned}
&h_{BC}^{p,q} + h_{A}^{p,q} \\
&= h_{BC}^{p,q} + h_{A}^{q,p} \\
&= h_{\overline{\partial}}^{p,q} + h_{\overline{\partial}}^{q,p} + f^{p,q} + a^{q,p} + d^{p,q} - b^{q,p} - e^{p,q} + c^{q,p} \\
&= h_{\overline{\partial}}^{p,q} + h_{\partial}^{p,q} + f^{p,q} + a^{p,q} \\
&\geq h_{\overline{\partial}}^{p,q} + h_{\partial}^{p,q}.
\end{aligned}$$

由于 Fr¨olicher 不等式指出 $h_{\partial}^{k} \geq b_k$，因此对于所有 k，都有 $\Delta_k \geq 0$ 。

现在假设对于所有 k，等式 $\Delta_k = 0$ 成立。这意味着 $a^k = f^k = 0$ ，并且 Fr¨olicher 不等式取等号。后一条件意味着 Fr¨olicher 谱序列在第一页退化。接下来我们将证明，条件 $a^{k+1} = 0$ 意味着自然映射

$$\bigoplus_{p+q=k} H_{dR}^{p,q}(X) \to H_{dR}^{k}(X, \mathbb{C})$$

是满射。这就足够了，因为不等式 $h_{BC}^{k} \geq b_k$连同条件 $\Delta_k = 0$ 以及对偶性 $h^{p,\ A}{}^{q} = h^{n-p,\ BC}{}^{n-q}$ (见第3.1节)，意味着 $h_{BC}^{k} = b_k$，也就是说，自然映射确实是同构。这等价于 $\partial\overline{\partial}$-引理性质。

为证明这一结论，设 $a = [\alpha] \in H_{dR}^{k}(X$，复数域)。我们需要证明 a 存在一个代表元，其纯型分量均为 d-闭的。将α 分解为其纯型分量:

$$\alpha = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \alpha^{k-j,j}.$$

条件 $d\alpha = 0$ 等价于以下方程组

$$\begin{aligned}
\partial\alpha^{k,0} &= 0, \\
\overline{\partial}\alpha^{k-j,j} - \partial\alpha^{k-j-1,j+1} &= 0 \quad \text{for } j = 0, \ldots, k-1, \\
\overline{\partial}\alpha^{0,k} &= 0.
\end{aligned}$$

注意，对于每个 $j \in \{0, \ldots, k-1\}$，$(k+1)$-微分形式 $\partial\alpha^{k-j,\ j} = \partial\alpha^{k-j-1,\ j+1}$既是 ∂-恰当的，也是 $\overline{\partial}$-恰当的。根据假设 $a^{k+1} = 0$，可知该微分形式也是 $\partial\overline{\partial}$-恰当的。因此，存在 $\eta^{k-j-1,\ j} \in \wedge^{k-j-1,\ j}X$ 使得

$$\overline{\partial}\alpha^{k-j,j} = \partial\alpha^{k-j-1,j+1} = \partial\overline{\partial}\eta^{k-j-1,j}.$$

于是可以直接推出，的每个纯型分量

$$\alpha + d\left(\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\,\eta^{k-j-1,j}\right)$$

是闭的，从而证明了该断言。 □

我们还可以用霍奇数给出博特-陈上同调维数的一个上界。注意，不可能得到纯粹的拓扑上界，因为偶数长度的之字形会对多尔博上同调有所贡献，却不会对德拉姆上同调有所贡献。

定理4 ([AT17]). 设 X 是一个复维数为 n的紧致全纯流形。那么，对任意 $k \in$整数群，有

$$\begin{aligned} h^k_{BC} &\leq \min\{k+1, (2n-k)+1\} \cdot \left(h^k_{\overline{\partial}} + h^{k-1}_{\overline{\partial}}\right) \\ &\leq (n+1) \cdot \left(h^k_{\overline{\partial}} + h^{k-1}_{\overline{\partial}}\right). \end{aligned}$$

*Aeppli*上同调也满足相同的不等式。特别地，

$$|h^k_A - h^k_{BC}| \leq 2(n+1)\,\left(h^k_{\overline{\partial}} + h^{k+1}_{\overline{\partial}}\right).$$

此外， X 满足 $\partial\overline{\partial}$-引理性质，当且仅当

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|h^k_{BC} - h^k_A\right| \;=\; 0\,.$$

证明。 关键思路是，位于总次数 k 与 $k+1$之间的任意长度为 $\ell+1$的之字形，在次数为 k 或 $k+1$的多尔博上同调或共轭Dolbeault上同调中，恰好产生两个非平凡类；而在次数为 k的Aeppli上同调中，至多产生 $\left\lfloor \frac{\ell}{2} \right\rfloor + 1 \leq \min\{k+1, (2n-k)+1\} \leq n+1$ 个类。

为了刻画 $\partial\overline{\partial}$-引理性质，回顾一下：Bott-Chern上同调统计带有可能入箭头的角，而 Aeppli 上同调统计带有可能出箭头的角，方块除外。因此，该假设可重新表述如下：对于任意反对角线，入箭头的数量等于出箭头的数量，方块除外。由于没有入箭头能够进入总次数为零的反对角线，因此整个图表中不存在长度为正的之字形。这正是 $\partial\overline{\partial}$-引理性质的特征。

□

微分形式上的楔积在 Bott-Chern上同调上诱导出自然的代数结构，而 Aeppli 上同调仅具有 H_{BC} 上的模结构。对于紧流形，积分在德拉姆上同调和 Dolbeault上同调上定义了非退化配对，见第 3.1节。相应的对偶性结合了 Bott-Chern上同调与 Aeppli 上同调，正如 Schweitzer 所确立的 [Sch07]。这种对偶性促成了 [AT15], 中的构造，其中 Bott-Chern上同调和 Aeppli 上同调均用于推广三重 Massey 积的概念。在发展 Bott-Chern上同调上的 A_∞-代数结构这一更广泛的背景下，可能涉及高阶 Massey 积，人们或许会考虑假设 Bott-Chern配对是非退化的。然而，事实证明这一假设过强。

推论5 ([AT17]). 设 X 为紧复流形。自然配对

$$H_{BC}^{\bullet,\bullet}(X) \times H_{BC}^{\bullet,\bullet}(X) \to \mathbb{C}, \qquad ([\alpha],[\beta]) \mapsto \int_X \alpha \wedge \beta,$$

当且仅当 X 满足 $\partial\bar{\partial}$-引理性质时，它是非退化的。

2.6 $\partial\bar{\partial}$-引理性质在几何变换下

在此，我们简要回顾关于 $\partial\bar{\partial}$-引理性质在自然几何操作下的行为的若干结果。

定理6 ([DGMS75]). 设 X 与 Y 为同维数的紧致全纯流形，并设 f: $X \to Y$ 为全纯双有理映射。若 X 满足 $\partial\bar{\partial}$-引理性质，则 Y亦然。特别地，*Moˇıˇsezon* 流形 *[Moˇı66]* 以及类 $\mathcal{C}$ 中 *Fujiki* 的流形 *[Fuj78]*满足 $\partial\bar{\partial}$-引理性质。

定理7 ([Ste21b]; 另见 [ASTT20, RYY19]). 设 X 为紧致全纯流形，并设 $Z \subseteq X$ 为全纯子流形。若 X 与 Z 均满足 $\partial\bar{\partial}$-引理性质，则 X 沿 Z的爆破亦满足该性质。特别地，对于紧复三维流形， $\partial\bar{\partial}$-引理性质在修改下保持不变。

定理8 ([Voi02b、Wu06、AT13])。 满足 $\partial\bar{\partial}$-引理性质是在 *[Kod05]* 意义下，复结构的小变形下的稳定性质。

2.7 幂零流形与可解流形的复上同调计算

全纯流形的上同调群的显式计算通常并非易事。然而，对于某些流形类，这类计算可以归结为代数方程。例如，幂零流形和（某些）可解流形便属于这种情况。首先，我们回顾李代数的 Chevalley-Eilenberg复形。

设 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数，记 $\mathfrak{g}$ 的一组基为 $\{x_1,\dots,x_s\}$，记 $\mathfrak{g}^*$ 的对偶基为 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_s\}$。在外代数 $\wedge\mathfrak{g}^*$ 上定义微分算子 d 如下。在 1 次元素上，令

$$d\alpha^k(x_i,x_j) = -\alpha^k([x_i,x_j]),$$

然后将此定义延拓到 $\wedge\mathfrak{g}^*$ 上，使其成为分次双线性导子。令$[x_i,x_j]=\sum_\ell c_{ij}^\ell x_\ell$，由对偶性可得 $d\alpha^k(x_i,\ x_j) = -c_{ij}^k$，依此类推作用于生成元

$$d\alpha^k = -\sum_{i<j} c_{ij}^k \alpha^i\wedge\alpha^j.$$

对于 $\alpha\in\wedge^k\mathfrak{g}^*$ 和 y_1，……，$y_{k+1}\in\mathfrak{g}$，一般公式为

$$d\alpha(y_1,\dots,y_{k+1}) = \sum_{1\le i<j\le k+1}(-1)^{i+j}\alpha([y_i,y_j],y_1,\dots,\hat{y_i},\dots,\hat{y_j},\dots,y_{k+1}).$$

于是，Jacobi恒等式等价于 $d^2=0$。

复形 $(\wedge\mathfrak{g}^*,\ d)$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的 ***Chevalley-Eilenberg*复形**。若G 是李代数为 $\mathfrak{g}\simeq T_eG$ 的李群，则 $a\in\wedge\mathfrak{g}^*$ 中的任意元素都会在 G 上诱导出一个微分形式 α，使得 $\alpha_e = v$；这是通过与左平移相关的微分算子实现的，并且 $(d\alpha)_e = dv$。反过来，G（或其任意光滑商空间）上的任意微分形式 α，若在左平移作用下不变（即对任意 $g\in G$，均有$L_g^*\alpha=\alpha$），则完全由其取值 $\alpha_e\in\wedge\mathfrak{g}^*$ 决定。因此，Chevalley-Eilenberg复形可识别为不变形式的子空间（相对于左平移不变，也称为左不变形式）。

Chevalley-Eilenberg复形 $(\wedge\mathfrak{g}^*,\ d)$ 的上同调记为 $H_d^\bullet(\mathfrak{g},\ \mathrm{R})$。

接下来，我们将关注 $\mathfrak{g}$ 为幂零的特殊情形。回顾一下，若 $\mathfrak{g}$ 是李代数，我们可以考虑其上升中心列 $\mathcal{Z}^0\subseteq\mathcal{Z}^1\subseteq\mathcal{Z}^2\subseteq\cdots$，其中 $\mathcal{Z}^0:=\mathfrak{g}$，且 $\mathcal{Z}^{i+1}:=\{x\in\mathfrak{g}:\ [x,\mathfrak{g}]\subseteq\mathcal{Z}^i\}$。

特别要注意， $\mathcal{Z}^1 = \mathcal{Z}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的中心。若存在 $n \in \mathbf{N}$ 使得 $\mathcal{Z}^n = \mathfrak{g}$ ，则称李代数 $\mathfrak{g}$ 为 幂零；其中最小的此类 n 称为 $\mathfrak{g}$ 的 幂零步。李群层面也有类似的定义，相应的子代数和子群通过指数映射相关联。事实上，若李群的李代数是幂零的，则称该李群为幂零李群。

一个幂零流形 $\Gamma\backslash G$是连通、单连通幂零李群 G 关于格 Γ （即 余紧离散子群）的商空间。下面的定理表明，幂零流形的德拉姆上同调可以仅利用不变形式计算。

定理 9 （[Nom54]）。 设 $X = \Gamma\backslash G$ 是一个幂零流形，并记 $\mathfrak{g}$为 G的李代数。则，不变形式到形式空间 $\wedge\mathfrak{g}^* \hookrightarrow \Omega^\bullet(X)$ 的包含映射在上同调上诱导出一个同构，即

$$H_d^\bullet(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) \simeq H_{dR}^\bullet(X, \mathbb{R}) .$$

我们现在回顾证明的主要步骤，也可参阅 [Rol11] 以了解该主题的综述。

证明。 首先注意到，记 ZG 为 G的中心，则 $Z\Gamma := \Gamma \cap ZG$ 仍然是一个格。由于 ZG 中的元素与 Γ中的元素交换，主 ZG-丛

$$\begin{array}{ccc} ZG & \longrightarrow & G \\ & & \downarrow \\ & & \frac{G}{ZG} \end{array}$$

下降为主环面丛

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & X \\ & & \downarrow \\ & & X' \end{array}$$

其纤维为实环面$T = \frac{ZG}{Z\Gamma}$ 。

由于 G 是幂零的，这一过程可以利用上升中心列迭代进行

$$0 = \mathcal{Z}^0 \subseteq \mathcal{Z}^1 \subseteq \mathcal{Z}^2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{Z}^n = \mathfrak{g}.$$

事实上，所有 $\mathcal{Z}^i$ 都是理想，而 $\mathcal{Z}^{i-1}\backslash\mathcal{Z}^i$ 在 $\mathcal{Z}^{i-1}\backslash\mathfrak{g}$ 中是中心的，尤其是 $\mathcal{Z}^{i-1}\backslash\mathcal{Z}^i$ 是阿贝尔的。这对应于正规子群的滤过

$$1 = Z^0 \subseteq Z^1 \subseteq Z^2 \subseteq \cdots \subseteq Z^n = G$$

其中 $Z^{i-1}\backslash Z^i$ 为阿贝尔的，且 $Z^i\Gamma := \Gamma \cap Z^i$ 是 Z^i 中的格。更确切地说，记 T_i 为由 $Z^{i-1}\backslash Z^i$ 对 $Z^{i-1}\Gamma\backslash Z^i\Gamma$ 取商得到的环面，则存在一列主 T_i 丛

$$\begin{array}{ccc}
T_1 & \longrightarrow & X_1 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} \\
T_2 & \longrightarrow & X_2 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\
 & & \vdots \\
 & & \downarrow \\
T_{n-1} & \longrightarrow & X_{n-1} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{n-1}} \\
 & & X_n = T_n
\end{array}$$

其中 X_i 是由 $Z^{i-1}\backslash G$ 和 $Z^{i-1}\Gamma\backslash\Gamma$ 取商得到的幂零流形。

证明可通过对幂零步 n 作归纳来完成。若 $n = 1$，则 G 是阿贝尔的，因此 X 是一个环面，这一结果众所周知。对于归纳步骤，假设我们有一个主 T 丛，其底空间是幂零步较低的幂零流形

$$\begin{array}{ccc}
T & \longrightarrow & X \\
 & & \downarrow \\
 & & X' .
\end{array}$$

思路是利用纤维 T 和底空间 X' 的上同调来描述 X 的上同调，这通过两个谱序列来实现。

首先，考虑形式空间 $\Omega^\bullet(X)$ 上的如下滤过 ，

$$F^p\Omega^{p+q}(X) := \left\{\omega \in \Omega^{p+q}(X) \,:\, \omega(v_1, \ldots, v_{p+q}) = 0 \,\text{for any}\, v_{i_1}, \ldots, v_{i_{q+1}} \in \ker d\pi\right\} .$$

该滤过确定了一个谱序列 $\{(E^{\bullet,\bullet}_r, d_r)\}_{r\geq 0}$，它计算复形 $(\Omega^\bullet(X), d)$ 的上同调。这个谱序列称为*Leray-Serre* 谱序列，在这种情况下有

$$E_2^{p,q} = H^p_{dR}(X') \otimes H^q_{dR}(T) \Rightarrow H^{p+q}_{dR}(X)\,.$$

现在可以在不变形式的层面上作类似的论证。该纤维化

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & X \\ & & \downarrow \\ & & X'\,. \end{array}$$

对应于李代数的一个短正合列

$$0 \to \mathfrak{h} \to \mathfrak{g} \to \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}} \to 0\,.$$

对于 $\wedge^\bullet\mathfrak{g}^*$，可以得到*Hochschild-Serre* 谱序列 $\left\{(\tilde{E}^{\bullet,\bullet}_r, d_r)\right\}_{r\geq 0}$，并且在这种情况下有

$$\tilde{E}_2^{p,q} = H^p_d\left(\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}\right) \otimes H^q_d(\mathfrak{h}) \Rightarrow H^{p+q}_d(\mathfrak{g})\,.$$

现在，由于不变形式到形式空间的包含映射 $\wedge\mathfrak{g}^* \hookrightarrow \Omega^\bullet(X)$与滤过相容，因此存在谱序列的同态。特别地，在第二页上，由归纳假设可得一个同构:

$$H^p_{dR}(X') \otimes H^q_{dR}(T) \to H^p_{dR}\left(\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}\right) \otimes H^q_{dR}(\mathfrak{h})\,.$$

因此，取极限后，我们便得到所需的同构，

$$H^{p+q}_{dR}(X) \simeq H^{p+q}_d(\mathfrak{g}),$$

从而完成该定理的证明 □

Nomizu 定理指出，幂零流形的德拉姆上同调 M 完全由有限维复形 $\wedge^\bullet\mathfrak{g}^*$决定，而它确实构成了一个 Sullivan 模型 [Sul77]。这一结果更一般地适用于完全可解李群的紧商空间 [Hat60]，，但

并不适用于任意可解流形 [DBT06]。尽管如此，人们已发展出多种技术来计算可解流形的德拉姆上同调[Gua07，CF11，CFK16]。

对于幂零流形上特殊类别的复结构的 Dolbeault上同调，也有类似的结果；例如参见 [CF01、Rol11] 及其中的参考文献。更具体地说，如果 J 是 $\mathfrak{g}$上的一个复结构，那么记 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 为复化李代数，便有通常的分解

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{*} = \mathfrak{g}^{*1,0} \oplus \mathfrak{g}^{*0,1}$$

and

$$\wedge^{p,q}\mathfrak{g}^{*} = \wedge^{p}\mathfrak{g}^{*1,0} \otimes \wedge^{q}\mathfrak{g}^{*0,1}$$

相应地， $d = \partial + \bar{\partial}$。于是可得到复形（$\wedge^{p,\bullet}\mathfrak{g}^{*}$， $\bar{\partial}$）及其相应的 Dolbeault上同调 $H^{p,q}_{\bar{\partial}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = H^{q}(\wedge^{p,\bullet}\mathfrak{g}^{*}, \bar{\partial})$。有人猜想，对于具有不变复结构 J 的幂零流形 $X = \Gamma\backslash G$，Nomizu 定理的类似结论应当对 Dolbeault上同调成立，即

$$H^{p,q}_{\bar{\partial}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \simeq H^{p,q}_{\bar{\partial}}(X).$$

在调整 Nomizu 的论证时，问题在于，并非每个具有不变复结构的幂零流形都是全纯主丛；例如，上述塔丛中的投影可能具有奇数维中心。已知在某些特殊情况下该猜想成立，例如当：

- X 是复可平行化的 [Sak76];- J 是阿贝尔复结构 [CFP06];- J 是幂零复结构 [CFGU00];- J 是有理复结构 [CF01];- X 是一个6维幂零流形 [FRR19].

Kasuya [Kas13] 提出了计算可解流形多尔博上同调的方法。这些方法还可推广到 Bott-Chern 和 Aeppli 上同调 [Ang13，AK17a]。

定理10 ([Ang13, AK17a])。 设 $X = \Gamma\backslash G$ 是一个赋有不变复结构 J。若

$$H_d^\bullet(\mathfrak{g}) \simeq H_{dR}^\bullet(X) \quad and \quad H_{\overline{\partial}}^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \simeq H_{\overline{\partial}}^{\bullet,\bullet}(X)$$

then

$$H_{BC}^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \simeq H_{BC}^{\bullet,\bullet}(X)\,.$$

2.8 习题

练习6. 设 X 是赋有几乎复结构 J 的可微流形。证明 J 可积当且仅当 $d = \partial + \overline{\partial}$。

练习7 ([DGMS75, 引理5。15])。 设 $(A^{\bullet,\bullet}, \partial, \overline{\partial})$ 是一个由向量空间构成的有界双复形，并将其对应的全复形记为 $(A^\bullet := \bigoplus_{p+q=\bullet} A^{p,q}, d = \partial + \overline{\partial})$。证明，对于任意 k，以下条件等价：

$(a)_n$ 核 $\partial \cap$ 核 $\overline{\partial}$ 像 $d =$ 像 $\partial\overline{\partial}$ 在 A^k,

$(b)_n$ 核 $\overline{\partial} \cap$ 像 $\partial =$ 核 $\partial \cap$ 像 $\overline{\partial} =$ 像 $\partial\overline{\partial}$ 在 A^k,

$(c)_n$ 核 $\partial \cap$ 核 $\overline{\partial}$ (像 $\partial +$ 像 $\overline{\partial}$) $=$ 像 $\partial\overline{\partial}$ 在 A^k,

$(a^*)_{n-1}$ 像 $\partial +$ 像 $\overline{\partial} +$ 核 $d =$ 核 $\partial\overline{\partial}$ 中 A^{k-1},

$(b^*)_{n-1}$ 像 $\overline{\partial} +$ 核 $\partial =$ 像 $\partial +$ 核 $\overline{\partial} =$ 核 $\partial\overline{\partial}$ 中 A^{k-1},

$(c^*)_{n-1}$ 像 $\partial +$ 像 $\overline{\partial} +$ (核 $\partial \cap$ 核 $\overline{\partial}$) $=$ 核 $\partial\overline{\partial}$ 中 A^{k-1}。

练习8 ([CF01, 引理 9])。 设 G 是一个李群，记 $\mathfrak{g}$ 为其对应的李代数。设 Γ 是一个离散子群，左作用于 G，使得商空间 $X = G/\Gamma$ 是紧的。考虑 G 上的左不变微分形式空间，它与有限维向量空间 $\wedge^\bullet \mathfrak{g}^*$ 同构，并诱导出一个子复形 $\Omega^\bullet(X)^G$，它是 *de Rham* 复形 $(\Omega^\bullet(X)\ d)$ 的子复形。证明该包含映射在上同调中诱导出一个单射。

提示。 在 X 上构造一个左不变度量，并利用每个上同调类都有唯一调和代表元这一事实。 □

练习 9。 令 $G = \mathrm{Heis}(3,\text{复数域})$ 为三维海森堡群，它由以下形式的矩阵组成

$$\begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_3 \\ 0 & 1 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中 z_1， z_2， $z_3 \in$ 复数域。考虑由以下矩阵组成的子群： $\Gamma \subset G$ 其矩阵元素均为高斯整数，并通过左乘作用于 G。商空间 $X = {}^{G}\!/_{\Gamma}$ 是一个紧复流形，称为岩泽流形，其全纯切丛是平凡的 *[Nak75]*。计算 X的复上同调。

提示。固定左不变标架

$$\varphi^1 = dz_1, \quad \varphi^2 = dz_2, \quad \varphi^3 = dz_3 - z_1\, dz_2$$

作为全纯余切丛的标架。相应的结构方程为:

$$d\varphi^1 = 0, \quad d\varphi^2 = 0, \quad d\varphi^3 = -\varphi^1 \wedge \varphi^2.$$

证明左不变形式构成的双复形具有图2所示的结构。然后，如图3所示，通过计算各分量的贡献，求出各种上同调。

□

练习 10。设 X 是一个可微流形。在德拉姆上同调 $H^{\bullet}_{dR}(X,\mathbb{R})$ 上定义一个部分定义的运算如下。设 $a_{12} = [\alpha_{12}] \in H^{|\alpha_{12}|}_{dR}(X,\mathbb{R})$、 $a_{23} = [\alpha_{23}] \in H^{|\alpha_{23}|}_{dR}(X,\mathbb{R})$ 、 $a_{34} = [\alpha_{34}] \in H^{|\alpha_{34}|}_{dR}(X,\mathbb{R})$ 是三个上同调类，满足

$$a_{12} \cdot a_{23} = 0 \quad and \quad a_{23} \cdot a_{34} = 0.$$

这意味着存在微分形式 α_{13} 和 α_{24} ，使得

$$(-1)^{|\alpha_{12}|}\alpha_{12} \wedge \alpha_{23} = d\alpha_{13}, \quad (-1)^{|\alpha_{23}|}\alpha_{23} \wedge \alpha_{34} = d\alpha_{24}.$$

则三重 Massey 积 定义为

$$\langle a_{12}, a_{23}, a_{34} \rangle := \left[(-1)^{|\alpha_{12}|}\alpha_{12} \wedge \alpha_{24} + (-1)^{|\alpha_{13}|}\alpha_{13} \wedge \alpha_{34}\right].$$

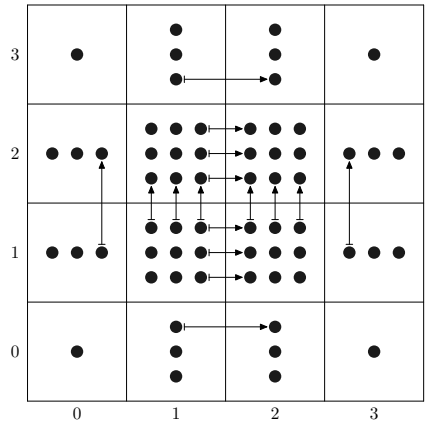


图 2：伊瓦萨瓦流形上左不变微分形式的双复形

d.

