数学建模与数值分析
数学建模与数值分析

由出版商设定

arXiv:2602.03654v1 [nlin.AO] 3 Feb 2026

具有梯度流结构的含噪非局部聚集模型

Su Yang[1], Weiqi Chu[1] and Panayotis G. Kevrekidis[21]

摘要。相互作用粒子系统为生物、社会和物理系统中的集体行为建模提供了一个基础框架。在许多应用中，随机扰动对于刻画环境变异性和个体不确定性至关重要；然而，尤其是在存在非局部相互作用的情况下，这些扰动对长期动力学和平衡结构的影响仍未得到充分理解。我们研究了一个由势能驱动相互作用支配的随机相互作用粒子系统，以及其在大种群极限下的连续体密度表述。我们引入了一个能量泛函，并证明宏观密度演化在 Wasserstein-2空间中具有梯度流结构。相应的变分框架通过约束能量最小化得到平衡态，并说明噪声如何调节密度以及减轻奇异集中现象。通过一维和二维数值算例，我们展示了微观描述与宏观描述之间的联系。在变分框架下，我们计算了能量极小化解，并进行了线性稳定性分析。数值结果表明，稳定的能量极小化解与宏观密度模型的长期动力学一致。

2020年数学学科分类。35A15; 35Q70;35Q92;70-10;92C45.

日期将由出版商确定。

1. Introduction

相互作用粒子系统刻画了一群个体通过两两相互作用和外部场演化的动力学。这类模型广泛应用于各种科学领域，包括生物系统中的细胞迁移与聚集、社会科学中的意见动力学，以及生态学和统计物理学中的应用 [8, 20, 25]；有关该领域进展的综述性书籍亦可参见 [2, 3, 26]。在这一框架下，相互作用核编码了调节空间距离或意见距离上相互作用的吸引与排斥机制。在群体层面，这些模型会产生各种涌现行为，包括聚类、模式形成、扩散，以及不同模式之间的分岔现象和有序态与无序态之间的转变 [4, 22, 23]。

随机扰动自然出现在相互作用粒子系统中，用以表示环境波动、随机决策以及尚未解决的微观尺度效应。从建模角度来看，噪声引入了一种额外机制，与成对相互作用力相抗衡，并可能显著影响集体行为。例如，在具有有界信任相互作用的意见动力学模型中， [17],确定性动力学会驱使密度趋向奇异测度，其形式为狄拉克δ函数之和，

Keywords and phrases: 相互作用粒子系统；非局部聚集扩散；梯度流；能量变分[1] 马萨诸塞大学阿默斯特分校数学与统计学系，美国马萨诸塞州阿默斯特，邮编 01003-4515[2] 马萨诸塞大学阿默斯特分校物理学系，美国马萨诸塞州阿默斯特，邮编 01003-4515

© EDP Sciences, SMAI 2026

而随机性会平滑尖锐簇，并改变长期动力学的结构与稳定性 [27,31]。通过以类似于温度在热力学系统中所起作用的方式调节噪声水平，系统可在无序动力学与向不动点收敛之间变化，并在此过程中识别相变 [8,31]。更广泛地说，交互智能体模型的含噪扩展持续引起显著关注，因为它们刻画了更为真实的动力学，并揭示了在纯确定性情形中不会出现的噪声诱导的转变 [10,18,32]。噪声与随机初始条件的存在增加了智能体层面的变异性，这使得从个体轨迹中提取宏观统计行为变得更加复杂，并促使采用连续介质描述与基于系综的分析 [15,30]。

微观相互作用粒子系统及其随机扩展，在粒子数趋于无穷时，具有互补的宏观描述。在对相互作用核和尺度参数作出适当假设的条件下，平均场理论和混沌传播的相关结果表明，个体状态的经验分布收敛于一个代表性平均场粒子的分布 [9,11,15,29]。极限动力学既可以通过该平均场粒子与其自身分布耦合后的演化来描述，也可以通过动力学方程（例如福克–普朗克方程）来描述；这些方程由平均场粒子的概率密度函数刻画。宏观表述能够直接揭示种群层面动力学，并免去为获取含有大量相互作用粒子的系统的统计系综而反复进行模拟的需要 [29]。在存在随机噪声和随机初始条件时，这种宏观视角尤为有用，因为从个体轨迹中提取集体行为需要付出高昂的计算成本，而且通常必须对多次实现进行平均，才能降低抽样变异 [12]。

具有两两相互作用和随机扰动的相互作用粒子系统会呈现丰富多样的集体行为。其动力学取决于相互作用核的形式、其中可能存在的吸引与排斥的相对强度，以及噪声水平，从而产生诸如向无穷远扩散、形成局域化剖面、聚集为一个或多个离散簇，或在不同构型之间转换等密度演化结果 [21]。当相互作用力源自某些势函数时，种群密度会在相关能量耗散的驱动下演化为梯度流。因此，平衡态对应于在质量和非负性约束下使能量最小化的平稳构型，而这一能量框架为理解有噪声和无噪声相互作用粒子系统的长期动力学提供了一种系统方法 [4,5]。在无噪声情形下，一些研究针对连续非局部相互作用模型建立了变分框架，并通过能量最小化推导平衡态 [4,5]。这些研究表明，无噪声系统的平衡态具有紧支撑，并可能呈现奇异结构，例如狄拉克δ集中，或在支撑边界处出现跳跃不连续性 [4,13]。相比之下，噪声会通过使平衡态正则化并抑制奇异聚集，改变奇异密度。

本文研究含噪非局部聚集模型，并将变分分析和动力学分析扩展至此类模型。我们从受随机扰动影响的相互作用粒子系统出发，进而推导大种群极限下种群密度的连续介质表述，从微观和宏观两个层面描述这些模型。我们引入一个能量泛函，将非局部相互作用、外力和噪声诱导的熵项结合起来。我们证明，宏观密度方程在Wasserstein-2空间中具有梯度流表述。借助概率空间中的变分框架，我们推导出刻画能量极小化子的条件，并确立它们与稳态之间的联系。我们对这些能量极小化子进行数值线性稳定性分析，并分析系统在噪声作用下的长期行为。

本文结构安排如下。第2节通过微观和宏观两种描述引入含噪非局部聚集模型，并讨论二者之间的联系。第3节展示宏观模型在Wasserstein-2空间中的梯度流表述，并从变分视角推导使能量最小化的充分条件。第4节介绍如何以随机微分方程（SDEs）的形式求解微观模型，以及如何以非局部聚集扩散方程的形式求解宏观模型，并概述在大种群极限下比较密度演化的步骤。第5节针对一维和二维中的三种代表性相互作用势，对含噪非局部聚集模型进行数值研究

。最后，我们在第6节总结全文，并提出若干未来研究方向。

2. A NONLOCAL AGGREGATION MODEL WITH NOISE

2.1. 微观与宏观视角下的模型描述

我们考虑一个由 N 个相互作用的智能体组成的系统，并用向量 $\boldsymbol{x}_i(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ 表示第 i 个智能体在时刻 t 的状态。每个智能体通过相互作用力 $\boldsymbol{\theta}$、外力 $\boldsymbol{f}$ 以及用布朗运动建模的随机涨落来调整其状态。基于智能体的动力学遵循以下随机微分方程

$$d\boldsymbol{x}_i(t) = -\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x}_i(t) - \boldsymbol{x}_j(t))\, dt - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i(t))\, dt + \sigma\, d\boldsymbol{W}_t^i, \qquad i = 1, \dots, N, \tag{2.1}$$

