arXiv:2602.03660v1 [math.AG] 3 Feb 2026

Brill–Noether 理论的最新进展与 Brill–Noether 曲线的几何

ISABEL VOGT

Abstract. 本文的第一个目标是综述 Brill–Noether 理论的最新进展，包括从曲线到射影空间的映射模空间研究，以及由此得到的射影空间中曲线的几何。第二个目标是向初学者介绍过去十年中提出或发展的一些重要技术，正是这些技术促成了上述进展。

1. Introduction

Brill–Noether 理论是代数几何中最古老的研究领域之一。传统上，代数曲线与由多项式方程定义的射影空间一维子集同义。黎曼对抽象曲线的定义将这项研究一分为二：一是研究亏格为 g 的抽象曲线及其模空间 M_g，二是研究所有将亏格为 g 的抽象曲线以次数 d映射到射影空间 $\mathbb{P}^r$ 的方式。第二个领域就是 Brill–Noether 理论。这个名称是为纪念 Brill 和 M. Noether；他们在 1874年猜想了一个精确公式，用以判定某个亏格的一般曲线何时能以指定的不变量[BN74]实现为射影曲线。直到 1980 年，Griffiths–Harris [GH80], 在 Kempf [Kem71] 和 Kleimann–Laksov [KL72]早期工作的基础上，才证明了这一结果。20世纪80年代，Gieseker [Gie82], 、Fulton–Lazarsfeld [FL81] 和 Eisenbud–Harris [EH87a]的后续工作最终证明了布里尔–诺特定理（见下文定理 2.2），该定理对亏格为 g 、次数为 d且映射到 $\mathbb{P}^r$ 的任意一般曲线的映射模空间作出了良好描述。此后，人们又运用极限线性级数 [EH83b], 、K3曲面[Laz86], 、Bridgeland 稳定性 [Bay18],和热带几何 [CDPR12, JP14], 提出了许多新颖且影响深远的证明，阐释了这一结果的各个方面。

尽管20世纪末开展了上述所有工作，Brill–Noether 理论如今仍然是一个活跃的研究领域。研究进展主要集中在三个方面：(1) 特殊曲线的 Brill–Noether 理论，以及理解 M_g 中由具有非预期射影实现的曲线组成的轨迹；(2) Brill–Noether 定理所保证存在的 $\mathbb{P}^r$ 中亏格为 g 、次数为 d 的曲线的几何；以及 (3) Brill–Noether 理论在 M_g 的双有理几何中的应用。在第一个方面，过去十年见证了固定亏格 [曲线的 Brill–Noether 定理的完整类比结果 25], ，以及关于 M_g 中具有非预期 g^r_d 的轨迹的维数和（不可）约性的进展 [，并且完全解决了哪些轨迹相对于包含关系是极大的问题 [。第二个方面的进展包括证明 Severi最大秩猜想 1915 [，以及完整解决 Brill–Noether 曲线的插值问题 [。最后，强最大秩猜想方面的进展带来了 M_{22} 和 M_{23} 为一般型的证明 [。

— —

本文安排如下。第2节介绍主要研究对象以及经典的布里尔–诺特定理，并着眼于过去十年的发展。第3节综述这些最新进展，涵盖关于模空间的研究成果，以及对射影空间中曲线的几何的新见解。第4节则侧重点不同，旨在帮助初涉这一领域、希望熟悉这些最新突破背后某些技术的读者。为了使论述通俗易懂，我们不对最前沿的成果作概述，而是详细介绍较为简单的结果的现代证明；这些结果的原始证明更早就已问世。其中一些论证在其他文献中并未出现，

包括第 4.1 节中布里尔–诺特不存在性定理的简洁证明，以及第 4.2 节中布里尔–诺特存在定理的退化证明，尽管这些证明为专家所熟知。我们希望将这些内容纳入本文，能让更多人了解这些技术。

本文涉及的主题必然偏重于与我自身研究最为接近的领域。本文不应被视为对过去十年 Brill–Noether 理论中所有有趣且重要工作的全面综述。关于主题各异但有所交集的综述，请参见 [JP25]。此外，本文仅关注从曲线到射影空间的映射，因此完全不涉及曲线上的高秩向量丛的 Brill–Noether 理论，也不讨论高维簇的 Brill–Noether 问题。关于这些主题的介绍，请参阅近期综述 [GTiB09, New22, CHN24]。

致谢。感谢 Izzet Coskun、Gavril Farkas、Richard Haburcak、Joe Harris、Dave Jensen、Eric Larson、Hannah Larson、Feiyang Lin 和 Nathan Pflueger 与我交流，帮助我加深了对 Brill–Noether 理论的理解，并对本文提出了反馈。我也感谢美国国家科学基金会通过 DMS-2338345 资助我的研究。

2. Background

设 C 是定义在代数闭域 K 上的一条光滑射影曲线。Brill–Noether 理论所要探讨的核心问题如下。

Ques命题 2.1. 从 C 到 $\mathbb{P}^r$ 的次数为 d 的映射空间的几何是什么？ ？

若映射 $C \to \mathbb{P}^r$ 的像不包含在任何超平面中，则称其为非退化映射。研究非退化映射是有意义的，因为到 $\mathbb{P}^r$ 的退化映射也是到更小射影空间的非退化映射。回顾一下，次数为 d 的非退化映射 $C \to \mathbb{P}^r$ 等价于如下数据：C 上一个次数为 d 的线丛 L，以及 $r+1$ 个截面 σ_0，……，$\sigma_r \in H^0(C,\ L)$，它们张成一个维数为 r+1 的无基点子空间。因此，这个问题中的一个核心对象是轨迹

$$W^r_d C := \{[L] \in \mathrm{Pic}^d_C : \dim H^0(C, L) \geq r+1\}. \tag{1}$$

（当 $r = -1$ 时，我们得到 $W^{-1}_d C = \mathrm{Pic}^d_C$。）轨迹 $W^r_d C$ 继承了一个概形结构，因为它是向量丛映射的退化轨迹；下面解释这一点。更多细节见 [ACGH85，第四章第 3] 节。设 L 是 $C \times \mathrm{Pic}^d_C$ 上的一个 Poincar´e 丛。考虑第二投影 $\pi: C \times \mathrm{Pic}^d_C \to \mathrm{Pic}^d_C$。给定点 p_1，……，$p_N \in C$（其中 $N \gg 0$），令 $D := p_1 + \cdots + p_N$，并令 D $:= p_1 \times \mathrm{Pic}^d_C + \cdots + p_N \times \mathrm{Pic}^d_C$ 为相对次数为 N 的对应除子。由上同调与基变换定理，π_*L(D) 是一个秩为 $d + N + 1 - g$ 的向量丛，其在点 $[L] \in \mathrm{Pic}^d_C$ 上的纤维同构于 $H^0(C,\ L(D))$。根据构造，推前 $\pi_*\mathrm{L(D)}|_{\mathcal{D}}$ 是一个秩为 N 的向量丛，其在点 $[L] \in \mathrm{Pic}^d_C$ 上的纤维同构于 $L(D)|_D$。将其限制到 D 上，得到一个映射

$$\pi_*\mathcal{L}(\mathcal{D}) \to \pi_*\mathcal{L}(\mathcal{D})|_{\mathcal{D}}, \tag{2}$$

特化到 $H^0(C, L(D)) \to L(D)|_D$ 上的 $[L]$。轨迹 $W^r_d C$ 定义为映射 (2) 的退化轨迹，即该映射的核的维数至少为 $r+1$，也就是说，其秩至多为 $d - g - r + N$。这一描述与所作的选择无关 [ACGH85, 第四章, 注 3.2]。

关于 $W^r_d C$，首先自然会问它何时非空。当然，这是一个微妙的问题，取决于曲线 C 的几何。例如，若 C 是亏格为 g 且 $0 < n < g - 1$ 的超椭圆曲线，那么超椭圆线丛的 n 次幂表明 $W^n_{2n} C$ 非空；但 Clifford 定理保证，若 C 是非超椭圆的，则 $W^n_{2n} C = \varnothing$ [ACGH85，第 III 章第 1]节。尽管如此，鉴于 $W^r_d C$ 是向量丛映射 (2) 的退化轨迹，其预期余维为

$$(\text{dim of kernel})\cdot(\text{dim of cokernel}) = (r+1)(g-d+r)$$

在 g维的皮卡C^d中。这是 Brill 和 Noether 为猜想以下结论所做计算的现代表述：对于一般的 C，轨迹 $W^r_d C$非空当且仅当

(BN) $$\rho(g,r,d) := g-(r+1)(g-d+r) \geq 0.$$

量 $\rho(g,\ r,\ d)$ 称为 Brill–Noether 数。

定理 2.2（布里尔–诺特定理）。固定整数 g、r、d，满足 $g \geq 2$。设 C 是亏格为 g 的一般曲线（即，$[C]$ 属于 $\mathcal{M}_g$ 中的一个稠密开集）。