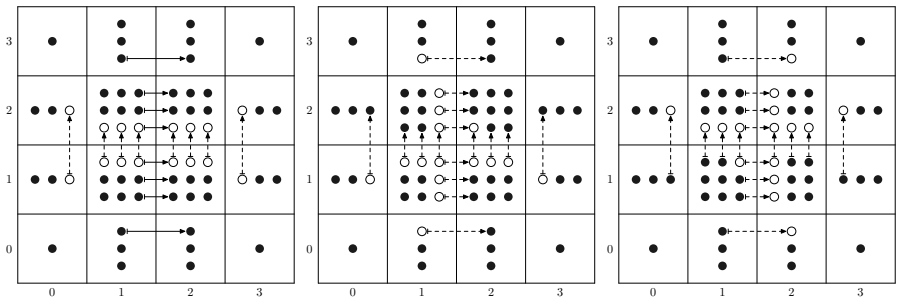


图 3：岩泽流形的上同调。

证明这个类在 $H_{dR}^{|\alpha_{12}|+|\alpha_{23}|+|\alpha_{34}|-1}(X,\mathbb{R})$ 中模去不确定性后是良定义的

$$a_{12}\cdot H_{dR}^{|\alpha_{23}|+|\alpha_{34}|-1}(X,\mathbb{R})+a_{34}\cdot H_{dR}^{|\alpha_{12}|+|\alpha_{23}|-1}(X,\mathbb{R}).$$

归纳地扩展这一构造，以定义高阶 *Massey* 积。最后，证明在形式流形上，任意阶的所有马西积都消失。

练习 11 ([CFG86,BG88, Has89])**.** 证明幂零流形满足$\partial\bar{\partial}$-引理当且仅当它是复环面。

练习 12 ([Voi02b, Wu06,AT13])**.** 证明 $\partial\bar{\partial}$-引理性质在复结构的小变形下保持稳定，其含义如*[Kod05]*所述。

提示。 利用霍奇理论的事实：在小变形下，上同调群的维数呈上半连续变化。然后运用 $\partial\bar{\partial}$-引理性质的数值刻画。注意，该性质在变形下不一定保持，例[AK17b]。

□

3 典范厄米度量与联络

本节介绍厄米几何的基本工具，并回顾有关典范厄米度量与联络的若干结果，这些内容主要受到 Paul Gauduchon 奠基性工作的启发。部分论述遵循近期综述 [Ang25]。最后一节聚焦于具有局部共形 K¨ahler 度量的三维复流形，并遵循 [APV23、APV25]，介绍其分类方面的一些部分性结果。

3.1 厄米几何

得益于仿紧性，我们可以在每个全纯坐标图上取标准厄米内积（的拉回），再利用单位分解将它们粘合起来。这一构造在 X 上给出一个厄米度量，它由定义在每个复向量空间 (T_xX, J_x) 上的一族厄米内积 h_x 组成，并随 $x \in X$ 光滑变化。通过线性同构 $(T_xX, J_x) \simeq (T^{1,0}_x X, \sqrt{-1}) \simeq (T^{0,1}_x X, -\sqrt{-1})$，这诱导出定义在 $TX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 各纤维上的一族厄米内积。将此内积分解为实部和虚部，记作 $g - \sqrt{-1}\omega$，可得： X 上的一个黎曼度量 g，其中 J 是等距变换； X 上的一个 J-不变 2-形式 ω，满足对任意处处非零的向量场 V，逐点有 $\omega(V, JV) > 0$。由于 $\omega = g(J\,,\,)$，我们将不加区分地把厄米度量称为 g 或 ω。

在紧致全纯流形X上固定厄米度量后，相关的体积形式 ω^n 便在整体微分形式空间上诱导出一个内积。事实上，逐点厄米内积自然延拓到张量空间，进而延拓到微分形式空间。对于 α， $\beta \in \Omega^k(X)$，我们定义

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \int_X g_x(\alpha_x, \beta_x)\, \omega^n.$$

这使我们能够将余微分算子 $d^*\colon \Omega^k(X) \to \Omega^{k-1}(X)$ 定义为外微分的形式伴随：

$$\langle d^*\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, d\beta \rangle \quad \text{for all } \alpha \in \Omega^k(X),\ \beta \in \Omega^{k-1}(X).$$

类似地，我们定义多尔博算子的形式伴随：

$$\partial^*\colon \Omega^{p,q}(X) \to \Omega^{p-1,q}(X), \qquad \overline{\partial}^*\colon \Omega^{p,q}(X) \to \Omega^{p,q-1}(X).$$

利用 Hodge星算子，我们可以给出伴随算子的显式表达式。定义 C-线性映射

$$*\colon \Omega^{p,q}(X) \to \Omega^{n-q,n-p}(X)$$

根据以下条件：对于任意 α， $\beta \in \Omega^{p,\,q}(X)$,

$$\alpha \wedge *\bar{\beta} = g(\alpha,\beta)\,\omega^n.$$

因此，（注意到 X 的实维数为偶数，）我们得到以下恒等式：

$$d^* = -*\,d\,*, \qquad \partial^* = -*\,\overline{\partial}\,*, \qquad \overline{\partial}^* = -*\,\partial\,*\,.$$

最后，我们将 de Rham 拉普拉斯算子定义为

$$\Delta := [d, d^*] = dd^* + d^*d,$$

它在局部意义下与函数上的经典解析拉普拉斯算子仅相差一个符号。类似地，我们定义多尔博拉普拉斯算子：

$$\overline{\square} := \overline{\partial}\,\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\,\overline{\partial}, \qquad \square := \partial\,\partial^* + \partial^*\,\partial.$$

所有这些算子都是自伴椭圆微分算子，参见 例如[Wel08，第 IV 节。2]尤其是，我们可以应用 Hodge定理 [Hod89]得到一个正交分解（其他算子也同理）：

$$\Omega^{\bullet,\bullet}(X) = \ker\overline{\square} \oplus \operatorname{im}\overline{\partial} \oplus \operatorname{im}\overline{\partial}^*,$$

由此我们推得该同构

$$H^{\bullet,\bullet}_{\overline{\partial}}(X) \simeq \ker\overline{\square}.$$

我们还可以构造一个适用于计算 Bott–Chern 上同调的拉普拉斯算子。从非椭圆算子 $\partial^*\partial + \partial^*\partial + (\partial\partial)(\partial\partial)^*$ 出发，可以对其进行修正，从而得到一个不改变其核的椭圆算子：

$$\tilde{\Delta}_{BC} := (\partial\overline{\partial})(\partial\overline{\partial})^* + (\partial\overline{\partial})^*(\partial\overline{\partial}) + (\overline{\partial}^*\partial)(\overline{\partial}^*\partial)^* + (\overline{\partial}^*\partial)^*(\overline{\partial}^*\partial) + \overline{\partial}^*\overline{\partial} + \partial^*\partial.$$

该算子最初由 [KS60]，引入，随后由 Schweitzer [Sch07] 进行了详细研究。在这种情况下，同样存在 Hodge 型分解和一个同构

$$H^{\bullet,\bullet}_{BC}(X) \simeq \ker\tilde{\Delta}_{BC},$$

参见 [Sch07]。通过考虑

$$\tilde{\Delta}_A := \partial\partial^* + \overline{\partial}\overline{\partial}^* + (\partial\overline{\partial})^*(\partial\overline{\partial}) + (\partial\overline{\partial})(\partial\overline{\partial})^* + (\overline{\partial}\partial^*)^*(\overline{\partial}\partial^*) + (\overline{\partial}\partial^*)(\overline{\partial}\partial^*)^*.$$

调和理论有一些直接的应用。首先，在紧致全纯流形上，德拉姆上同调、多尔博上同调、博特-陈上同调和 Aeppli 上同调都是有限维向量空间。其次，注意到 $*\Delta = \Delta *$，而 $*\Box = \Box *$ 和 $*\Delta_{BC} = \Delta_A *$，它们实现了这些对偶关系

$$\begin{aligned} H^k_{dR}(X,\mathbb{C}) &\simeq H^{2n-k}_{dR}(X,\mathbb{C}) \quad \text{(Poincaré)},\\ H^{p,q}_{\overline{\partial}}(X) &\simeq H^{n-p,n-q}_{\overline{\partial}}(X) \quad \text{(Serre)},\\ H^{p,q}_{BC}(X) &\simeq H^{n-p,n-q}_{A}(X) \quad \text{(Schweitzer)}. \end{aligned}$$

3.2 黎曼几何简述

为统一记号并为下一节作铺垫，我们先回顾黎曼框架的基础知识。关于更多细节和全面的论述，请参阅经典文献 [Bes08]。

设 g 是可微流形 M 上的黎曼度量。列维-奇维塔联络是 M 上的唯一仿射联络 D，它保持 g（即 $Dg = 0$）且无挠（即 $T = 0$，其中 $T(V, W) := D_V W - D_W V - [V, W]$）。该联络完全由 Koszul公式确定：$2g(D_V W, Z) = Vg(W, Z) + Wg(Z, V) - Zg(V, W) + g([V, W], Z) - g([W, Z], V) + g([Z, V], W)$。它定义了曲率张量 $R(V, W) = D_{[V,W]} - [D_V, D_W]$，可将其解释为取值于 End$(TX)$ 的 2-形式。我们也可以用以下方式解释曲率。将 α 视为取值于 TM的微分 k-形式。定义与 D 相关联的外微分 d^D 为 $(d^D\alpha)(V_0, ..., V_k) = \sum_i (-1)^i D_{V_i}(\alpha(V_0, ..., \hat{V}_i, ..., V_n)) + \sum_{i\neq j} (-1)^{i+j}\alpha([V_i, V_j], V_0, ..., \hat{V}_i, ..., \hat{X}_j, ..., X_n)$，其中“$\hat{X}_i$”表示省略。于是，$R = -(d^D)^2$ 衡量 d^D 未能成为真正微分的程度。曲率张量满足若干附加对称性。显然，$R(V, W) = -R(W, V)$，并且还有恒等式 $g(R(V, W)Z, Y) = -g(R(V, W)Y, Z)$。此外，$R \wedge \mathrm{id} = 0$（称为第一或代数 Bianchi恒等式）以及 $d^D R = 0$（第二或微分 Bianchi恒等式），详见 [Gau15]。曲率张量恰好包含关于截面曲率 $K(V, W) = g(R(V, W)V, W)/(g(V,V)g(W, W) - g(V, W)^2$的全部信息。

任意平面 $\sigma_p = \mathrm{span}\{V, W\} \subseteq T_pX$ 在 p处的截面曲率，它对应于由测地线张成的曲面的高斯曲率；这些测地线在 p处的切向量属于 σ_p。不过，有趣的信息也蕴含在里奇曲率中，其定义为 $\mathrm{Ric}(V,\ W) :=\mathrm{tr}(Z \mapsto R(V,\ Z)W)$。最后，另一个重要的度量不变量是函数 $s = \mathrm{tr}_g r$，称为标量曲率。

为了找到在自同构意义下唯一、并编码流形拓扑或可微性质的典范度量，必须解决若干习题。

- 具有常截面曲率的完备黎曼度量引出了空间形式这一概念。在每个维数 n，至多只有三种单连通模型空间形式（相差一个位似）：具有平坦度量的欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ （$R = 0$）；具有正常截面曲率圆度量的单位球面 S^n （$R = +1$）；以及具有常负截面曲率的双曲空间 H^n（$R = -1$）。

- 满足以下条件的度量 g

$$\mathrm{Ric}_g = \lambda \cdot g$$

对于某个常数 λ 的情形称为爱因斯坦度量。该条件与爱因斯坦场方程$\mathrm{Ric} - \frac{1}{2}sg = T$密切相关，其中 T是能量动量张量；在真空（$T = 0$）中，解对应于里奇平坦度量。爱因斯坦度量是总标量曲率泛函 $S(g) = \int_M s_g \, \mu_g$ 在体积固定的度量上的临界点。如 [Bes08第 6], 页所述，寻找显式例子颇具挑战，已知构造往往依赖于较大的对称群或耦合方程。一个关键的存在性结果是Aubin-Yau 定理 [Aub78、Yau78], ，它证明了在第一陈类$c_1(X) \leq 0$非正的紧K¨ahler流形上存在K¨ahler-爱因斯坦度量。近期进展 [CDS15a、CDS15b、CDS15c、Tia15] 也讨论了Fano流形（$c_1(X) > 0$）上的存在性。具有平凡典范丛的单连通流形称为卡拉比-丘流形，它们容许整体性含于SU(n)的里奇平坦K¨ahler度量。这些流形因其保持超对称性的性质 [CHSW85]，在弦理论紧化中起着中心的作用。爱因斯坦度量是归一化里奇流的驻点

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2\mathrm{Ric}_{g(t)} + \frac{2}{n} r_{g(t)} \cdot g(t),$$

其中 $n = \dim M$ 且 r_g 是平均标量曲率。Hamilton[Ham82] 证明了具有正 Ricci 曲率的紧三维黎曼流形上的长时间存在性，以及收敛到爱因斯坦度量。里奇流保持K¨ahler条件，从而得到K¨ahler-里奇流。Cao [Cao85]利用该流重新证明了Aubin-Yau 定理，即通过证明收敛到唯一的K¨ahler-爱因斯坦度量，对于紧K¨ahler流形，具有 $c_1(X) \leq 0$。

- 对常数量曲率度量的研究由Yamabe开创[Yam60] ，并由Trudinger [Tru68], 、Aubin[Aub76], 与Schoen [Sch84], 的共同努力得以解决；他们运用了来自广义相对论的正质量定理 [SY79]。他们证明，任何黎曼度量g 在紧致 n维流形上都可以共形重标度为$u^{\frac{4}{n-2}}g$ ，使其具有常数量曲率,— 从而将该问题归结为求解偏微分方程

$$\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g u - s_g u + cu^{\frac{n+2}{n-2}} = 0,$$

其中 Δ_g 是拉普拉斯-贝尔特拉米算子，而 c 为一个常数。在K¨ahler情形下，标量曲率具有辛解释，即作为无穷维哈密顿作用的矩映射 [Don97，Fuj90]。常数量曲率K¨ahler（cscK）度量在固定的K¨ahler类中的存在性最近由Chen与Cheng建立[CC21a，CC21b]。它们是极值度量 [Cal82],的特例，这些度量使卡拉比泛函最小化。全面的介绍参见 [Gau15，Sz´e14，GZ17]。

3.3 厄米联络与曲率

在厄米情形中，一个关键问题是，除非度量是 K¨ahler 度量，否则列维-奇维塔联络通常不保持厄米结构。设 X 是维数为 n的全纯流形，配备厄米度量 g 及其关联的 (1,1)-微分形式 $\omega = g(J\,,\,)$，其中 J 是复结构。为同时保持 g 和 J，必须考虑满足 $\nabla g = 0$ 和 $\nabla J = \bar{0}$的线性联络 ∇，而这些联络通常带有挠率 $T \neq 0$。此类厄米联络构成一个以 $\Omega^{1,1}(X, TX)$ 为模型的仿射空间。

在他那篇著名论文中 [Gau97], Gauduchon 引入了一个单参数厄米联络族 $\{\nabla^t\}_{t\in\mathbb{R}}$，如今称为*Gauduchon* 联-

联络，定义如下

$$g(\nabla^t_V W, Z) = g(D_V W, Z) - \frac{1-t}{4} d\omega(JV, JW, JZ) + \frac{1+t}{4} d\omega(JV, W, Z).$$

当度量为 K¨ahler 时，所有 Gauduchon 联络都与列维-奇维塔联络重合。一些值得注意的情形包括：

$t = 1$： 陈联络，这是唯一一个其 (0，1) 部分等于全纯切丛上 Cauchy-Riemann算子的厄米联络；

$t = -1$： 厄米*Bismut*联络 [Bis89], 这是唯一具有全斜对称挠率的厄米联络；

$t = 0$： 将列维-奇维塔联络正交投影到厄米联络仿射空间上的结果，也称为第一典范联络；

$t = 1/2$： Libermann意义下的共形联络；

$t = 1/3$： 具有最小挠率的厄米联络。

与任意这样的厄米联络 ∇ 相关联的是一个曲率算子

$$R \in \Omega^2(X, \mathrm{End}(TX)), \qquad R(V, W) := [\nabla_V, \nabla_W] - \nabla_{[V,W]}.$$

借助度量，也可以将其视为一个四阶协变张量：

$$R(V, W, Z, Y) := g(R(V, W)Z, Y) \in \Omega^2(X) \otimes \Omega^2(X).$$

在 K¨ähler 情形下，所有 Gauduchon联络都与 Levi-Civita 联络重合，而后者也等于陈联络。因此，曲率张量满足附加对称性： $R \in S^2\Omega^2(X)$ 和 $R \in \Omega^{1,1}(X, \mathrm{End}(T^{1,0}X))$。Gray¨、Gra [Yang 和 Zheng76], YZ18b[已研究了这些对称性在非 K],ähler 情形下能够保留到何种程度；近期的相关研究见 [AOUV22]。

在一般情形下，这些对称性的缺失导致了里奇曲率的几种定义，它们通过不同的迹得到：

$$\mathrm{Ric}^{(1)}(V, W) := \mathrm{tr}\, R(V, W) \in \Omega^2(X),$$
$$\mathrm{Ric}^{(2)}(Z, Y) = \mathrm{tr}_g R(\cdot, \cdot, Z, Y) \in \mathrm{End}(TX).$$

两者得到相同的标量曲率：

$$s := \mathrm{tr}_g \mathrm{Ric}^{(1)} = \mathrm{tr}\,\mathrm{Ric}^{(2)} \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R}).$$

也可以考虑第三种迹，不过目前尚未发现令人信服的几何解释。

对于陈联络，第一里奇形式$\mathrm{form}^{(1)}$是一个闭实 (1，1)-形式，代表第一博特–切恩类 $c_1^{BC}(X) \in H^{1,1}_{BC}(X, \mathbb{R})$，它映射到反典范丛 K_X^{-1} 的通常第一陈类。

3.4 特殊埃尔米特度量

我们继续使用相同的记号。考虑 $D\omega$，即相对于列维-奇维塔联络的 (1，1)-形式 ω 的协变导数。根据恒等式，这可视为张量 $\Omega^2(X, TX)$ $g((D\omega)(V, W)Z) = (D_V\omega)(W, Z)$。关于按复双次数进行的详细分解，参见 [Gau97，命题 1]。

在酉群 $U(n)$的作用下，张量 $D\omega$ 分解为四个不可约分量，其中一个分量在可积（复）情形下消失。这些分量中特定子集的消失，形成了著名的 Gray–Hervella分类 [GH80]，将近厄米结构分为 $2^4 = 16$若干类。现在我们介绍几种与本文讨论最相关的厄米度量类型。

K¨ahler 厄米度量称为*K¨ahler* 度量，当且仅当 $D\omega = 0$，这与 $d\omega = 0$ 等价。在这种情况下，ω 定义了一个辛结构，且复结构是平行的，即 $DJ = 0$。K¨ahler 度量具有显著的几何、上同调和拓扑性质。

平衡 厄米度量满足 $d\omega^{n-1} = 0$，其中 n 是复维数，或者等价地 $d^*\omega = 0$，称为 平衡度量 [Mic82]。它们的显著特点是在修改下保持稳定 [AB96]。

SKT 厄米度量若其 Bismut 联络的挠率三形式（由 $d^c\omega$ 给出）是闭的，即，$dd^c\omega = 0$，则称为强 *K¨ahler* 带挠率，或等价地称为多重闭 度量。

Gauduchon 厄米度量 ω 称为标准度量或*Gauduchon* [Gau77b]，当它满足 $\partial\bar{\partial}\omega^{n-1} = 0$ 时。在复维数为 2 时，这一条件与多重闭条件一致。Gauduchon 度量的重要性

在于：在任意紧复流形上，每个厄米度量共形类都包含唯一一个体积为 1 的高迪雄度量，参见 [Gau77b，定理ˆ 1]（参见第 3.5 节）。

LCK 厄米度量称为局部共形 ***K¨ahler*** 度量，若它局部共形于某个 K¨ähler 度量。根据庞加莱引理，共形因子可由一个全局闭1-形式 θ编码，该形式称为李形式，并满足

$$d\omega = \theta \wedge \omega, \quad \text{with } d\theta = 0.$$

LCK 几何可以理解为 K¨ähler 几何的等变（齐次）版本 [GOPP06]。若 ω 是 X 上带有˜李形式 θ的 LCK 度量，则存在一个覆盖 $\tilde{X}$，其上赋有 K¨ähler 度量 $\tilde{\omega}$，使得 θ 的拉回是恰当的，$\tilde{\omega}$ 共形于 ω的拉回，且覆盖变换群在 $\tilde{\omega}$ 上以齐次变换作用。注意，除某些井上曲面外，大多数紧复曲面都具有 K¨ähler 度量或 LCK 度量，见 [Bel00]。关于 LCK 几何的最新综述，参见 [OV24]。

我们指出，对于紧致全纯曲面，K¨ähler度量的存在性是一种拓扑性质：它完全取决于第一 Betti 数是否为偶数。这可由恩里克斯、Kodaira 和萧荫堂的分类结果得出，后来 Lamari [Lam99] 和 Buchdahl [Buc99] 分别以独立且内在的方式证明了这一点。

3.5 Gauduchon度量的存在性

一般而言，紧致全纯流形上不存在特殊 Hermitian 度量，Gauduchon度量除外；这一点已在 [Gau77b, 定´理`陈述1]中证明。设 X 是一个 n维紧致全纯流形，且 ω 是 X上的一个厄米度量。若 θ 表示该度量的李形式，即由 $d\omega^{n-1} = \theta \wedge \omega^{n-1}$定义的唯一 1-形式，则 ω是 Gauduchon 度量当且仅当 $d^*\theta = 0$。我们将回顾以下命题的证明。

定理 11 ([Gau77b])**.** 设 (X, J) 是一个维数为 $n > 1$的紧致全纯流形。那么，在任意厄米度量的共形类中，都存在一个高迪雄度量，且除相差一个正常数倍外，该度量唯一。

证明。 在 X 上任取一个厄米度量 ω 。我们要证明，存在唯一一个（相差一个常数倍意义下）光滑函数 $\psi : X \to \mathbb{R}^+$，使得 $\psi\omega$ 是高迪雄度量，即 $\partial\overline{\partial}(\psi^{n-1}\omega^{n-1}) = 0$。首先，考虑作用于光滑函数上的陈拉普拉斯算子

$$\Delta^{\mathrm{Ch}} f := \Delta_\omega f + g(df, \theta_\omega) = 2\,\mathrm{tr}_\omega(\sqrt{-1}\partial\overline{\partial} f)$$

及其形式伴随

$$(\Delta^{\mathrm{Ch}})^* f = \Delta_\omega f - g(df, \theta_\omega) + d^{*_\omega}\theta_\omega f\,.$$

特别地，注意到 $d^{*_\omega}\theta_\omega = (\Delta^{\mathrm{Ch}})^*(1)$。现在考虑共形变换 $\tilde{\omega} = \Phi^{\frac{2}{n-1}}\omega$ 并记其对应的陈拉普拉斯算子为 $\Delta^{\mathrm{Ch}}_\Phi$。于是

$$\Delta^{\mathrm{Ch}}_\Phi = \Phi^{-\frac{2}{n-1}}\Delta^{\mathrm{Ch}} \quad \text{and} \quad (\Delta^{\mathrm{Ch}}_\Phi)^{\tilde{*}} = \Phi^{-\frac{2n}{n-1}}(\Delta^{\mathrm{Ch}})^* \circ \Phi^2\,.$$

因此， $\tilde{\omega}$ 是 Gauduchon 当且仅当 $d^{*_{\tilde{\omega}}}\tilde{\theta}_{\tilde{\omega}} = 0$ ，当且仅当 $(\Delta^{\mathrm{Ch}}_\Phi)^{\tilde{*}}(1) = 0$，当且仅当 $(\Delta^{\mathrm{Ch}})^*(\Phi^2) = 0$ ，当且仅当 $\Phi^2 \in$ 核 $(\Delta^{\mathrm{Ch}})^*$。接下来需要证明线性椭圆算子 $(\Delta^{\mathrm{Ch}})^*$的核中存在唯一的正函数。事实上，如果 $f \in$ 核 $(\Delta^{\mathrm{Ch}})^*$ 为正，则根据前面的论证， $\tilde{\omega} := f^{\frac{1}{n-1}}\omega$ 是一个 Gauduchon 度量。

注意，陈拉普拉斯算子 Δ^{Ch} 是一个实二阶椭圆算子，具有光滑系数且不含零阶项，即 $\Delta^{\mathrm{Ch}}(1) = 0$。显然， $\mathbb{C} \subseteq \ker(\Delta^{\mathrm{Ch}})$。由于 X 是紧致且连通的，若 $f \in \ker(\Delta^{\mathrm{Ch}})$，根据霍普夫极大值原理， f 为常数。因此， $\ker(\Delta^{\mathrm{Ch}}) = \mathbb{C}$。注意， $(\Delta^{\mathrm{Ch}})^*$ 含有零阶项，但 $(\Delta^{\mathrm{Ch}})^*$ 是椭圆的，并且 Δ^{Ch} 的指标与 $(\Delta^{\mathrm{Ch}})^*$ 的指标均等于拉普拉斯算子 Δ_ω 的指标，因此均等于 0。因此， $\dim\ker(\Delta^{\mathrm{Ch}})^* = \dim\ker(\Delta^{\mathrm{Ch}}) = 1$。现在我们需要以下

引理 1。设 $f: X \to \mathbb{R}$ 是一个光滑函数。若 $f \in \ker(\Delta^{Ch})^*$ 且 $f \neq 0$，则 $(f,1)_\omega = \int_X f\,dV_\omega \neq 0$。

引理 *1* 的证明。 反证法，假设 $(f,1)_\omega = \int_X f\,dV_\omega = 0$。由于 $\dim\ker(\Delta^{\mathrm{Ch}})^* = 1$，根据假设 f 是 $\ker(\Delta^{\mathrm{Ch}})^*$的生成元。因此，常值函数 1 与 $\ker(\Delta^{\mathrm{Ch}})^*$ 正交分解

$$\mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C}) = \ker(\Delta^{\mathrm{Ch}})^* \oplus \mathrm{Im}(\Delta^{\mathrm{Ch}})$$

可知 $1 \in \mathrm{Im}(\Delta^{\mathrm{Ch}})$，也就是说，存在一个函数 h: $X \to$ 复数域，使得 $\Delta^{\mathrm{Ch}}(h) = 1 > 0$。由最大值原理可知， h为常数，因此 $\Delta^{\mathrm{Ch}}(h) = 0 \neq 1$ ，这就产生了矛盾。 □

引理 2. 设 $f: X \to \mathbb{R}$ 是一个光滑函数。若 f 是$\ker(\Delta^{Ch})^*$ 的生成元，则 $f \geq 0$ 或 $f \leq 0$ 在 X上。

引理 2 的证明。由于 f 是 $\ker(\Delta^{\mathrm{Ch}})^*$ 的一个生成元，故 $f \neq 0$，从而由前述结果可得 $(f,1)_\omega = \int_X f\, dV_\omega \neq 0$。设 $(f,1)_\omega > 0$。我们将证明 $f \geq 0$ 在 X上成立。用反证法，假设存在一点 $x_0 \in X$，使得 $f(x_0) < 0$。由 f的连续性，存在 x_0 的一个开邻域 U，使得 $f < 0$ 在 U上成立。考虑包含 U的开集，由下式给出

$$V := \{x \in X : f(x) < 0\}.$$

于是可以构造一个光滑函数 $\varphi: X \to \mathbb{R}^+$，使得

$$\int_V \varphi f \, \mathrm{dV}_\omega + \int_{X\setminus V} \varphi f \, \mathrm{dV}_\omega = \int_X \varphi f \, \mathrm{dV}_\omega = 0$$

即 $(\varphi f,1)_\omega = 0$。因此，关于共形度量 $\varphi\omega$，$(\varphi^{1-n} f,1)_{\varphi\omega} = 0$。此外，由于 $f \in \ker(\Delta^{\mathrm{Ch}})^*$，则 $\varphi^{1-n} f \in \ker(\Delta^{\mathrm{Ch}})^*_{\varphi\omega}$ 并且 $\varphi^{1-n} f \neq 0$ 但这与引理 1。□

最后，我们回顾以下

引理 3. 设 X 为一个连通光滑流形，且 $Q: \mathcal{C}^\infty(X,\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(X,\mathbb{R})$ 是一个具有实光滑系数的二阶椭圆微分算子。若 $f \in \mathcal{C}^\infty(X,\mathbb{R})$ 满足 $Q(f) = 0$ 且 $f \geq 0$ 在 X上，则$f > 0$ 或 $f \equiv 0$ 在 X上。

证明可参见例如 [Pop23] 。作为前述结果的推论，可以证明以下结论

推论 12. 设 $f: X \to \mathbb{R}$ 是一个满足 $f \in \ker(\Delta^{Ch})^*$的光滑函数。那么 $f > 0$ 或 $f < 0$ 或 $f \equiv 0$ 在 X上。

证明。若 $f \neq 0$ 那么 f 生成 $\ker(\Delta^{\mathrm{Ch}})^*$，因为它是一维的。然后由引理 2，$f \geq 0$ 或 $f \leq 0$ 在 X上。假设 $f \geq 0$，那么应用引理 3，取 $Q = (\Delta^{\mathrm{Ch}})^*$ 可得 $f > 0$。□

我们终于可以完成定理 11的证明。需要找到一个在常数意义下唯一的光滑正函数 f 于 X 上，使得 $f \in \ker(\Delta^{\mathrm{Ch}})^*$。由于 $\ker(\Delta^{\mathrm{Ch}})^*$ 是一维的，在常数意义下的唯一性立即成立。现令 $f \in \ker(\Delta^{\mathrm{Ch}})^*$ 为一个生成元，因此 $f \neq 0$从而由推论 12，$f > 0$ 或 $f < 0$ 于 X上。假设 $f > 0$ 则我们确实完成了证明,—$\tilde{\omega} := f^{\frac{1}{n-1}}\omega$ 是一个高迪雄度量。□