其中，$\sigma > 0$ 是扩散系数，$\{\boldsymbol{W}_t^i\}_{i=1}^N$ 是相互独立的 d 维维纳过程。

To 为了研究整个群体的集体行为，我们引入经验测度 re

$$\rho^N(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \delta_{\boldsymbol{x}_j(t)}(\boldsymbol{x}), \tag{2.2}$$

并将 (2.1) 改写为经验测度记法：

$$d\boldsymbol{x}_i(t) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}_i(t), \rho^N(\boldsymbol{x}, t))\, dt + \sigma\, d\boldsymbol{W}_t^i, \tag{2.3}$$

其中，$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}, \rho)$ 是漂移项，定义如下：

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}, \rho) = -(\boldsymbol{\theta} \star \rho)(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \tag{2.4}$$

而 $(\boldsymbol{\theta} \star \rho)(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\, \rho(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}$ 是卷积，按元素定义。

当初始状态 $\boldsymbol{x}_1(0) \dots, \boldsymbol{x}_N(0)$ 独立同分布且具有相同的分布时，混沌传播理论 [9]表明，当 $N \to \infty$ 时，任意有限个粒子渐近独立，且每个粒子渐近服从相同的单粒子分布。在此极限下，一个代表性粒子满足非线性McKean–Vlasov随机微分方程：

$$d\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}(t), \rho(\boldsymbol{x}, t))\, dt + \sigma\, d\boldsymbol{W}_t, \tag{2.5}$$

其中，$\rho(\boldsymbol{x}, t)$ 是 $\boldsymbol{x}(t)$ 的分布。密度 $\rho(\boldsymbol{x}, t)$ 满足与 (2.5) 相关的福克–普朗克方程：

$$\partial_t \rho(\boldsymbol{x}, t) = -\nabla \cdot (\rho(\boldsymbol{x}, t)\, \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}, \rho(\boldsymbol{x}, t))) + \frac{\sigma^2}{2}\Delta\rho(\boldsymbol{x}, t), \tag{2.6}$$

其中 $\Delta = \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2$。我们将（2.4）代入上述方程，得到非局部聚集扩散方程

$$\partial_t \rho = \nabla \cdot (\rho\, (\boldsymbol{\theta} \star \rho + \boldsymbol{f})) + \frac{\sigma^2}{2}\Delta\rho, \tag{2.7}$$

即 描述平均场极限下相互作用粒子系统的偏微分方程模型 [15] .

2.2. 非局部聚集模型中的能量耗散

随机噪声和随机初始状态使得难以直接从基于智能体的模拟中提取集体统计行为，对于粒子数量众多的系统而言尤其如此。微观描述（2.1）与宏观描述（2.7）之间的联系，为研究大群体情形下的集体行为提供了一个自然框架。在本文余下部分，我们将重点关注基于密度的宏观描述，尤其关注力具有梯度形式时的能量结构。

假设相互作用力 $\boldsymbol{\theta}$ 和外力 $\boldsymbol{f}$ 满足

$$\boldsymbol{\theta} = \nabla\Theta, \quad \boldsymbol{f} = \nabla F, \tag{2.8}$$

其中 Θ和 F 是标量势。设 ρ 为 Ω 上满足质量守恒和非负性的概率密度，

$$\int_\Omega \rho(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = 1, \quad \rho(\boldsymbol{x}) \geq 0 \ \text{ for all } \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{2.9}$$

我们将能量泛函 $\mathcal{E}[\rho]$定义为

$$\mathcal{E}[\rho] = \frac{1}{2}\int_{\Omega^2} \rho(\boldsymbol{x})\,\rho(\boldsymbol{y})\,\Theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{y} + \int_\Omega \rho(\boldsymbol{x})\, F(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} + \frac{\sigma^2}{2}\int_{\mathrm{supp}(\rho)} \rho(\boldsymbol{x}) \ln \rho(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}, \tag{2.10}$$

其中 supp(ρ) 是 ρ的紧支集。第一项表示由对称成对作用力的连续介质极限产生的相互作用能，已广泛用于刻画聚集模型中的非局部相互作用能 [4,5], ; 第二项表示外势能，最后一项对应于随机强迫所诱导的熵 [1,19]。

设 $\rho = \rho(\boldsymbol{x}, t)$ 是偏微分方程模型（2.7）的一个解，且 $A = \mathrm{supp}(\rho)$ 是 ρ的紧支集。该系统的一个重要性质是，能量泛函 $\mathcal{E}[\rho]$ 随时间递减，相关讨论见 [6]。为完整起见，下面给出推导过程。为简化记号，我们在积分中省略 $\boldsymbol{x}$的显式依赖，并计算能量对时间的导数:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}[\rho] = \int_A \nabla\cdot\left(\rho\,(\boldsymbol{\theta}\star\rho) + \rho\boldsymbol{f} + \frac{\sigma^2}{2}\nabla\rho\right)\left(\Theta\star\rho + F + \frac{\sigma^2}{2}\,(1+\ln\rho)\right) d\boldsymbol{x} \tag{2.11a}$$

$$= -\int_A \left(\rho\,(\boldsymbol{\theta}\star\rho) + \rho\boldsymbol{f} + \frac{\sigma^2}{2}\nabla\rho\right)\cdot\nabla\left(\Theta\star\rho + F + \frac{\sigma^2}{2}\ln\rho\right) d\boldsymbol{x} \tag{2.11b}$$

$$= -\int_A \rho\left|\boldsymbol{\theta}\star\rho + \boldsymbol{f} + \frac{\sigma^2}{2}\nabla\ln\rho\right|^2 d\boldsymbol{x} \leq 0. \tag{2.11c}$$

（2.11b）中的分部积分步骤需要适当的边界条件，以消除能量平衡中的边界贡献。对于有限区域 Ω，当满足无通量边界条件，或当 Ω 为环面 $[-L,L]^d$时满足周期边界条件时，该条件成立。当 $\Omega = \mathbb{R}^d$时，该条件自然成立，因为密度 ρ 在 $|\boldsymbol{x}|$ 趋于无穷时衰减得足够快。在这些条件下，边界项消失，能量耗散恒等式仍然成立。

3. Energy minimization in the probability space

3.1. Wasserstein-2空间中的梯度流表述

除了具有能量耗散性质外，偏微分方程模型（2.7）还对应于 Wasserstein-2空间中的一个梯度流。在 Wasserstein-2空间中，泛函 E 的广义梯度形式为 [1]

$$\nabla_{W_2} E[\rho] = -\nabla\cdot\left(\rho\nabla\frac{\delta E}{\delta\rho}\right), \tag{3.1}$$

其中 $\delta E/\delta\rho$ 是 E [24]的一阶变分密度。

令 $\mathcal{E}$ 为式（2.10）中定义的能量。直接计算可得

$$\frac{\delta\mathcal{E}}{\delta\rho} = \Theta \star \rho + F - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\rho}, \tag{3.2}$$

其中 $\mathcal{S}$ 是熵泛函

$$\mathcal{S}[\rho] = -\int_{\mathrm{supp}(\rho)} \rho(\boldsymbol{x}) \ln \rho(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}. \tag{3.3}$$

令 $\tilde{\rho}$ 为一个可容许扰动，使得

$$\rho_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \rho(\boldsymbol{x}) + \varepsilon\tilde{\rho}(\boldsymbol{x}) \geq 0 \quad \text{for all } \boldsymbol{x} \in \Omega \tag{3.4}$$