(1)（*Griffiths–Harris* [*GH80*，主要定理 *II(a)*]）$W^r_d C$ 的维数为 $\min(g,\ \rho(g,\ r,\ d))$。特别地，若 $\rho(g,\ r,\ d) < 0$，则 $W^r_d C = \varnothing$。*(2)*（*Gieseker* [*Gie82*，定理 *1.*1]，，参见注 *1*）轨迹 $W^r_d C$ 是正规、*Cohen–Macaulay* 的，且在 $W^{r+1}_d C$ 之外光滑。在特征 *0* 下，它具有有理奇点。

(3)（*Kempf* [*Kem71*，推论，第 15]，页；*Kleiman–Laksov* [*KL*72]，[*KL74*，命题 4]）当 $\rho(g,\ r,\ d) = 0$ 时，

$$N(g,r,d) := \#W^r_d C = g! \prod_{\alpha=0}^{r} \frac{\alpha!}{(g-d+r+\alpha)!}$$
$$= \#\ Standard\ Young\ Tableaux\ on\ (r+1)\times(g-d+r)\ diagram.$$

(4)（*Fulton–Lazarsfeld* [FL81, 推论，第 1]，*Eisenbud–Harris* [EH87a，定理 1]，*Edidin*[Edi91，定理 1]）当 $\rho(g、\ r、\ d) > 0$、$W^r_d C$不可约时。当 $\rho(g、\ r、\ d) = 0$时，通用 *Brill–Noether* 轨迹$\mathcal{W}^r_d$有唯一一个支配$\mathcal{M}_g$的分支；若 $r+1 \neq g-d+r$，则此覆盖的单值群包含 $A_{N(g,r,d)}$。

布里尔–诺特定理的某些结论对任意亏格为 C 的光滑曲线都成立：若$\rho(g、\ r、\ d) \geq 0$，则该轨迹 $W^r_d C$的维数至少为 $\min(g、\ \rho(g、\ r、\ d))$ [Kem71，第 4]，[KL72] 节（另见 [GH80，主要定理 I]）；若 $\rho(g、\ r、\ d) > 0$，则 $W^r_d C$是连通的 [FL81，定理 1]。

这些结果的原始证明常常假定基域具有特征 0，但这一假定可以从所有部分中去掉。Welters [Wel85，第2节。7]观察到，在极限线性级数的背景下，椭圆曲线链更适合于研究正特征下的 Brill–Noether 理论。仿照文献中极限线性级数的证明 [EH83b, EH87a]，，同时用椭圆曲线链替换旗曲线，可以得到定理 2.2 所有部分的与特征无关的证明。实施这一替换在 $\rho(g,r,d) = 0$ 第(4)部分的情形中最为微妙，见 [LLV25，第 10] 节。[FL81] 中的定理 1 与推论在任意特征下成立 [FL81，注记 2。8]。

尽管定理 2.2 第(1)部分与第(2)部分的原始证明使用了退化，Lazarsfeld 在特征 0 下利用 K3曲面并避免退化重新证明了这一点 [Laz86，定理，第 1]页。[Laz86] 这一工作的影响无论怎样强调都不为过：它为 Brill–Noether一般曲线的研究所引入的新工具，使得例如 Voisin 对 Green猜想一般情形的证明 [Voi02, Voi05], 以及更新近的突破成为可能，如对极大Brill–Noether轨迹的确定 [AHK]（下文定理 3.4 予以陈述）。最近，基于这一视角，Arbarello–Bruno–Farkas–Sacc`a [ABFS16，推论 1.3 与节 5] 给出了定义在 $\mathbb{Q}$上的每一亏格的光滑 Brill–Noether一般曲线的显式构造。

当 $d < g + r$ 时，布里尔–诺特定理最有趣，因此根据黎曼–罗赫定理，$W^r_d C$ 中的向量丛 L 必然具有 $h^1(C,\ L) \neq 0$。在这种情形下，定理 2.2(1) 表明，$W^r_d C$ 中的一般线丛 L 具有 $h^0(C,\ L) = r+1$。

注记 1（Gieseker–Petri定理与 $W^r_d C$的奇点）。线丛 L的 Petri 映射是乘法映射

(3) $$\mu_L : H^0(C,L) \otimes H^0(C, K_C \otimes L^\vee) \to H^0(C, K_C).$$

Gieseker 在 [Gie82, 定理 1.1] 中证明，若 C 是一般的，则对每个 $L \in \mathrm{Pic}^d_C$，Petri 映射 μ_L 都是单射。由于 $W^r_d C$ 是（2）的退化轨迹，选取源与目标的标架后，可在 $W^r_d C$ 上得到一个自然的 $\mathrm{GL}_{d+N+1-g} \times \mathrm{GL}_N$-向量丛。Petri 映射的单射性进而保证该向量丛在矩阵空间中相应的泛行列式轨迹上是光滑的。这个泛行列式轨迹：

- 在对应于严格更小秩的行列式子轨迹之外光滑。
- 正规且为 Cohen–Macaulay [Wey03，命题 6.1.5(a)-(b) 和 6.2.3(b)]。
- 在特征 0 [下具有有理奇点Wey03，命题 6.15(b)]。

因此，$W^r_d C$ 也具有所有这些性质。$W^r_d C$ 的一个解消由以下轨迹给出

$$G^r_d C = \{(L, V) : L \in W^r_d C, V \in \mathrm{Gr}(r+1, H^0(C, L))\},$$

它由退化轨迹形式体系自然定义，下面我们回顾这一点。考虑 Grassmann 丛 ψ:Gr($r+1$, π_* L(D)) $\to$ 皮卡^d_C，其泛子丛为 $S \to \psi^*\pi_*$L(D)。轨迹 $G^r_d C$ 定义为复合映射 $S \to \psi^*\pi_*\mathrm{L(D)}|_{\mathcal{D}}$ 的核（更多细节见 [ACGH85，第四章，第 3] 节）。

在此情形下，定理 2.2(1) 的另一个直接推论是，当 $r \geq 1$ 时，$W^r_d C$ 中的一般线丛无基点；事实上，带有基点的线丛必然属于张量积映射 $\mathrm{Pic}^{d-1}_C \times \mathrm{Pic}^1_C \to \mathrm{Pic}^d_C$ 下 $W^r_{d-1} C \times (W^0_1 C \simeq C)$ 的像，其维数至多为 $\rho(g,\ r,\ d-1) + 1 < \rho(g,\ r,\ d)$。当 $d \geq g + r$ 时，利用 Serre 对偶，带有基点的线丛轨迹包含在映射 $W^0_{2g-d-1} \times W^0_1 \to W^r_d$ 的像中，该映射将 $(M,\ p)$ 送至 $K_C \otimes M(p)$，其维数同样至多为 $2g - d \leq g - r \leq g - 1$。因此，当 C 具有一般模空间时，布里尔–诺特定理为问题 2.1 给出了一个很好的答案。

尽管这里的表述针对单条曲线 C，但由于该结论在 M_g 的一个稠密开集上成立，这意味着布里尔–诺特定理对映射模空间 $\mathrm{M}_g(\mathbb{P}^r, d)$ 给出了如下推论：该模空间参数化了从亏格为 g 的光滑曲线到 $\mathbb{P}^r$、次数为 d 的映射。

推论 2.3。

(1) 若 $\rho(g, r, d) \geq 0$，则 $M_g(\mathbb{P}^r, d)^{\mathrm{BN}}$ 中存在唯一一个不可约分支，它参数化非退化映射，且取源曲线模空间的映射 $M_G(\mathbb{P}^r, d)^{\mathrm{BN}} \to M_g$ 是支配的。若 $\rho(g, r, d) < 0$，则不存在这样的分支。