3.6 LCK三维流形的分类

对于紧致全纯流形 X，其复维数为 n，亚纯函数代数 $\mathcal{M}_X$ 是有限生成的，且其超越次数取值于 $\{0,\dots,n\}$。该不变量由 Siegel 首先确立，称为代数维数:

$$a(X) := \operatorname{tr}\deg_{\mathbb{C}} H^0(X,\mathcal{M}_X).$$

其几何意义在代数约化定理之后便显而易见，参见例如 [Uen75]。若紧复流形 X 的代数维数为$a(X) = k$，则存在如下图表（在双亚纯等价意义下唯一）

$$\begin{array}{ccc} X & \dashleftarrow\dashrightarrow & X^* \\ & & \downarrow f \\ & & V \end{array}$$

其中 X^* 与 X 双亚纯等价，且维数相同； V是维数为 k的射影流形，而 f 是一个全纯满射，它在 X^* 与 V的亚纯函数域之间诱导出同构。我们回顾一下，弱分解定理在解析范畴中同样成立 [AKMW02], : 任意双亚纯映射都可以分解为沿光滑中心进行的一系列有限次爆破和反爆破。据推测，强分解也成立[Hir64a，Hir64b，AKMW02], ，也就是说，任意双亚纯变换都可以表示为 ˆ

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & \swarrow^{\sigma} & & \searrow^{c} & \\ X & \dashleftarrow\dashrightarrow & & \dashleftarrow\dashrightarrow & X^* \end{array}$$

其中， σ 和 c 是由以光滑中心进行的爆发复合而成的。

我们根据紧致全纯曲面的代数维数，概述其分类 X 。

$a(X) = 2$**:** 根据 Chow 和 Kodaira 的定理 [CK52], 紧致全纯曲面具有两个代数独立的亚纯函数，即，代数维数 $a(X) = 2$，当且仅当它是代数曲面。

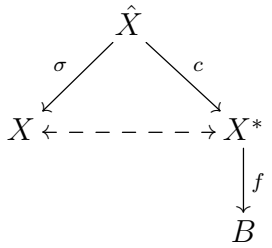
$a(X) = 1$**:** 若 X 不是代数的，且 $a(X) = 1$，则 X 是一个椭圆曲面：存在一个全纯满射 f: $X \to C$ 到一条

非奇异复曲线 C，其一般纤维是光滑椭圆曲线。可能的奇异纤维的分类归功于 Kodaira。此外，若 X 是非 K¨ahler（注意，它仍然具有 LCK 结构），即 $b_1(X)$ 为奇数，则所有光滑纤维均彼此同构，唯一的奇异纤维要么是一般纤维的重纤维，要么在曲面非极小的情况下，是有理曲线树。在这种情况下，该曲面称为拟丛；参见 [Brˆı94、Brˆı96]。

$a(X) = 0$**：** 如果 X 的代数维数为零，那么它没有非常值的亚纯函数。在这种情况下， X 必然是非代数的。代数维数为零的曲面包括某些复环面、某些 K3曲面以及某些 VII类曲面。

在 [APV23], 中，我们讨论了在 X 具有 LCK度量这一假设下三维复流形的分类问题。最大代数维数的情形，即 $a(X) = 3$，由于 [Moˇı66、DG MS75、KK10]的工作而已得到充分理解：事实上，在这种情况下， X 是 Moˇıˇshezon 流形，因此满足 $\partial\partial$-引理性质，故而是 K¨ahler 流形。随后我们转向代数维数比最大值小一的情形，即 $a(X) = n - 1 = 2$。剩下的情形 $a(X) = 1$ 将在 [APV25]中讨论。

在代数约化定理和强分解猜想的前提下，我们考虑以下图表：



其中， B 是一个射影曲面，且 f : $X^* \to B$ 是一个满射、适当的全纯映射，具有连通纤维。已知 f 的一般纤维是光滑椭圆曲线 [Kaw65]。我们进一步假设 f 是平坦的（以避免纤维退化时出现意外行为），且其奇异轨迹$S(f)$ 是一个简单正规交叉除子。

论证中的一个关键工具是以下结果，它是在弱 *LCK* (WLCK) 结构这一更一般的背景下陈述的。这意味着$\omega \geq 0$ 仅在真解析子集 N_ω之外被假定为正，该子集可能非空。此类结构是必要的，因为一般而言，

度量性质在爆破和爆缩下表现不佳。另一方面，如果 X 是 WLCK 的，那么 X也是，见 [APV23，命题 2。2]。

定理 13 (纤维化引理，[APV23，引理 2。4])。设 X 和 B是全纯流形，且维数 X > 维数 B，并设 $f\colon X \to B$ 是一个满射、真全纯映射，且具有连通纤维。假设 ω 是 X 上的 *WLCK* 结构，其李形式为 θ。若李形式的上同调类满足 $[\theta] = f^*[\alpha]$，对于某个类 $[\alpha] \in H^1(B, \mathbb{R})$，则 $[\theta] = 0$。

证明。经过一次全局共形变换后，我们可以假设 $\theta = f^*\alpha$。记S_f 为非平坦轨迹与奇异轨迹的并，即点集 $b \in B$，其中纤维 $f^{-1}(b)$ 或者是奇异的，或者其维数严格大于 $k := $维数 $X -$ 维数 $B > 0$。众所周知，S_f是一个解析子空间。此外，限制映射 $f\colon X \setminus f^{-1}(S_f) \to B \setminus S_f$是一个淹没。我们还考虑开子集 $B' \subset B \setminus S_f$，在此处，对于任意 $b \in B'$，

$$v(b) := (f_*\omega^k)(b) = \int_{f^{-1}(b)} \omega^k|_{f^{-1}(b)} = \mathrm{vol}_\omega(f^{-1}(b)) > 0.$$

根据结构上的“弱”假设，补集 $B \setminus B'$ 是 B的真解析子集。

根据WLCK条件 $d\omega = f^*\alpha \wedge \omega$，并利用投影公式，我们计算

$$d(f_*\omega^k) = f_*(d\omega^k) = kf_*(f^*\alpha \wedge \omega^k) = k\alpha \wedge f_*\omega^k,$$

我们将其改写为

$$dv = k\alpha \wedge v.$$

这表明在 B'上，

$$\alpha_{|B'} = \frac{1}{k}\frac{dv}{v} = \frac{1}{k} d\log v,$$

因此上同调类满足 $[\alpha]|_{B'} = 0$。

由包含映射 $B' \hookrightarrow B$ 诱导的映射 $H^1(B, \mathbb{R}) \to H^1(B', \mathbb{R})$ 是单射。例如，这可由这一对 (B, B') 的上同调长正合列推出；此外，$H^1(B, B', \mathbb{R}) = 0$，这一点可由切除、同伦不变性和 Thom 同构得到；再结合 $B \setminus B'$ 在 B 中的实余维数至少为 2 这一事实即可，参见例如 [Suw98，定理 II.5.3]。因此，我们得出 $[\alpha] = 0$ 属于 $H^1(B, \mathbb{R})$，从而证明了该论断。□

第二个工具是将 Vaisman 引理推广到 WLCK 情形所得的以下结果。

定理 14 (Vaisman引理，[APV23，引理 2。5], 根据 [Vai80])。设 X是一个维数为 $\dim X = n > 1$ 、带有 ***WLCK*** 结构 ω 且李形式为 θ的紧致全纯流形。如果 X 存在 ***K¨ahler*** 度量，则$[\theta] = 0$。

证明。在 X 上固定一个 K¨ahler 度量 g_0，并令 θ_0 为相对于 g_0 的 $[\theta]$ 的调和代表元。经过全局共形变换后，我们可以假设 WLCK 结构 ω_0 的李形式为 θ_0。将 $\theta_0 = \alpha + \overline{\alpha}$ 分解为纯型分量，其中 $\alpha \in \wedge^{1,0} X$。将方程 $d\omega_0^{n-1} =(n-1)\theta_0 \wedge \omega_0^{n-1}$ 乘以 α，得到

$$\alpha \wedge d\omega_0^{n-1} = (n-1)\alpha \wedge \overline{\alpha} \wedge \omega_0^{n-1}.$$

根据强 Hodge 分解，α 本身是调和的，特别是闭的。因此，

$$0 = \int_X \alpha \wedge d\omega_0^{n-1} = (n-1)\|\alpha\|^2_{\omega_0|_{X\setminus N_\omega}}.$$

这意味着 $\alpha = 0$，因此也意味着 $[\theta] = 0$，证明至此完成。 □

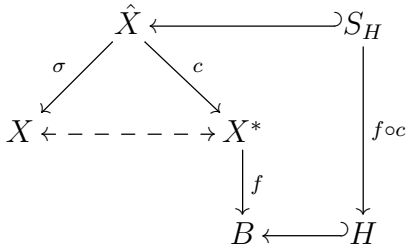
现在我们可以陈述主要结果。下文中，我们作如下假设：

- 强分解猜想；
- 代数约化是平坦的，且其奇异轨迹是简单正规交叉除子（注意，应用 Hironaka 平坦化可能会引入严重奇点）；
- 典范丛 K_{X^*} 是数值有效的，即 $K_{X^*} \cdot C \geq 0$ 对任意曲线 C 在X^*；我们回顾一下，Grassi [Gra91] 在射影情形下，以及更一般地，H¨oring 和 Peternell [HP16]对于 K¨ahler 三维复流形，证明了非单连通的紧致椭圆三维簇存在极小模型。

定理 15 ([APV23])。设 X 是一个代数维数为 $a(X) = 2$ 的紧致全纯三维流形，带有一个 ***Lee*** 类非零的 ***LCK***度量。在上述技术假设下，X 是一个以射影曲面为底的膨胀椭圆拟丛。

证明思路。 我们首先研究一般纤维，并证明它们彼此同构。由 j-不变量的连续性可知，所有光滑纤维均同构；将这条共同的椭圆曲线记为 $\mathcal{E}$。

取一个一般光滑除子 $H \subset B$。通过两次应用贝蒂尼定理，我们可以假定 H 与 $S_H := (f \circ c)^{-1}(H)$均为光滑：



我们还可以假定 S_H 不包含于 c的例外除子中，从而保证 $\sigma^*\omega$ 在 S_H上诱导出WLCK 结构。

如果 S_H 是K¨ahler的，则由Vaisman引理可得 $[\sigma^*\theta]|_{S_H} = 0$ 。通过标准上同调论证，可知存在一个解析子集$\mathcal{Z} \subseteq B$ ，使得

$$[\sigma^*\theta]|_{\hat{X}\setminus(f\circ c)^{-1}(\mathcal{Z})} = (f \circ c)^*[\alpha]$$

对某个 $[\alpha] \in H^1(B \setminus \mathcal{Z})$ 。由纤维化引理可知$[\sigma^*\theta]|_{\hat{X}\setminus(f\circ c)^{-1}(\mathcal{Z})} = 0$，因此 $[\theta] = 0$，这与Lee 类非平凡的假设相矛盾。因此， S_H 不是K¨ahler的。现在我们可以应用Brˆınzanescu定理于非K¨ahler曲面，参见例如 [Brˆı96，命题 3.17], ，从而断定 $S_H \to H$ 的一般纤维是同构的。因此， f 的一般纤维是同构的。

现在我们考虑奇异纤维。首先，通过应用 Bertini 定理以及 Brˆınzˇanescu 关于曲面的结果，我们证明，$p \in S(f)$ 上的一般奇异纤维只是形如 $m\mathcal{E}$ 的重纤维；由于对 X^* 的极小性假设，不会出现有理曲线树。

假设 $S(f)$ 是简单正规交叉除子，那么不形如 $m\mathcal{E}$ 的奇异纤维只出现在特殊点处：要么是单个分支上的光滑点，要么是不同类型分支交点处的节点，例如 $m\mathcal{E}$ 和 $q\mathcal{E}$。经过适当的伽罗瓦覆盖后，这些奇异纤维构成一个有限集。

最后，假设 f 平坦，我们注意到，带有约化结构的奇异纤维不可能是孤立的，参见 [APV23，引理 2。9]直观地说，原因在于，具有奇异约化的纤维会诱导非平凡的

其周围的局部单值化，但这是不可能的，因为穿孔的二维球是单连通的。

研究几何结构的最后一步，是证明映射 σ 可以取为恒等映射，并且 c 中的爆发是“特殊的”，即每次爆发要么发生在一点上，要么沿着先前步骤中产生的某个例外除子内的一条曲线进行，参见 [APV23，定理 2。12]。

□

3.7 习题

习题 13。 证明：在厄米流形 (X, J, g, ω)上，*Levi-Civita* 联络 D 与陈联络 ∇重合，当且仅当度量是 *K¨ahler*。

提示。 证明恒等式 $3d\omega(V,W,Z) = g((D_V J)W,Z) + g((D_W J)Z,V) + g((D_Z J)V,W)$，以及 $2g((D_V J)W,Z) = 3d\omega(V,W,Z) - 3d\omega(V,JW,JZ)$。 □

习题 14 （霍奇分解）. 设 X 为一个紧致 *K¨ahler* 流形。证明存在一个分解

$$H^k_{\mathrm{dR}}(X,\mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}_{\overline{\partial}}(X), \qquad with \qquad H^{p,q}_{\overline{\partial}}(X) \simeq \overline{H^{q,p}_{\overline{\partial}}(X)}.$$

提示。 设 $L\colon \Omega^k(X) \to \Omega^{k+2}(X)$ 表示由$L = \omega \wedge$ 定义的勒夫谢茨算子，并设 Λ 为其伴随算子。连同计数算子 H（在 $\Omega^k(X)$ 上由 $H|_{\Omega^k(X)} = (n-k)\cdot\mathrm{id}$ 定义，其中 $n = \dim_{\mathbb{C}} X$），这些算子在微分形式空间上给出一个 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$-表示。

利用这一结构，可以验证如下 K¨ahler 恒等式：

$$\begin{aligned}
[\overline{\partial}, L] &= 0, & [\partial, L] &= 0,\\
[\overline{\partial}^*, L] &= \sqrt{-1}\,\partial, & [\partial^*, L] &= -\sqrt{-1}\,\overline{\partial},\\
[\overline{\partial}, \Lambda] &= \sqrt{-1}\,\partial^*, & [\partial, \Lambda] &= -\sqrt{-1}\,\overline{\partial}^*,\\
[\overline{\partial}^*, \Lambda] &= 0, & [\partial^*, \Lambda] &= 0,
\end{aligned}$$

在勒夫谢茨分解的每个不可分解分量上。

证明 K¨ahler 恒等式的另一种方法是注意到，每个 K¨ahler 度量在二阶意义下都与复数域 $\mathbb{C}^n$ 上的标准厄米度量相切。因此，可以将证明归结为复数域 $\mathbb{C}^n$ 上

配备标准 K¨ahler 结构时相应的恒等式，这些恒等式称为秋月–中野恒等式，参见 [Dem12b]。

最后，这些恒等式表明，拉普拉斯算子相差一个常数因子：

$$\Delta = 2\Box = 2\overline{\Box}.$$

由霍奇理论即可直接得到该结论。 □

注。 请注意，上述霍奇分解似乎依赖于度量的选择，因为它是以调和形式来表述的。然而，对于紧致 K¨ähler 流形，得益于 $\partial\bar{\partial}$-引理性质，该分解实际上下降到与度量无关的上同调中；这一性质保证了上同调中存在规范的纯型分解。 □

练习 15 ([Wei58，DGMS75])。 证明紧致 *K¨ahler* 流形满足 $\partial\bar{\partial}$-引理性质。

证明。设 $\alpha \in \Omega^{p,q}(X)$ 是 ∂-闭、 $\bar{\partial}$-闭且 d-恰当的微分形式，其中 X。特别地，根据德拉姆上同调的霍奇理论，微分形式 α与 Δ-调和形式空间正交。注意，根据 K¨ähler 恒等式， Δ-调和形式空间与 $\Box$-调和形式空间及 $\Box$- 调和形式空间重合。由于 α 是 ∂- 闭的，并且与 $\Box$- 调和形式空间正交，再次利用共轭Dolbeault上同调的霍奇理论可知，存在 $\gamma \in \Omega^{p-1,q}(X)$ 使得 $\alpha = \partial\gamma$。对 γ应用Dolbeault上同调的霍奇理论，可得一个 $\Box$-调和形式 h_γ、一个微分形式$\beta \in \Omega^{p-1,q-1}(X)$, 以及一个微分形式 $\eta \in \Omega^{p-1,q+1}(X)$，使得 $\gamma = h_\gamma + \partial\beta + \partial^*\eta$。由 K¨ähler 恒等式可知 $[\partial, \partial^*] = 0$，并且 h_γ 也为 $\Box$-调和形式，特别是 ∂-闭的。因此，
$\alpha = \partial\gamma = \partial h_\gamma + \partial\partial\beta + \partial\partial^*\eta = \partial\partial\beta + \partial^*\partial\eta$。只需证明 $\partial^*\partial\eta = 0$。事实上，由于 α 是 ∂-闭的，可得 $\partial\partial^*\partial\eta = 0$。因此，

$$\|\bar{\partial}^*\partial\eta\|^2 = \langle\bar{\partial}^*\partial\eta, \bar{\partial}^*\partial\eta\rangle = \langle\bar{\partial}\bar{\partial}^*\partial\eta, \partial\eta\rangle = 0,$$

这意味着 $\partial^*\partial\eta = 0$。因此， $\alpha = \partial\partial\beta$ 是 $\partial\bar{\partial}$-恰当的，证毕。 □

练习 16. 证明：在紧致 *K¨ahler* 流形上，偶数阶贝蒂数为正，奇数阶贝蒂数为偶数。

提示。 对于偶数 Betti 数，令 ω 表示与 K¨ähler 度量相联系的辛形式。注意，上同调类 $[\omega]$非平凡，其非平凡幂 $[\omega^k]$也如此。对于奇数 Betti 数，使用霍奇分解。 □

练习 17。 证明 *Hopf* 流形不允许任何 *K¨ahler* 度量。更一般地，证明可微流形 $S^1 \times S^{2n-1}$ 不允许任何与 *K¨ahler* 度量相容的复结构。

提示。 使用 K¨unneth 公式计算 $b_2(S^1 \times S^{2n-1}) = 0$。 □

练习 18。 设 X 是一个复维数为 $n > 2$、配备厄米度量 ω的紧致全纯流形。

- 证明，总存在一个1-微分形式 θ ，使得

$$d\omega^{n-1} = \theta \wedge \omega^{n-1},$$

  称为（平衡）李形式，或挠率1-微分形式。它对应于陈联络挠率的迹。

- 证明 ω 是 *Gauduchon* 度量当且仅当 $d^*\theta = 0$。

- 证明陈拉普拉斯算子 $\Delta_{\mathrm{Ch}} f := 2\mathrm{tr}_\omega(\sqrt{-1}\partial\partial f)$ 与 *Hodge–de Rham* 拉普拉斯算子 Δ之间满足关系

$$\Delta^{\mathrm{Ch}} f = \Delta f + g(df, \theta).$$

练习 19 ([AI01])。 证明：在紧致全纯流形上，若一个厄米度量既是多重闭的又是平衡的，则它必为 *K¨ahler*。

提示。 按照 [Pop23], 证明：若 ω 是一个多重闭度量，则 $*\partial\omega \in \ker \partial^*$；而若 ω 是平衡的，则 $\omega^{n-2} \wedge \partial\omega = 0$，即 $\partial\omega$ 是一个原始形式。特别地，若 $\partial\omega$ 是原始形式，则 $*\partial\omega \in \mathrm{Im}\,\partial$。由于 $\ker \partial^* \cap \mathrm{Im}\,\partial = \{0\}$，可得 $\partial\omega = 0$，也就是说 ω 是 K¨ahler。 □

练习 20。 证明岩泽流形 $X = \mathrm{Heis}(3, \mathbb{C})/\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ 存在一个平衡 *Hermitian* 度量。证明它不存在任何多重闭度量。

提示。 首先证明 X 不允许任何不变的多重闭度量，也就是说，这种度量由 Heis(3，复数域) 上在左平移下不变的厄米度量诱导而来。（另见 [FPS04]，其中对允许多重闭度量的六维幂零流形进行了分类。）然后，应用 Belgun 对称化技巧 [Bel00，定理 7] ，从而得出 X上根本不存在多重闭度量。 □

备注。 前述结果并非 Iwasawa 流形所独有。事实上，更一般地， [FV16] 证明了，若一个（2 步）幂零流形带有不变复结构，且同时允许多重闭度量和平衡度量，那么它就是一个环面。根据 [AN22]，幂零步这一假设并非必要。另一种方法是，借助 [Egi01] ，可以通过证明存在一个非零的双次数为（ T，$n-1$） $n-1$的流 $=$（2，2），使得$T \geq 0$ 且 T 为 $\partial\partial$-恰当，从而说明 Iwasawa 流形不允许任何多重闭度量。更准确地说，（2，2）-微分形式 $\partial\partial$（$\varphi^3 \wedge \bar{\varphi}^3$ 可导出这样的流。 □

练习 21 ([GL10,Chi24])。 设 X 是一个复维数为 n的紧致全纯流形，配备厄米度量 ω。证明下列条件等价。

1. 总体积在 $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}$-变形下保持不变，即对任意满足 $\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi > 0$ 的光滑实函数 $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(X,\mathbb{R})$，有

$$\int_X \left(\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi\right)^n = \int_X \omega^n.$$

2. 度量 ω 满足所谓的 关-李条件：

$$\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\omega = 0 \quad and \quad \sqrt{-1}\,\partial\omega \wedge \bar{\partial}\omega = 0.$$

3. 度量 ω 满足

$$\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\omega^k = 0 \quad for\ all\ 1 \leq k \leq n-1.$$

练习 22。 计算 *Hopf* 曲面 $X = \text{复数域}^2 \setminus \{0\}/\mathbb{Z}$ 的陈曲率，其中 整数群 通过 $(z_1, z_2) \mapsto \left(\frac{1}{2}z_1, \frac{1}{2}z_2\right)$ 作用，并配备厄米度量

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}\,dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + \sqrt{-1}\,dz_2 \wedge d\bar{z}_2}{|z_1|^2 + |z_2|^2}.$$

特别地，证明第二陈-里奇形式满足

$$\mathrm{Ric}^{(2)}(\omega) = 2\omega.$$

提示。 关于具体计算，参见例如 [AS20]。 □

4 常陈标量曲率的厄米度量

在下一节中，我们将讨论厄米情形下 Yamabe 问题的一种版本：按照 [ACS17]，我们寻求固定共形类中相对于陈联络具有常量标量曲率的厄米度量。受标量曲率在 K¨ahler 几何的 Donaldson-Fujiki 图景中作为矩映射所发挥作用的启发，我们还提出 LCK 情形下典范度量的新概念，见 [ACPS22、APS+25]。

4.1 陈联络的曲率

设 X 为复维数 n的紧致全纯流形。给定固定的厄米结构 h，我们用 ∇^{Ch} 表示陈联络，用 R^{Ch} 表示由 $R^{Ch}(x,y) = \nabla^{Ch}_x\nabla^{Ch}_y - \nabla^{Ch}_y\nabla^{Ch}_x - \nabla^{Ch}_{[x,y]}$定义的Chern曲率张量。于是， $R^{Ch} \in \wedge^2(X, \mathrm{End}(TX)) \simeq \wedge^2(X, \overline{TX} \otimes TX)$。在局部全纯坐标 $\{z^j\}$中，用 $h_{i\bar{j}}$ 表示代表 h的埃尔米特矩阵，曲率具有如下表达式

$$R^{Ch} = R^{Ch}_{i\bar{j}k\bar{l}}\sqrt{-1}dz^i \wedge d\bar{z}^j \otimes \sqrt{-1}dz^k \wedge d\bar{z}^l$$

其中

$$R^{Ch}_{i\bar{j}k\bar{l}} = -\frac{\partial^2 h_{k\bar{l}}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} + h^{p\bar{q}}\frac{\partial h_{k\bar{q}}}{\partial z^i}\frac{\partial h_{p\bar{l}}}{\partial \bar{z}^j}.$$

由于曲率张量不具有Bianchi对称性，正如上一节已经回顾的那样，收缩 R^{Ch}有三种不同的方式。

- 第一*Chern-Ricci*形式定义为

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}^{(1)}(\omega) &= \mathrm{tr}R^{Ch} = \mathrm{tr}R^{Ch}_{i\bar{j}\bullet\bullet}\sqrt{-1}dz^i \wedge d\bar{z}^j \\ &= h^{k\bar{l}}R^{Ch}_{i\bar{j}k\bar{l}}\sqrt{-1}dz^i \wedge d\bar{z}^j = -\frac{\partial^2 \log\det(h_{k\bar{l}})}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}dz^i \wedge d\bar{z}^j\end{aligned}$$

  它是表示第一Bott-Chern类 $c_1^{BC}(X) \in H^{1,1}_{BC}(X, \mathbb{R})$的闭(1,1)-微分形式：$= \{d\text{-闭的实}(1,1)\text{-微分形式}\} / \{\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi,\ \psi \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})\}$。

- 该第二陈-里奇形式定义为

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}^{(2)}(\omega) &= \mathrm{tr}_g R^{Ch}_{\bullet\bullet k\bar{l}}\sqrt{-1}dz^k\wedge d\bar{z}^l\\ &= h^{i\bar{j}}R^{Ch}_{i\bar{j}k\bar{l}}\sqrt{-1}dz^k\wedge d\bar{z}^l\end{aligned}$$

它是一个一般不具 d-闭性的 (1，1)-形式。

- 第三陈-里奇形式定义为

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}^{(3)}(\omega)_{k\bar{j}} &= \mathrm{tr}_g R^{Ch}_{\bullet\bar{j}k\bullet}\\ &= h^{i\bar{l}}R^{Ch}_{i\bar{j}k\bar{l}}.\end{aligned}$$

当陈联络满足第一Bianchi恒等式时，里奇曲率彼此相同。满足这一性陈 ***Kähler-like*** 的厄米流形 [YZ18a、AOUV22]。注意，据我们所知，目前还没有不是陈平坦的紧致陈 Kähler-like 流形。

陈标量曲率于是具有以下表达式

$$s^{Ch}(\omega) = \mathrm{tr}_g\,\mathrm{Ric}^{(1)} = \mathrm{tr}\,\mathrm{Ric}^{(2)} = h^{i\bar{j}}h^{k\bar{l}}R^{Ch}_{i\bar{j}k\bar{l}}.$$

现在考虑厄米度量 $\omega_f = e^f\omega$ 的共形变换，其中$f\in\mathcal{C}^\infty(X，\mathbb{R})$。记其陈曲率为 R^{Ch}_f。那么，曲率变为

$$(R^{Ch}_f)_{i\bar{j}k\bar{l}} = e^f(R^{Ch}_{i\bar{j}k\bar{l}} - h_{k\bar{l}}\partial^2_{i\bar{j}}f)\,.$$

因此，对于里奇形式，我们有

$$\mathrm{Ric}^{(1)}(\omega_f) = \mathrm{Ric}^{(1)}(\omega) - n\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}f\,,\quad \mathrm{Ric}^{(2)}(\omega_f) = \mathrm{Ric}^{(2)}(\omega) + \frac{1}{2}\omega\Delta^{Ch}_\omega f,$$

其中， Δ^{Ch} 是陈拉普拉斯算子，其局部表达式为 $\Delta^{Ch}_\omega f = -2h^{i\bar{j}}\partial^2_{i\bar{j}}f$。因此，标量曲率的变化为

$$s^{Ch}(\omega_f) = e^{-f}\left(s^{Ch}(\omega) + \frac{n}{2}\Delta^{Ch}_\omega f\right).$$

4.2 Chern-Yamabe 问题

设 X 是一个复维数为 n的紧致全纯流形。给定一个固定的厄米度量 ω，记其关于陈联络的标量曲率为 $s^{Ch}(\omega)$，并记

$$\{\omega\} := \{\exp(f)\omega \,|\, f \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})\}$$