当 $|\varepsilon|$充分小时成立。由于 ε 可正可负，非负性要求（3.4）意味着，只要 $\rho(\boldsymbol{x}) = 0$，就有 $\tilde{\rho}(\boldsymbol{x}) = 0$。因此，我们有 $\mathrm{supp}(\rho_\varepsilon)$ =$\mathrm{supp}(\rho)$，这意味着对于固定的 ρ （与 ε无关），积分域保持不变。我们计算 $\mathcal{S}$ 的泛函导数，得到$\delta\mathcal{S}/\delta\rho = -(\ln\rho + 1)$ [24]。利用梯度定义（3.1）和变分形式（3.2），可得

$$\nabla_{W_2}\mathcal{E}[\rho] = -\nabla\cdot\left(\rho\nabla\left(\Theta\star\rho + F + \frac{\sigma^2}{2}(\ln\rho+1)\right)\right) = -\nabla\cdot(\rho(\boldsymbol{\theta}\star\rho + \boldsymbol{f})) - \frac{\sigma^2}{2}\Delta\rho. \tag{3.5}$$

因此，偏微分方程模型（2.7）也可以写成

$$\partial_t\rho = -\nabla_{W_2}\mathcal{E}[\rho], \tag{3.6}$$

这表明（2.7）是能量 $\mathcal{E}$ 在Wasserstein-2空间中的梯度流。

3.2. 概率空间中的能量最小化

由于偏微分方程模型（2.7）具有梯度流结构，其稳态解对应于使能量 $\mathcal{E}$ （2.10）在可容许概率测度空间上最小化的概率密度。在本小节中，我们推导使能量 $\mathcal{E}$ 在质量与非负性约束下最小化的充分条件，并分析势能与熵项如何影响概率空间中的能量极小化子。无噪声非局部聚集模型的能量最小化问题已在 [4]中研究。

设 $\rho_\varepsilon = \rho + \varepsilon\tilde{\rho}$ 为带有 $\varepsilon > 0$的扰动密度，满足质量守恒与非负性质。将能量 $\mathcal{E}$ 在 $\varepsilon = 0^+$ 附近展开，得到

$$\mathcal{E}[\rho + \varepsilon\tilde{\rho}] = \mathcal{E}[\rho] + \varepsilon\,\mathcal{E}_1[\rho,\tilde{\rho}] + \varepsilon^2\,\mathcal{E}_2[\rho,\tilde{\rho}] + o(\varepsilon^2). \tag{3.7}$$

设 ρ^* 为能量 $\mathcal{E}[\rho]$的局部极小值。为求出 ρ^* 所满足的控制方程，我们考虑两类容许扰动 $\tilde{\rho}$。首先，考虑支撑位于 ρ^*的支撑之内的扰动 $\tilde{\rho}$，即$\mathrm{supp}(\tilde{\rho}) \subseteq \mathrm{supp}(\rho^*)$。在此条件下，$\tilde{\rho}$ 和 $-\tilde{\rho}$ 均为容许扰动。局部极小值 ρ^* 必须满足

$$\mathcal{E}_1(\rho^*,\tilde{\rho}) = 0, \quad \mathcal{E}_2(\rho^*,\tilde{\rho}) \geq 0, \qquad \text{for all admissible } \tilde{\rho} \text{ with } \mathrm{supp}(\tilde{\rho}) \subseteq \mathrm{supp}(\rho^*). \tag{3.8}$$

接下来，考虑扰动 $\tilde{\rho}$，其支撑不包含在 $\mathrm{supp}(\rho^*)$ 中。在这种情况下，可容许性要求$\tilde{\rho}(\boldsymbol{x}) > 0$ 对于 $\boldsymbol{x} \in \mathrm{supp}(\tilde{\rho}) \setminus \mathrm{supp}(\rho^*)$。对于此类扰动，一阶变分必须满足

$$\mathcal{E}_1(\rho^*,\tilde{\rho}) > 0, \qquad \text{for all admissible } \tilde{\rho} \text{ with } \tilde{\rho}(\boldsymbol{x}) > 0 \text{ on } \mathrm{supp}(\tilde{\rho}) \setminus \mathrm{supp}(\rho^*). \tag{3.9}$$

对于第一类扰动，在（3.8）中，一阶变分取如下形式

$$\mathcal{E}_1[\rho,\tilde{\rho}]=\int_{\mathrm{supp}(\rho^*)}\tilde{\rho}(\boldsymbol{x})\left((\rho\star\Theta)(\boldsymbol{x})+F(\boldsymbol{x})+\frac{\sigma^2}{2}\big(\ln\rho(\boldsymbol{x})+1\big)\right)d\boldsymbol{x}. \tag{3.10}$$

由于 $\tilde{\rho}$ 是任意的且总质量为零，一阶最优性条件表明，存在一个标量 $\lambda\in\mathbb{R}$，使得

$$(\rho^*\star\Theta)(\boldsymbol{x})+F(\boldsymbol{x})+\frac{\sigma^2}{2}\ln\rho^*(\boldsymbol{x})=\lambda \tag{3.11}$$

对于 $\boldsymbol{x}\in\mathrm{supp}(\rho^*)$ [4]。式（3.8）中的二阶变分具有如下形式

$$\mathcal{E}_2[\rho,\tilde{\rho}]=\frac{1}{2}\int_{\Omega^2}\tilde{\rho}(\boldsymbol{x})\tilde{\rho}(\boldsymbol{y})\Theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{y}+\frac{\sigma^2}{4}\int_{\mathrm{supp}(\rho)}\frac{\tilde{\rho}^2(\boldsymbol{x})}{\rho(\boldsymbol{x})}\,d\boldsymbol{x}. \tag{3.12}$$

A设 $\rho^*\in L^\infty(\Omega)$ 的无穷范数为 $\|\cdot\|_\infty$。由于 $\mathrm{supp}(\tilde{\rho})\subseteq\mathrm{supp}(\rho)$，我们有 e

$$\mathcal{E}_2[\rho^*,\tilde{\rho}]\geq\frac{1}{2}\int_{\Omega}\tilde{\rho}(\boldsymbol{x})\big(\tilde{\rho}\star\Theta\big)(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}+\frac{\sigma^2}{4\|\rho^*\|_\infty}\int_{\Omega}\tilde{\rho}^2(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}. \tag{3.13}$$

应用帕塞瓦尔恒等式，可得

$$\mathcal{E}_2[\rho^*,\tilde{\rho}]\geq\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\big|\hat{\tilde{\rho}}(\boldsymbol{k})\big|^2\left(\hat{\Theta}(\boldsymbol{k})+\frac{\sigma^2}{2\|\rho^*\|_\infty}\right)d\boldsymbol{k}, \tag{3.14}$$

其中 $\hat{\cdot}$ 表示傅里叶变换，$\boldsymbol{k}$ 为傅里叶波矢。因此，保证式（3.8）中的二阶条件成立的一个充分条件是谱正性条件

$$\hat{\Theta}(\boldsymbol{k})+\frac{\sigma^2}{2\|\rho^*\|_\infty}\geq 0\quad\text{for all }\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^d. \tag{3.15}$$

综合起来，（3.11）和（3.15）构成极小化元 ρ^* 关于第一类扰动的约束。

现在，我们转向（3.9）中关于第二类扰动的约束。我们断言，在存在噪声的情况下（即 $\sigma>0$），极小化元 ρ^* 必须满足 $\mathrm{supp}(\rho^*)=\Omega$，从而导致第二类扰动不存在。为证明这一点，我们考察熵泛函 $\mathcal{S}[\rho]$（3.3）的变分形式。设 $A=\mathrm{supp}(\rho^*)$。我们考察熵的单侧方向导数。直接计算可得