(2) Brill–Noether 分支 $M_g(\mathbb{P}^r, d)^{\mathrm{BN}}$ 在一般情况下是光滑的，其维数为

$$\dim \mathcal{M}_g + \dim \mathrm{PGL}_{r+1} + \rho(g, r, d) = (r+1)d - (r-3)(g-1).$$

布里尔–诺特定理对模空间 $\mathrm{M}_g(\mathbb{P}^r, d)$ 的良好描述，引出了理解由此得到的映射的几何这一问题。朝这个方向迈出的第一步如下。

定理 2.4（嵌入定理，Eisenbud–Harris [EH83a，定理 1] 关于 $p = 1$，Farkas[Far08，推论 0.3]）. 若 $r \geq 2p + 1$，则 $\mathrm{M}_g(\mathbb{P}^r, d)^{\mathrm{BN}}$ 中的一般映射是 p-非常丰的。

特别地，一旦 $r \geq 3$，Brill–Noether 分支中的一般映射便是一个嵌入。据此，我们将由 Brill–Noether 分支参数化的映射称为 Brill–Noether 曲线。这为“射影空间中的一般曲线”这一术语赋予了精确含义。

布里尔–诺特定理对一般曲线成立这一事实的另一个推论是，其补集是 M_g 中一个有趣的、自然定义的轨迹。

定义 2.5. 布里尔–诺特轨迹 $\mathrm{M}^r_{g,d}$ 是满足 $W^r_d C \neq \varnothing$ 的曲线 $C \in \mathrm{M}_g$ 的轨迹。

当 $r = 0$ 和 $d > 0$, $W^0_d C = \mathrm{Im}(\mathrm{Sym}^d_C \to \mathrm{Pic}^d_C)$ 总是非空，因此 $\mathrm{M}^0_{g,d} = \mathrm{M}_g$。由 Serre 对偶可得 $\mathrm{M}^r_{g,d} = \mathrm{M}^{g-d+r-1}_{g\ 2g-2-d,}$；为消除这种冗余，我们可以假设 $d \leq g - 1$。

当 $\rho(g, r, d) \geq 0$ 时，轨迹 $\mathrm{M}^r_{g,d}$ 就是整个 M_g；但当 $\rho(g, r, d) < 0$ 时，根据布里尔–诺特定理，它是一个真子簇。$\mathrm{M}^r_{g,d}$ 的预期余维为 $\max(0, -\rho(g, r, d))$。

Steffen 在 [Ste98, Theorem 0.1] 中证明，$\mathrm{M}^r_{g,d}$ 的每个分支的余维至多为 $\max(0, -\rho(g,r,d))$。若 $\rho(g,r,d) = -1$，结合 Eisenbud–Harris 的一个定理 [EH89, Theorem (1.1)(ii)]，可知 $\mathrm{M}^r_{g,d}$ 是 M_g 中的一个不可约除子。Eisenbud–Harris 在 M_g [中计算了该除子闭包的类（相差一个整体正数因子），见 1]EH87b, Theorem。当 $g+1$ 为合数时，这足以证明对于 $g \geq 24$ [EH87b, Theorem A]，M_g 是一般型。当 $\rho(g,r,d) \leq -2$ 时， [EH89, Theorem (1.1)(i)] 表明 $\mathrm{M}^r_{g,d}$ 没有除子分支；因此结合 [Ste98, Theorem 0.1], ，可证明当 $\rho(g,r,d) = -2$ 时，轨迹 $\mathrm{M}^r_{g,d}$ 等维且余维为 2。在 Edidin 的工作基础上（ [Edi92], 该工作确定了当 $g \geq 12$ 时 M_g 的余维 2 有理同调的一组基），Tarasca 计算了余维 2 轨迹 $\mathrm{M}^1_{2k,k}$ 的闭包在 M_{2k} [的重言环中的类，见 2]Tar13, Theorem。当 $\rho(g,r,d) = -3$ 且 $g \geq 12$ 时，$\mathrm{M}^r_{g,d}$ 的等维性可由 Edidin 的工作推出（ [Edi93, Theorem 0.1], 同样利用了 [Edi92]），再结合 [EH89, Ste98]。

3. Important recent results

3.1. Brill–Noether 理论的模空间分面。由于布里尔–诺特定理对一般曲线 C 上的 $W^r_d C$ 给出了良好的描述，近期的大多数研究都聚焦于布里尔–诺特定理失效的情形，也就是特殊曲线。我们先来看看当 $\rho(g,r,d) < 0$ 时，关于 Brill–Noether 轨迹 $\mathrm{M}^r_{g,d}$ 本身有哪些已知结果。当 $\rho(g,r,d)$ 相当负（约为 $-\dim \mathrm{M}_g$ 或更小）时，不难找到 $\mathrm{M}^r_{g,d}$ 的分支，其维数严格大于预期维数 $\min(-1, 3g-3+\rho(g,r,d))$：例如，对于充分大的 $r \geq 3$ 和 d， $\mathbb{P}^r$ 中的 Castelnuovo 极值曲线会在 M_g [Pfl23 中产生一个维数出乎意料地大的分支，见 Remark 1.4]。第 3.2 节总结的 Hurwitz–Brill–Noether 理论结果也可用于构造维数出乎意料地大的分支，例如 Pfl23, Appendix A.1]；我们将在下一小节中给出一个来自 [HTiB] 的具体例子，即例 3.10。

一方面，对于某些 (r,d) 的取值，$\mathrm{M}^r_{g,d}$ 的不可约性和余维是众所周知的。例如，由于一般曲线在 $\mathrm{M}^1_{g,k}$ 中的 g^1_k 是无基点的，$\mathrm{M}^1_{g,k}$ 是次数为 k 、亏格为 g 的 $\mathbb{P}^1$ 覆盖所对应的 Hurwitz 空间 $\mathrm{H}_{k,g}$ 的像（在 $\mathbb{P}^1$ 上视射影等价而言）。经典结果表明，$\mathrm{H}_{k,g}$ 的维数为 $2g+2k-5 = 3g-3+\rho(g,1,k)$。此外，根据 Christ–He–Tyomkin 的最新工作 [CHT，定理 A] ，现已知 $\mathrm{H}_{k,g}$ 在所有特征下都是不可约的（在大于 k 的特征下，这归功于 Fulton [Ful69]）。利用变形理论，可以证明当 $\rho(g,1,k) < 0$ 时，映射 $\mathrm{H}_{k,g} \to \mathrm{M}_g$ 到其像是一般有限的，因此 $\mathrm{M}^1_{g,k}$ 始终不可约，并且具有预期维数。

另一个方向是，不固定 r 较小，而是固定 $-\rho(g,r,d)$ 较小。该方向上最系统的结果如下。

定理 3.1 (Pflueger [Pfl23, 定理 A])。假设 $r+1$ 和 $g-d+r$ 均至少为 2，且 $-g+3 \leq \rho(g,r,d) < 0$。那么 $\mathcal{M}^r_{g,\,d}$ 有一个维数为预期维数的不可约分支。

随后，Teixidor i Bigas 在稍小的范围内独立证明了这一结果，其中 $-g+(r+1) \leq \rho(g,r,d) < 0$ [TiB25, 定理 2.1]。在 [Pfl23, 定理 B], 中，Pflueger 证明了一个类似结果，但需满足渐近关系 $-(3+c(r))g+O(g^{5/6}) \leq \rho(g,r,d) < 0$；其中 $c(r)$ 是一个显式常数，当 $r \to \infty$ 时趋于 0。当 r 较大时，这一结果明显强于定理 3.1，因为此类定理成立所要求的 $\rho(g,r,d)$ 最小值为 $-3g+3$。

现在我们转而探讨曲线 $C \in \mathrm{M}^r_{g,\,d}$在 $\rho(g,\ r,\ d) < 0$ 时，布里尔–诺特问题 2.1 的情况；此时经典的布里尔–诺特定理 2.2 可能不成立。

[1]事实上，只需证明：M_g 中具有带基点的 g^1_k 的曲线轨迹位于$\mathrm{H}_{k,g}$的像的闭包之中。这可以通过对一个次数为 $k-m$ 的覆盖与 m 个以次数1映射的 $\mathbb{P}^1$ 的节点并进行平滑化来证明。