其共形类，其中完全由厄米度量构成。

受黎曼几何中经典 Yamabe 问题的启发，我们要探究共形类 $\{\omega\}$ 中是否存在一个或多个关于陈联络具有常数量曲率的厄米度量。更准确地说，我们旨在研究

$$\mathcal{C}h\mathcal{Y}a(X, \{\omega\}) := \frac{\left\{\omega' \in \{\omega\} \;\middle|\; s^{Ch}(\omega') \text{ is constant}\right\}}{\mathcal{HC}onf(X, \{\omega\}) \times \mathbb{R}^{>0}},$$

具有常数陈标量曲率的厄米度量的模空间，模去保持共形类 $\{\omega\}$的双全纯映射群 $\mathcal{HC}onf(X, \{\omega\})$的作用，并模去 $\mathbb{R}^{>0}$ 通过相似变换产生的缩放作用。

我们注意到，这个问题在本质上不同于经典 Yamabe 问题。事实上，正如 [LY17，推论 45], 所示，在紧致全纯流形上，若厄米度量的陈标量曲率（平均值）与其关联的黎曼度量的标量曲率（平均值）相同，则该度量必为 K¨ahler。因此，Chern–Yamabe 问题也不同于 del Rio 和 Simanca 在[dRS03]中研究的近似厄米流形上的亚马贝型问题。

我们的主要目标是研究陈数量曲率度量的模空间 $\mathcal{C}h\mathcal{Y}a(X, \{\omega\})$ 的性质。具体而言，我们要探讨它是否总是非空（我们将这个问题称为 *Chern-Yamabe* 问题）、何时会缩减为单点，以及在适当假设下它是否可能是紧的。

正如我们稍后将看到的，在适当的归一化条件下，预期的常曲率是一个上同调不变量，仅取决于全纯流形和共形类，称为高迪雄度，记作 $\Gamma_X(\{\omega\})$。我们将证明以下定理，并猜想即使不假设高迪雄度为非正，该结果仍然成立。

定理 16 ([ACS17])。 设 X 是一个赋有共形类 $\{\omega\}$ 的紧致全纯流形，其中共形类由厄米度量构成。如果高迪雄度满足 $\Gamma_X(\{\omega\}) \leq 0$，则陈–山部模空间仅由一个点组成。特别地，对于*Kodaira*维数非负的流形上的任意共形类，该结果均成立。

4.3 刘维尔型方程

我们将 Chern-Yamabe 问题转化为一个非线性偏微分方程，确切地说，是一个半线性方程，与李维尔方程类似。

我们首先注意到，在形如 $e^{2f/n}\omega$ 的共形变换下，Chern 标量曲率按如下公式变换：

$$s^{Ch}\left(e^{2f/n}\omega\right) = e^{-2f/n}\left(s^{Ch}(\omega) + \Delta^{Ch} f\right).$$

我们回顾一下，与 ω 相关联的陈拉普拉斯算子 Δ^{Ch} 定义如下：

$$\Delta^{Ch} f = -2\sqrt{-1}\,\mathrm{tr}_\omega(\partial\bar{\partial} f) = \Delta f + g(df, \theta),$$

其中，θ 是所谓的 李形式 （或 挠率 *1*-形式），由恒等式 $d\omega^{n-1} = \theta \wedge \omega^{n-1}$ 定义。两个重要的特殊情形值得关注。

- 如果 ω 是平衡的，即 $d\omega^{n-1} = 0$（等价地，$\theta = 0$），那么陈拉普拉斯算子 Δ^{Ch} 就化为作用于函数上的通常 Hodge–de Rham 拉普拉斯算子 Δ。

- 若 ω 是 Gauduchon 度量，即 $\bar{\partial}\partial\omega^{n-1} = 0$（等价地，$d^*_\omega\theta = 0$），则格林型恒等式

$$\int_X \Delta^{Ch} f\, \omega^n = 0$$

对任意光滑函数 f都成立。

于是，陈–Yamabe 问题归结为寻找一个光滑函数$f \in \mathcal{C}^\infty$(X，R)和一个常数 $\lambda \in \mathrm{R}$，使得

$$s^{Ch}(\omega) + \Delta^{Ch} f = \lambda \cdot e^{2f/n}, \tag{ChYa}$$

这对应于 $s^{Ch}(\exp(2f/n)\omega) = \lambda$。

现在，我们对期望常数陈标量曲率 λ 给出一种几何诠释。为此，我们在共形类中固定一个合适的参考度量。

更确切地说，我们固定共形类 $\{\omega\}$ 中体积为 1 的 Gauduchon代表 η 。此后，所有几何量均以此选择为准。除相似变换外，我们还通过施加条件对解 f 进行归一化

$$\frac{1}{n!}\int_X \exp\left(2f/n\right)\eta^n = 1.$$

注意，根据詹森不等式，归一化切片中任意度量的体积总是大于或等于 1。因此，在考虑由单位体积度量构成的、更具几何意义的切片时，期望常数陈标量曲率的绝对值大于或等于高迪雄度。

对（ChYa）进行积分后，我们发现，期望常数陈标量曲率 λ 是一个上同调不变量，完全由 X 和共形类 $\{\omega\}$决定：

$$\lambda = \int_X s^{Ch}(\eta)\,\eta^n = \frac{1}{(n-1)!}\int_X c_1^{BC}(K_X^{-1}) \wedge [\eta^{n-1}],$$

其中 $c_1^{BC}(K_X^{-1}) \in H^{1,1}_{BC}(X, \mathbb{R})$ 映射到 X 在 $H^2(X, \mathbb{R})$ 中的第一陈类，而 $[\eta^{n-1}] \in H^{n-1,n-1}_A(X, \mathbb{R})$ 的定义良好，这是因为 η 是 Gauduchon 度量。这个量称为共形类 $\{\omega\}$ 的高迪雄度 $\Gamma_X(\{\omega\})$。它等于反典范线丛 K_X^{-1} 的任意亚纯截面所对应除子的体积，该体积是相对于 Gauduchon 度量 η 测得的，参见 [Gau81, Gau84]。回顾一下，Kodaira 维数衡量多典范丛截面的增长。当 $\mathrm{Kod}(X) \geq 0$ 时，多典范丛存在全纯截面，这意味着反典范丛存在体积为负的亚纯截面。因此，对于任意共形类 $\{\omega\}$，高迪雄度满足 $\Gamma_X(\{\omega\}) \leq 0$ 。更确切地说，除非典范丛 K_X 是全纯挠的，即存在整数 ℓ 使得 $K_X^{\otimes \ell} = \mathcal{O}_X$，否则 $\Gamma_X(\{\omega\}) < 0$；在这种情况下，对所有共形类都有 $\Gamma_X(\{\omega\}) = 0$。

4.4 期望陈标量曲率为零的情形

我们首先考虑 $\Gamma_X(\{\omega\}) = 0$ 的情形，即预期的陈标量曲率恒为零。在这种情况下，陈–Yamabe 方程化为一个线性偏微分方程：

$$\Delta^{Ch}(f) = -s^{Ch}(\omega).$$

为证明其可解，只需证明 $-s^{Ch}(\omega) \in \mathrm{im}(\Delta^{Ch}) = \ker((\Delta^{Ch})^*)^{\perp}$。在此情形下，解在相差一个加性常数的意义下显然唯一，因为$\ker \Delta^{Ch}$ 由常函数组成。

注意，η 上的Gauduchon条件保证伴随算子（Δ^{Ch}）* 的核仅由常函数组成（参见定理11的证明）。事实上，直接计算表明

$$(\Delta^{Ch})^* f = \Delta f - g(df, \theta).$$

若 $f \in \ker(\Delta^{Ch})^*$，则

$$0 = \int_X f\,(\Delta^{Ch})^* f\,\eta^n = \int_X \left(|df|^2 - \frac{1}{2} g(d(f^2), \theta) \right) \eta^n = \int_X |df|^2\,\eta^n,$$

因为 $d^*\theta = 0$ 对高迪雄度量成立。

因此，条件 $\Gamma_X(\{\omega\}) = 0$ 保证 $-s^{Ch}$ 位于$\ker((\Delta_\eta^{Ch})^*) =$复数域的正交补中，从而使该线性偏微分方程可解。

4.5 期望负陈标量曲率的情形

现在考虑 $\Gamma_X(\{\omega\}) < 0$ 的情形，即期望常数陈标量曲率为负。在这种情况下，我们运用共形技巧和标准椭圆理论，采用连续性方法，证明解的存在唯一性。

首先，利用共形论证，我们证明可以选取一个参考度量 $\omega \in \{\eta\}$，使得 $s^{Ch}(\omega) < 0$ 处处成立。事实上，与前面一样，我们可以求解线性偏微分方程 $\Delta^{Ch} f = -s^{Ch}(\eta) + \int_X s^{Ch}(\eta)\ \eta^n$。于是，共形度量 $\exp(2f/n)\,\eta$ 的陈标量曲率为 $s^{Ch}(\exp(2f/n)\,\eta) = \exp(-2f/n)\ \Gamma_X(\{\omega\}) < 0$。从现在起，我们固定该度量作为 $\{\omega\}$ 中的参考代表，并约定所有几何量均相对于它来理解。

然后，我们采用连续性方法，在共形类 $\{\omega\}$ 中建立具有常陈标量曲率的度量的存在性，起初解属于正则性类 $\mathcal{C}^{2,\,\alpha}$。随后，利用标准的椭圆正则性理论可得解的光滑性。

我们考虑以下连续路径，其中 $\lambda := \Gamma_X(\{\omega\})$：

$$\mathrm{ChYa}\colon [0,1] \times \mathcal{C}^{2,\alpha}(X, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^{0,\alpha}(X, \mathbb{R}),$$

$$\mathrm{ChYa}(t, f) := \Delta^{Ch} f + t\, s^{Ch}(\omega) - \lambda \exp\left({}^{2f}\!/_{n}\right) + \lambda\,(1 - t).$$

定义

$$T := \left\{ t \in [0,1] : \exists f_t \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(X, \mathbb{R}) \text{ such that } \mathrm{ChYa}(t, f_t) = 0 \right\}.$$

显然， T 非空，因为 $\mathrm{ChYa}(0,0) = 0$。

我们证明 T 是开集。隐函数定理保证，只要 ChYa 关于第二个变量的线性化是双射， T就是开集。在 (t_0, f_{t_0}) 处的这个线性化由算子给出：

$$D\colon \mathcal{C}^{2,\alpha}(X, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^{0,\alpha}(X, \mathbb{R}),$$

$$Dv = \Delta^{\mathrm{Ch}} v - {}^{2\lambda}\!/_{n} \exp\left({}^{2f_{t_0}}\!/_{n}\right) \cdot v.$$

设 $v \in \ker D$。由于 D 是椭圆算子，标准正则性理论允许我们应用经典最大值原理。在 v的最大值点 p处，有

$$-{}^{2\lambda}\!/_{n} \exp\left({}^{2f_{t_0}(p)}\!/_{n}\right) \cdot v(p) \leq 0,$$

这意味着 $v(p) \leq 0$。类似地，在最小值点 q处，可得 $v(q) \geq 0$。因此， v 必恒等于零，即，$\ker D = \{0\}$。为证明 D 是满射，我们注意到线性算子 D 的指标与拉普拉斯算子的指标相同，因为 D 与拉普拉斯算子之差是一个紧算子。因此， D 的单射性直接推出其满射性。

最后，我们证明 T 是闭的。该论证依赖于解的如下一致 L^∞ 估计。设 $(t_n)_n \subseteq T$ 是 T中收敛于 t_∞的序列，并设 $f_{t_n} \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(X,\mathbb{R})$满足$\mathrm{ChYa}(t_n, f_{t_n}) = 0$。我们希望证明存在仅依赖于 X、 ω和 λ的一致常数 $C > 0$，使得对所有 n，

$$\|f_{t_n}\|_{L^\infty} \leq C.$$

这再次由最大值原理得出。事实上，在 f_{t_n} 达到其最大值的点 $p \in X$ 处计算方程ChYa(t_n, f_{t_n}) $= 0$ ，我们得到

$$-\lambda \exp\left({}^{2f_{t_n}(p)}/_{n}\right) \leq -t_n\, s^{\mathrm{Ch}}(\omega)(p) - \lambda(1-t_n) \leq -\max_X s^{\mathrm{Ch}}(\omega) - \lambda,$$

这里用到了这样一个事实： $s^{\mathrm{Ch}}(\omega) < 0$ 在 X上处处成立。类似地，在 $q \in X$ 处（此处 f_{t_n} 取得其最小值）代入该方程，可得

$$-\lambda \exp\left({}^{2f_{t_n}(q)}/_{n}\right) \geq \min\left\{\min_X(-s^{\mathrm{Ch}}(\omega)),\ -\lambda\right\} > 0,$$

由此得到 f_{t_n} 的一致下界，从而完成了该断言的证明。

现在考虑方程

$$\Delta^{\mathrm{Ch}} f_{t_n} + t_n\, s^{\mathrm{Ch}}(\omega) + \lambda(1-t_n) = \lambda \exp\left({}^{2f_{t_n}}/_{n}\right),$$

其中，左端可解释为作用于f_{t_n}的椭圆算子。上文得到的一致 L^∞ 估计表明，右端在 L^∞中一致有界。通过反复应用 Calder´on–Zygmund 不等式并运用 Sobolev嵌入定理，可知 f_{t_n} 在 $\mathcal{C}^3$(X，R)中一致有界。于是，根据 Ascoli–Arzel`a 定理，存在一个子列在 $\mathcal{C}^{2,\,\alpha}$(X)中收敛，其极限 f_∞ 满足 ChYa(t_∞， f_∞) $= 0$。

上述论证保证了 $T = [0,1]$。特别地，对应于(， f)的方程 ChYa($1 = 0$, ChYa) 存在一个解 $f \in \mathcal{C}^{2,\,\alpha}$($X$， R)。接下来需要证明该解实际上是光滑的。这可由基于 Schauder估计的标准自举论证得到。

剩下要证明唯一性。设 $\omega_1 =$ exp $\left({}^{2f_1}/_{n}\right)\omega \in \{\omega\}$和 $\omega_2 =$ exp $\left({}^{2f_2}/_{n}\right)$ $\omega \in \{\omega\}$ 是两个陈标量曲率分别为 $\lambda_1 < 0$ 和 $\lambda_2 < 0$的度量。考虑它们的差 $f_1 - f_2$，它满足方程

$$\Delta^{\mathrm{Ch}}(f_1 - f_2) = \lambda_1 \exp\left({}^{2f_1}/_{n}\right) - \lambda_2 \exp\left({}^{2f_2}/_{n}\right).$$

在$f_1 - f_2$的最大值点和最小值点处对该方程求值，可得

$$f_1 - f_2 = \frac{n}{2} \log\left({}^{\lambda_2}/_{\lambda_1}\right).$$

因此，这些函数相差一个加性常数。施加所选的规范化条件后，我们得出 $f_1 = f_2$，从而证明了唯一性。

4.6 陈标量曲率为正的情形

在前面的论证中，曲率的非正性在应用最大值原理时发挥了根本作用。因此，最后一种情形 $\Gamma_X(\{\omega\}) > 0$ 似乎更具挑战性，而模空间 $\mathcal{C}h\mathcal{Y}a(X, \{\omega\})$ 是否非空仍是一个开放问题。我们在此汇集一些关于这一情形的初步评论。

一个重要的例子是 Hopf 曲面，其经典厄米度量具有一个显著性质：第二陈-里奇形式满足 $\mathrm{Ric}^{(2)} = 2\omega$，见 [GI97], ，此时陈标量曲率为常数，且等于 4。显式计算可见 [ACS20]。进一步的例子可通过隐函数定理论证构造：从陈标量曲率在 $\mathcal{C}^{0,\alpha}$-范数下足够小的度量出发。

与经典 Yamabe 问题不同，需要注意的是，陈–Yamabe 问题一般并非变分问题：当且仅当共形类中包含一个平衡代表元时，陈–Yamabe 方程才能解释为某个相关泛函的欧拉–拉格朗日方程。然而，该泛函是否有下界仍不清楚。

在正的情形下，固定共形类中常陈标量曲率度量的唯一性通常不成立。通过调整 [dLPZ12] 中的论证，并应用 Krasnosel'skii 分岔定理的一个版本，即可证明这一点。尽管如此，我们仍然预期模空间 $\mathcal{C}h\mathcal{Y}a(X, \{\omega\})$ 是紧的，前提是体积一致有界。

作为解决存在性问题的另一种策略，我们引入了陈–Yamabe 流。在这一方向上， [LM18、CZ20和Yu25]做出了进一步的发展和贡献。

4.7 矩映射图景

常数量曲率度量在 K¨ahler 几何中发挥着中心作用，因为标量曲率自然地作为无限维哈密顿作用的矩映射出现 [Fuj90, Don97]。更准确地说，在固定的 K¨ahler 度量类中寻找常数量曲率 K¨ahler 度量的问题，可以重新解释为：在复化群作用下复结构的轨道内寻找矩映射的零点。受有限维几何不变量

理论的启发，这一观点引出了 K-稳定性的概念，参见例如 [Sz´e14]。

我们简要回顾 K¨ahler 几何中 Fujiki-Donaldson 图景的几何背景。设 X 是一个可微流形，带有一个容许 K¨ahler 结构的辛微分形式 ω 。$\mathcal{J}_{\mathrm{alm}}(\omega)$ 这一由与 ω相容的近复结构构成的空间，具有自然的无穷维 K¨ahler 流形结构 (J,Ω)，且在辛同胚群 Aut(X,ω) 的作用下保持不变。此作用保持解析子集 $\mathcal{J}(\omega)$，其中包含可积（即 K¨ahler）结构。映射 s: $\mathcal{J}_{\mathrm{alm}}(\omega) \to \mathcal{C}^\infty(X,\mathbb{R})$，将每个 J 映为度量 $g := \omega(J\,\cdot\,,\cdot)$ 的标量曲率，是光滑的、Aut(X,ω)-等变的，并满足矩映射方程

$$\int_M \mathrm{d}(\mathrm{scal})|_J(v)\, h_Y\, \omega^n = -\tfrac{1}{2}\,\Omega_J(Y_J^*, v),$$

对所有 $J \in \mathcal{J}(\omega)$、$v \in T_J\mathcal{J}_{\mathrm{alm}}(\omega)$ 和 $Y \in \mathfrak{ham}(X,\omega)$ 均成立。这里，$\mathfrak{ham}(X,\omega)$ 表示无穷小自同构 Y 构成的李子代数，它们满足 $Y \lrcorner \omega = \mathrm{d}h_Y$，其中 $h_Y \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ 是某个光滑函数，且该函数在相差一个加法常数的意义下唯一。与 Y 相关联的基本向量场记为 Y^*。因此，称 s 为哈密顿微分同胚群 Ham(M,ω) 在 $\mathcal{J}(\omega)$ 上作用的矩映射。

为了更深入地理解陈标量曲率在非 K¨ahler 几何中所起的作用，在 [ACPS22]中，我们将经典的 Donaldson–Fujiki 框架推广到了更广泛的局部共形 K¨ahler 几何背景下。在此背景中，我们考虑满足 $d_\theta(Y \lrcorner \omega) = 0$ 的特殊共形向量场，以及扭曲哈密顿向量场，即满足 $Y \lrcorner \omega = d_\theta h$ 的向量场 Y，其中扭曲微分定义为 $d_\theta := d - \theta$。另一个技术上的难点在于，自同构群 Aut$^*(X,\{\omega\})$ 仅保持共形类 $\{\omega\}$，因此黎曼标量曲率并非 Aut$^*(X,\{\omega\})$-等变。此外，计算中还会出现一个涉及 $D(\theta^\sharp)$ 的额外项，我们尚不知如何处理。这些困难促使我们引入一项额外的对称性假设：我们将研究范围限制在环面 T 作用下不变的结构子空间中；该环面定义为由李形式的辛对偶 $\theta^{\sharp_\omega}$ 生成的流的闭包。于是，我们的主要结果可表述如下。

定理 17 （[ACPS22]）。 设 X 是一个复维数为 n、带有局部共形 *K¨ahler*结构 ω

其李形式为 θ。 T-不变的扭曲 *Hamilton* 微分同胚在 $\mathcal{J}$（ω）^{T}空间中的 T-不变相容复结构上的作用是 *Hamilton* 的，其矩映射为

$$\mu = s^{\mathrm{Ch}}(\omega) + n\, d^*\theta.$$

也就是说，对于每个 $J \in \mathcal{J}(\omega)^T$, $A \in T_J\mathcal{J}(\omega)^T$，以及具有扭曲哈密顿势 h 和基本向量场 Y_J^*的扭曲哈密顿向量场 Y，动量映射方程成立：

$$\int_X d\mu|_J\,(A)\, h\, \omega^n = -\frac{1}{2}\,\Omega_J(Y_J^*, A).$$

这些考量表明，与其要求陈标量曲率为常数，不如将矩映射为常数作为典范度量的一种更自然的刻画 μ。这一类度量包含两种特殊情形：标量曲率为常数的 K¨ahler 度量，以及标量曲率为常数的 Gauduchon度量。更多详情请参见 [APS+25]。

4.8 习题

练习 23. 设 X 是一个赋有厄米度量 ω的全纯流形，且 $f \in \mathcal{C}^\infty(X,\mathbb{R})$ 是一个光滑实值函数。证明陈标量曲率在共形变换下满足以下公式：

$$s^{Ch}\left(e^{2f/n}\omega\right) = e^{-2f/n}\left(s^{Ch}(\omega) + \Delta_\omega^{Ch} f\right),$$

其中 $\Delta_\omega^{Ch} f := 2\,\mathrm{tr}_\omega(\sqrt{-1}\partial\overline{\partial} f)$ 是相对于度量 ω的陈拉普拉斯算子 f。

练习 24 ([ACS20])。 设 X 是一个紧致全纯流形，并且ω 是一个 (弱) 第一陈-爱因斯坦 厄米度量 X，即

$$\mathrm{Ric}^{(1)}(\omega) = \lambda\,\omega$$

对于某个光滑函数 $\lambda \neq 0$。证明 ω 与一个 *K¨ahler* 度量共形。

提示。 考虑共形类 ω 中的唯一 Gauduchon 度量 $\eta = e^f\omega$ ，其总体积为 1，并证明该度量是 K¨ahler。为此，取函数 $\tilde{\lambda} = \lambda e^{-f}$ ，并注意到第一 Chern–Einstein

˜条件意味着 $\partial(\lambda\eta) = 0$。要证明 η 是 K¨ahler，只需证明 $\lambda \neq 0$ 为常数。现在问题归结为证明微分形式 $\tilde{\lambda}^{n-1}\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\tilde{\lambda}^{n-1}\wedge\eta^{n-1}$ 是 d-恰当的，并证明下列等式成立

$$0 = \int_X \tilde{\lambda}^{n-1}\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\tilde{\lambda}^{n-1}\wedge\eta^{n-1} = \frac{1}{2n}\int_X |d\tilde{\lambda}^{n-1}|^2\eta^n\,.$$

□

练习25 (非K¨ahler Calabi–Yau，[Tos15])。设 X 是一个紧致全纯 n维流形，满足 $c_1^{\mathrm{BC}}(X) = 0$。证明：对于任意 *Hermitian* 度量 ω，存在一个共形代表 $\omega' = e^f\omega$，其中某个光滑函数 f使得

$$\mathrm{Ric}^{(1)}(\omega') = 0.$$

函数 f 在加性常数意义下唯一。

提示。由于 $c_1^{BC}(X) = 0$，因此 $\mathrm{Ric}^{(1)}(\omega) = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}f$，其中某个光滑函数为 f。证明 $\omega' = e^{\frac{f}{n}}\omega$是第一陈–里奇平坦的。模常数的唯一性源于 Ricci 势模常数的唯一性。

□

注。根据 [TW10],，该解也可以表示为 $\omega' = \omega + \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\varphi$，其中某个光滑函数为 φ，且在加性常数意义下唯一。 □

练习26 ([Gau81，ACS20])。设 X 是一个配备了厄米度量 ω 的紧致全纯流形，使得

$$\mathrm{Ric}^{(2)}(\omega) = \lambda\omega$$

对某个光滑函数 λ成立。

- 证明该性质在共形变换下不变。
- 证明经过共形变换后，可以假设 λ 具有恒定符号，且该符号与共形类 $\{\omega\}$的高迪雄度的符号相同。
- 假设陈–*Yamabe* 问题存在正解，证明可以在共形类中选取一个代表，使 λ为常数。

提示。 证明在共形变换下，第二陈氏 Ricci 曲率按如下方式变换：$\mathrm{Ric}^{(2)}(e^f\omega) = \mathrm{Ric}^{(2)}(\omega) + \frac{1}{2}(\Delta_\omega^{\mathrm{Ch}} f)\,\omega$。由此可知，可以通过共形变换使爱因斯坦因子具有确定的符号。为此，选取 ω所在共形类中总体积为一的唯一高迪雄度量 η，并证明以下方程存在光滑解 $f \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$,

$$\Delta^{Ch} f = -s^{Ch}(\eta) + \int_X s^{Ch}(\eta) d\mu_\eta \,.$$

那么，度量 $e^{\frac{2f}{n}}\eta$ 是第二类陈爱因斯坦度量，其爱因斯坦因子的符号确定，取决于其陈标量曲率的符号；而陈标量曲率的符号与共形类 $\{\omega\}$ 的高迪雄度的符号相同。最后，证明在 $\{\omega\}$ 中寻找陈标量曲率为 λ 常数的第二类陈爱因斯坦度量这一问题，可归结为求解刘维尔型方程

$$\Delta_\eta^{Ch} f + s^{Ch}(\eta) = \lambda e^{\frac{2f}{n}}$$

其中 η 为 $\{\omega\}$上的高迪雄度量。 □

练习27 ([GI97]). 证明，唯一允许存在满足以下条件的厄米度量的紧致复非 *Kähler* 曲面，使得 $\mathrm{Ric}^{(2)}(\omega) = f\omega$ 对某个光滑函数 f成立的此类曲面，是 *Hopf* 曲面。

注记。在紧致全纯流形上，满足 $\mathrm{Ric}^{(2)}(\omega) = f\omega$ 的厄米度量（其中 f 是某个光滑函数）之存在受到若干限制，参见 [Tel06、Gau81、Gau77a、Yan19]。特别地：爱因斯坦因子 f 的符号受 K_X 和 K_X^{-1} 的伪有效性或酉平坦性约束；只有当 $\mathrm{Kod}(X) \leq 0$ 时，第二陈-黎奇平坦度量才可能存在；具有正（分别为负）曲率的第二陈-爱因斯坦度量的流形，对任意 $p \geq 1$ 都不存在非平凡的全纯 p-形式（分别为全纯 p-向量场）。此外，这类度量是弱 g-厄米–爱因斯坦度量，参见例如 [Kob80、LT95、Kob87], ，因此还满足进一步的几何约束：Bogomolov–Lübke 不等式成立 [Bog80、Lue82]；根据小林–希钦对应，全纯切丛是 g-半稳定的 [Kob82、Lüb83]。

□

5 非 K¨ahler 几何中的几何流

本节介绍陈–里奇流的基本理论 [Gil11、TW15、TW22], ，重点介绍其在研究紧复曲面中的应用 [TW13]。特别地，我们将遵循 [FTWZ16、AT23], 讨论该流在井上曲面上的长期行为。

5.1 厄米度量的几何流

过去几十年来，Hamilton 最初提出的里奇流[Ham82], 已成为微分几何中的有力工具。它在 Perelman´的开创性工作中发挥了核心作用，推动了庞加莱猜想和几何化猜想的解决 [Per02，Per03b，Per03a]。