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{\mathcal{S}[\rho^*+\varepsilon\tilde{\rho}]-\mathcal{S}[\rho^*]}{\varepsilon}\\&=-\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_A\frac{(\rho^*+\varepsilon\tilde{\rho})\ln(\rho^*+\varepsilon\tilde{\rho})-\rho^*\ln\rho^*}{\varepsilon}\,d\boldsymbol{x}-\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\Omega\setminus A}\tilde{\rho}(\boldsymbol{x})\ln(\varepsilon\tilde{\rho}(\boldsymbol{x}))\,d\boldsymbol{x}\\&=-\int_A\tilde{\rho}(\boldsymbol{x})\big(\ln\rho^*(\boldsymbol{x})+1\big)\,d\boldsymbol{x}-\int_{\Omega\setminus A}\tilde{\rho}(\boldsymbol{x})\ln\tilde{\rho}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}-\lim_{\varepsilon\to0^+}\ln(\varepsilon)\int_{\Omega\setminus A}\tilde{\rho}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}.\end{aligned} \tag{3.16}$$

注意，对于第二类扰动，有 $\int_{\Omega\setminus A}\tilde{\rho}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\geq0$。由于 $\lim_{\varepsilon\to0^+}\ln(\varepsilon)=-\infty$，当 $\int_{\Omega\setminus A}\tilde{\rho}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}>0$ 时，(3.16) 中的极限发散至 ∞，导致 (3.9) 中的一阶变分为 $-\infty$。因此，只有当 $\int_{\Omega\setminus A}\tilde{\rho}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}=0$ 时，(3.9) 中的变分不等式才成立。由于可容许扰动满足 $\tilde{\rho}(\boldsymbol{x})>0$ on $\Omega\setminus A$，该条件迫使 $\Omega\setminus A$ 为空集，从而导致在 $\sigma>0$ 时第二类扰动不存在。

4. Numerical studies for the noisy nonlocal aggregation models

在本节中，我们通过一维和二维示例说明所提出的框架，并对相应的动力学以及相关的能量极小化子进行数值研究。我们介绍求解随机微分方程模型（2.1）和偏微分方程模型（2.7）的数值方法，并在大群体极限下比较相应的密度；如上文所述，我们预计二者之间会有较好的一致性。我们还在概率空间中发展了计算相关能量极小化子的数值方法。此外，我们简要讨论了围绕所计算能量极小化子的线性稳定性分析结果，从而印证了我们得到的稳态的谱稳定性性质。

4.1. 求解随机微分方程模型和偏微分方程模型的数值方法

为简便起见，我们采用欧拉–丸山方法求解随机微分方程模型（2.1），但也可以使用随机龙格–库塔方法以获得更高阶的精度。我们从给定的初始密度 $\{\boldsymbol{x}_i(0)\}_{i=1}^N$中独立生成初始状态 $\rho_0(\boldsymbol{x})$，并使用固定时间步长向前推进系统。为减少随机强迫引起的统计波动，我们重复进行多次模拟，收集智能体动力学的一组相互独立的实现。在每个时刻 t，我们通过构造离散经验密度 ρ^d 来近似宏观密度，其思路与经验测度ρ^N （2.2）类似。具体而言，我们将空间区域 Ω 划分为有限个互不相交的箱 $\{B_k\}_{k=1}^K$，每个箱的体积为 $|B_k|$。随后，我们将密度近似为

$$\rho^d(\boldsymbol{x},t)=\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{1}{MN|B_k|}\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{1}_{B_k}(\boldsymbol{x}_i^{(m)}(t))\right)\mathbf{1}_{B_k}(\boldsymbol{x}), \tag{4.1}$$

其中， M 表示实现次数， $\boldsymbol{x}_i^{(m)}(t)$ 表示第 i个实现中的第 m个粒子的位置，而$\mathbf{1}_A$ 是集合 A的示性函数。该构造（4.1）给出了 $\rho(\boldsymbol{x},t)$ 的分段常数近似。也可以使用基于核的估计器构造宏观密度 [28], ，这类估计器能降低对分箱对齐方式的敏感性，通常还能得到更平滑的密度分布。随着粒子数 N和独立实现次数 M 增加，并以相容的方式减小分箱尺寸或核带宽，这些离散近似在弱意义下收敛到与平均场极限 [28, 29]相关联的宏观密度 $\rho(\boldsymbol{x},t)$。

稳健地求解非局部聚集扩散方程（2.7）并非易事，尤其是在相互作用力不光滑或动力学演化产生奇异密度时。对于具有梯度流结构的系统， [7] 中的作者引入团块方法，在保持与底层能量结构一致的同时，对奇异相互作用核进行正则化；而 [6], 中的作者则提出了一种保结构有限体积方法，以确保正性和能量耗散（文中称为熵）。这些方法虽能稳健地处理不光滑相互作用或奇异密度，但要准确恢复宏观密度分布，往往需要较小的时间步长或大量粒子。

在本文中，我们使用伪谱方法 [14] 求解（2.7），将 [31]中的方法推广到一般的相互作用核。我们用截断傅里叶展开近似密度 $\rho(\boldsymbol{x},t)$。

$$\rho(\boldsymbol{x},t)\approx\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathcal{K}}\hat{\rho}_{\boldsymbol{k}}(t)\,e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}, \tag{4.2}$$

其中 $\mathcal{K}$ 是由空间分辨率确定的有限波矢集合。将（4.2）代入（2.7），可得到每个傅里叶系数对应的控制方程

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{\boldsymbol{k}}(t)=\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\widehat{\rho(\boldsymbol{\theta}\star\rho)}_{\boldsymbol{k}}(t)+\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\widehat{\rho\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{k}}(t)-\frac{\sigma^2}{2}|\boldsymbol{k}|^2\,\hat{\rho}_{\boldsymbol{k}}(t). \tag{4.3}$$

我们先在物理空间中计算乘积 $\rho(\boldsymbol{\theta}\star\rho)$ 和 $\rho\boldsymbol{f}$，然后应用傅里叶变换来计算非线性项。

我们使用半隐式格式推进（4.3）的时间演化，其中扩散项采用隐式处理，而非线性输运项采用显式处理。给定时间 $\rho_{\boldsymbol{k}}^n$ 时的傅里叶系数 $\hat{}\ t^n$，我们通过求解半隐式更新方程来计算更新后的系数 $\hat{}\rho_{\boldsymbol{k}}^{n+1}$。

$$\frac{\hat{\rho}_{\boldsymbol{k}}^{n+1}-\hat{\rho}_{\boldsymbol{k}}^{n}}{\Delta t}=\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\left(\widehat{\rho^n(\boldsymbol{\theta}\star\rho^n)}_{\boldsymbol{k}}+\widehat{\rho^n\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{k}}\right)-\frac{\sigma^2}{2}|\boldsymbol{k}|^2\,\hat{\rho}_{\boldsymbol{k}}^{n+1}. \tag{4.4}$$

这种半隐式格式通过隐式推进时间步来稳定线性扩散项，同时保留显式处理非线性项（即非局部项和对流项）的效率。

伪谱方法对于高维系统和长程相互作用核尤其有效。然而，它只能直接应用于周期区域。对于无限区域或具有无通量边界条件的问题（这类问题常见于动力学方程中），我们改为考虑一个足够大的计算区域，并施加周期边界条件。我们选择区域大小，使得在所关注的时间区间内，密度始终集中在远离边界的位置，并在区域边缘附近衰减至可忽略的值。采用这一策略后，我们通过数值实验发现，周期性限制引入的边界伪影极小。