问题 3.2。 设曲线 C 在 $\mathrm{M}_{g,\,d_0}^{r_0}$ 的某个分支中是一般的。对于 $(r,\ d) \neq (r_0,\ d_0)$，我们能说些什么？

我们首先希望说明的，是 $W_d^r C$ 何时为空（或非空）。对于曲线上的一个 g_d^r C，如果 $\rho(g,\ r,\ d) < 0$，我们称其为 ρ-非预期的；否则称其为 ρ-预期的。布里尔–诺特定理 2.2(1)保证，当 C 在 M_g中为一般对象时， C上不存在 ρ-非预期的 g_d^r。这引出了以下自然的子问题：

问题 3.3。 对于哪些 $(r_0,\ d_0)$，某个 $\mathrm{M}_{g,\,d_0}^{r_0}$ 分支中的一般曲线，对于 $(r,\ d) \notin \{(r_0,\ d_0)、\ (g-d_0+r_0-1,\ 2g-2-d_0)\}$，不存在$\rho$-非预期的 g_d^r？

如果 $(r_0,\ d_0)$ 出现在问题 3.3 的答案中，那么对于每个 $(r,\ d) \notin \{(r_0,\ d_0)、(g-d_0+r_0-1,\ 2g-2-d_0)\}$，只要 $\rho(g,\ r,\ d) < 0$，就有 $\mathrm{M}_{g,\,d_0}^{r_0} \not\subset \mathrm{M}_{g,\,d}^{r}$。反之则未必成立，因为来自 $\mathrm{M}_{g,\,d_0}^{r_0}$ 不同分支的曲线，可能具有彼此不相交的 ρ-非预期线性级数。然而，问题 3.3 答案中出现的 $(r_0,\ d_0)$，产生了关于包含关系而言极大的（真）Brill–Noether 位。Brill–Noether 位之间还存在一些平凡的包含关系：

$$\text{(4)} \qquad \text{(Adding a point) } \mathcal{M}_{g,d}^r \subset \mathcal{M}_{g,d+1}^r,$$

$$\text{（减去一个一般点）} \mathrm{M}_{g,\,d}^{r} \subset \mathrm{M}_{g}^{r-1}{}_{,\,d-1}, \quad \text{(5)}$$

分别在 $\rho(g,\ r_0,\ d_0+1) < 0$ and$\rho(g,\ r_0-1,\ d_0-1) < 0$ 时，会产生平凡的 ρ-非预期线性级数。

如果某个 Brill–Noether 轨迹相对于这些平凡包含关系是极大的，则称其为预期极大；等价地，添加一个点（4）和减去一个一般点（5）都不会平凡地产生 ρ-非预期的 $g_{d^0}^r$。明确地说，若 $\rho(g, r_0, d_0) < 0$ and$\rho(g, r_0, d_0+1) \geq 0$and $\rho(g, r_0-1, d_0-1) \geq 0$，则 $\mathrm{M}_{g}^{r_0}{}_{,d_0}$ 是预期极大的。由 $\rho(g, r_0, d_0) < 0$but $\rho(g, r_0, d_0+1) \geq 0$ 可知， $d_0 = \lceil (r_0 g)/(r_0+1) \rceil + r_0 - 1$ and $\rho(g, r_0, d_0) \geq -r_0 - 1$,– 而根据 AHL 引理 1.1], 这至少是 $-\sqrt{g}$。通过初等计算还可得知，存在一个预期极大的 Brill–Noether 轨迹，其 $-\rho(g, r_0, d_0)$ 的数量级为 $g^{1/2-\epsilon}$。因此，这些预期极大的 Brill–Noether 轨迹出现在相当大的预期余维中；关于 $\mathrm{M}_{g}^{r_0}{}_{,d_0}$ 的几何，我们所知甚少，只知道根据定理 3.1，存在一个出现在预期余维中的分支。

如果 $\mathrm{M}_{g}^{r_0}{}_{,d_0}$ 并非预期极大，那么它就不是极大的，并且 (r_0, d_0) 不会出现在问题 3.3 的答案中。受 Farkas [Far00] 和 Lelli-Chiesa [LC13], 的工作启发，Auel 和 Haburcak 在 [AH25, Conjecture 1] 中猜想，当 $g \geq 3$ 和 $g \neq 7,8,9$ 时，预期极大的 Brill–Noether 位实际上在包含关系下也是极大的（当时已知一些反例 [AH25, Section 6.2]；我们将在例 3.9 中借助 Hurwitz–Brill–Noether 理论解释其中一个）。多位作者随后取得了部分进展 [AHL, Bud25, BH, TiB25], 最终得到了以下完整结果，它既证明了极大 Brill–Noether 簇猜想，也回答了这个先验上[2] 更强的问题 3.3。

定理 3.4（*Auel–Haburcak–Knutsen* [*AHK*, 定理 1]）。设 $g \geq 3$ 且 $2 \leq d \leq g-1$。存在 $M_{g}^{r_0}{}_{,d_0}$ 的一个分支，使得该分支中的一般曲线 C 没有关于 $(r, d) \notin \{(r_0, d_0), (g-d_0+r_0-1, 2g-2-d_0)\}$ 的 ρ-预期极大线性级数 g_d^r，当且仅当 (g, r_0, d_0) 是预期极大的，且 $(g, r_0, d_0) \notin \{(7, 2, 6), (8, 1, 4), (9, 2, 7)\}$。

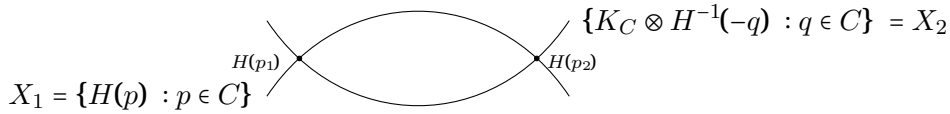
本定理保证，一旦 $g \geq 10$，对问题 3.3 的回答便完全来自排除 (4) 与 (5) 中的平凡ρ-意外 g_d^r。这并不意味着平凡 ρ-意外g_d^r在一般情况下就是唯一 ρ-意外 g_d^r！ Haburcak 已完全分类了亏格不超过 12 [Hab, 定理 A], 的（真）Brill–Noether 位之间的所有包含关系，并且存在许多微妙而有趣的现象。

[2]事后，t 在问题 3.3 的答案中出现的 he（r_0, d_0）恰好对应于极大 $\mathrm{M}_{g,\,d_0}^{r_0}$.

定理 3.4 完全回答了问题 3.3。现在我们转向关于问题 3.2 更为一般的已知结果。最完整的结果出现在情形 $r_0 = 1$ 中，该情形在过去十年中得到了大量研究。由于 $\mathrm{M}^1_{g,k}$ 是 Hurwitz 空间 $\mathrm{H}_{k,g}$ 的像，这一主题被称为 Hurwitz–Brill–Noether 理论；我们将在接下来的第 3.2 节综述主要结果。还已知一些零散的其他结果： [LV] 研究了光滑平面曲线的情形 $r_0 = 2$ 与 $g = \binom{d_0-1}{2}$（以及更一般地，Hirzebruch 曲面上的光滑曲线）。其 [LV，定理 1.1]计算了光滑平面曲线 C的 $W^r_d C$的维数，并在特征 0 下给出了一些光滑性结果，但并未涉及该几何的其他级数。次数为 d 且节点与尖点不太多的平面曲线的 Gonality（纤维丛阶数）在 [CK90，定理 2.1]中被计算为 $d-2$。

3.2. **Hurwitz–Brill–Noether 理论**。 本节研究 $r_0 = 1$ 时的问题 3.2。也就是说，设 C 是一条亏格为 g 的曲线，并配备一个次数为 k 的映射 $f: C \to \mathbb{P}^1$。许多作者指出，在这种情形下， $W^r_d C$ 可能可约，其维数与预期不符，并具有出乎意料的奇点[Bal89, CKM94, BK96, Mar96, CM99, CM00, CM02, Par02]。第一个有趣的例子如下。

例 3.5 （五次属三曲线）。 设 $f: C \to \mathbb{P}^1$ 是一个一般的三次属五覆盖，并令$H := f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$。那么 $W^1_4 C$ 有两个不可约分支 X_1 和 X_2，二者均同构于 C:



其中 $p_1 + p_2$ 是 $K_C \otimes H^{\otimes -2}$的唯一有效代表。虽然 $W^1_4 C$ 具有预期维数，但它并不可约，而且即使 $W^2_4 C = \varnothing$，它仍是奇异的。此外，形如 $H(p)$的每个线丛都有基点，尽管 $r = 1$。

H. Larson [Lar21b]和 Cook-Powell–Jensen [CPJ22a, CPJ22b] 分别提出，这种现象或许可以由向量丛 $f_* L$的同构类来解释。由于 $\mathbb{P}^1$ 上的每个向量丛都可分裂为线丛的直和，该同构类可明确表示为一个 k元整数元组 $\vec{e} := (e_1, \ldots, e_k)$，我们假设其排列满足 $e_1 \le e_2 \le \cdots \le e_k$，称为 C 上的线丛 L 的分裂型。回到例 3.5，线丛 $L \in \mathrm{Pic}^4_C$ 属于 X_1，当且仅当 $h^0(C, L(-H)) = h^0(\mathbb{P}^1, f_* L(-1)) \ge 0$。因此， X_1 是最大分支 e_3 至少为 1 的线丛的轨迹。分裂型 $\vec{e}$ 对数对 (r, d)作了进一步细化，使用

$$d = \chi(L) + g - 1 = \chi(f_* L) + g - 1 = k + \sum e_i + g - 1, \tag{6}$$

$$r = \dim H^0(C, L) - 1 = \dim H^0(C, f_* L) - 1 = \sum_i \max(0, e_i - 1) - 1. \tag{7}$$

因此，轨迹 $W^r_d C$由分裂轨迹细化：

$$W^{\vec{e}} C := \{[L] \in \mathrm{Pic}_C : f_* L \simeq \mathcal{O}(e_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(e_k) \text{ or a specialization thereof}\}.$$

特化由主序给出：若对所有 j均有 $e'_1 + \cdots + e'_j \le e_1 + \cdots + e_j$，则 $W^{\vec{e}'} C \subset W^{\vec{e}} C$。用这种语言，在例 3.5中， $X_1 = W^{(-2,-2,1)} C$， $X_2 = W^{(-3,0,0)} C$，它们的两个交点是 $W^{(-3,-1,1)} C$。

$W^{\vec{e}} C$ 的预期维数可由变形理论计算为

$$\rho(g, \vec{e}) := g - h^1(\mathbb{P}^1, \mathrm{End}\, \mathcal{O}(\vec{e})) = g - \sum_{i>j} \max(0, e_i - e_j - 1).$$

定理 3.6 (Hurwitz–Brill–Noether 定理)。 固定 $g, k, \vec{e}$。设 $f: C \to \mathbb{P}^1$ 是一个一般的次数为k、亏格为 g的覆盖（即 $[f: C \to \mathbb{P}^1]$ 位于 *Hurwitz* 空间 $\mathcal{H}_{k,g}$中的一个稠密开集内）。

(1) (H. Larson [*Lar21b,* 定理 *1.*2]*, Cook-Powell–Jensen* [*CPJ22a, CPJ22b,* 定理 *1.*1]*)*$W^{\vec{e}}C$ 的维数为 $\min(g, \rho(g,\vec{e}))$。特别地，$W^{\vec{e}}C = \varnothing$ 若 $\rho(g,\vec{e}) < 0$。*(2) (H. Larson* [*Lar21b,* 定理 *1.*2]*, E. Larson–H. Larson–V.* [*LLV25,* 定理 *1.2(2')*]*)*$W^{\vec{e}}C$ 是正规的、*Cohen–Macaulay* 的，且在所有余维至少为 *2* 的 $W^{\vec{e}'}C$ 处光滑，其中 $\vec{e}'$ 是 $\vec{e}$ 的特化。*(3) (E. Larson–H. Larson–V.* [*LLV25,* 定理 *1.4* 和第 *5* 节.2]*)* 当 $\rho(g,\vec{e}) = 0$时，$\#W^{\vec{e}}C$等于具有符号 $\{1,\dots,g\}$的某个 k-核 $\Gamma(\vec{e})$ 的 k-填充数。*(4) (E. Larson–H. Larson–V.* [*LLV25,* 定理 *1.2(4')-(5')*]*)* 当 $\rho(g,\vec{e}) > 0$ 时，轨迹 $W^{\vec{e}}C$不可约。当 $\rho(g,\vec{e}) = 0$时，若特征不整除 k，则存在唯一一个支配 $H_{k,g}$ 的万能 W^e 的分支 $\tilde{}$。

注记 2。 你会发现，定理 3.6 几乎与经典布里尔–诺特定理的所有主要结果相呼应。对于温和分裂类型——即两个平衡$\tilde{}$分裂型的串接——Lin 的一项最新定理证明了，在特征0 [下， W^eC 具有有理奇点（Lin，定理 1]）。当 $\rho(g,\ \vec{e})\ =\ 0$时，覆盖 $\mathrm{W}^{\vec{e}} \to \mathrm{H}_{k,\ g}$的单值群将在作者与 Gonz´alez、H. Larson 和 Pechenik 的即将发表的工作中得到研究 [GLPV]。

第 (3) 部分揭示了这一问题深刻的组合结构。 k-核是一类特殊的杨图，其边界满足一种 k-离散凸性性质，精确定义及其性质见 [LM05] 和 [LLV25，第 5 节。 k-核的 k-填充中，若两个方格之间的格点距离是 k 的倍数，则同一符号可以重复出现。核因其与仿射对称群 S_k 的关系而在组合学中$\tilde{}$受到广泛研究；该群是由换位 s_0，……， s_{k-1}生成的无限考克斯特群，满足若 $j \not\equiv i \pm 1$（模 k）且 $s_is_{i+1}s_i = s_{i+1}s_is_{i+1}$，则 $s_is_j = s_js_i$。特别地， k-填充与仿射对称群中的约化词一一对应，见 [LM05，第 8] 节。

Example 3.7. 3-核 $\Gamma((-3,-1,1))$ 的两个 3-填充，其符号为 {1,...,5 }.

1	2	3	5
3	5		
4			
5			

$\leftrightarrow \quad s_0s_1s_2s_1s_0$

1	3	4	5
2	5		
3			
5			

$\leftrightarrow \quad s_0s_2s_1s_2s_0$

这与例 3.5 中观察到的 $\#W^{(-3,-1,1)}C = 2$ 一致。 ⌟

回到问题 3.2，Hurwitz–Brill–Noether 定理 3.6 可用于理解当 C是 $\mathrm{M}^1_{g,k}$ 中的一般曲线时 W^r_dC的几何。 W^r_dC的分支是满足 (6) 且关于包含关系极大的 $\vec{e}$ 的分裂轨迹 $W^{\vec{e}}$。此类分裂型总是驯服的，并在 [Lar21b，引理 2.2] 中明确给出；若 $b(x,y)$ 表示长度为 x、和为 y 的唯一平衡分裂型，则（当 $g - d + r > 0$ 时）极大分裂型为：

$$\vec{w}_{r,\ell} := b(k - r - 1 + \ell, d - g + 1 - k - \ell) \sqcup b(r + 1 - \ell, \ell),$$

对于 $\max(0,\ r+2-k) \le \ell \le r$ 和 $\ell = 0$ 或 $\ell \le g - d + 2r + 1 - k$。由此得到以下推论（我们省略了那些与 Hurwtiz–Brill–Noether 定理相比并未显著简化的陈述，并给出了原始参考文献）。

推论 3.8。 设 $C \in \mathcal{M}^1_{g,\ k}$ 为一般曲线。

(1) (Pflueger [Pfl17, 定理 1。1] 和 *Jensen–Ranganathan* [JR21, 定理 A]*)* W^r_dC 的维数为 $\min(g,\ \rho_k(g,r,d))$，其中

$$\rho_k(g,r,d) := \max_{0 \le \ell \le \min(r, g-d+r-1)} \rho(g, r-\ell, d) - \ell k.$$