在厄米情形下，当初始度量为 K¨ahler 度量时，流保持 K¨ahler 条件 [Ham82, Shi97]; 此时，该流称为 K ¨ahler-里奇流。在其开创性工作中，Cao [Cao85] 利用 K¨ahler-里奇流重新证明了 Aubin-Yau 定理：他证明，在紧致 K¨ahler 流形 X 上，若 $c_1(X) = 0$ （分别地， $c_1(X) < 0$），则从任意 K¨ahler 度量 ω_0 出发的 K¨ahler-里奇流（分别地，归一化 K¨ahler-里奇流）将平滑收敛到类 $[\omega_0]$ （分别地，类 $-c_1(X)$）中唯一的 K¨ahler-爱因斯坦度量。

另一方面，如果初始度量只是厄米的，那么里奇流通常无法保持厄米性，除非其 Levi-Civita 联络的曲率满足所有 K¨ahler 对称性，见 [AOUV22]。为了解决这一问题，人们引入了各种几何流，以处理厄米非 K¨ahler 情形。其中包括陈–里奇流 [Gil11, TW15], ，Streets 和 Tian 提出的厄米曲率流族 [ST11], ，例如多重闭流 [ST10]，以及 Ustinovskiy 研究的流 [Ust19], 、异常流 [FPPZ21, PPZ18c, PPZ18b, PPZ18a, Pic19], 、广义里奇流 [GFS21], 、将里奇流与演化复结构的流耦合的流，等等。

5.2 陈–里奇流简介

本节我们重点关注陈–里奇流。Gill 首先在研究紧致非 K [Gil11]ähler 卡拉比–丘流形时引入了该流，也就是说，紧致全纯流形¨， X 其第一博特–切恩类消失c_1^{BC}（X） $= 0$。随后，Tosatti 和 Weinkove 对其进行了广泛研究

[TW15、TW13、TW22]。人们预期，陈–里奇流的行为能够反映 X其内在的全纯结构¨，使其成为紧致非 K¨ahler 全纯曲面分类理论中的有力工具。陈–里奇流的一个重要特点是，与 Kähler–Ricci 流一样，它可化为一个标量抛物型方程，因此也具有许多有趣的解析性质。

设 X 为复维数 n的紧致全纯流形，并设 ω_0 为固定的厄米度量。陈–里奇流 按照如下方程演化初始度量

$$\frac{\partial \omega(t)}{\partial t} = -\mathrm{Ric}^{Ch}(\omega(t)), \quad \omega(0) = \omega_0, \tag{CRF}$$

对 $0 \leq t < T$成立，其中 $0 < T \leq +\infty$ 表示最大存在时间，见下文。这里，$\mathrm{Ric}^{Ch}{}_{\mathrm{loc}} = -\sqrt{-1}\,\partial\partial \log \det \omega$ 表示第一 Chern-Rīcci 曲率，即与陈联络相关联的张量$\mathrm{Ric}^{(1)}$ 。

我们可以将陈–里奇流化为一个抛物型复Monge-Amp`ère方程。

定理 18 ([Gil11,TW15]). 设 X 为赋予厄米度量的紧致全纯流形 ω_0。则陈–里奇流 (陈–里奇流)存在解 $(\omega(t))_{0\leq t<T}$ 当且仅当存在一族光滑函数$(\varphi(t))_{0\leq t<T}$ 求解如下关于标量函数的抛物型方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \log \frac{(\omega_0 - t\,\mathrm{Ric}^{Ch}(\omega_0) + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\varphi)^n}{\omega_0^n}, \\ \omega_0 - t\,\mathrm{Ric}^{Ch}(\omega_0) + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\varphi > 0, \\ \varphi(0) = 0. \end{cases} \tag{P$\mathbb{C}$MA}$$

此外，这两个解之间的关系为

$$\omega(t) = \omega_0 - t\,\mathrm{Ric}^{Ch}(\omega_0) + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\varphi(t).$$

根据标准抛物型理论，假设 X 是紧致的，则陈–里奇流在最大时间区间 $[0, T)$ 上存在唯一解，其中$0 < T \leq +\infty$。最大存在时间由 [TW15] 表示为

$$T = \sup\left\{t > 0 : \exists \psi \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R}) \text{ such that } \omega_0 - t\,\mathrm{Ric}^{Ch}(\omega_0) + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\psi > 0\right\}.$$

这与 K¨ahler 情形的结果类似，唯一的区别在于存在挠率项，这使解析估计变得复杂。特别要注意，条件 $T = +\infty$ 与初始度量无关

ω_0，且当且仅当典范丛 K_X 是数值有效 时，该条件成立（这意味着，对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个光滑函数 $\psi_\varepsilon \in C^\infty(X,\mathbb{R})$，使得 $-\mathrm{Ric}^{Ch}(\omega_0) + \sqrt{-1}\partial\partial\psi_\varepsilon > -\varepsilon\omega_0$）。

5.3 非K¨ahler Calabi–Yau流形的陈–里奇流

为说明研究陈–里奇流的动机，我们回顾 [Gil11]关于非K¨ahler Calabi–Yau流形 [Tos15]的一个基本结果。

回顾一下，若紧致全纯流形 X 的复维数为n，且其第一博特–切恩类在Bott-Chern上同调中为零，则称其为非*K¨ahler Calabi–Yau*流形，即 $c_1^{BC}(X) = 0$ 属于 $H^{1,1}_{BC}(X,\mathbb{R})$。在 K¨ahler 情形下，这一条件等价于 $c_1(X) = 0$ 属于德拉姆上同调 $H^2_{dR}(X,\mathbb{R})$，而著名的卡拉比–丘定理保证存在一个里奇平坦的K¨ahler度量。

在非K¨ahler情形下，以下条件等价，参见[Tos15]:

- $c_1^{BC}(X) = 0$属于 $H^{1,1}_{BC}(X,\mathbb{R})$;
- 存在一个厄米度量 ω 在 X 上，使得 $\mathrm{Ric}^{Ch}(\omega) = 0$。这种 Chern-Ricci平坦度量可以通过对一个固定厄米度量ω_0 采用多种拟设¨得到 [Tos15, STW17]: 共形拟设，$\omega = e^\varphi\omega_0$；Calabi型拟设，$\omega = \omega_0 + \sqrt{-1}\partial\partial\varphi$；Fu–Wang–Wu 型拟设，$\omega^{n-1} = \omega_0^{n-1} + \sqrt{-1}\partial\partial\varphi \wedge \omega_1^{n-2}$，其中 ω_1 是 X 上的另一个固定厄米度量；
- 典范丛 K_X 是酉平坦的，即，它存在一个曲率消失的厄米度量；
- 存在一个厄米度量 ω ，其陈联络的受限整体性包含于 SU(n) 中。

我们注意到，条件 K_X 是全纯挠的，即$K_X^{\otimes\ell} \simeq \mathcal{O}_X$ 对于某个 $\ell \geq 1$，意味着 $c_1^{BC}(X) = 0$，但通常严格较弱，参见 [Nak75、Mag17]。反过来，存在一些全纯流形，其德拉姆上同调类 $c_1(X) = 0$ 在 $H^2_{dR}(X,\mathbb{R})$ 中消失，但 $c_1^{BC}(X) \neq 0$：例如 Hopf 曲面以及六维球面上的假想复结构 S^6。

类似于 Cao 定理 [Cao85], ，该定理通过抛物型方法证明了 K¨ahler 流形上关于 $c_1(X) = 0$ 的卡拉比–丘定理，其方法是采用 K¨ahler-里奇流；在非 K¨ahler 情形下，对于紧致非 K¨ahler 卡拉比–丘流形，也有类似结果。

定理 19 ([Gil11])。 设 X 是一个紧致非 *K¨ahler Calabi–Yau* 流形。那么，对于任意初始厄米度量 ω_0，陈–里奇流 (陈–里奇流)存在一个长时间解 $\omega(t)$，定义于所有 $t \in [0, +\infty)$，并且当 $t \to +\infty$ 时光滑收敛到一个满足以下条件的厄米度量 ω_∞：

$$\mathrm{Ric}^{Ch}(\omega_\infty) = 0.$$

更确切地说，ω_∞ 是形如 $\omega_\infty = \omega_0 + \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\varphi$ 的唯一陈-黎奇平坦度量，其中 φ 是某个光滑实函数。

5.4 紧致复曲面上的陈–里奇流 s

现在我们聚焦于复维数 2 的情形，也就是紧致全纯曲面。首先注意到，在此情形下，Gauduchon 条件等价于多重闭条件，并且沿陈–里奇流保持不变，因为陈-里奇形式 Ric^{Ch} 是 d-闭的。当初始度量 ω_0 为 Gauduchon 度量时，借助 Buchdahl的中井–莫伊舍宗准则，流的最大存在时间还可以如下刻画 [Buc99]:

$$T = \sup\left\{ \tau \geq 0 : \begin{array}{c} \text{for all } t \in [0,\tau],\ \text{the form } \alpha_t := \omega_0 - t\,\mathrm{Ric}^{Ch}(\omega_0) \text{ satisfies} \\ \int_X \alpha_t^2 > 0 \text{ and } \int_D \alpha_t > 0 \\ \text{for every irreducible effective divisor } D \text{ with } D^2 < 0 \end{array} \right\}.$$

换言之，只要 X 相对于 $\omega(t)$的体积保持为正，且每条负自交不可约曲线的体积不趋于零，陈–里奇流就能继续存在。

我们回顾一下，紧致全纯曲面可根据其 Kodaira 维数进行分类，其取值为 $-\infty$、0、1 或 2。关于 Enriques–Kodaira–Siu分类的详细阐述，请参阅内容全面的著作 [BHPVdV04]。

一个首要的基本区别在于曲面是否包含一条（-1）-曲线，也就是说，一条光滑有理曲线 $D \simeq$ 复数域P^1，其自交数为 $D^2 = -1$。若不包含，则称该曲面为极小曲面。根据 Castelnuovo

收缩定理，每条（-1）-曲线都可以收缩。因此，任何紧致全纯曲面都可以通过对一个极小曲面上的有限多个点进行爆破得到。

若 X 不是极小的，则存在一条 (-1)-曲线 D。由伴随公式可得 $K_D = (K_X+D)|_D$，又由于 $K_D\cdot D = 2g(D)-2 = -2$，因此有 $K_X\cdot D = -1 < 0$。所以，从任意高迪雄度量 ω_0出发的陈–里奇流满足 $\int_D \omega(t) = \int_D \omega_0 + t\, K_X\cdot D = \int_D \omega_0 - t$，并在有限时间内变为零。因此，该流的最大存在时间必定有限，即 $T < +\infty$。反过来，如果初始度量 ω_0 是高迪雄度量，最大存在时间满足 $T < +\infty$，且该流是非塌缩的，即当 $t \to T^-$ 时，$\mathrm{Vol}(X,\omega(t)) \geq c > 0$，那么 X 含有 (-1)-曲线，见 [TW15]。此时，记这些 (-1)-曲线为 E_1、……、E_k。然后，根据 [TW15],，存在 $X\setminus\bigcup_i E_i$上的光滑高迪雄度量 ω_T，使得当 $t \to T^-$ 时， $\omega(t) \to \omega_T$在 $\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{loc}}(X\setminus\bigcup_i E_i)$ 中成立。此外，度量空间 $(X,\omega(t))$ 在 Gromov–Hausdorff 拓扑下收敛到紧致度量空间 (N,d_N)；后者与通过收缩 X中的曲线 E_1、……、E_k所得的复空间同胚。将此映射记为 $\pi\colon X\to N$，其中$E_i = \pi^{-1}(p_i)$。独立地， [Tˆo18, Nie17]证明，陈–里奇流可在极限空间 N上以弱意义延拓，并且随时间反向收敛。Tosatti 和 Weinkove 的上述论证是在附加假设 $d\omega_0 = \pi^*(d\beta)$ 成立的条件下证明的，其中 β是 N上的某个光滑实 (1,1)形式；这一条件特别意味着 π的例外除子上有 $d\omega_0 = 0$，见 [TW13]中的条件 (*)。去掉这一条件后，剩下需要证明的是 (N,d_N) 是 $(N\setminus\{p_i\},\omega_T)$ 的度量完备化。完成这最后两步，便可证明陈–里奇流在 Gromov–Hausdorff 拓扑下收缩 (-1)-曲线，同时在例外除子之外光滑收敛。该结果将表明，陈–里奇流实现了一种典范的手术收缩，推广了 [ST17] 关于 K¨ahler 曲面的结果，并纳入解析极小模型纲领这一更广泛的框架。

在下文中，我们假设该曲面是 **极小的**。一般型曲面S ， **即**Kod$(S) = 2$ 的曲面，总是代数的。将注意力限制在非 K¨ahler 曲面上，这类曲面在拓扑上以第一 Betti 数为奇数为特征 Lam99， Buc99], 则只剩下以下几种情况。

- 对于Kod$(X) = 1$，我们有**极小非K¨ähler适当椭圆曲面**，它们在相差有限覆盖的意义下可描述为椭圆丛，

见例如 [Brˆı94, Brˆı96]。在这种情况下，从任意高迪雄度量出发的陈–里奇流对所有 $t \geq 0$均存在，并表现出如下坍缩行为：规范化度量 $\omega(t)/t$ 在格罗莫夫–豪斯多夫意义下收敛到一个黎曼曲面，其上的距离函数由轨形K¨ahler–爱因斯坦度量诱导，见 [TWY15]。

• 对于 Kod(X) $= 0$，我们有 **小平曲面**，它们满足 $c_1^{BC}(X) = 0$，这意味着它们是非 K¨ahler Calabi–Yau 流形。Gil [对此进行了11], 详细研究，并证明陈–里奇流对所有时间均存在，且收敛到初始度量的$\sqrt{-1}\partial\partial$-类中唯一的陈-黎奇平坦度量。

• 最后，VII 类指满足 Kod(X) $= -\infty$ 且 $b_1(X) = 1$的紧致全纯曲面。已知满足 $b_2(X) = 0$ 的曲面要么是 Hopf 曲面，要么是 Inoue–Bombieri 曲面 [Ino74, Bom73]„ 这一点由 [Bog80, LYZ90, Tel94]确立。最早一批满足 $b_2(X) > 0$的实例由 [Ino75, Ino77], 引入，随后加藤 [Kat77], 将其推广，提出了一种构造方法：反复爆破复数域 C2 中的标准球，然后进行全纯手术。这些曲面的特征是存在一个全局球壳，即一个与三维球面 S^3 在复数域 C2 中某邻域双全纯的开子集 $U \subset X$，且其补集$X \setminus U$ 仍然连通。此外，它们可以视为吹起的初级 Hopf 曲面的退化 [Nak84]，并且具有奇异全纯叶状结构 [DO99]。每个加藤曲面 X 恰好包含$b_2(X)$条有理曲线；反过来，VII 类中恰好具有 $b_2(X) > 0$ 条有理曲线的每个极小紧致复曲面都是加藤曲面 [DOT03]。人们猜想，除这些曲面外，VII 类中不存在其他实例；这一猜想称为全局球壳猜想。

对于形如$\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}/\mathbb{Z}$的经典霍普夫曲面，其中整数群由映射 $\lambda \cdot \mathrm{id}$ 生成，且 $\lambda \in$ 复数域满足 $0 < |\lambda| < 1$，从标准度量出发的陈–里奇流解有显式表达式 [TW13]。更确切地说，流在有限时间内发生塌缩，并光滑收敛到一个非负的 (1，1)-微分形式，其核定义了一个光滑分布，而该分布的迭代李括号生成 Sasaki 的整个切空间 S^3。因此，陈–里奇流的极限行为同时编码了 Hopf 曲面固有的微分与复形

几何结构。更多结果可见于 [Edw21], ，其中的结果支持如下猜想：Gromov–Hausdorff 极限与一个圆形 S^1等距。Inoue-Bombieri曲面上的陈–里奇流已在[TW13、Lau09、LV15、FTWZ16、AT23], 中得到了广泛研究，下一小节将对此进行详细讨论。最后，[FTWZ16第 4 节中的6] “乐观猜想”试图通过陈–里奇流的渐近行为恢复一个全局球壳。

5.5 井上曲面上的陈–里奇流

井上曲面分为三个不同的族： S_M、 S^+和 S^-，每一族都依赖于参数。

我们首先回顾 In- oue–Bombieri S_M [Ino74, Bom73] 型曲面的构造及其几何性质。令 $M \in \mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ 为一个矩阵，其具有一个实特征值 $\lambda > 1$, 以及一对共轭复特征值 $\mu, \bar{\mu} \in \mathbb{C}$。取一个对应于 λ 的实特征向量 $(\ell_1, \ell_2, \ell_3) \in \mathbb{R}^3$ ，以及一个对应于 μ 的复特征向量 $(m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{C}^3$ 。为后续使用，我们注意到 λ 是一个无理代数数，并且实特征向量的斜率中至少有一个是无理数，不妨记为 ℓ_1/ℓ_2。在 $\mathbb{C}\times\mathbb{H}$ 上，其中 $\mathbb{H} = \{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, w > 0\}$ 为上半平面，考虑复坐标 $(z = x_1 + \sqrt{-1}y_1, w = x_2 + \sqrt{-1}y_2)$，其中 $y_2 > 0$。我们定义由以下自同构生成的群作用：

$$f_0(z,w) = (\mu z, \lambda w), \qquad f_j(z,w) = (z + m_j,\ w + \ell_j),$$

对于 $j \in \{1,2,3\}$。商空间

$$S_M := \mathbb{C}\times\mathbb{H}/\langle f_0, f_1, f_2, f_3\rangle$$

定义了一个紧致、全纯、非 K¨ahler 曲面，称为类型为 S_M 的 Inoue–Bombieri曲面。由 $b_1(S_M) = \mathrm{rk}\,(\pi_1(S_M)/[\pi_1(S_M)\ \pi_1(S_M)]) = 1$ 为奇数，可知它不允许任何 K¨ahler 度量。

Inoue–Bombieri 曲面 S_M 具有丰富的可微与全纯结构，现描述如下。投影 $\mathbb{C}\times\mathbb{H} \ni (z,\ w) \mapsto \mathrm{Im}\, w \in \mathbb{R}^{>0}$ 下降到商空间，并赋予其可微环面丛结构：

$$\begin{array}{ccc} T^3 & \hookrightarrow & S_M \\ & & \downarrow \pi \\ & & S^1 \end{array}$$

其中纤维是一个三维环面 $T^3 \simeq \mathbb{R}^3/\langle f_1,\ f_2,\ f_3\rangle \simeq \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$，底空间则是由$\mathbb{R}^{>0}/\langle\lambda\rangle$得到的圆。从全纯视角来看，考虑实闭 (1，1)-微分形式

$$\alpha := \frac{\sqrt{-1}}{y_2^2}\, dw \wedge d\bar{w},$$

它非负且表示 $c_1(K_{S_M}) = -c_1^{BC}(S_M)$。其核定义了一个全纯抛物叶状结构，其叶与$\mathbb{C}$双全纯。一个关键点是，由构造中的无理性所导致的可微结构与全纯结构之间存在严格关联。更准确地说，全纯叶状结构的叶在光滑环面丛 [Ino74], 中稠密，详见 [TW13，引理 5。2]关于度量结构，我们注意到

$$\omega_T := 4\alpha + \sqrt{-1}\, y_2\, dz \wedge d\bar{z}$$

定义了一个 Gauduchon 度量，且是局部共形 K¨ahler 度量，定义在 S_M上，称为 Tricerri 度量 [Tri82], ，它有一个有趣的性质：其在任意一叶上的限制都是平坦的 K¨ahler 度量。

关于 **型 Inoue-Bombieri曲面**S^+的构造细节，请参阅 [Ino74], ，另见 [AT23]。这些曲面与 S_M型曲面具有许多相同的几何特征。主要区别在于， S^+ 曲面是以 S^1为底空间的丛，其纤维是三维海森堡群的紧商空间。它们同样具有一个全纯抛物叶状结构，其叶与 $\mathbb{C}^\times$双全纯，并且在丛的纤维中稠密。这些曲面也带有一个 Gauduchon 度量（但不一定是局部共形 K¨ahler 度量），最初由 Tricerri [Tri82]和 Vaisman [Vai87]构造。

此外，每个**型 Inoue–Bombieri 曲面**都存在一个由 S^+型井上曲面给出的无分歧二重覆盖。

下文中，我们考虑 Inoue–Bombieri 曲面 S上的陈–里奇流，其类型为 S_M 或 $S^\pm$，初始度量为高迪雄度量。由于$c_1^{BC}(S) \leq 0$，该流对所有时间 $t \geq 0$都存在。为研究其长期行为，对解进行重新缩放较为方便。因此，我们研究如下定义的归一化陈–黎奇流：

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega(t) = -\mathrm{Ric}^{Ch}(\omega(t)) - \omega(t), \quad \omega(0) = \omega_0,$$

其中 ω_0 是 S上的Gauduchon度量。

在 [TW13], 中，我们计算并分析了以Tricerri/Vaisman度量 ω_T 为初始度量的归一化陈–里奇流的显式解。我们证明，当 $t \to +\infty$趋于 $\to \alpha$ 时，$\omega(t)$一致收敛；并且相关度量空间（$S, \omega(t)$）在Gromov–Hausdorff意义下收敛到一个圆 S^1。这一收敛结果已推广到初始度量为任意局部齐性度量 [Lau15, LV15], 的情形；更一般地，也推广到形如 $\omega_{\mathrm{SFL}} + \sqrt{-1}\partial\partial u$的度量，其中 u 是光滑实函数，且 ω_{SFL} 沿叶 [强平坦16]FTWZ16]。这里，沿叶强平坦是指：全纯叶状结构的每一叶 $\mathcal{L}$ 上， ω_{SFL} 的限制都是平坦的K¨ahler度量。此外，在万有覆盖p: C $\times$ H $\to$ S上，有 $p^*\omega_{\mathrm{SFL}} = c \cdot \sqrt{-1}dz \wedge d\bar{z}$; 在 S_M的情形下， $c = c$(Im w)是仅依赖于 w 虚部的光滑正函数，而在 $S^{\pm}$ 的情形下，它是正的常数 $c > 0$ 。随后我们证明，任意Gauduchon度量都可以在其 $\sqrt{-1}\partial\partial$-类中变形为沿叶强平坦的度量，从而将收敛结果推广到任意Gauduchon初始度量。

定理 20 ([FTWZ16, AT23])。 设 S 是配备高迪雄度量的 *Inoue–Bombieri* 曲面 ω。那么，从 $\omega(t)$ 出发的归一化陈–里奇流解 ω 在所有时间上均存在，并一致收敛到退化形式 α的正倍数。此外，相应的度量空间 $(S, \omega(t))$ 在 *Gromov–Hausdorff* 意义下收敛到配备标准圆度量的圆 S^1 。

证明。 由 [FTWZ16], 可知，只需证明任意高迪雄度量ω 都可以变形为如下形式的度量 $\omega+\sqrt{-1}\partial\partial u$，其中某个光滑实值函数为 u，从而得到一个沿叶强平坦的度量。该条件等价于要求 $(\omega+\sqrt{-1}\partial\partial u)\wedge\alpha = c\omega_T^2$，其中 $c > 0$ 是一个正数，且 ω_T 表示 Tricerri/Vaisman 度量。换言之，我们要寻找退化椭圆方程 u 的光滑解

$$\frac{\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u \wedge \alpha}{\omega_T^2} = -\frac{\omega \wedge \alpha}{\omega_T^2} + \frac{\int_S \omega \wedge \alpha}{\int_S \omega_T^2},$$

它可以用叶向拉普拉斯算子表示

$$\Delta_{\mathcal{D}} u := \frac{\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u \wedge \alpha}{\omega_T^2}$$

as

$$\Delta_{\mathcal{D}} u = G(\omega), \qquad \text{where } G(\omega) := -\frac{\omega \wedge \alpha}{\omega_T^2} + \frac{\int_S \omega \wedge \alpha}{\int_S \omega_T^2}.$$

我们首先注意到，方程 $\Delta_{\mathcal{D}} u = G(\omega)$ 可解的必要条件确实成立，这是由于 ω 上的 Gauduchon 条件。为此，考虑如下形式的一般厄米度量

$$\omega = \sqrt{-1}\, r^2 y_2 \, dz \wedge d\bar{z} + \sqrt{-1}\, s^2 \, \frac{1}{y_2^2} \, dw \wedge d\bar{w} + u \frac{1}{\sqrt{y_2}} \, dz \wedge d\bar{w} - \bar{u} \frac{1}{\sqrt{y_2}} \, dw \wedge d\bar{z},$$

其中，$r^2 > 0$、$s^2 > 0$和 $r^2 s^2 - |u|^2 > 0$ 成立，以确保 ω 是正定的。ω 为 Gauduchon 度量的条件，即 $\partial\bar{\partial}\omega = 0$，可根据纤维化结构改写为

$$d\left(\int_{\pi^{-1}(y_2)} \bar{\partial}\omega \right) = 0,$$

这等价于要求函数

$$R(y_2) := \int_{\pi^{-1}(y_2)} r \cdot \mathrm{vol}(\omega_T|_{\pi^{-1}(y_2)})$$

在 y_2中为常数。另一方面，方程 $\Delta_{\mathcal{D}} u = G(\omega)$有解的必要条件是，$G(\omega)$ 关于由 ω_T诱导的 L^2内积与 $\ker \Delta_{\mathcal{D}}$ 正交。由于纤维中的叶稠密，我们有 $\ker \Delta_{\mathcal{D}} = \pi^* \mathcal{C}^\infty(S^1, \mathbb{R})$，因此正交条件为：

$$\int_{\pi^{-1}(y_2)} G(\omega)\, \mathrm{vol}(\omega_T|_{\pi^{-1}(y_2)}) = 0 \quad \text{for all } y_2 \in S^1.$$

直接计算可得，左边等于

$$-\frac{1}{8} R(y_2) + \frac{1}{8} \fint_S R(y_2)\, \omega_T^2,$$

其中，$R(y_2) := \int_{\pi^{-1}(y_2)} r \cdot \mathrm{vol}(\omega_T|_{\pi^{-1}(y_2)})$。因此，只要 ω 是 Gauduchon 度量，可解性条件就成立。

现在我们证明上述方程有解，并聚焦于 S_M 型 Inoue–Bombieri 曲面的情形。这些曲面可视为如下形式的映射环面

$$S_M = \frac{T^3 \times [1, \lambda]}{(q, 1) \sim (\psi(q), \lambda)},$$

其中 ψ 是三维环面 T^3 上的一个微分同胚。这里，$T^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}\langle \partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3\rangle$，其中 $\partial_i := (\mathrm{Re}\ m_i,\ \mathrm{Im}\, m_i,\ \ell_i)$，满足 $i \in \{1,2,3\}$。我们的目标是在假设数据满足相容条件 $g(q,\ 1) = g(\psi(q)\ \lambda)$ 的前提下，求解 $T^3 \times [1,\lambda]$ 上的方程$\Delta_{\mathcal{D}} u = g$。稍后我们将证明，解 u 可下降到商空间 S_M。

显式计算表明，叶向拉普拉斯算子 $\Delta_{\mathcal{D}}$ 在适配格的坐标中可表示为

$$\Delta_{\mathcal{D}} = \frac{1}{32 y_2} \begin{pmatrix} \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \end{pmatrix} Z \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix},$$

其中 Z 是一个对称半正定矩阵，秩为 2。其核由向量 $(\ell_1,\ \ell_2,\ \ell_3)$ 生成。

我们利用环面上的傅里叶展开。更确切地说，将数据写为

$$g(t, y_2) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} g_k(y_2) \exp(2\pi\sqrt{-1}\langle t, k\rangle),$$

其中 $g_k(y_2)$ 是光滑函数，而零模 g_0 因为关于 ω 的 Gauduchon 假设而消失。注意，由于 $\lambda \notin \mathbb{Q}$，我们有 $\ker Z \cap \mathbb{Z}^3 = \{0\}$。因此，令下式成立即可得到一个分布解

$$u_k(y_2) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2} \frac{32\, y_2 \cdot g_k(y_2)}{k Z k^t}.$$