4.2. 求解能量极小化子

回顾一下，充分条件（3.11）和（3.15）给出了能量极小化解 ρ^*。在质量守恒条件下，局部极小值 ρ^* 满足

$$\begin{aligned}(\rho^*\star\Theta)(\boldsymbol{x})+F(\boldsymbol{x})+\frac{\sigma^2}{2}\ln(\rho^*(\boldsymbol{x}))&=\lambda\\ \int_\Omega\rho^*(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}&=1\end{aligned} \tag{4.5}$$

其中 $\lambda\in\mathbb{R}$ 是一个未知标量。为保证正性，我们通过令 $u=\ln(\rho^*)$ 进行变量变换。因此，（4.5）变为

$$\begin{aligned}(e^u\star\Theta)(\boldsymbol{x})+F(\boldsymbol{x})+\frac{\sigma^2}{2}u(\boldsymbol{x})&=\lambda,\\ \int_\Omega e^{u(\boldsymbol{x})}\,d\boldsymbol{x}&=1.\end{aligned} \tag{4.6}$$

我们在一组配置点 4.6上对（$\{\boldsymbol{x}_i\}$）进行离散化，并使用配置点进行数值积分，以替代卷积项。这种处理将（4.6）转化为一个由未知变量 $\{u(\boldsymbol{x_i})\}$ 和 λ表征的非线性方程组。随后，我们使用牛顿法求解 $\{u(\boldsymbol{x_i})\}$ 和 λ。得到 ρ^*的数值解后，我们进一步检查其是否满足二阶约束（3.15），以保证该稳态解是局部极小值。

当相互作用核 $\Theta(\boldsymbol{x})$ 对应于某个线性微分算子的格林函数时$\mathcal{L}$，我们可以进一步将积分方程（4.6）转化为微分方程，并求解该微分方程以得到 ρ^*。假设

$$\mathcal{L}[\Theta](\boldsymbol{x})=\delta(\boldsymbol{x}), \tag{4.7}$$

其中 $\delta(\boldsymbol{x})$ 是 狄拉克δ函数。我们将 $\mathcal{L}$ 作用于（4.6）中第一个方程的两边，得到

$$e^{u(\boldsymbol{x})}+\mathcal{L}[F](\boldsymbol{x})+\frac{\sigma^2}{2}\mathcal{L}[u](\boldsymbol{x})=\lambda\mathcal{L}[1]. \tag{4.8}$$

在第 5.3 节中，我们以拉普拉斯势 $\Theta(x)=\exp(-|x|)$ 为例，进一步说明如何将非局部积分方程（4.6）转化为微分方程（4.8）。

能量极小化解 ρ^* 预计与偏微分方程模型（2.7）的稳定定态密度 ρ_∞ 相一致。我们通过对 ρ_∞进行线性稳定性分析，考察其谱稳定性。将密度 ρ 用空间中的 N 个网格点进行离散化后，我们将（2.7）右端写成如下形式:

$$\mathcal{F}(\vec{\rho}) = 0, \tag{4.9}$$

其中 $\mathcal{F}$表示与系统（2.7）相关联的向量场，而 $\vec{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_N)^T$满足 $\rho_j = \rho(x_j)$，对于$j \in (1, 2, \ldots, N)$。因此，稳定性分析取决于相应雅可比算子的谱；经过离散化后，该算子变为矩阵

$$J_F = \nabla \mathcal{F}(\vec{\rho}). \tag{4.10}$$

因此，应计算 $J_F(\rho_\infty)$ 的数值特征值，其中 ρ_∞ 是（2.7）的数值稳态。为避免计算完整的数值雅可比矩阵，可以使用其数值近似 J_F^a，其第 j 列记为 $(J_F^a)_{:,j}$，其表达式为

$$(J_F^a)_{:,j} = \frac{1}{2\varepsilon}\left(\mathcal{F}(\rho^* + \varepsilon e_j) - \mathcal{F}(\rho^* - \varepsilon e_j)\right), \tag{4.11}$$

其中，e_j是一个基向量，其第 j 个位置为 1，其余位置为 0，其中 $j \in (1, 2. \ldots, N)$，$0 < \varepsilon \ll 1$是一个小量参数。需要注意的是，只有在所关注的定义域上积分为 0 的数值雅可比矩阵的特征向量，才对应于质量守恒扰动。

5. Numerical experiments

本节从不同角度介绍三个具有代表性的例子，以展示本文的贡献。首先，我们考虑含噪声的 Hegselmann–Krause（HK）意见模型，其中相互作用力是一个示性函数。由于作用力不连续，稳态难以精确计算，尤其是在噪声水平较低时，因为意见的微小偏差可能导致相互作用力发生大幅跳变。我们利用一维和二维 HK 模型，对比微观模型（2.1）与宏观模型（2.7），并展示二者的一致性。接下来，我们研究随机噪声如何影响一个包含相互竞争的吸引力和排斥力的模型中的密度演化。该模型的无噪声版本已在 [4, 21], 中得到研究，并确定了三个会产生不同长期行为的参数区间。最后，我们考虑拉普拉斯相互作用势，它是某个微分算子的格林函数。在这种情况下，极小化条件可由积分方程化简为微分方程。我们通过数值方法计算相应的能量极小化子 ρ^*，并以此例说明如何运用能量变分框架研究偏微分方程模型的长期动力学。我们还通过线性稳定性分析考察长期动力学的谱稳定性。

5.1. 含噪声的 HK 模型

我们首先考察意见动力学中的含噪声 HK 模型 [17, 27], ，其中

$$\Theta(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}|\boldsymbol{x}|^2 \mathbf{1}_{|\boldsymbol{x}|<c}, \quad F(\boldsymbol{x}) = 0, \tag{5.1}$$

其中 $|\boldsymbol{x}| = \|\boldsymbol{x}\|_2$ 是 L_2 上的范数 $\mathbb{R}^d$。在 HK 模型中，$\boldsymbol{x}$ 表示个体的意见。该模型假设，只有当个体之间的意见差异小于预设的置信阈值 c时，个体才会调整自己的意见，而忽略超出此范围的意见。我们考察 HK 模型的一维和二维版本，并比较随机微分方程模型（2.1）和偏微分方程模型（2.7）所得到的密度演化。

图1 展示了参数为 $c = 0.2$ 和 $\sigma = 0.05$ 的一维 HK 模型的数值结果，其中面板 (a) 和 (b) 分别展示了与（2.1）相关的离散密度 ρ^d 以及

偏微分方程模型（2.7）中的密度。对于智能体动力学，我们考虑一个含有 2000 个智能体的系统，并从 ρ_0 独立抽取初始状态；该分布是偏微分方程模型（2.7）的初始条件。为减少随机波动，我们将智能体动力学重复运行 2 次，并对所有模拟结果取平均。通过（4.1）构造得到的密度 ρ^d 能够捕捉偏微分方程模型中连续密度的总体趋势，但由于随机微分方程模型的随机性，仍可见明显波动。随着智能体数量增加，以及用于计算集成经验测度的平均实现次数增多，这些波动会减小。图1(c) 展示了若干选定时刻的密度剖面，其中 ρ_0 为初始密度，ρ_∞和 ρ_∞^d 分别为时刻 $t = 50$偏微分方程模型和随机微分方程模型得到的密度；实际上，此时我们观察到系统已达到稳态；而 ρ^* 是通过求解（4.5）得到的能量极小化解。我们注意到，ρ_∞ 和 ρ^* 彼此非常接近，其中 ρ^* 几乎与 ρ_∞重合，这与梯度流在渐近时间演化极限下收敛到能量极小化解的预期一致。