特别地，如果 $\rho_k(g,r,d) < 0$，那么 $W^r_dC = \varnothing$。

(2) (Lin [Lin，推论 1]*)* 当特征为0时， W^r_dC 的每个分支都有有理奇点。

上述推论 3.8 第 (1) 部分中维数上界的证明均在某个步骤中涉及退化——或者退化为椭圆曲线链 [Lar21b, LLV25], , 或者借助热带几何[Pfl17, CPJ22a, CPJ22b] 。最近，Farkas–Feyzbakhsh–Rojas [FFR，定理 1.4] 利用 Bridgeland 稳定性和椭圆 K3 曲面，给出了 dim $W^r_d C = \min(g,\ \rho_k(g,\ r,\ d))$ 的新证明，其特点是能够构造出 Hurwitz–Brill–Noether 一般的光滑曲线。

Hurwitz–Brill–Noether 理论可用于解释 ρ出乎预期的线性级数和高维分支。我们用两个例子来说明这一点。

例 3.9. [参见 [Muk93，引理 3.8]]设 C 为一条亏格为 8 的一般四重覆盖曲线。由于$\rho(8,\ 2,\ 7) = -1$, 布里尔–诺特轨迹 $\mathrm{M}^2_{8,7}$ 的余维为 1。但根据推论 3.8，我们有 dim $W^2_7 C = 0$，因此 $\mathrm{M}_{18,\ 4} \subset \mathrm{M}^2_{8,7}$。这解释了定理 3.4 中的反例 (8，1，4)。⌟

例 3.10. [参见 [HTiB，例 4.4]] 设 C 为一条亏格为 12 的一般三重覆盖曲线。根据推论 3.8，我们有 dim $W^2_7 C = 1$，因此 $\mathrm{M}_{112,\ 3} \subset \mathrm{M}^2_{12,7}$。分支 $\mathrm{M}^1_{12,3}$的余维为$-\rho(12,\ 1,\ 3) = 8$，严格小于 $-\rho(12,\ 2,\ 7) = 9$。Pflueger 的定理 3.1 表明，$\mathrm{M}^2_{12,7}$有一个预期余维为 9 的分支，因此至少有两个分支。⌟

现在我们转而研究与 $W^e C$ 中各点对应的射向射影空间的映射的几何。正如例 3.5 所示，当 $r \geq 1$时，$W^e C$ 中的一般点不再必然对应无基点线丛。这里还需满足一个额外条件，即分裂型中非负部分的个数：

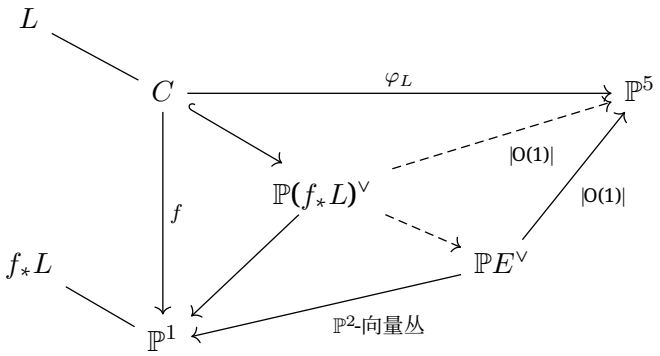
定理 3.11 (Cook-Powell–Jensen–E. Larson–H. Larson–V. [CPJL$^+$，定理 1 和 2])。 设$f\colon C \to \mathbb{P}^1$ 是一个一般的次数为 k、亏格为 g 的覆盖。

(1) 一般线丛 $L \in W^{\vec{e}} C$ 是无基点的，当且仅当 $e_{k-1} \geq 0$ （这蕴含 $r \geq 1$）。*(2)* 一般线丛 $L \in W^{\vec{e}} C$ 是非常丰的，如果 $e_{k-2} \geq 0$ 且 $r \geq 3$。

非常丰性的充要准则见 [CPJL$^+$定理8.8]。我们猜想 [CPJL$^+$猜想8.3]： 若 $e_{k-p-1} \geq 0$且 $r \geq 2p+1$, 则 $W^{\vec{e}} C$ 中的一般线丛是 p-非常丰的。

分裂轨迹的 p-非常丰性存在额外障碍，因为 C 在 $L \in W^{\vec{e}}$ 的完全线性系下的像位于滚动曲面 $\mathbb{P}E^\vee \xrightarrow{\mathcal{O}_{\mathbb{P}E^\vee}(1)|} \mathbb{P}H^0(C, L)^\vee$上，其中 $E \simeq \bigoplus_{i:e_i \geq 0} \mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(e_i)$是$\mathsf{O}(\vec{e})$的非负部分。

例 3.12. 设 C 是一条亏格为 5 的一般曲线，且为四覆盖曲线。次数为 10 的线丛总是给出到 $\mathbb{P}^5$ 的映射，而根据嵌入定理 2.4，这样的一般线丛是 2-非常丰的。设 $f\colon C \to \mathbb{P}^1$ 是一个四次映射，并令 $L \in W^{(-1,0,1,2)} C$，根据 Hurwitz–Brill–Noether 定理 3.6，它是皮卡$^{10}_C$ 中的一个不可约一维轨迹。由于$H^0(C, L) = H^0(\mathbb{P}^1, f_* L) = H^0(\mathbb{P}^1, E := \mathsf{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(2))$， φ_L的完全线性系 L可通过映射 $C \to \mathbb{P}E^\vee$ 分解：



C 在 $\mathbb{P}^2$-向量丛 $\mathbb{P}E^\vee$ 中的像与每个纤维相交于 4 个点，并且每个纤维都由 $|\mathsf{O}_{\mathbb{P}E^\vee}(1)|$ 线性嵌入到 $\mathbb{P}^5$ 中。由于在 $\mathbb{P}^2$ 中，4 个点中有 3 个共线是一个除子条件，因此可以预期 f 的某个纤维会包含 3 个共线点。在 [CPJL+ 的第 7.1 节中，我们计算得出，按重数计恰有 2 个这样的纤维。因此，尽管 $r \geq 5$， L **并非** 2-非常丰。 ⌟

3.3. **Brill–Noether 曲线的几何**。 现在我们转而理解由 Brill–Noether 分支 $\mathsf{M}_g(\mathbb{P}^r, d)^{\mathrm{BN}}$ 参数化的曲线 $f\colon C \to \mathbb{P}^r$ 的几何。回想一下，对于$r \geq 3$（我们在本节中假设这一点），一般的此类映射是一个嵌入。我们常常将映射 f 与其像 $C \subset \mathbb{P}^r$ 混为一谈。我们称此类曲线为 Brill–Noether 曲线，简称 BN 曲线。对射影空间的任何子簇而言，最基本的问题如下：

问题 3.13. 给定一条次数为 d 、亏格为 g 的一般 BN 曲线 $C \subset \mathbb{P}^r$ ，其齐次理想 I_C 的形状是什么？

第一个子问题是 I_C 的每个分次分量的维数是多少，即 C 的希尔伯特函数是什么？若我们记 $\mathsf{O}_C(k) := \mathsf{O}_{\mathbb{P}^r}(k)|_C$，则 I_C 的 k-分次分量是限制映射的核

$$H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(k)) \to H^0(C, \mathcal{O}_C(k)). \tag{8}$$

自然的猜想是，该映射具有极大秩。Max Noether 最早提出了这一猜想 [Noe82] ，随后 Severi 在 1915 [Sev15] 中用现代术语重新表述了它。该猜想的特殊情形曾引起广泛关注 [Hir81, BE87, TiB03, Bal12, JP16, LOTiBZ21]。E. Larson 最近在特征 0 的情形下证明了这一完整猜想。

定理 3.14 (最大秩定理（E. Larson [Lar, 定理 1。2]）)。 假设特征为0。设 $C \subset \mathbb{P}^r$ 是次数为 d 、亏格为 g的一般 *BN* 曲线。那么对所有 $k \geq 1$，限制映射(8) 要么是单射，要么是满射。特别地，C 的希尔伯特函数为$\min\left(\binom{k+r}{k}, kd+1-g\right)$。

强最大秩猜想 (8) 是最大秩猜想的一个重要推广；最大秩猜想预言了对于一般曲线C， $W^r_d C$ 中满足最大秩猜想的线丛轨迹的维数。为引入记号，令 $L \in W^r_d C$。若 C通过 L 的完全线性系嵌入 $\mathbb{P}^r$ ，那么 (8) 中的限制映射就是乘法映射

$$\phi^k_L\colon \mathrm{Sym}^k H^0(C, L) \to H^0(C, L^{\otimes k}). \tag{9}$$

当 $g-d+r \geq 0$和 $0 \leq \rho(g,\ r,\ d) < r-2$ 时，可保证每个线丛都是非常丰的 [Far08，推论 0.4]，并且具有 $h^0(C,\ L) = r+1$（因为 $\rho(g,\ r+1,\ d) < 0$）。