无理代数数的刘维尔逼近定理保证解 u 在 T^3 上确实光滑。更确切地说，由于假设 ℓ_1/ℓ_2 是无理代数数，且次数为 d，我们有以下估计

$$\begin{aligned} |kZk^t| &\gtrsim \mathrm{dist}((k_1,k_2,k_3), \mathrm{span}(\ell_1,\ell_2,\ell_3)) \geq \mathrm{dist}((k_1,k_2),(\ell_1,\ell_2)) \\ &\gtrsim \left|\frac{k_2}{k_1} - \frac{\ell_2}{\ell_1}\right|^2 \cdot |k_1|^2 \gtrsim \frac{1}{|k_1|^{2d-2}} \geq \frac{1}{|k|^{2(d-1)}}, \end{aligned}$$

其中 $k = (k_1,\ k_2,\ k_3) \in$ 整数群$^3 \setminus \{0\}$。因此，由于我们的数据 g 是光滑的，对于任意 $N > 0$，存在一个常数 C_N，使得

$$|u_k(y_2)| < C_N |k|^{-N} \quad \text{as } |k| \to +\infty.$$

这种衰减性质保证傅里叶级数在 T^3 上定义了一个 u 光滑函数。变量 y_2 的光滑性源于傅里叶系数的光滑性及其连续依赖性。

最后，由解的唯一性可知，它下降到 S_M。

我们简要概述井上曲面 S^+的情形，而 S^- 的另一种情形则可通过无分歧二重覆盖归结为 S^+ 。在这种情形下，我们采用幂零流形上的部分傅里叶展开。这一技术已被证明在许多其他情境中也很有用，参见例如 [AT75、DS84、Ric82、HZ22a、HZ22b、RS22], ，它巧妙地联结了复几何、偏微分方程与数论。

在这种情形下，纤维上任意一个函数都可以与 y_2 上的一个光滑函数 $f(x_2,\ y_1,\ x_1)$ 对应起来，该函数满足周期性条件

$$\begin{cases} f(x_2, y_1, x_1) = f(x_2 + a_1,\ y_1 + y_2 b_1,\ x_1 + b_1 x_2 + c_1), \\ f(x_2, y_1, x_1) = f(x_2 + a_2,\ y_1 + y_2 b_2,\ x_1 + b_2 x_2 + c_2), \\ f(x_2, y_1, x_1) = f(x_2,\ y_1,\ x_1 + c_3), \end{cases}$$

其中 $a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2,\ c_3$ 是构造过程中出现的参数。我们进行部分展开

$$f(x_2, y_1, x_1) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k(x_2, y_1) \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\frac{x_1}{c_3}k\right)$$

其系数快速衰减，并满足周期性条件

$$\begin{aligned} f_k(x_2, y_1) &= f_k(x_2 + a_1, y_1 + y_2 b_1) \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\left(\frac{b_1}{c_3}x_2 + \frac{c_1}{c_3}\right)k\right) \\ &= f_k(x_2 + a_2, y_1 + y_2 b_2) \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\left(\frac{b_2}{c_3}x_2 + \frac{c_2}{c_3}\right)k\right). \end{aligned}$$

特别地,

$$f_0(x_2, y_1) = f_0(x_2 + a_1, y_1 + y_2 b_1) = f_0(x_2 + a_2, y_1 + y_2 b_2),$$

因此,

$$f_0(x_2, y_1) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} f_{0,m,n} \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}\,(y_2 b_2 x_2 - a_2 y_1)}{y_2(a_1 b_2 - a_2 b_1)}m + \frac{2\pi\sqrt{-1}\,(-y_2 b_1 x_2 + a_1 y_1)}{y_2(a_1 b_2 - a_2 b_1)}n\right).$$

利用上述展开，纤维上的方程 $\Delta_{\mathcal{D}} u = g$ 可化简为以下二阶线性常微分方程组：

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^2 u_k(x_2, y_1) - 4\pi^2 \frac{k^2}{c_3^2} u_k(x_2, y_1) = g_k(x_2, y_1),$$

对于 $k \in$整数群。

求解关于 $k \neq 0$ 的方程时，我们应用常微分方程经典理论；而对于 $k = 0$ ，它化为代数方程

$$-4\pi^2 u_{0,m,n} \left(\frac{n a_1 - m a_2}{y_2(a_1 b_2 - a_2 b_1)}\right)^2 = g_{0,m,n}.$$

按照前述方法论证，即可得出结论。 □

5.6 习题

习题28. 设 X 是一个配备厄米度量 ω 的全纯流形。证明陈联络的第一里奇形式 $\mathrm{Ric}^{Ch}(\omega)$ 可局部表示为

$$\mathrm{Ric}^{Ch}(\omega) \overset{loc}{=} -\sqrt{-1}\partial\overline{\partial} \log \det \omega.$$

特别地，它定义了 $H^{1,1}_{BC}(X)$ 中的一个上同调类，且与所选度量无关。记作 $c_1^{BC}(X)$，即 X 的第一*Bott-Chern*类；它在自然映射 $H^{1,1}_{BC}(X) \to H^2_{dR}(X, \text{复数域})$ 下映到通常的第一陈类 $c_1(X)$ 。

习题29. 设 X 是一个紧致全纯流形， $L \to X$ 是一个全纯线丛。给定 L纤维上的厄米度量 h，其曲率局部定义为

$$R_h \overset{loc}{:=} -\sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial} \log h,$$

从而在 X 上得到一个实的闭 (1,1) 微分形式。 R_h 在 $H^{1,1}_{BC}(X)$ 中的 *Bott–Chern*上同调类与 h 的选取无关，记为 $c_1^{BC}(L)$。证明厄米度量 g 在 X 上诱导出反典范线丛 K_X^{-1} 的纤维上的厄米度量 $\det g$ ，也就是说，它是全纯切丛的行列式，并且陈-里奇形式满足 $\mathrm{Ric}^{Ch}(\omega) = R_{\det g}$。特别地， $c_1^{BC}(X) = c_1^{BC}(K_X^{-1})$。

练习30。 设 X 是一个赋有厄米度量 ω 的全纯流形。证明在度量的共形变换下，陈-里奇形式按如下方式变换

$$\mathrm{Ric}^{Ch}(e^f\omega) = \mathrm{Ric}^{Ch}(\omega) + \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial} f.$$

推出， $c_1^{BC}(X) = 0$ 当且仅当 X 存在一个 *Chern-Ricci* 曲率为零的厄米度量。

练习31 ([Tos15])。 设 X 是一个复维数为 n 的紧致全纯流形，满足 $c_1^{BC}(X) = 0$。证明，在以下任一假设下，均可推出 $c_1(X) = 0$ 在 $H^2_{dR}(X,\mathbb{R})$中成立：

- $\mathrm{Kod}(X) \geq 0$;
- $b_1(X) = 0$;
- X 存在 *K¨ahler* 度量;
- $n = 2$;
- X 属于 *Fujiki* 类 $\mathcal{C}$。

练习32 ([Mag17])。 设 Y 是一个复维数为 ¨的紧致 *K nähler Calabi–Yau* 流形，即 $K_Y \simeq \mathcal{O}_Y$。设 $f\colon Y \to Y$是一个自同构，其在 $H^0(Y, K_Y) \simeq \mathbb{C}$ 上的诱导作用具有无限阶。按如下方式构造一个复维数为 X 的复流形 $n+1$：考虑乘积 $Y \times\mathbb{C}$，其上有一个由 $\mathbb{Z}^2$ 生成的作用，生成元为

$$(1,0)\cdot(x,z) = (x,z+1), \quad and \quad (0,1)\cdot(x,z) = (f(x),z+\tau),$$

对于某个固定的非实数 $\tau \in\mathbb{C}$。定义

$$X := (Y \times \mathbb{C})/\mathbb{Z}^2,$$

这是一个以椭圆曲线 $E = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$ 为底、纤维为 Y 的全纯纤维丛。证明 X 不是 *K¨ahler* 流形，其典范丛 K_X 不是挠率丛，即使第一博特–切恩类消失，$c_1^{BC}(X) = 0$。

提示。 注意，单值化映射 $\pi_1(E) \to \mathrm{Aut}(H^n(Y, \mathbb{R})$ 包含一个无限阶元素。当 X 为 K¨ahler 时，这是不可能的，正如 [Fuj78，推论 4 所示。10]。若 $\Omega \in H^0(Y, K_Y)$ 是一个处处不为零的

全纯体积形式，则对于某个 $\lambda \in \mathbb{C}$（其中 $|\lambda| = 1$），有 $f^*\Omega = \lambda\Omega$，且 λ 不是单位根。这意味着 $\mathrm{Kod}(X) = -\infty$，特别地， K_X 不是挠率元素。最后，设 ω_Y 是 Y 上的 K¨ahler 里奇平坦度量，并令 ω_E 表示 $\mathbb{C}$ 上的标准平坦度量。于是 $\omega_Y^n \wedge \omega_E$ 在 $Y \times \mathbb{C}$ 上定义了一个里奇平坦体积形式，该形式在 $\mathbb{Z}^2$作用下保持不变，因而下降到 X。这为 X 提供了一个Chern-Ricci曲率消失的厄米度量，因此 $c_1^{BC}(X) = 0$。 □

练习33. 证明 ***Hopf*** 流形 X 有 $c_1(X) = 0$ 但 $c_1^{BC}(X) \neq 0$。

提示. 回顾 $b_2(X) = b_2(S^1 \times S^{2n-1}) = 0$。注意标准度量$\omega$ 有 $\mathrm{Ric}^{Ch}(\omega) \geq 0$ 但 $\mathrm{Ric}^{Ch}(\omega) \neq 0$。 □

练习34. 证明六维球面上的假想复结构S^6 有 $c_1(X) = 0$ 但 $c_1^{BC}(X) \neq 0$。

提示. 证明条件 $c_1(X) = 0$ 与 $b_2(X) = 0$ 蕴含 K_X 是全纯挠的。另一方面，由于 $H^1(X,$整数群$) = H^3(X,$整数群$) = 0$，指数正合列给出 $\mathrm{Pic}(X) \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X)$，它是无挠的。于是 K_X 实际上是全纯平凡的，因此存在一个处处不为零的全纯三形式 Ω。由于 Ω 是闭的且 $H^3_{\mathrm{dR}}(X,$复数域$) = 0$，它是恰当的：$\Omega = d\eta$。于是

$$0 < (\sqrt{-1})^{n^2} \int_X \Omega \wedge \overline{\Omega} = (\sqrt{-1})^{n^2} \int_X d(\eta \wedge \overline{\Omega}) = 0,$$

其中 $n = 3$，这就产生了矛盾。 □

练习35. 设 X 是一个紧致全纯曲面。设 $\omega(t)$是一族从 ω_0 开始沿陈–里奇流演化的厄米度量。证明 X 的体积以及任意曲线 D 的体积按以下公式演化：

$$\mathrm{Vol}(X, \omega(t)) = \frac{1}{2} \int_X \left(\omega_0 - t\,\mathrm{Ric}^{Ch}(\omega_0)\right)^2,$$
$$\mathrm{Vol}(D, \omega(t)) = \int_D \left(\omega_0 - t\,\mathrm{Ric}^{Ch}(\omega_0)\right).$$

练习36. 设 X 为一个赋予埃尔米特度量 ω_0的紧致全纯流形。证明：在对时间重新参数化并重新缩放

度量的意义下，陈–里奇流之间存在一一对应

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega(t) = -\mathrm{Ric}^{Ch}(\omega(t)), \quad \omega(0) = \omega_0, \tag{CRF}$$

以及归一化陈–里奇流

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega(t) = -\mathrm{Ric}^{Ch}(\omega(t)) - \omega(t), \quad \omega(0) = \omega_0. \tag{NCRF}$$

提示。 如果 $\tilde{\omega}(s)$ 是（陈–里奇流）的解，那么令

$$\omega(t) := \frac{\tilde{\omega}(s)}{s+1} \quad \text{with} \quad t = \log(s+1),$$

即可得到（归一化陈–里奇流）的一个解。反过来，如果 $\omega(t)$ 是（归一化陈–里奇流）的解，那么

$$\tilde{\omega}(s) := e^t\omega(t) \quad \text{with} \quad s = e^t - 1,$$

是（陈–里奇流）的解。 □

练习 37 ([TW15])。 设 X 是一个紧致全纯曲面。考虑从任意 *Gauduchon* 度量 T 出发的陈–里奇流的最大存在时间 ω_0。证明：

- 如果 $T = +\infty$，那么 X 是极小的。
- 如果陈–里奇流在有限时间内塌缩，即 $T < +\infty$ 且$\mathrm{Vol}(X, \omega(t)) \to 0$ 当 $t \to T^-$时，则$\mathrm{Kod}(X) = -\infty$，因此 X要么双有理等价于某个纤维曲面，要么属于 *VII* 类。
- 如果 $T < +\infty$ 且该流是非塌缩的，即$\mathrm{Vol}(X, \omega(t)) \geq c > 0$当 $t \to T^-$时，则 X 含有(-1)曲线。

练习 38 ([TW13]). 求出从标准度量出发，在 *Hopf* 曲面和井上曲面上的（归一化）陈-里奇流的显式解。

6 复非 K¨ahler 几何中的开放问题

数学教育可能导致赋权能力的丧失，也可能促成赋权。
(O.Skovsmose，M. Niss， [SN08])

以下列出复非 K¨ahler 几何及相关边界区域中的若干开放问题。这份清单并非意在面面俱到，也自然反映了作者的兴趣与有限视角。尽管如此，作者仍希望强调确定有意义的研究方向的重要性，也要考虑伦理考量与社会正义。

6.1 上同调类的几何代表元

尽管它主要涉及 K¨ahler 代数几何，但我们仍不能不提霍奇猜想。该猜想旨在建立几何对象与上同调类之间的联系。关于完整论述，请参见 [Voi02b]。

考虑全纯流形 X 中的一个解析子集，即一个闭子集 $Z \subset X$，它在局部由全纯函数的零点集定义。若解析子集 Z 的光滑部分 Z_{smooth} 连通，则称其为不可约解析子集。在这种情况下，我们将 Z 的维数定义为 Z_{smooth} 的复维数。根据魏尔斯特拉斯预备定理，余维数为 r 的不可约解析子集 $Z \subset X$ 定义了一个上同调类 $[Z] \in H^{2r}$(X，整数群)，该类由光滑部分 Z_{smooth} 的庞加莱对偶给出。我们将余维数为 r 的解析圈群定义为自由阿贝尔群 $\mathcal{Z}^r(X)$，其生成元为余维数为 r 的不可约解析子集。根据前述论证，存在一个定义良好的圈类映射

$$\mathcal{Z}^r(X) \to H^{2r}(X, \mathbb{Z}),$$

其像，

$$H^{2r}(X, \mathbb{Z})_{\text{an}} := \text{im}(\mathcal{Z}^r(X) \to H^{2r}(X, \mathbb{Z})),$$

称为解析类群。在射影代数情形下，我们称之为代数类，记作 H^{2r}(X,整数群)$_{\text{alg}}$。注意，当 X 是K¨ahler时，解析类属于 H^{2r}(X,整数群) $\cap H^{r,r}(X)$，也就是说，它们是霍奇类。

问题（有理霍奇猜想）。设 X 是一个射影流形。那么，任意次数为 $2r$ 的霍奇类都可由某个代数循环的类的整数倍表示，即

$$H^{2r}(X,\mathbb{Q})_{\mathrm{alg}} = H^{2r}(X,\mathbb{Q}) \cap H^{r,r}(X).$$

截至目前，这一猜想已由 Lefschetz (1，1) 定理推得适用于射影三维流形，也适用于某些特殊类别的射影流形。

在更广泛的 K¨ahler 情形中，这一结论不再成立，Voisin 已证明了这一点 [Voi02a]。探究霍奇问题在更一般的复情形中可以在多大程度上得到表述，将会很有意思；这一探究或许可以超越 K¨ahler 范畴，或至少局限于复流形的某些合适子类中 [Bas99]。

6.2 全纯几何的拓扑障碍

一个基本问题是研究定义在紧致全纯流形乃至可微流形上的代数不变量，并阐明这些不变量在多大程度上取决于是否存在可积复结构（另见第6.3节）。我们从这篇精彩的综述[Ste25b], 中汲取灵感并以其为参考，重点关注上同调群、陈类、有理同伦群和高阶运算，既研究它们的实现问题（即哪些不变量集合实际上可以由某个空间实现，或者它们必须满足哪些线性关系），也研究它们的分类问题（即给定的不变量在多大程度上决定该空间）。

例如，每一个非负整数序列都可以实现为某个拓扑空间的贝蒂数序列，例如通过取球面的楔和来实现。更深入地，有理同伦论中有一个经典结果：任意有限维、单连通的有理交换分次代数都可以实现为某个单连通拓扑空间的有理系数奇异上同调环。

对于维数为 n 的紧致可微流形 X，存在一个完美配对 $H^k(X,\mathbb{Q}) \times H^{n-k}(X,\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$，特别是，这意味着贝蒂数具有对称性：$b_k(X) = b_{n-k}(X)$。此外，当 $n = 2k$ 为偶数时，诱导在 $H^k(X,\mathbb{Q})$ 上的配对是 $(-1)^k$-对称的。因此，如果 $n \equiv 2 \mod 4$，那么中间贝蒂数满足 $b_{n/2}(X) \equiv 0 \mod 2$。根据 [KS13], ，上述关系是

对所有紧致光滑流形的贝蒂数普遍成立的唯一关系。紧致光滑流形上同调环的实现问题由 Sullivan 研究 [Sul77] 以及 Barge 研究 [Bar76]；参见例如 [Ste25b，定理 1。5] 关于精确表述。

沙利文-Barge定理的殆复版本见 [Sul77] ，后来由 Milivojevi´c [Mil22]证明；参见 [Ste25b，定理 1。7] 此处给出了精确表述。在这种情况下，实现问题涉及陈数所满足的 Stong 同余（即由阿蒂亚-辛格指标定理导出的整性条件）、相交形式的符号差等于庞特里亚金数的某个多项式组合这一要求，以及欧拉示性数等于最高陈数这一条件。

使用可积复结构的一个优势是可以利用各种上同调理论。在紧致 K¨ahler 情形下，Kotschick 和 Schreieder 的一项结果 [KS13] 表明，霍奇数、贝蒂数和陈数之间唯一的普遍有理线性关系，都是实结构与庞加莱´对偶性、霍奇分解以及黎曼-罗赫定理所蕴含的关系。在此背景下，自然会提出以下问题：更多细节和部分结果请参见 [Ste25b]及其中的参考文献。

问题 ([Ste25b])。 对于给定维数的紧复流形所关联的各种上同调理论，其维数之间普遍成立的线性关系有哪些？除了 *[Ste21b]*，中指出的那些关系之外，是否还存在其他普遍成立的有理关系？这些关系源于实结构、对偶性、仅涉及角落中点的约束、紧复曲面的 *Fr¨olicher* 谱序列退化，以及复维数 $n = 2$ 中已知的二次关系。在复维数 $n \geq 3$ 中，除贝蒂数和庞特里亚金数的线性组合外，是否还存在由之字形的重数与陈数组成的拓扑不变量线性组合？除了 *[Ste21a*、 *Ste21b]* 中指出的那些双亚纯不变量之外，是否还存在其他上同调不变量的线性组合？

这个问题也与 Hirzebruch 提出的一个问题有关，见 [Hir54，问题 31]。它本质上归结为一个构造问题，见 [Ste22、Ste25b] 以获得精确表述。我们还注意到上同调不变量之间存在普遍不等式，见 [AT13、AT17、PSU24、SW24]。

我们简要提及另外两个事实。首先是陶布斯的一项基本结果 [Tau92], ，见 例如 [ABC+96，推论 1.66], ，它指出每一个有限可表现群都可作为某个紧复三维流形的基本群出现。其次，我们着重介绍 Stelzig [Ste25c], 的近期工作，他为紧复流形发展了有理同伦论的多重位势类比。

理解复结构在何种程度上会约束底层拓扑，是一个基本的开放问题；上述讨论的结果与问题都旨在为此作出贡献。球面是最简单的拓扑空间，因此一个自然的问题是：球面是否存在可积复结构？对于 S^2 和 S^6，分别可以利用四元数和八元数构造近复结构。然而，Borel 和 Serre 的一项经典结果 [BS53]表明，其他球面都不存在近复结构。 S^2 上的自然近复结构是可积的，对应于复流形 复数域P^1。相比之下，由于八元数的非结合性，S^6 上的自然近复结构不可积。 S^6 是否存在任何可积近复结构，仍是一个开放问题，称为 Hopf 问题。关于这一问题的详细历史和最新进展，请参阅 [ABG+18]。

问题 (Hopf 问题 [Hop48]和丘成桐问题 [VdV66，Yau24])。 六维球面 S^6 是否存在可积复结构？更一般地，是否存在实维数为 $2n \geq 6$ 、具有近复结构但不具有可积复结构的可微流形？

作为探索 Hopf 问题的一种尝试，并受到实流体动力学中类似图景的启发，Sullivan 提出了以下猜想，相关内容见 [AM19]。

问题 (沙利文猜想，见 [AM19])。 复维数为 $n \geq 3$ 的紧复流形的贝蒂数之和的最小值是否等于四？

对于复维数为 $n \geq 4$ 的紧复流形，人们预期其 Betti 数总和的最小值为 3，例如卡拉比-埃克曼流形和霍普夫流形就能达到这一数值。对于紧复曲线，最小值为 2（由 CP^1 达到）；而对于紧复曲面，最小值为 3（由 CP^2 达到）。如果沙利文猜想得到肯定的回答，那么

这将排除在 S^6 上存在复结构的可能，因为其 Betti 数总和仅为 2，而下一个最小值由 $\mathbb{C}P^3$ 达到。

我们注意到，在 S^6 上存在复结构将蕴含在复数域P^3上存在奇异复结构，它是通过对复形 S^6 在一点处进行爆破而得到的，参见例如[Tos17]。注意，复数域P^3 上的每一个复结构，或者更一般地，维数大于或等于3的任何紧致K¨ahler流形上的每一个复结构，是否必然为K¨ahler，仍是一个未决问题。

6.3 近复上同调

设 M 是赋予了（不可积）近复结构的可微流形。在这种情形下，$\bar{\partial}^2 \neq 0$, 但一旦固定近厄米度量 g，我们仍可定义椭圆算子

$$\Box_g = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}.$$

在可积情形下，霍奇理论保证其核的维数与度量无关。然而，在不可积情形下这未必成立。这一问题出现在Hirzebruch著名的问题列表 [Hir54] 中，即问题20，称为Kodaira–Spencer问题。

问题 (Kodaira–Spencer，Hirzebruch [Hir54])。设 M 是一个赋有近复结构 J的可微流形。选取一个近厄米度量 g 并考虑以下数值

$$h_g^{p,q} := \dim\left(\ker \Box_g \cap \Omega^{p,q}(M,J)\right).$$

它是否 $h^{p,q}_g$与近厄米结构的选择无关？如果不是，请为(M,J) 另行定义“霍奇数”，使其仅取决于近复结构，并且在可积复情形下推广霍奇数。

最近，Holt 和 Zhang [HZ22b] 对这个问题给出了否定的回答。他们通过开发一种有效方法来确定 Kodaira-Thurston流形上的 □调和微分形式，证明了量 $h^{0,1}$ 会随近厄米度量的不同选择而变化。采用不同的技术，包括局部共形近厄米-K¨ahler度量，文献 [TT23]证明了 $h^{1,1}$ 也会随近厄米度量的不同选择而变化。更确切地说，设 (X^4, J) 是一个紧致近复流形，

维数为4，且令 ω 为一个近厄米度量，那么若 ω 它是整体共形近厄米-K¨ahler（特别是若它是近厄米-K¨ahler），则有$h^{1,\ 1} = b_- + 1$. 若 ω 它是（严格）局部共形近厄米-K¨ahler， $h^{1,\ 1} = b_-$.这里 b_- 是反自对偶调和形式空间的维数。事实上，可以构造出允许这两类度量的近复流形的具体例子。注意，根据Vai80], ，在紧复流形上，整体共形 K¨ahler度量与（严格）局部共形 K¨ahler度量不能共存。

Cirici 和 Wilson [CW21]最近尝试在近复情形下定义 Dolbeault 上同调的类比。给定外微分的分解

$$d = \mu + \partial + \overline{\partial} + \overline{\mu}$$

为纯型分量，其中 $\mu\colon \Omega^{p,q}(M,J) \to \Omega^{p+2,q-1}(M,J)$，他们将 (M,J) 的 Dolbeault 上同调定义为

$$H^{p,q}_{\mathrm{Dol}}(M,J) := H^q\left(H^p(\Omega^{\bullet,\bullet}(M,J),\overline{\mu}),\overline{\partial}\right),$$

它是一个函子谱序列的第一页，并收敛到 M 的德拉姆上同调。这个上同调往往是无限维的，参见 [CPS22]。

一般而言，将复几何的经典不变量推广到非可积情形会很有意义，例如 [CZ23] 中关于 Kodaira 维数的讨论。关于这一方向相关问题的最新且全面的综述，请参见 [Ste25b]。

6.4 厄米几何的拓扑障碍

正如我们所见，K¨ahler 度量的存在会对底流形施加强烈的拓扑障碍。另一方面，对于较弱的度量类别（如平衡流形），目前尚无已知的拓扑障碍，尽管它们可以用流来刻画[Mic82]。此外，容易证明，同时满足多重闭和平衡条件的厄米度量必然是 K¨ahler [AI01]。在所有已知的例子中，同一流形上同时存在多重闭度量和平衡度量（不一定是同一个度量）的情形，仅出现在 K¨ahler 情形中。

问题 (Fino–Vezzoni 猜想 [FV15，FV16]）。设 X 是一个不具有任何 *Kähler* 度量的紧致全纯流形。平衡厄米度量的存在与多重闭厄米度量的存在，是否在 X上互斥？这种不相容性从何而来？是否还有其他特殊厄米度量对也表现出类似的不相容现象？

同样地，Streets-Tian 猜想 [ST10] 指出，若一个紧全纯流形具有厄米辛度量（即某个闭实 2-形式的 (1，1) 分量所对应的厄米度量），那么它也必定具有 Kähler 度量。这可以看作 Donaldson 的驯服到相容问题在高维可积情形下的类似问题，该问题针对的是近复 4-流形 [Don06]。

研究某些类别的复流形上是否存在特殊度量，将会很有意思。例如，所有已知满足 $\partial\bar{\partial}$-引理性质的紧复流形，包括 Moˇıˇsezon 流形、Fujiki 类 $\mathcal{C}$中的流形、扭量空间，以及由小变形得到的流形，都确实具有平衡度量。平衡度量的存在性可能可通过求解与 Gauduchon-Calabi-Yau 相关的厄米流形上的 Hessian 方程得到 [STW17，Pop15], 正如我们最初从 Demailly 那里了解到的。

问题(Demailly)。每个满足$\partial\bar{\partial}$-引理性质的紧复流形都存在平衡厄米度量吗？

我们在此讨论的最后指出，构造特殊厄米度量可能涉及多种方法：椭圆非线性偏微分方程，甚至是在弱意义下（请注意，处理非 Kähler 度量时，固定 $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}$-类中的变形通常不会保持总体积，相关结果及应用参见 [GL21、GL22、GL23、AGL23] ）；几何流（由于 Gauduchon 度量在任意共形类中无处不在，因此，在所有复维数下都保持 Gauduchon 条件的几何流之存在将尤其值得关注）；变分方法（例如参见 [Gau84、AIOT21]）；以及近来兴起的、秉承 [Ber20、Ber23], 思想的概率技术（另见其中的参考文献及 [MM07]）。