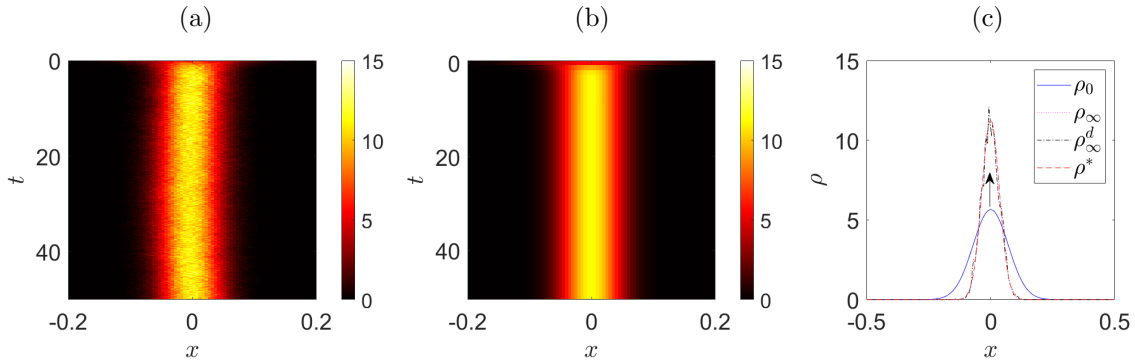

FIGURE 1. (a,b) 离散密度对应的一维HK模型时空密度演化ρ^d，其中（4.1）中的密度 ρ 分别来自偏微分方程模型（2.7）。(c) 初始密度ρ_0、渐近密度 ρ_∞，ρ_∞^d（实际达到该状态的时间为 $t = 50$），以及能量极小化解 ρ^*。

接下来，我们考察二维HK模型在随机微分方程和偏微分方程模型下的密度演化。在二维情形中，若要抽取足够多的粒子以确保离散密度ρ^d 在（ $\{B_k\}$ 4.1）中的每个分箱 $\boldsymbol{\alpha}_k$上都能提供可靠的近似，计算成本会很高。为解决这一问题，我们使用数据点（$\boldsymbol{\alpha}_k$，β_k）进行三次样条插值，其中 $\boldsymbol{\alpha}_k$ 是分箱 B_k 的质心，并且

$$\beta_k = \frac{1}{MN|B_k|}\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{1}_{B_k}\left(\boldsymbol{x}_i^{(m)}(t)\right) \neq 0. \tag{5.2}$$

这种插值平滑了抽样噪声，并提供了适合与偏微分方程解进行比较的密度连续近似。

图2展示了由随机微分方程模型 (2.1) 构造的离散密度 ρ^d 和由偏微分方程模型 (2.7) 得到的密度 ρ 的等值面图。在等值面图上，每个三元组 (x_1, x_2, t) 对应的密度值（即 $\rho^d(x_1, x_2, t)$ 或 $\rho(x_1, x_2, t)$）均保持为常数；本例中的常数值为 5。图2(c)展示了在假设动力学已达到稳态时，$t = 0$ 和 $t = 50$ 处的概率分布 $\rho(x_1, x_2 = 0, t)$。此外，我们在二维情形下通过二维空间中的牛顿法计算能量极小化解 ρ^*，并绘制截面分布 $\rho^*(x_1, x_2 = 0)$ 以供参考。我们观察到，能量极小化解 ρ^* 与偏微分方程模型 (2.7) 的稳态密度 ρ_∞ 重合，这再次证实了我们的理论预期：梯度流收敛到局部能量极小化解。我们预计，对于其他相互作用势（包括本节讨论的其他示例），由随机微分方程模型 (2.1) 构造的离散密度 ρ^d 与偏微分方程模型得到的密度 ρ 也会有类似的一致性。为简洁起见，我们省略相应的数值模拟。

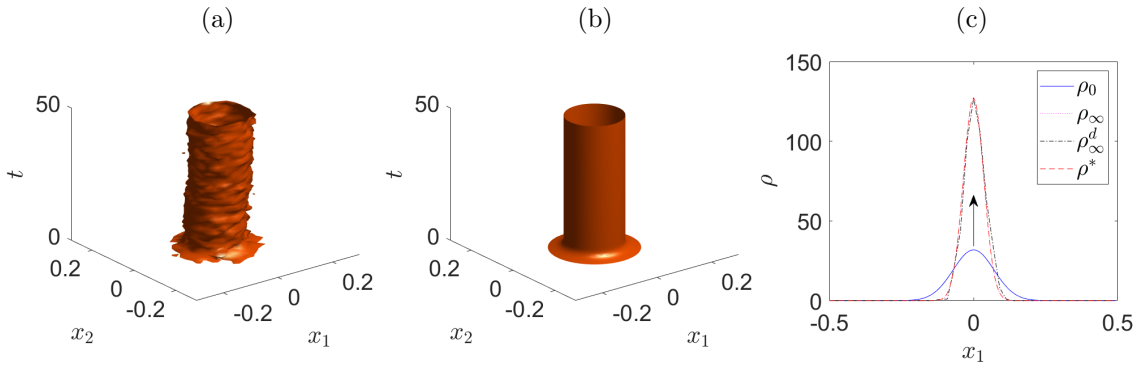

FIGURE 2. (a,b) 离散密度的等值面图 ρ^d 来自随机微分方程模型，密度 ρ 来自二维赫尔曼-克拉克偏微分方程模型，时间为 $t = 50$，此时已基本达到渐近极限。在模拟中，我们采用参数 $c = 0.25$ 和 $\sigma = 0.05$。(c) 密度沿 $x_2 = 0$ 方向在 $t = 0$ 和 $t = 50$ 处的横截面，以及通过求解（4.5）计算得到的能量极小化解。

5.2. 具有竞争力的莫尔斯型模型

接下来我们考虑 具有相互竞争的吸引力和排斥力的莫尔斯型相互作用势下 ，

$$\Theta(x) = -G\mathrm{e}^{-|x|/L} + \mathrm{e}^{-|x|}, \quad F(x) = 0, \tag{5.3}$$

其中 $G > 0$ 和 $L > 0$ 分别是吸引作用的强度和特征长度，第二个指数项表示排斥作用 [21,23]。Leverentz等人 [21] 根据解的长期行为，将无噪声模型（即 $\sigma = 0$）的参数对（G, L）分为三种状态：扩散态（长程排斥占主导），其中密度向无穷远扩散；稳态，其中密度收敛到局部聚集；以及爆破解，其中密度集中为狄拉克δ函数。我们从每种状态中选取参数 G, L 并研究噪声水平为 $\sigma = 0.2$时相应的模型。具体而言，扩散情形下采用 $G = 0.5$ 和 $L = 0.5$，稳态情形下采用 $G = 0.4$ 和 $L = 4$，爆破解下采用 $G = 2$ 和 $L = 0.5$。

图3 展示了密度的时空演化，以及选定时刻的密度分布。对于扩散和稳态情形，密度要么扩散至无穷远，要么稳定为局部聚集，其行为在定性上与无噪声模型一致。相比之下，在爆破解中，密度先形成若干局部峰值（最多 $t = 70$ 个），随后逐渐变得平滑，并合并为一个更宽的分布，继续扩散。这种行为不同于无噪声情形；在无噪声情形中，密度会收敛到狄拉克δ函数的有限和。