猜想 3.15 (强极大秩猜想 [AF11，猜想 5.4])。 设 g、r、d、k 满足 $g-d+r \geq 0$和 $0 \leq \rho(g、\ r、\ d) < r-2$ 和 $k \geq 2$。设 C是亏格为 g的一般曲线。那么，对于不满足 ϕ^k_L 具有极大秩的线丛 $L \in W^r_d C$，其线丛轨迹的维数为

$$\rho(g,r,d) - 1 - \left|\binom{r+k}{k} - (dk+1-g)\right|. \tag{10}$$

特别是，当该量为负时，对每个 $L \in W^r_d C$， ϕ^k_L 都具有极大秩。

(10) 中出现的维数是 $W^r_d C$ 中退化轨迹的预期维数。

尽管猜想 3.15 在一般情况下仍远未解决，Farkas–Jensen–Payne 的近期结果用热带方法证明了三种情形。后两种情形由 Liu–Osserman–Teixidor i Bigas–Zhang 独立得到。

定理 3.16 ([FJP24，定理 1.5] 针对 $g = 13$，以及 [FJP25，定理 1.3] 和 [LOTiBZ24，定理 1.1] 针对 $g = 22,\ 23$)。 强最大秩猜想 *3.15* 在以下情形成立

$$(g,r,d,k) \in \{(13,5,16,2), (22,6,25,2), (23,6,26,2)\}.$$

在所有这些情形中，预期维数 (10) 为 -1，因此定理 3.16 证明，对于一般的 C，每个 $L \in \mathrm{Pic}^d_C$ 的 (9) 都具有极大秩。由于预期维数为 -1，因此还预期在 M_g 中，使 (9) 不具有极大秩的曲线轨迹是一个有效除子。Farkas–Jensen–Payne 经过大量额外工作证明了这一点，并证明在第二和第三种情形中，这些除子在 M_{22} 和 M_{23} 中的闭包斜率小于 13/2，即典范除子的斜率 $K_{\overline{\mathcal{M}}_g}$。这证明模空间 M_{22} 和 M_{23}—是一般型 [FJP25，定理 1.1]。在第一种情形中，Farkas–Jensen–Payne 利用这一点证明 $\mathrm{M}_{13,\,n}$ 对于 $n \geq 9$ [FJP24，定理 1.6] 是一般型，并证明 Prym 模空间 R_{13} 是一般型 [FJP24，定理 1.2]。

最后，我们简要概述 E. Larson 证明极大秩定理 3.14 时所用的一项关键结果。该证明利用嵌入退化，将曲线退化为可约节点曲线 $X \cup Y \subset \mathbb{P}^r$，大幅改进了 Hirschowitz 最初用于证明有理空间曲线的最大秩猜想 [Hir81] 的思路。为处理所有情形，Larson 利用了关于 BN 曲线插值问题的部分进展；这一问题自然地通过取经过同一组点的两条曲线之并来构造可约曲线。为陈述这一问题，设 $\mathrm{M}_{g,\,n}(\mathbb{P}^r,\ d)^{\mathrm{BN}}$ 是 $\mathrm{M}_{g,\,n}(\mathbb{P}^r,\ d)$ 中唯一一个在自然映射 $\mathrm{M}_{g,\,n}(\mathbb{P}^r,\ d) \to \mathrm{M}_g(\mathbb{P}^r,\ d)$ 下映到 Brill–Noether 分支的分支。$\mathrm{M}_{g,\,n}(\mathbb{P}^r,\ d)$ 的一个元素是一个对 $[f\colon C \to \mathbb{P}^r, p_1, \ldots, p_n]$，其中 $p_i \in C$ 是互不相同的点。存在一个自然的求值映射

$$\mathrm{ev}_n\colon \mathcal{M}_{g,n}(\mathbb{P}^r, d)^{\mathrm{BN}} \to (\mathbb{P}^r)^n, \qquad [f\colon C \to \mathbb{P}^r, p_1, \ldots, p_n] \mapsto (f(p_1), \ldots, f(p_n)). \tag{11}$$

Brill–Noether 曲线的插值问题是：

Ques题 3.17. 给定 (g, r, d)，使 ev_n 占优的最大 n 是多少?

具体而言，这个问题是：固定不变量的一个一般 BN 曲线能插值多少个一般点?

根据布里尔–诺特定理（参见推论 2.3），$\mathrm{M}_{g,n}(\mathbb{P}^r, d)^{\mathrm{BN}}$ 的维数为 $(r+1)d - (r-3)(g-1) + n$。因此，维数计数预测答案应为

$$\mathrm{ev}_n \text{ is dominant} \qquad \Leftrightarrow \qquad n \leq \left\lfloor \frac{(r+1)d - (r-3)(g-1)}{r-1} \right\rfloor. \tag{12}$$

然而，这一预期并非总能成立：对于 $\mathbb{P}^3$ 中次数为 5、亏格为 2 的曲线，公式 (12) 预测它们能插值 10 个一般点；但通过比较公式 (8) 中的维数可知，每条这样的曲线都包含在一个二次曲面内，而运用初等线性代数可知，二次曲面只能插值 9 个一般点。对于 $\mathbb{P}^5$ 中次数为 7、亏格为 2 的曲线，以及 $\mathbb{P}^3$ 和 $\mathbb{P}^5$ 中的典范曲线，也存在类似的反例。尽管如此，许多作者仍做出了部分贡献[Sac80, Ste89, Ran07, Vog18, ALY19, Lar21a, LV21]。最近，我与 E. Larson 合作，给出了任意特征下的完整解。

定理 3.18 (E. Larson–V. [LV23, 定理 1.2])。次数为 d、亏格为g 的 $\mathbb{P}^r$ ***Brill–Noether*** 曲线能够插值预期数量 $\left\lfloor \frac{(r+1)d-(r-3)(g-1)}{r-1} \right\rfloor$ 的一般点，当且仅当

$$(g, r, d) \notin \{(2,3,5), (4,3,6), (2,5,7), (6,5,10)\}.$$

该定理可由一般 BN 曲线 C [的法丛所具有的类半稳定性性质，通过变形理论推出 N_C LV23，定理 1.4]。本文 [LV23]中发展的技术（见下文第 4.3 节）可加以改进，从而证明空间曲线[CLV22、定理 1], 和典范曲线 [CLV24、定理 1.1] 的法丛的（半）稳定性（解决了 Aprodu–Farkas–Ortega 猜想的半稳定性版本 [AFO16，猜想 0.4]），并在 d 相对于 r [足够大时渐近地证明这一点2]CS25，定理 1.1 和 1。

4. Important Techniques

4.1. 抽象退化与极限线丛。 退化是 Brill–Noether 理论各个方面的一种有效工具。我们先介绍一种使曲线 C 退化，并追踪线丛 $W^r_d C$ 如何随之退化的技术。为说明这一技术，我们将简要证明经典的 Brill–Noether 不存在性定理。

定理 4.1 (Brill–Noether 不存在性)。 假设 $\rho(g,r,d) < 0$。若 C 是亏格为 g的一般曲线，则 $W^r_d C$ 为空集。

展开定义后，我们必须证明：对于 C 上次数为 d的每个线丛 L ，都有$h^0(C,\ L) \le r$。这里的关键思想是将 C 退化为一条结点曲线 X；如果我们能证明 L在 X 上有一个极限，且其 h^0 至多为 r，那么根据半连续性定理即可得到结论。我们或许希望通过证明每个次数为 d 的 X 上线丛至多有 r个整体截面来完成证明。这种方法有两个潜在的微妙之处：（1）如果 X 是一条任意的结点曲线，那么 L 的极限可能是一个并非线丛的无挠层；（2）即使 L 在 X上极限为一个线丛，这个极限也未必唯一。

我们通过考虑紧型 X ——一种对偶图为树的连通结点曲线（之所以如此命名，是因为其皮卡ard概形的单位连通分支是紧的）——来绕开第一个问题；这保证了 L 极限为 X上的线丛。第二个问题实际上是一个优点，而非缺陷，也是我们将要使用的关键工具：可能的极限越多，就越容易找到一个截面数至多为 r 的极限。