6.5 典范厄米度量

我们已经讨论过 Chern-Yamabe 问题，即在厄米流形的任意共形类中，寻找一个关于陈联络具有常数量曲率的度量。正如我们所说，预期常量曲率为正时，该问题仍未解决，而且无法应用通常意义下的变分技术。总体而言，这种度量将高度非典范，因为每个共形类中都存在这样的度量：我们可以进一步探讨如何通过附加另一条件使其成为典范，例如要求其为 Gauduchon 度量。回想一下，正如 [Gau77b], 所证明的，任意厄米度量的共形类都包含一个 Gauduchon代表，这提示了一种可能的迭代过程。选择陈联络，是因为它在复几何中，尤其是在解析学视角下，具有重要作用。不过，也可以选择其他联络：例如参见 Barbaro [Bar23] 关于 Bismut联络的结果。我们还提出，标量曲率的作用或许可以由其他更有意义的量取代，例如 [ACPS22]中构造的矩映射。接下来我们将问题表述如下。

习题 (Chern–Yamabe型问题 [ACS17，APS+25])。 设 X 是一个紧致全纯流形。在任意厄米度量的共形类中，是否存在一个代表度量，使陈联络的标量曲率或其他相关几何量为常数？关于这类度量的模空间几何，例如其紧致性，能得出哪些结论？是否存在一种有意义的方法，将曲率条件与“上同调”条件结合起来，例如构造陈标量曲率为常数的*Gauduchon*度量？

6.6 复流形和曲面的分类

全局球壳（GSS）猜想认为，所有第二Betti数为正的极小VII类曲面都包含一个全局球壳，也就是说，存在一个光滑的三维球面，其邻域与 $S^3 \subset$复数域^2, 的某个邻域双全纯，且其补集连通。得益于 [DOT03]，GSS猜想等价于以下标准猜想；该猜想的证明将完成VII类曲面的分类，表明这类曲面仅由Hopf曲面、Inoue曲面和Kato曲面构成。

问题 （VII 类曲面的标准猜想）。 任何第二*Betti*数为正的*VII*类极小紧致全纯曲面 $b_2 > 0$恰有 $b_2(X)$条有理曲线。

通过结合复几何与规范理论中的技巧，Teleman [Tel05、Tel10、Tel17、Tel18] 证明，任意极小的 VII 类曲面X 若具有 $1 \leq b_2$（X），≤ 3 则都包含一个曲线环。Nakamura 的一项结果[Nak90] 进一步表明，X 它是由吹起的初级 Hopf 曲面构成的单参数族的一个退化，因此完成了第二Betti数较小时在变形等价意义下的分类。关于非 Kähler 曲面分类的最新进展，参见 [Tel19]。

人们自然会想知道，能否利用几何流重构全局球壳，参见 [ST10、FTWZ16、TW22]。

关于任意维数紧致全纯流形的分类，我们必须提及 Mori 开创的极小模型纲领，以及 Song 和 Tian 在射影代数簇背景下发展出的解析对应理论 [ST17] 。对于更一般的复非 Kähler 情形，人们或许只能期待针对特定流形类别的部分分类结果，例如局部共形 Kähler 三维复流形。

我们还回顾 Bogomolov 的一个猜想 [Bog96], 该猜想断言，任意紧致复流形都可以实现为射影簇上某个代数叶状结构的横截子流形。Demailly 和 Gaussier [DG17], 在这一方向上取得了部分成果，他们建立了一个嵌入定理，证明紧致近复流形可以作为复仿射代数流形中某个代数分布的横截子簇。

参考文献

[AB96] Lucia Alessandrini 和 Giovanni Bassanelli。紧致平衡流形类在修改下保持不变。载于《复分析与几何》。会议论文集，会议于 1995年6月5日至9日在意大利特伦托举行，第 1–17 页。纽约，NY：Marcel Dekker，1996年。（引于第 38 页。）[ABC+96] J. Amor´os、Marc Burger、K. Corlette、D. Kotschick 和 D. Toledo。紧致 K¨ahler 流形的基本群，《数学调查专著》第 44 卷。罗得岛州普罗维登斯：AMS，美国数学会，1996年。（引于第 83 页。）[ABG+18] Ilka Agricola、Giovanni Bazzoni、Oliver Goertsches、Panagiotis Konstantis 和 S¨önke Rollenske。关于 Hopf 问题的历史。Differ. Geom. Appl.，57：1–9，2018年。（引于第 7、9、83 页。）[ACPS22] Daniele Angella、Simone Calamai、Francesco Pediconi 和 Cristiano Spotti。局部共形 K¨ahler 流形上扭曲 Hamilton 向量场的矩映射。预印本，arXiv:2207.06863 [math.DG] (2022)，2022年。即将发表于 Transf. Groups。（引于第 51、60、87 页。）[ACS17] Daniele Angella、Simone Calamai 和 Cristiano Spotti。关于 Chern-Yamabe 问题。数学研究快报，24(3)：645–677，2017年。（引于第 51、54、87 页。）[ACS20] Daniele Angella、Simone Calamai 和 Cristiano Spotti。关于 Chern-Einstein 厄米度量的评述。数学杂志，295(3-4)：1707–1722，2020。（引于第 59、61、62 页。）[Aep65] A. Aeppli。关于 Stein 流形的上同调结构。复分析会议论文集，明尼阿波利斯，1964年，58–70（1965年）。1965年。（引于第 14 页。）[AGL23] Daniele Angella、Vincent Guedj 和 Chinh H. Lu。多重符号厄米度量。美国数学会汇刊，376(7)：4631–4659，2023年。（引于第 86 页。）

[AI01] Bogdan Alexandrov 和 Stefan Ivanov。厄米流形上的消失定理。Differ. Geom. Appl., 14(3):251–265, 2001年。（引文见第 49、85 页。）[AIOT21] Daniele Angella、Nicolina Istrati、Alexandra Otiman 和 Nicoletta Tardini。共形几何中的变分问题。几何分析杂志, 31(3):3230–3251, 2021年。（引文见第 86 页。）[AK17a] Daniele Angella 和 Hisashi Kasuya。可解流形的博特-陈上同调。Ann. Global Anal. Geom., 52(4):363–411, 2017年。（引文见第 27、28 页。）[AK17b] Daniele Angella 和 Hisashi Kasuya。可解流形的上同调与变形，以及某些性质的封闭性。North-West. Eur. J. Math., 3:75–105, 2017年。（引文见第 31 页。）[AKMW02] Dan Abramovich、Kalle Karu、Kenji Matsuki 和 Jaroslaw Wlodarczyk。双有理映射的环面化与因子分解。J. Am. Math. Soc., 15(3):531–572, 2002。（引文见第 42 页。）[AM19] Michael Albanese 和 Aleksandar Milivojevi´c。关于近复流形贝蒂数之和的最小值。Differ. Geom. Appl., 62:101–108, 2019年。（引文见第 7、83 页。）[AN22] Romina M. Arroyo 和 Marina Nicolini。幂零流形上的 SKT 结构。数学杂志, 302(2):1307–1320, 2022。（引文见第 50 页。）[Ang13] Daniele Angella。岩泽流形及其小变形的上同调。几何分析杂志, 23(3):1355–1378, 2013 年。（引文见第 27 、 28 页。）[Ang18] Daniele Angella。S^6 上假想复结构的霍奇数。Differ. Geom. Appl., 57:105–120, 2018年。（引文见第 12 页。）[Ang25] Daniele Angella。复非 K¨ahler 流形的厄米度量。预印本，arXiv:2503.16936 [math.CV]（2025），2025年。（引文见第 32 页。）

[AOUV22] Daniele Angella、Antonio Otal、Luis Ugarte 和 Raquel Vil-lacampa。关于具有 K¨ahler 型曲率的 Gauduchon 联络。分析与几何通讯, 30(5):961–1006, 2022。（引文见第 37、52、64 页。）[APS+25] Daniele Angella、Francesco Pediconi、Carlo Scarpa、Cristiano Spotti 和 Oluwagbenga Joshua Windare。准备中，2025年。（引文见第 51、61、87 页。）[APV23] Daniele Angella、Maurizio Parton 和 Victor Vuletescu。关于代数维数为二的局部共形 K¨ahler 三维复流形。国际数学研究通讯, 2023(5):3948–3969, 2023年。（引文见第 32、43、44、45、46、47 页。）[APV25] Daniele Angella、David Petcu 和 Victor Vuletescu。准备中，2025年。（引文见第 32、43 页。）[AS20] Daniele Angella 和 Tommaso Sferruzza。陈–里奇流中的几何形式性。复分析与算子理论, 14(1):29, 2020。编号 27。（引文见第 50 页。）[ASTT20] Daniele Angella、Tatsuo Suwa、Nicoletta Tardini 和 Adriano Tomassini。关于双亚纯同构下的 Dolbeault 上同调与霍奇结构的注记。Complex Manifolds, 7:194–214, 2020。（引文见第 22 页。）[AT75] Louis Auslander 和 Richard Tolimieri。幂零流形上的阿贝尔调和分析、西塔函数与函数代数，数学讲义第 436 卷。施普林格，Cham, 1975。（引文见第 75 页。）[AT13] Daniele Angella 和 Adriano Tomassini。关于 $\partial\partial$-引理与 Bott-Chern 上同调。数学发明, 192(1):71–81, 2013年。（引文见第 11、18、22、31、82 页。）[AT15] Daniele Angella 和 Adriano Tomassini。关于 Bott-Chern 上同调与形式性。几何与物理杂志, 93:52–61, 2015年。（引文见第 18、22 页。）[AT17] Daniele Angella 和 Nicoletta Tardini。非 K¨ahler 流形的定量与定性上同调性质。

美国数学会会刊，145(1):273–285，2017。（引用见第21、22、82页。）[AT23] Daniele Angella 和 Valentino Tosatti。Inoue-Bombieri曲面上的沿叶平坦形式。《函数分析杂志》，285(5):34，2023。编号：110015。（引用见第64、70、71、72页。）[Aub76] Thierry Aubin。非线性微分方程与Yamabe数量曲率问题。《纯粹与应用数学杂志》(9)，55:269–296，1976。（引用见第36页。）[Aub78] Thierry Aubin。紧致卡拉比度量流形上的Monge-Ampère型方程。数学科学通报，II辑，第102卷：63–95，1978。（引用见第35页。）[Bar76] Jean Barge。单连通有理同伦型上的可微结构。《高等师范学校科学年刊》(4)，9:469–501，1976。（引用见第82页。）[Bar23] Giuseppe Barbaro。Bismut联络的曲率：Bismut-Yamabe问题与带挠率的卡拉比-丘度量。几何分析杂志，33(5):23，2023。编号：153。（引用见第87页。）[Bas99] Giovanni Bassanelli。岩泽流形上的面积极小黎曼曲面。几何分析杂志，9(2):179–201，1999。（引用见第81页。）[BC65] Raoul Bott 和 陈省身。埃尔米特向量丛及其全纯截面零点的等分布。数学学报，114:71–112，1965。（引用见第14页。）[BDIP02] José Bertin、Jean-Pierre Demailly、Luc Illusie 和 Chris Peters。《霍奇理论导论》。由James Lewis和Chris Peters从法文译出，SMF/AMS专著丛书第8卷。罗得岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），2002。（引用见第4页。）[Bel00] Florin Alexandru Belgun。非卡拉比复曲面的度量结构。数学年刊，317(1):1–40，2000。（引用见第39、49页。）

[Ber20] Robert J. Berman。卡拉比-爱因斯坦度量与随机点过程导论。载于《微分几何、卡拉比-丘理论与广义相对论》。该书收录了在庆祝丘成桐70岁生日的会议上所作的讲座，会议于2019年5月在美国马萨诸塞州剑桥的哈佛大学举行，第35–87页。马萨诸塞州萨默维尔：国际出版社，2020。（引用见第86页。）[Ber23] Robert J. Berman。涌现复几何。载于《2022年国际数学家大会》，2022年国际数学家大会，芬兰赫尔辛基，线上举行，2022年7月6日至14日。第4卷，第5–8节，第2456–2483页。柏林：欧洲数学学会（EMS），2023。（引用见第86页。）[Bes08] Arthur L. Besse。《爱因斯坦流形》。数学经典。柏林：施普林格，1987年版重印，2008年。（引用见第34、35页。）[BG88] Chal Benson 和 Carolyn S. Gordon。幂零流形上的卡拉比结构与辛结构。《拓扑》，27(4):513–518，1988。（引用见第31页。）[BHPVdV04] Wolf P. Barth、Klaus Hulek、Chris A. M. Peters 和 Antonius Van de Ven。《紧复曲面》，数学成果与边界丛书第4卷，第3辑。柏林：施普林格，第2版（增订版），2004。（引用见第4、6、67页。）[Bis89] Jean-Michel Bismut。非卡拉比流形的局部指标定理。数学年刊，284(4):681–699，1989。（引用见第37页。）[Bla53] André Blanchard。某些流形上的复解析结构研究。巴黎科学院会议录，236:657–659，1953。（引用见第9页。）[BMFM20] Urtzi Buijs、José M. Moreno-Fernández 和 Aniceto Murillo。结构与马西积。《地中海数学杂志》，17(1):15，2020。编号：31。（引用见第18页。）[Bog80] F. A. Bogomolov。不稳定向量丛与曲面上的曲线。1978年赫尔辛基国际数学家大会，第2卷，517–524（1980），1980。（引用见第63、69页。）

[Bog96] F. Bogomolov. 复流形与代数叶状结构。京都大学数理解析研究所预印本 1084，京都，1996。未发表。（引用见第 88 页。）[Bom73] E. Bombieri. 致 Kodaira 的信，1973。（引用见第 69、70 页。）[BP25] Francesco Bei 和 Riccardo Piovani. l^2 fr¨利歇尔不等式，2025。（引用见第 15 页。）[Brˆı94] Vasile Brˆınzˇanescu. 非代数椭圆曲面的 Néron-Severi 群。II：非 Kähler 情形。数学手稿，84(3-4):415–420，1994。（引用见第 43、69 页。）[Brˆı96] Vasile Brˆınzˇanescu. 紧复曲面上的全纯向量丛，数学讲义第 1624 卷。柏林：施普林格，1996。（引用见第 43、46、69 页。）[BS53] 阿尔芒·博雷尔和让-皮埃尔·塞尔。李群与 Steenrod 的约化幂。Am. J. Math.，75:409–448，1953。（引用见第 9、83 页。）[Buc99] Nicholas Buchdahl. 关于紧 Kähler 曲面。Ann. Inst. Fourier，49(1):287–302，1999。（引用见第 39、67、68 页。）[Cal82] 欧金尼奥·卡拉比。极值 Kähler 度量。微分几何研讨会，《数学年刊研究》102，259–290（1982），1982。（引用见第 36 页。）[Cao85] 曹怀东。紧 Kähler 流形上的 Kähler 度量向 Kähler–爱因斯坦度量的变形。数学发明，81:359–372，1985。（引用见第 36、64、67 页。）[CC21a] Xiuxiong Chen 和程璟睿。关于常数量曲率 Kähler 度量。I：先验估计。J. Am. Math. Soc.，34(4):909–936，2021。（引用见第 36 页。）[CC21b] Xiuxiong Chen 和程璟睿。关于常数量曲率 Kähler 度量。II：存在性结果。J. Am. Math. Soc.，34(4):937–1009，2021。（引用见第 36 页。）

[CDS15a] Xiuxiong Chen、Simon Donaldson 和 Song Sun。Fano 流形上的 Kähler–爱因斯坦度量。I：具有锥奇点的度量的逼近。J. Am. Math. Soc.，28(1):183–197，2015。（引用见第 35 页。）[CDS15b] Xiuxiong Chen、Simon Donaldson 和 Song Sun。Fano 流形上的 Kähler–爱因斯坦度量。II：锥角小于 2π的极限。J. Am. Math. Soc.，28(1):199–234，2015。（引用见第 35 页。）[CDS15c] Xiuxiong Chen、Simon Donaldson 和 Song Sun。Fano 流形上的 Kähler–爱因斯坦度量。III：锥角趋近于 2π 时的极限及主要证明的完备。J. Am. Math. Soc.，28(1):235–278，2015。（引用见第 35 页。）[CF01] S. Console 和 A. Fino. 紧幂零流形的 Dolbeault 上同调。Transform. Groups，6(2):111–124，2001。（引用见第 27、28 页。）[CF11] Sergio Console 和 Anna Fino. 可解流形的德拉姆上同调。比萨高等师范学院学报，Cl. Sci. (5)，10(4):801–818，2011。（引用见第 27 页。）[CFG86] Luis A. Cordero、M. Fernández 和 A. Gray. 不具有 Kähler 结构的辛流形。拓扑，25:375–380，1986。（引用见第 31 页。）[CFGU00] Luis A. Cordero、Marisa Fernández、Alfred Gray 和 Luis Ugarte. 具有幂零复结构的紧幂零流形：Dolbeault上同调。美国数学会汇刊，352(12):5405–5433，2000。（引用见第 27 页。）[CFK16] S. Console、A. Fino 和 H. Kasuya. 关于可解流形的德拉姆上同调与 Dolbeault上同调。Transform. Groups，21(3):653–680，2016。（引用见第 27 页。）[CFP06] S. Console、A. Fino 和 Y. S. Poon. 阿贝尔复结构的稳定性。《国际数学杂志》，17(4):401–416，2006。（引用见第 27 页。）

[CGVSG25] Joana Cirici、Roger Garrido-Vilallave 和 Anna Sopena-Gilboy。博特-陈与 Aeppli 上同调的 a_∞-结构。《Complex Manifolds》，12:9，2025。编号：20250012。（引自第 18 页。）[Chi24] Ionut Chiose。关于厄米度量的总 Monge-Amp`ere 体积的不变性。《Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math.》(6)，33(3):575–579，2024。（引自第 50 页。）[CHSW85] P. Candelas、Gary T. Horowitz、Andrew Strominger 和 Edward Witten。超弦的真空构型。《Nucl. Phys. B》，258:46–74，1985。（引自第 35 页。）[CK52] Wei-Liang Chow 和 Kunihiko Kodaira。论具有两个独立亚纯函数的解析曲面。《美国国家科学院院刊》，38:319–325，1952。（引自第 42 页。）[CPS22] R. Coelho、G. Placini 和 J. Stelzig。极大非可积近复结构：一个 h-原理及其上同调性质。《Sel. Math.》，新系列，28(5):25，2022。编号：83。（引自第 85 页。）[CW21] Joana Cirici 和 Scott O. Wilson。近复流形的 Dolbeault 上同调。《 Adv. Math. 》，391:52，2021。编号：107970。（引自第 85 页。）[CZ20] Simone Calamai 和 Fangyu Zou。Chern-Yamabe 问题札记。《Differ. Geom. Appl.》，69:14，2020。编号：101612。（引自第 59 页。）[CZ23] Haojie Chen 和 Weiyi Zhang。近复流形的 Kodaira 维数 I。《Am. J. Math.》，145(2):477–514，2023。（引自第 85 页。）[dB94] Paolo de Bartolomeis。复景观。《Riv. Mat. Univ. Parma》，第五辑，3:109–121，1994。（引自第 4 页。）[DBT06] Paolo De Bartolomeis 和 Adriano Tomassini。论可解的广义 Calabi-Yau 流形。《Ann. Inst. Fourier》，56(5):1281–1296，2006。（引自第 27 页。）

[DBT13] Paolo De Bartolomeis 和 Adriano Tomassini。卡拉比－丘流形的奇异变形。《Ann. Inst. Fourier》，63(2):391–415，2013。（引自第 8 页。）[Dem12a] Jean-Pierre Demailly。《代数几何中的解析方法》，现代数学综述第 1 卷。马萨诸塞州萨默维尔：国际出版社；北京：高等教育出版社，2012。（引自第 4、8 页。）[Dem12b] Jean-Pierre Demailly。复解析与微分几何。在线手稿，2012。获取地址：https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf。（引自第 4、14、48 页。）[DG17] Jean-Pierre Demailly 和 Herv´é Gaussier。光滑近复结构的代数嵌入。《欧洲数学学会杂志》(JEMS)，19(11):3391–3419，2017。（引自第 88 页。）[DGMS75] Pierre Deligne、Phillip Griffiths、John Morgan 和 Dennis Sullivan。卡拉比－丘流形的实同伦论。《数学发明》，29:245–274，1975。（引自第 16、17、22、28、43、48 页。）[dLPZ12] L. L. de Lima、P. Piccione 和 M. Zedda。乘积流形上 Yamabe 问题解的分岔。《Ann. Inst. Henri Poincar´é, Anal. Non Lin´éaire》，29(2):261–277，2012。（引自第 59 页。）[DO99] Georges Dloussky 和 Karl Oeljeklaus。VII_0 类紧曲面上的向量场与叶状结构。《 Ann. Inst. Fourier》，49(5):1503–1545，1999。（引自第 69 页。）[Don97] Simon K. Donaldson。关于规范理论、复几何与四维流形拓扑的评述。载于 M. F. Atiyah 和 D. Iagolnitzer 编，《菲尔兹奖得主讲演集》，第 384–403 页。世界科学出版社，新加坡，1997。（引自第 36、59 页。）[Don06] S. K. Donaldson。四维流形上的二形式与椭圆方程。载于《灵感源自 S. S. Chern：献给一位伟大数学家的纪念文集》，第 153–172 页。新泽西州哈肯萨克：世界科学出版社，2006。（引自第 86 页。）

[DOT03] Georges Dloussky、Karl Oeljeklaus 和 Matei Toma。具有 b_2 条曲线的 VII 类 $_0$ 曲面。东北数学杂志（第二辑），55(2):283–309，2003。（参见第 69、87 页。）[dRS03] Heberto del Rio 和 Santiago R. Simanca。近似厄米流形上的 Yamabe 问题。几何分析杂志，13(1):185–203，2003。（参见第 53 页。）[DS84] Ch. Deninger 和 W. Singhof。由海森堡群覆盖的紧幂零流形的 e不变量及拉普拉斯算子谱。数学发明，78:101–112，1984年。（参见第 75 页。）[Edw21] Gregory Edwards。初级 Hopf 曲面上的陈–里奇流。数学杂志，299(3-4):1689–1702，2021。（参见第 70 页。）[Egi01] Nadaniela Egidi。紧复流形上的特殊度量。Differ. Geom. Appl.，14(3):217–234，2001年。（参见第 50 页。）[Fer18] Ana Cristina Ferreira。圆六维球面上正交复结构的不存在性。Differ. Geom. Appl.，57:87–93，2018年。（参见第 9 页。）[FPPZ21] Teng Fei、Duong H. Phong、Sebastien Picard 和 Xiangwen Zhang。IIA 型弦的几何流。剑桥数学杂志，9(3):693–807，2021。（参见第 64 页。）[FPS04] Anna Fino、Maurizio Parton 和 Simon Salamon。六维中的强 KT 结构族。赫尔维数学评论，79(2):317–340，2004。（参见第 49 页。）[Fr¨o55] Alfred Fr¨olicher。多尔博上同调群与拓扑不变量之间的关系。美国国家科学院院刊，41:641–644，1955。（参见第 15 页。）[FRR19] Anna Fino、S¨onke Rollenske 和 Jean Ruppenthal。叶状化为环面群的复幂零流形的多尔博上同调。季刊数学杂志，70(4):1265–1279，2019年。（参见第 27 页。）

[FTWZ16] 方守文、Valentino Tosatti、Ben Weinkove 和郑涛。井上曲面与陈–里奇流。《函数分析杂志》，271(11):3162–3185，2016。（参见第 64、70、72、88 页。）[Fub04] G. Fubini。由厄米形式定义的度量。Nota. Ven. Ist. Atti 63 [(8) 6], 501-513 (1904)., 1904。（参见第 8 页。）[Fuj78] Akira Fujiki。紧 K¨ahler 流形的自同构群。数学发明，44:225–258，1978。（参见第 22、77 页。）[Fuj90] Akira Fujiki。极化代数流形的模空间与 K¨ahler 度量。Sugaku Expo.，5(2):173–191，1990年。（参见第 36、59 页。）[FV15] Anna Fino 和 Luigi Vezzoni。紧可解流形上的特殊厄米度量。几何与物理杂志，91:40–53，2015年。（参见第 86 页。）[FV16] Anna Fino 和 Luigi Vezzoni。幂零流形上平衡度量和 SKT 度量的存在性。美国数学会会刊，144(6):2455–2459，2016。（参见第 50、86 页。）[Gau77a] Paul Gauduchon。具有非负里奇自同态的厄米纤维丛。Bull. Soc. Math. Fr.，105:113–140，1977。（参见第 63 页。）[Gau77b] Paul Gauduchon。零偏心率定理。巴黎科学院会议录，A 辑，285:387–390，1977。（参见第 38、39、87 页。）[Gau81] Paul Gauduchon。多重调和对偶定理。巴黎科学院会议录，I 辑，293:59–61，1981。（参见第 55、62、63 页。）[Gau84] Paul Gauduchon。紧厄米流形的挠率 1-形式。数学年刊，267:495–518，1984年。（参见第 55、86 页。）

[Gau97] Paul Gauduchon. 厄米联络与狄拉克算子。Boll. Unione Mat. Ital., VII. Ser., B, 11(2):257–288, 1997年。（引用见第 36、38 页。）[Gau15] Paul Gauduchon. Calabi 极值 K¨ahler 度量：入门介绍。2015 年。（引用见第 34、36 页。）[GFS21] Mario Garcia-Fernandez 和 Jeffrey Streets。《广义里奇流》，Univ. Lect. Ser. 第 76 卷。罗得岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），2021。（引用见第 64 页。）[GH80] Alfred Gray 和 Luis M. Hervella。近似厄米流形的十六类及其线性不变量。《Ann. Mat. Pura Appl.》第 4 辑，123:35–58，1980。（引用见第 38 页。）[GH94] Phillip Griffiths 和 Joseph Harris。《代数几何原理》。纽约：约翰·威立父子公司有限公司，第 2 版，1994。（引用见第 4 页。）[GI97] P. Gauduchon 和 S. Ivanov。4维中的爱因斯坦-厄米曲面与厄米爱因斯坦-魏尔结构。《数学杂志》，226(2):317–326，1997。（引用见第 59、63 页。）[Gil11] Matt Gill。紧致厄米流形上抛物型复 Monge-Amp`ere 方程的收敛性。《分析与几何通讯》，19(2):277–304，2011年。（引用见第 64、65、66、67、69 页。）[GL10] Bo Guan 和 Qun Li。复 Monge-Amp`ere 方程与全实子流形。Adv. Math.，225(3):1185–1223，2010年。（引用见第 50 页。）[GL21] Vincent Guedj 和 Chinh Hoang Lu。准拟次调和包络 1：K¨ahler 流形上的一致估计。预印本，arXiv:2106.04273 [math.CV] (2021)，2021年。（引用见第 86 页。）[GL22] Vincent Guedj 和 Chinh H. Lu。准拟次调和包络 2：Monge-Amp`ere 体积的界。《Algebr. Geom.》，9(6):688–713，2022。（引用见第 86 页。）