5.3. 拉普拉斯势

在本小节中，我们考虑一个一维示例，其势为

$$\Theta(x) = e^{-|x|}, \quad F(x) = \gamma|x|^2, \tag{5.4}$$

其中 γ 是一个常数。注意，相互作用势 Θ 是拉普拉斯分布，也是与微分算子 $\mathcal{L} = \partial_x^2 - 1$ 相关联的格林函数，满足

$$\mathcal{L}\Theta(x) = -2\delta(x). \tag{5.5}$$

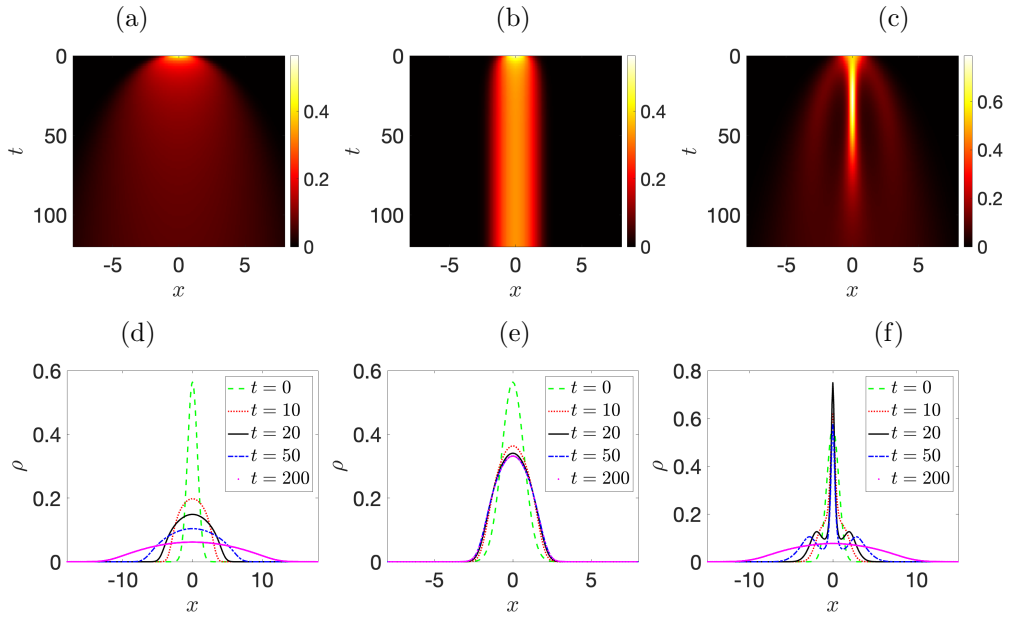

FIGURE 3. 莫尔斯势模型的密度演化（5.3），其中（a、d）为扩散情形，（b、e）为稳态情形，（c、f）为爆破解；上排展示时空演化，下排展示特定时刻的密度。

我们应用 通过微分算子 $\mathcal{L}$ 作用于（3.11）中第一个方程的两边，得到 n

$$-2\rho^*(x) + \partial_x^2 F(x) - F(x) + \frac{\sigma^2}{2}\left(\partial_x^2 - 1\right)\left(\ln\left(\rho^*(x)\right)\right) = -\lambda, \tag{5.6}$$

它将（3.11）中的积分方程转化为微分方程。

图4 展示了 ρ_∞ 基于渐近时间演化动力学、由偏微分方程模型（2.7）得到的稳态解，以及通过求解积分方程（ ρ_1^* 和 ρ_2^* （3.11）及微分方程（5.6）分别得到的能量极小化解。我们考虑了参数 σ 和 γ的若干种取值。对于所有参数设置，通过积分形式或微分形式计算得到的全局极小化解（两种形式在数学上等价）均与对偏微分方程模型（2.7）进行长期模拟得到的稳态解一致。我们还观察到了参数依赖趋势。当γ 增大时，密度会更集中于中心附近，这反映了二次自势影响的增强。当 σ 增大时，扩散会增强，密度分布也会变得更加平滑、圆润。

在所有情形下，我们还通过计算雅可比算子的特征值来检验相应密度构型的谱稳定性；实际计算中使用的是离散雅可比矩阵。我们考察了其中各种标准基准，例如，当关于密度的常微分方程具有平移不变性时（例如，当 $F(x) = 0$），是否存在零特征值。在所有示例中，平衡密度的谱均位于左半平面，证实了谱稳定性以及所考虑构型的极小化元性质；此外，这些构型也被发现是相应能量最小化动力学的吸引子。由于这仅是对构型具有能量最小化性质的补充检验，为简洁起见，本文不展示相关详细结果。

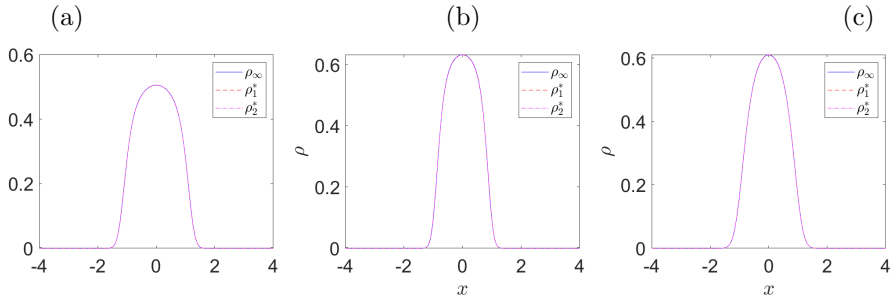

FIGURE 4. （2.7）的长期密度，以及由（3.11）和（5.6）求得的能量极小化子，其中参数为（a） $\sigma = 0.2$， $\gamma = 0.2$，（b） $\sigma = 0.2$， $\gamma = 0.3$，以及（c） $\sigma = 0.3$， $\gamma = 0.3$。

6. SUMMARY & OUTLOOK

本文研究相互作用粒子系统的含噪非局部聚集模型，其中两两相互作用和外力均为势的梯度。尽管确定性非局部聚集模型已得到广泛研究，但非局部相互作用与随机噪声对长期行为、平衡结构和稳定性的综合影响仍未得到充分理解，尤其缺乏统一的微观—宏观视角和变分视角。

我们在微观和宏观层面构建了该模型。我们从由随机微分方程描述的随机相互作用粒子系统出发，并在大群体极限下推导出其连续介质极限，即一个积分微分方程。在相互作用和外力满足梯度结构假设的条件下，该系统具有一个相关的能量泛函，其中包含非局部相互作用、外部势能以及由噪声诱导的熵项。我们证明了宏观模型在 Wasserstein-2空间中具有梯度流表述，并满足能量耗散律。进一步地，我们提供了一个能量变分框架，用于确定平衡态并分析长期动力学。通过考虑满足正性和质量守恒的可容许扰动，我们在概率空间中推导出了能量极小化子的一级和二级变分条件。

在数值方面，我们介绍了解微观和宏观模型的方法，并提出了从随机粒子模拟中重建种群密度的步骤。通过一维和二维含噪声的 HK 意见模型，我们展示了微观与宏观密度描述之间的一致性。此外，我们研究了具有竞争力的 Morse 型相互作用核，并探讨随机噪声在不同参数区域内对宏观模型动力学演化的影响。我们观察到，扩散项通过与吸引力相抗衡，有助于稳定密度演化。在爆破解参数区域，噪声会使稳态密度平滑；若没有噪声，这些密度则会集中为狄拉克δ函数。我们还研究了一个采用拉普拉斯势的模型，其中变分条件可化为微分方程，而非非局部聚集模型中通常出现的积分方程。我们计算了长期动力学及其对应的能量极小化解，发现两者吻合良好。此外，我们还进行了线性稳定性分析，证实这些构型在谱意义下稳定且具有极小化性质，并表明它们是相应能量极小化动力学的吸引子。

未来研究仍有若干方向值得探索。本文仅考察了有限几类相互作用核，而许多其他核也值得研究，尤其是其尺度性质和维数依赖行为。值得特别关注的是，能否识别出一些广泛的核类别，使我们能够对其得出一般性结论。将分析扩展到这些核的含噪版本，有助于进一步了解随机效应如何在不同空间维数下与非局部相互作用相互影响，以及它们如何影响相变和结构转变的出现。对参数依赖性开展更系统、更定量的研究，尤其是噪声水平在稳定或

局域化能量极小化子方面所起的作用，也是未来研究的重要方向。本文研究了基于主体的模型中的加性噪声。另一种建模选择是采用乘性噪声，它可以将动力学限制在有限区间内，并将非局部聚集模型扩展到具有状态依赖涨落的情形。最后，从数值角度来看，本文采用的方法还可以扩展为解决此类问题的更全面工具箱。将当前的数值示例扩展到更广泛的参数区间和更高维的情形，将有助于进一步阐明所提框架的稳健性和适用性。

WC 部分获得了美国国家科学基金会通过 DMS-2514053 提供的资助。本材料部分基于美国国家科学基金会根据奖项 PHY-2408988（PGK）提供支撑的工作。本研究的一部分是在 P.G.K. 通过理论科学访问计划（TSVP）访问冲绳科学技术大学院大学（OIST）以及在悉尼数学研究所（SMRI）获得悉尼数学研究所访问学者奖学金期间开展的。本工作还获得了西蒙斯基金会的支撑 [SFI-MPS-SFM-00011048，P.G.K.]。

References

[1] L. Ambrosio、N. Gigli 和 G. Savar´e。《 *Gradient flows: in metric spaces and in the space of probability measures*》。Springer，2005年。[2] N. Bellomo、P. Degond 和 E. Tadmor（编）。《 *Active Particles*》、 *Volume 1: Advances in Theory*、 *Models*、 *and Applications*。科学、工程与技术中的建模与仿真。Birkh¨auser，查姆，第1版，2017年。[3] N. Bellomo、P. Degond 和 E. Tadmor（编）。《 *Active Particles*》、 *Volume 2: Advances in Theory*、 *Models*、 *and Applications*。科学、工程与技术中的建模与仿真。Birkh¨auser，查姆，第1版，2019年。[4] A. J. Bernoff 和 C. M. Topaz。群集平衡态入门。

SIAM Journal on Applied Dynamical Systems 10 1 212 250, , ( ): – 。2011

[5] J. A. Ca˜nizo、J. A. Carrillo 和 F. S. Patacchini。相互作用能的紧支撑全局极小化子的存在性。

Archive for Rational Mechanics and Analysis，217(3):1197–1217，2015年。[6] J. A. Carrillo、A. Chertock 和 Y. Huang。具有梯度流结构的非线性非局部方程的有限体积法。 *Communications in Computational Physics*，17(1):233–258，2015年。[7] J. A. Carrillo、K. Craig 和 F. S. Patacchini。用于扩散的团块方法。

Calculus of Variations and Partial Differential Equations 58 2 53, 2019 , ( ): 。[8]

C. Castellano、S. Fortunato 和 V. Loreto。社会动力学的统计物理学。

Reviews of Modern Physics 81 2 591 646, , ( ): – 。2009

[9] L.-P. Chaintron 和 A. Diez。混沌传播：模型、方法和应用综述。I. 模型与方法。*Kinetic and Related Models*，15(6):895–1015，2022年。[10] G. Chen、W. Su、S. Ding 和 Y. Hong。具有环境噪声和通信噪声的异质 Hegselmann–Krause 动力学。

IEEE Transactions on Automatic Control，65(8):3409–3424，2019年。[11] D. A. Dawson。合作行为平均场模型的临界动力学与涨落。*Journal of Statistical Physics*，31 1 29( ): –85，1983年。[12] P. Del Moral。用于蒙特卡罗积分的平均场模拟。

Monographs on Statistics and Applied Probability 126 26 6, , ( ): 。[13] 2013

R. C. Fetecau、Y. Huang 和 T. Kolokolnikov。非局部聚集模型的群集动力学与平衡态。 *Nonlinearity*，24 10( ):2681，2011年。[14] B. Fornberg。《 *A practical guide to pseudospectral methods*》，第1卷。剑桥大学出版社，1998年。[15] J. Garnier、G. Papanicolaou 和 T.-W. Yang。随机效应下的共识收敛。 *Vietnam Journal of Mathematics*，45 1 51( ): –75，2017年。[16] J. G¨artner。相互作用扩散过程的 McKean–Vlasov 极限。 *Mathematische Nachrichten*，137(1):197–248，1988年。[17] R. Hegselmann、

The Journal of Artificial Societies and Social Simulation 2015 , 。

意见动力学与有限信任：模型、分析与模拟。

[18] L. Helfmann、N. Djurdjevac Conrad、P. Lorenz-Spreen 和 C. Sch¨utte。影响者与媒体策略作用下的意见动力学建模。 *Scientific Reports*，13(1):19375，2023年。[19] R. Jordan、D. Kinderlehrer 和 F. Otto。福克–普朗克方程的变分形式。

SIAM Journal on Mathematical Analysis 29 1 1 17, 1998 , ( ): – 。

[20] T. Kolokolnikov、H. Sun、D. Uminsky 和 A. L. Bertozzi。二维粒子相互作用产生的环状图样的稳定性。 *Physical Review E*，84(1):015203，2011年。[21] A. J. Leverentz、C. M. Topaz 和 A. J. Bernoff。吸引-排斥型群集的渐近动力学。

SIAM Journal on Applied Dynamical Systems 8 3 880 908, 2009 , ( ): – 。

[22] J. Lorenz。连续意见动力学的稳定性定理。 *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*，355 1 217( ): –223，2005年。[23] A. Mogilner、L. Edelstein-Keshet、L. Bent 和 A. Spiros。社会聚集中相互作用、势与个体距离。 *Journal of Mathematical Biology*，47(4):353–389，2003年。[24] P. J. Morrison。理想流体的哈密顿描述。 *Rev. Mod. Phys.*，70:467–521，1998年4月。[25] S. Motsch 和 E. Tadmor。异质偏好动力学增强共识。 *SIAM Review*，56(4):577–621，2014年。[26] G. Naldi、L. Pareschi 和 G. Toscani (编)。 *Mathematical Modeling of Collective Behavior in Socio-Economic and Life Sciences* ¨ 1 2010 。科学、工程与技术中的建模与仿真。Birkhauser，美国马萨诸塞州波士顿，版，。[27] M. Pineda、R. Toral 和 E. Hern ´ ´ *The European* andez-Garcıa。用于意见动力学的含噪声 Hegselmann–Krause 模型。，( ): 。[28] B. W. Silverman。《 *Density estimation for statistics and data analysis*》。Routledge，2018年。[29] A.-S. Sznitman。混沌传播专题。载于 *Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour XIX—1989*，第165–251页。Spri nger，2006年。[30] T. Vicsek、A. Czir´ok、E. Ben-Jacob、I. Cohen 和 O. Shochet。自驱动粒子系统中的新型相变。 *Phys. Rev. Lett.*，75:1226–1229，1995年8月。[31] C. Wang、Q. Li、W. E 和 B. Chazelle。含噪声的 Hegselmann–Krause 系统：相变与 $2R$ *Journal* 猜想。，( ): – 。 *Physical Journal B* 86 12 490, 2013 *of Statistical Physics* 166 5 1209 1225, 2017
[32] N. Wehlitz、M. Sadeghi、A. Montefusco、C. Sch¨utte、G. A. Pavliotis 和 S. Winkelmann。用随机偏微分方程近似基于粒子的聚类动力学。 *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*，24(2):1231–1250，2025年。