[GL23] Vincent Guedj 和 Chinh H. Lu。准拟次调和包络 3：厄米流形上的 Monge-Amp`ere 方程求解。《J. Reine Angew. Math.》，800:259–298，2023。（引用见第 86 页。）[GOPP06] Rosa Gini、Liviu Ornea、Maurizio Parton 和 Paolo Piccinni。Vaisman 结构在复几何与四元数几何中的约化。《几何与物理杂志》，56(12):2501–2522，2006年。（引用见第 39 页。）[Gra76] Alfred Gray。厄米流形与近似厄米流形的曲率恒等式。《Tˆohoku Math. J. (2)》，28:601–612，1976。（引用见第 37 页。）[Gra91] Antonella Grassi。椭圆三维簇的极小模型。《数学年刊》，290(2):287–301，1991。（引用见第 45 页。）[Gua07] Daniel Guan。修改与紧可解流形的上同调群。《美国数学会电子研究通讯》，13:74–81，2007。（引用见第 27 页。）[GZ17] Vincent Guedj 和 Ahmed Zeriahi。退化复 Monge-Amp`ere 方程，EMS Tracts Math. 第 26 卷。苏黎世：欧洲数学学会（EMS），2017年。（引用见第 36 页。）[Ham82] Richard S. Hamilton。具有正里奇曲率的三维流形。《微分几何杂志》，17:255–306，1982年。（引用见第 36、64 页。）[Has89] Keizo Hasegawa。幂零流形的极小模型。《美国数学会会刊》，106(1):65–71，1989年。（引用见第 31 页。）[Hat60] Akio Hattori。纤维丛德拉姆上同调中的谱序列。《东京大学理学部纪要》第一辑，8:289–331，1960年。（引用见第 26 页。）[Hir54] Friedrich Hirzebruch。关于可微流形与复流形的一些问题。《数学年刊》第 2 辑，60:213–236，1954年。（引用见第 82、84 页。）

[Hir64a] H. Hironaka. 特征零域上代数簇的奇点消解。I. 《数学年刊》(2)，79:109–203，1964。（引用见第42页。）[Hir64b] 广中平祐. 特征零域上代数簇的奇点消解。II，1964。（引用见第42页。）[Hod89] W. V. D. Hodge. 调和积分的理论与应用。再版，附迈克尔·阿蒂亚爵士撰写的序言。剑桥数学丛书。剑桥：剑桥大学出版社，1989。（引用见第33页。）[Hop48] H. Hopf. 关于复流形的拓扑。献给R. Courant的研究论文集，167-185（1948），1948。（引用见第83页。）[HP16] Andreas H¨oring and Thomas Peternell. K¨ahler三维复流形的极小模型。数学发明，203(1):217–264，2016。（引用见第45页。）[H¨ub92] Tristan H¨ubsch. 卡拉比-丘流形：物理学家的博物志。新加坡：世界科学出版社，1992。（引用见第8页。）[HZ22a] Tom Holt and Weiyi Zhang. 近K¨ahler Kodaira-Spencer问题。数学研究快报，29(6):1685–1700，2022。（引用见第75页。）[HZ22b] Tom Holt and Weiyi Zhang. Kodaira-Thurston流形上的调和形式。Adv. Math.，400:30，2022。编号108277。（引用见第75、84页。）[Ino74] Masahisa Inoue. 关于VII_0类曲面。数学发明，24:269–310，1974。（引用见第69、70、71页。）[Ino75] Masahisa Inoue. 无亚纯函数的新曲面。国际数学家大会论文集，温哥华1974年，第1卷，423-426（1975），1975。（引用见第69页。）[Ino77] M. Inoue. 无亚纯函数的新曲面。II. 复解析代数几何，献给K. Kodaira的论文集，91-106（1977），1977。（引用见第69页。）

[Kad80] T. V. Kadeishvili. 关于纤维空间的同调理论。俄罗斯数学调查，35(3):231–238，1980。（引用见第18页。）.[K¨ah32] Erich K¨ahler. 关于一种值得注意的Hermitesche Metrik。汉堡大学数学研讨会论文集，9:173–186，1932。（引用见第8页。）[Kas13] Hisashi Kasuya. 可解流形多尔博上同调的计算技巧。数学杂志，273(1-2):437–447，2013。（引用见第27页。）[Kat77] Ma. Kato. 含有“全局”球壳的紧复流形。I. 京都1977年代数几何国际研讨会论文集，45-84（1977），1977。（引用见第69页。）[Kaw65] S¯oichi Kawai. 关于复维数为3的紧复解析流形。日本数学会杂志，17:438–442，1965。（引用见第43页。）[Kir47] Adrian Kirchhoff. 关于某些球面上张量场的存在性。巴黎科学院会议录，225:1258–1260，1947。（引用见第9页。）[KK10] G. Kokarev and D. Kotschick. K¨ahler-Weyl流形的纤维化与基本群。美国数学会会刊，138(3):997–1010，2010。（引用见第43页。）[Kob80] Shoshichi Kobayashi. 第一陈类与全纯张量场。名古屋数学杂志，77:5–11，1980。（引用见第63页。）[Kob82] Shoshichi Kobayashi. 向量丛的曲率与稳定性。日本学士院纪要，A辑，58:158–162，1982。（引用见第63页。）[Kob87] Shoshichi Kobayashi. 复向量丛微分几何，第15卷，日本数学会出版物。普林斯顿，新泽西州：普林斯顿大学出版社；东京：岩波书店出版社，1987。（引用见第63页。）[Kod54] Kunihiko Kodaira. 关于受限类型的K¨ahler簇。（代数簇的内在刻画。）《数学年刊》(2)，60:28–48，1954。（引用见第8页。）

[Kod05] Kunihiko Kodaira。《复流形与复结构的变形》。由赤尾和男译自日文。Class. Math. 柏林：施普林格，1986年版重印本，2005年。（引用于第4、22、31页。）[KP18] Panagiotis Konstantis与Maurizio Parton。球面上的近复结构。Differ. Geom. Appl., 57:10–22, 2018年。（引用于第9页。）[KQ20] Mikhail Khovanov与齐佑。三复形稳定范畴上的忠实辫群作用。SIGMA, Symmetry Integrability Geom. Methods Appl., 16:paper 019, 32, 2020。（引用于第12页。）[KS60] Kunihiko Kodaira与D. C. Spencer。论复解析结构的变形。III：复结构的稳定性定理。《数学年刊》(2), 71:43–76, 1960年。（引用于第33页。）[KS13] D. Kotschick与S. Schreieder。K¨ahler流形的霍奇环。组合数学, 149(4):637–657, 2013年。（引用于第81、82页。）[Lam99] Ahc`ène Lamari。k¨ahl´er流与紧曲面。（K¨ahler流与紧曲面）。Ann. Inst. Fourier, 49(1):263–285, 1999。（引用于第39、68页。）[Lau09] Jorge Lauret。爱因斯坦可解流形与幂零孤立子。载于《李理论与几何的新进展》。第六届李理论与几何研讨会论文集，Cruz Chica，C´órdoba，阿根廷，2007年11月13日至17日，第1–35页。罗得岛州普罗维登斯：美国数学会，2009年。（引用于第70页。）[Lau15] Jorge Lauret。几乎厄米李群的曲率流。美国数学会汇刊, 367(10):7453–7480, 2015年。（引用于第72页。）[LeB87] Claude LeBrun。 S^6上的正交复结构。美国数学会会刊, 101:136–138, 1987。（引用于第9页。）

[Lee24] John M. Lee。《复流形导论》，《数学研究生丛书》第244卷。罗得岛州普罗维登斯：美国数学会，2024年。（引用于第4页。）[LM18] Mehdi Lejmi与Ali Maalaoui。论陈–山部流。几何分析杂志, 28(3):2692–2706, 2018年。（引用于第59页。）[LPWZ09] D.-M. Lu、J. H. Palmieri、Q.-S. Wu与J. J. Zhang。Ext代数上的A-无穷结构。纯粹与应用代数杂志, 213(11):2017–2037, 2009年。（引用于第18页。）[LT95] Martin L¨übke与Andrei Teleman。《小林–希钦对应》。新加坡：世界科学出版社，1995年。（引用于第63页。）[L¨ub83] Martin L¨übke。爱因斯坦–厄米向量丛的稳定性。数学手稿, 42:245–257, 1983年。（引用于第63页。）[Lue82] Martin Luebke。Hermite-Einstein向量丛的陈类。数学年刊, 260:133–141, 1982年。（引用于第63页。）[LV15] Jorge Lauret与Edwin Alejandro Rodr´ıguez Valencia。论李群上的陈–里奇流及其孤立子。数学通讯, 288(13):1512–1526, 2015年。（引用于第70、72页。）[LY17] 刘克峰与Xiaokui Yang。厄米流形上的里奇曲率。美国数学会汇刊, 369(7):5157–5196, 2017年。（引用于第53页。）[LYZ90] 李骏、丘成桐与Fangyang Zheng。关于具有 $b_2 = 0$的class ∇II_0 曲面的Bogomolov 定理的一个简单证明。伊利诺伊数学杂志, 34(2):217–220, 1990年。（引用于第69页。）[Mag17] Gunnar Th´ór Magn´usson。紧非K¨ähler流形的自同构与例子。斯堪的纳维亚数学杂志, 121(1):49–56, 2017年。（引用于第66、77页。）[McC01] John McCleary。《谱序列使用指南》，剑桥高等数学研究丛书第58卷。剑桥：剑桥大学出版社，第2版，2001年。（引用于第15页。）

[Mic82] M. L. Michelsohn. 论复几何中特殊度量的存在性. 数学学报, 149:261–295, 1982年.（引用于第38、85页。）[Mil22] Aleksandar Milivojevi´c. 论闭几乎复流形的有理同伦型与陈类的刻画. 《复流形》, 9:138–169, 2022.（引用于第82页。）[MK06] James Morrow与Kunihiko Kodaira. 复流形. 罗得岛州普罗维登斯：AMS Chelsea Publishing，1971年原版的勘误重印本，2006年.（引用于第4页。）[MM07] Xiaonan Ma与George Marinescu. 全纯莫尔斯不等式与伯格曼核，《数学进展》第254卷. 巴塞尔：Birkh¨auser, 2007.（引用于第4、86页。）[MMS25] Luc´ıa Mart´ın-Merch´an与Jonas Stelzig. 全纯环绕数、ABC 马西积与卡拉比–丘三维流形. 预印本, arXiv:2512.02187 [math.DG](2025), 2025.（引用于第18页。）[Mo˘ı66] B. G. Mo˘ıshezon. 论具有 n个代数无关亚纯函数的 n维紧复流形. I–III.《苏联科学院院报·数学辑》, 30:133–174, 1966.（引用于第22、43页。）[Nak75] Iku Nakamura. 复平行化流形及其小变形.《微分几何杂志》, 10:85–112, 1975.（引用于第29、66页。）[Nak84] Iku Nakamura. 走向非K¨ahler复曲面的分类.《数学博览》, 2(2):209–229, 1984年.（引用于第69页。）[Nak90] Iku Nakamura. 关于带曲线的 vii_0 类曲面. ii.《东北数学杂志》（2）, 42(4):475–516, 1990年.（引用于第88页。）[Nie17] Xiaolan Nie. 紧复曲面上陈–里奇流的弱解. 数学研究快报, 24(6):1819–1844, 2017年.（引用于第68页。）

[NN57] A. Newlander与Louis Nirenberg. 几乎复流形中的复解析坐标. 《数学年刊》（2）, 65:391–404, 1957.（引用于第7页。）[Nom54] Katsumi Nomizu. 论幂零李群的紧齐性空间的上同调. 《数学年刊》（2）, 59:531–538, 1954.（引用于第 24 页。）[OV24] Liviu Ornea 与 Misha Verbitsky. 局部共形K ¨ahler几何原理, 《数学进展》第354卷. Cham：Birkh ¨auser, 2024年.（引用于第39页。）[Per02] Grisha Perelman. 里奇流的熵公式及其几何应用. 预印本, arXiv: math/0211159[math.DG](2002)., 2002. 编号0211159.（引用于第64页。）[Per03a] Grisha Perelman. 某些三维流形上里奇流解的有限消亡时间. 预印本, arXiv:math/0307245 [math.DG] (2003)., 2003. 编号0307245.（引用于第64页。）[Per03b] Grisha Perelman. 三维流形上带手术的里奇流. 预印本, arXiv:math/0303109 [math.DG](2003)., 2003. 编号0303109.（引用于第64页。）[Pic19] S´ebastien Picard. 带挠率的卡拉比-丘流形与几何流. 载于《复非K ¨ahler几何》. 意大利切特拉罗，2018年7月9日至13日. 暑期学校讲义，第57–120页. Cham：施普林格；佛罗伦萨：CIME基金会, 2019 年 .（引用于第 64 页。）[Pop15] Dan Popovici. 紧复流形上与Gauduchon度量相关联的Aeppli上同调类. 《法国数学会通报》, 143(4):763–800, 2015年.（引用于第86页。）[Pop23] Dan Popovici. 借助调和理论研究紧复流形的上同调性质. 2023. https://www.math.univ-toulouse.fr/~popovici/hodge-def.pdf.（引用于第4、41、49页。）

[Pos17] Leonid Positselski. 上同调的 Koszul 性 $=$ $K(\pi, 1)$-Ness+拟形式性。《代数杂志》, 483:188–229, 2017.（引于第 18 页。）[PPZ18a] Duong H. Phong、Sebastien Picard 和 Xiangwen Zhang. 异常流. 分析与几何通讯, 26(4):955–1008, 2018.（引于第 64 页。）[PPZ18b] Duong H. Phong、Sebastien Picard 和 Xiangwen Zhang. 几何流与 Strominger 系统. 数学杂志, 288(1-2):101–113, 2018.（引于第 64 页。）[PPZ18c] Duong H. Phong、Sebastien Picard 和 Xiangwen Zhang. 复几何中的新曲率流. 载于《庆祝《微分几何杂志》创刊 50 周年》。2017年4月28日至5月2日在美国马萨诸塞州剑桥哈佛大学举行的几何与拓扑会议上的讲座，页码 331–364。马萨诸塞州萨默维尔：国际出版社，2018.（引于第 64 页。）[PSU24] Dan Popovici、Jonas Stelzig 和 Luis Ugarte. 紧复流形的高页霍奇理论. 比萨高等师范学院学报, Cl. Sci. (5), 25(3):1431–1464, 2024.（引于第 82 页。）[PTW25] Kate Poirier、Thomas Tradler 和 Scott O. Wilson. 同伦内积的马西积. 预印本, arXiv:2507.15494 [math.AT] (2025), 2025.（引于第 18 页。）[Ric82] Leonard F. Richardson. 紧致海森堡流形上的整体可解性. 美国数学会汇刊, 273:309–317, 1982年.（引于第 75 页。）[Rol11] S¨onke Rollenske. 左不变复结构幂零流形的 Dolbeault 上同调. 载于《复几何与微分几何》。2009年9月14日至18日在德国汉诺威莱布尼茨大学举行的会议论文集，页码 369–392。柏林：施普林格，2011.（引于第 24、27 页。）

[RS22] Daniel Ruberman 和 Nikolai Saveliev. 井上曲面的谱集. 载于《规范理论与低维拓扑》。进展与互动。班夫国际研究站第六届研讨会论文集：规范理论与三维、四维接触拓扑和辛拓扑的互动，线上举行，2020，页码 285–297。加利福尼亚州伯克利：数学科学出版社（MSP），2022.（引于第 75 页。）[RYY19] Sheng Rao、Song Yang 和 Xiangdong Yang. 复流形爆破的 Dolbeault 上同调. 《纯粹与应用数学杂志》(9), 130:68–92, 2019年.（引于第 22 页。）[Sak76] Yusuke Sakane. 关于紧致复平行化可解流形. 《大阪数学杂志》, 13:187–212, 1976.（引于第 27 页。）[Sch84] Richard Schoen. 将黎曼度量共形变形为常标量曲率度量. 《微分几何杂志》, 20:479–495, 1984年.（引于第 36 页。）[Sch07] Michel Schweitzer. 关于博特-陈上同调. 预印本，arXiv:0709.3528 [math.AG] (2007), 2007.（引于第 14、22、33、34 页。）[Shi97] Wan-Xiong Shi. 完备非紧凯勒流形上的里奇流与一致化. 《微分几何杂志》, 45(1):94–220, 1997.（引于第 64 页。）[SN08] Ole Skovsmose 和 Mogens Niss. 面向未来的批判数学教育. 载于编辑 Mogens Niss，《第十届国际数学教育大会（ICME-10）论文集》。IMFUFA，罗斯基勒大学，2008年。M. Niss 编。（引于第 80 页。）[ST10] Jeffrey Streets 和 田刚. 多重闭度量的抛物流. 国际数学研究通讯, 2010(16):3101–3133, 2010.（引于第 64、86、88 页。）[ST11] Jeffrey Streets 和 田刚. 厄米曲率流. 《欧洲数学学会杂志》（JEMS）, 13(3):601–634, 2011.（引于第 64 页。）

[ST17] 宋健和田刚。奇点穿越的 K¨ahler-Ricci 流。《数学发明》，207(2):519–595，2017年。（引见第 6、68、88 页。）[Sta63] James Dillon Stasheff。 H-空间的同伦结合性。I、II。美国数学会汇刊，108:275–292，293–312，1963年。（引见第 18 页。）[Ste21a] Jonas Stelzig。爆发的双复形。国际数学研究通讯，2021(14):10731–10744，2021年。（引见第 82 页。）[Ste21b] Jonas Stelzig。论双复形的结构。伦敦数学会杂志，II. Ser.，104(2):956–988，2021年。（引见第 11、12、22、82 页。）[Ste22] Jonas Stelzig。紧复流形上上同调不变量的线性组合。Adv. Math.，407:52，2022。编号 108560。（引见第 11、82 页。）[Ste25a] Jonas Stelzig。复流形的微分形式与不变量。复流形，12:24，2025年。编号 20250011。（引见第 4、11 页。）[Ste25b] Jonas Stelzig。复流形的微分形式与不变量，2025。（引见第 81、82、85 页。）[Ste25c] Jonas Stelzig。多重势同伦论。Adv. Math.，460:61，2025年。编号 110038。（引见第 11、18、83 页。）[Stu05] E. Study。复区域中的最短路径。数学年刊，60:321–378，1905年。（引见第 8 页。）[STW17] G´abor Sz´ekelyhidi、Valentino Tosatti 和 Ben Weinkove。具有指定体积形式的 Gauduchon度量。数学学报，219(1):181–211，2017年。（引见第 66、86 页。）[Sul77] Dennis Sullivan。拓扑中的无穷小计算。Publ. Math., Inst. Hautes ´Etud. Sci.，47:269–331，1977。（引见第 16、18、26、82 页。）

[Suw98] Tatsuo Suwa。奇异全纯叶状结构的向量场指标与留数。巴黎: Hermann，1998年。（引见第 44 页。）.[SvD30] J. A. Schouten 和 D. van Dantzig。关于单位¨ary 几何。数学年刊，103:319–346，1930年。（引见第 8 页。）[SW24] Jonas Stelzig 和 Scott O. Wilson。超越 K¨ ahler 范畴的 dd^c-型条件。《Jussieu 数学研究所杂志》，23(4):1651–1704，2024年。（引见第 82 页。）[SY79] Richard Schoen 和丘成桐。关于广义相对论中正质量猜想的证明。《数学物理通讯》，65:45–76，1979年。（引见第 36 页。）[Sz´e14] G´abor Sz´ekelyhidi。《极值 K¨ ahler 度量导论》，《数学研究生丛书》第 152 卷。罗得岛州普罗维登斯: 美国数学会（AMS），2014年。（引见第 36、60 页。）[Tau92] Clifford Henry Taubes。反自对偶共形结构的存在性。《微分几何杂志》，36(1):163–253，1992。（引见第 83 页。）[Tel94] Andrei-Dumitru Teleman。射影平坦曲面与关于 class VII_0 曲面的 Bogomolov 定理。《国际数学杂志》，5(2):253–264，1994。（引见第 69 页。）[Tel05] Andrei Teleman。非 K¨ahler 曲面上的 Donaldson 理论及具有 $b_2 = 1$ 的 VII 类曲面。数学发明，162(3):493–521，2005年。（引见第 88 页。）[Tel06] Andrei Teleman。非 K¨ahler 曲面的伪有效锥及其应用。数学年刊，335(4):965–989，2006年。（引见第 63 页。）[Tel10] Andrei Teleman。VII 类曲面上的瞬子与曲线。《数学年刊》（第 2 辑），172(3):1749–1804，2010年。（引见第 88 页。）[Tel17] Andrei Teleman。迈向 VII 类曲面的分类。载于《复几何与辛几何》。根据 2016 年 6 月 12–18 日在意大利科尔托纳举行的 INdAM 会议报告整理，第 249–262 页。Cham：施普林格，2017年。（引见第 88 页。）

[Tel18] Andrei Teleman。《非 K¨ahler 几何中的 Donaldson 理论》。载于《现代几何：庆祝 Simon Donaldson 的学术成就》，第 363–392 页。美国罗得岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），2018年。（引文见第 88 页。）[Tel19] Andrei Teleman。《非 K¨ahler 紧复曲面》。载于《复非 K¨ahler 几何》。意大利切特拉罗，2018年7月9日至13日。暑期学校讲义，第 121–161 页。Cham：施普林格；佛罗伦萨：CIME基金会，2019年。（引文见第 6、88 页。）[Tia15] Gang Tian。《K-稳定性与 K¨ahler-爱因斯坦度量》。纯粹与应用数学通讯，68(7)：1085–1156，2015。（引文见第 35 页。）[Tˆo18] Tat Dat Tˆo。《复 Monge-Amp`ere 流的正则化性质。II：厄米流形》。数学年刊，372(1-2)：699–741，2018。（引文见第 68 页。）[Tos15] Valentino Tosatti。《非 K¨ahler 卡拉比-丘流形》。载于《分析、复几何与数学物理：献给 Duong H. Phong》。会议论文集，哥伦比亚大学，美国纽约州纽约市，2013年5月7日至11日，第 261–277 页。美国罗得岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），2015年。（引文见第 62、66、77 页。）[Tos17] Valentino Tosatti。《CP^n 的唯一性》。Expo. Math.，35(1)：1–12，2017。（引文见第 84 页。）[Tri82] Franco Tricerri。《局部共形 K¨ahler 流形的一些例子》。Rend. Semin. Mat., Torino，40(1)：81–92，1982年。（引文见第 71 页。）[Tru68] N. S. Trudinger。《关于紧流形上黎曼结构的共形变形的评论》。比萨高等师范学院学报，Sci. Fis. Mat., III. Ser., 22：265–274，1968年。（引文见第 36 页。）[TT17] Nicoletta Tardini 和 Adriano Tomassini。《几何 Bott-Chern 形式性与变形》。Ann. Mat. Pura Appl. (4)，196(1)：349–362，2017年。（引文见第 18 页。）

[TT23] Nicoletta Tardini 和 Adriano Tomassini。《四维近厄米流形上的 ∂-调和形式》。数学研究快报，30(5)：1617–1637，2023。（引文见第 84 页。）[TW10] Valentino Tosatti 和 Ben Weinkove。《紧致厄米流形上的复 Monge-Amp`ere 方程》。J. Am. Math. Soc.，23(4)：1187–1195，2010年。（引文见第 62 页。）[TW13] Valentino Tosatti 和 Ben Weinkove。《复曲面上的陈–里奇流》。组合数学，149(12)：2101–2138，2013年。（引文见第 64、65、68、69、70、71、72、79 页。）[TW15] Valentino Tosatti 和 Ben Weinkove。《厄米度量在其陈-里奇形式作用下的演化》。《微分几何杂志》，99(1)：125–163，2015年。（引文见第 64、65、68、79 页。）[TW22] Valentino Tosatti 和 Ben Weinkove。《陈–里奇流》。林琴国家科学院院刊，Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., IX. Ser., Rend. Lincei, Mat. Appl.，33(1)：73–107，2022。（引文见第 64、65、88 页。）[TWY15] Valentino Tosatti、Ben Weinkove 和 Xiaokui Yang。《椭圆曲面上陈–里奇流的塌缩》。数学年刊，362(3-4)：1223–1271，2015年。（引文见第 69 页。）[Uen75] Kenji Ueno。《代数簇与紧致复空间的分类理论》。与 P. Cherenack 合作撰写的笔记，数学讲义第 439 卷。施普林格，Cham，1975。（引文见第 6、42 页。）[Uga00] Luis Ugarte。《六维球面上假想复结构的霍奇数》。奉献几何，81(1-3)：173–179，2000。（引文见第 12 页。）[Ust19] Yury Ustinovskiy。《具有非负格里菲斯曲率的流形上的厄米曲率流》。Am. J. Math.，141(6)：1751–1775，2019年。（引文见第 64 页。）[Vai80] Izu Vaisman。《关于局部及整体共形 K¨ahler 流形》。美国数学会汇刊，262：533–542，1980。（引文见第 45、85 页。）

[Vai87] Izu Vaisman. 几何复曲面上的非K¨ahler度量。都灵数学研讨会记录，45(3):117–123，1987。（引自第71页。）[Var86] J. Varouchas. 一类紧复解析流形的上同调性质。（一类紧复解析流形的上同调性质。）P. Lelong-P. Dolbeault-H. Skoda分析研讨会，1983/84年度，数学讲义1198，233-243（1986）。, 1986。（引自第19页。）[VdV66] A. Van de Ven. 关于某些复流形和近复流形的陈数。美国国家科学院院刊，55:1624–1627，1966。（引自第83页。）[Voi02a] Claire Voisin. 霍奇猜想的一个反例推广到K¨ahler簇。国际数学研究通讯，2002(20):1057–1075，2002。（引自第81页。）[Voi02b] Claire Voisin. 霍奇理论与复代数几何，第10卷，Cours Sp´ec.（巴黎）。巴黎：法国数学会，2002。（引自第4、22、31、80页。）[Voi07a] Claire Voisin. 霍奇理论与复代数几何。I。Leila Schneps法译英，第76卷，剑桥高等数学研究丛书。剑桥：剑桥大学出版社，2007。（引自第4页。）[Voi07b] Claire Voisin. 霍奇理论与复代数几何。II。Leila Schneps法译英，第77卷，剑桥高等数学研究丛书。剑桥：剑桥大学出版社，2007。（引自第4页。）[Wei58] Andr´e Weil. 卡勒簇研究导论。科学与工业时事，第1267号，南卡戈大学数学研究所出版物，VI。巴黎：Hermann & Cie。175页。（1958）。, 1958。（引自第 8 、 48 页。） [Wel08] Raymond O. jun. Wells. 复流形上的微分分析。附有Oscar Garcia-Prada撰写的新附录，第65卷

数学研究生教材。纽约，NY：施普林格，第3版，2008。（引自第33页。）[Wu06] Chun-Chun Wu. 关于带挠率超弦的几何。ProQuest LLC，密歇根州安娜堡，2006年。博士论文——哈佛大学。（引自第22、31页。）[Yam60] Hidehiko Yamabe. 紧流形上黎曼结构的变形。大阪数学杂志，12:21–37，1960年。（引自第36页。）[Yan19] Xiaokui Yang. 紧复流形上的标量曲率。美国数学会汇刊，371(3):2073–2087，2019年。（引自第63页。）[Yau78] 丘成桐. 紧致卡勒流形的里奇曲率与复Monge-Amp`ere方程。I。纯粹与应用数学通讯，31:339–411，1978。（引自第35页。）[Yau24] 丘成桐. 几何中的公开问题。国际华人数学家大会通讯，12(1):35–46，2024年。（引自第83页。）[Yu25] Weike Yu. 负高迪雄度紧厄米流形上的指定陈标量曲率流。预印本，arXiv:2501.03570 [math.DG](2025)，2025。（引自第59页。）[YZ18a] Bo Yang和Fang Yang Zheng. 关于具有平坦Gauduchon联络的紧厄米流形。数学学报（英文版），34(8):1259–1268，2018。（引自第52页。）[YZ18b] Bo Yang和Fangyang Zheng. 关于厄米流形的曲率张量。分析与几何通讯，26(5):1195–1222，2018。（引自第37页。）[Zhe00] Fangyang Zheng. 复微分几何，第18卷，美国数学会／国际出版社高等数学研究。罗得岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS）；马萨诸塞州剑桥：国际出版社，2000。（引自第4页。）