Griffiths–Harris [GH80] 对 Brill–Noether 不存在性定理的首次证明，采用将曲线退化为一条 g 结点曲线的方法，并对进一步退化中的舒伯特循环进行了精细分析。Eisenbud–Harris [EH83a]的第二个证明则利用了退化到一条 g尖点曲线的方法；该曲线的稳定约化是一条带有 g 个椭圆尾的有理曲线（称为旗曲线），Eisenbud–Harris [EH83b]随后也在其重新证明中使用了这种曲线。将曲线退化为一串在一般节点处相交的 g 条椭圆曲线，这一做法最早见于 Welters 关于普里姆–布里尔–诺特理论的工作 [Wel85], ；如今人们普遍认为，这种退化方法能够带来简洁且与特征无关的证明。

令 X 表示一条由 g 条椭圆曲线组成的链 $E^1 \cup \cdots \cup E^g$



使得 E^i 上的点 p^{i-1} 和 p^i 是一般的。 X 上的线丛等价于每个分支 E^i上的一个线丛。因此，这样的线丛的离散不变量是一个由次数组成的元组$\vec{d} = (d^1,\ d^2,\ \ldots\ldots,\ d^g)$，其中 d^i 是该线丛在第 i个分支上的次数。这样的线丛的总次数为 $|\vec{d}| := \sum_i d^i$。

考虑一个单参数退化 $\mathsf{C} \to \operatorname{Spec} K[\![t]\!]$ ，其一般纤维 C 为亏格 g 的光滑曲线，特殊纤维 X 如上，且总空间 C 在基域 K 上光滑（这样的单参数退化由形式拼接 [Liu03，引理 5.6] 存在）。 C 上的线丛 L 可延拓为 C 上的线丛 L（例如，将其写成 C 上有效除子的差，再取这些除子在 C 上的闭包；由于 C 光滑，这必然是卡蒂埃的）。限制 $\mathsf{L}|_X$ 是 L 到 X的这样一个极限。该极限具有某种次数分布$\vec{d}(\mathsf{L}|_X) = (d^1, \ldots, d^g)$，使得 $|\vec{d}| = d = \deg(L)$。然而，给定任意支撑在中心纤维上的非平凡除子 D——即 X 的各分支的线性组合——线丛 $\mathsf{L}(D)|_X$是 L 到 X的另一个极限。

具体而言，考虑由单个分支 E^i给出的扭曲。然后，利用 $\mathsf{O}_{\mathcal{C}}(E^1+\cdots+E^g)\simeq\mathsf{O}_{\mathcal{C}}$ 这一事实，我们有

$$\mathcal{L}(E^i)|_{E^j}\simeq\begin{cases}\mathcal{L}|_{E^{i-1}}(p^{i-1}) & :\ j=i-1\\ \mathcal{L}|_{E^i}(-p^{i-1}-p^i) & :\ j=i\\ \mathcal{L}|_{E^{i+1}}(p^i) & :\ j=i+1\\ \mathcal{L}|_{E^j} & :\ \text{else.}\end{cases}\tag{13}$$

特别地，极限 $\mathrm{L}(E^i)|_X$ 可由其次数分布与极限 $\mathrm{L}|_X$ 区分；若 $\vec{d}(\mathrm{L}|_X)=(d^1,\ d^2,\ \ldots\ldots,\ d^g)$，则

$$\vec{d}(\mathcal{L}(E^i)|_X)=(d^1,\ldots,d^{i-2},d^{i-1}+1,d^i-2,d^{i+1}+1,d^{i+2},\ldots,d^g).\tag{14}$$

从组合角度看，如式 (13) 所示，沿第 i 个分支进行扭曲，会对次数分布产生这样的影响：在对偶图中对第 i 个顶点进行筹码发射，如式 (14) 所示。在热带退化中，极限并非紧型，实际上每个分支的亏格都为 0；筹码发射会生成图上除子的线性等价关系。我们在此不深入探讨这种联系，仅指出这一点，以便感兴趣的读者看出其中的相似之处。

事实上，L 在 C 上的每一种可能极限（至 X）都可以从某个极限 $\mathrm{L}|_X$ 出发，通过一系列如式 (13) 所示的¯筹码发射得到。对 g 运用归纳法，很容易证明，每一种总次数为 d 的可能次数分布 d 都可以通过这种方式由式 (14) 得到。由此可知，给定任意次数分布，都存在唯一具有该次数分布的极限；而任意一种次数分布¯所对应的极限都决定了其他所有极限。我们将具有给定次数分布 d 的极限记作 $L_{\vec{d}}$。通过筹码发射这一组合过程，可以很容易地计算出该极限，见下例（本节将以此例贯穿始终）。

例 4.2. 假设 $g=3$ 和 $d=4$，且 $\mathrm{L}|_X$ 具有以下分支：

$$\mathcal{L}|_{E^1}\simeq\mathcal{O}_{E^1}(4p^1),\qquad \mathcal{L}|_{E^2}\simeq\mathcal{O}_{E^2}(-2p^1+2p^2),\qquad \mathcal{L}|_{E^3}\simeq\mathcal{O}_{E^1}.$$

在这种情况下，$\vec{d}(\mathrm{L}|_X)=(4,\ 0,\ 0)$。次数分布为 (3，0，1) 的极限由 $\mathrm{L}|_X$ 经两次触发第一个分支、一次触发第二个分支得到（即它是 $\mathrm{L}(2E^1+E^2)|_X$），根据 (13)，它具有以下分支：

$$L_{(3,0,1)}|_{E_1}\simeq\mathcal{O}_{E^1}(3p^1),\qquad L_{(3,0,1)}|_{E_2}\simeq\mathcal{O}_{E^2}(-p^1+p^2),\qquad L_{(3,0,1)}|_{E_3}\simeq\mathcal{O}_{E^3}(p^2).$$

类似地，次数分布为 (1，2，1) 的极限具有以下分支：

$$L_{(1,2,1)}|_{E_1}\simeq\mathcal{O}_{E^1}(p^1),\qquad L_{(2,1,1)}|_{E_2}\simeq\mathcal{O}_{E^2}(p^1+p^2),\qquad L_{(1,2,1)}|_{E_3}\simeq\mathcal{O}_{E^3}(p^2).$$

⌟

虽然记录任意一个极限的这种方法足以确定所有可能的极限，但它不必要地破坏了问题的对称性，因为它选取了一个次数分布作为特例。现在我们来介绍一种等价且更具对称性的方法，用以记录所有可能极限的信息。对于每个 $1\le i\le g$，令 $\vec{d}_i:=(0,\ \ldots,\ 0,\ d,\ 0,\ \ldots,\ 0)$ 表示次数集中于第 i 个分支的次数分布。定义

$$L^i:=L_{\vec{d}_i}|_{E^i}\in\mathrm{Pic}^d_{E^i}.$$

元组 $(L^1,\ldots,L^g)$ 通过筹码发射过程 (13) 等价于任意一个极限的数据。

Example 4.3. 继续沿用例 4.2 中的线丛，我们计算得到

$$\begin{aligned}L^1&=L_{(4,0,0)}|_{E^1}\simeq\mathcal{O}_{E^1}(4p^1),\\ L^2&=L_{(0,4,0)}|_{E^2}=L_{(4,0,0)}|_{E^2}(4p^1)\simeq\mathcal{O}_{E^2}(2p^1+2p^2),\\ L^3&=L_{(0,0,4)}|_{E^3}=L_{(4,0,0)}|_{E^2}(4p^2)\simeq\mathcal{O}_{E^3}(4p^2).\end{aligned}$$

⌟

定义 4.4. 次数为 d、在 X 上的极限线丛是一个元组 $\vec{L}=(L^1,\dots,L^g)\in$ 皮卡$^d_{E^1}\times\cdots\times$ 皮卡$^d_{E^g}$。第 i 个分支 L^i 称为该极限线丛的第 i个分面。

⚠ **警告 4.5**。极限线丛本身并不是任何次数为 d 的线丛的极限——尤其是因为它的总次数 dg 并非 d ——而是一种便捷且对称的方式，用于记录所有可能的极限。

给定次数为 d的极限线丛 $\vec{L}$ 以及次数分布 $\vec{d}=(d^1,\ .....,\ d^g)$，其中 $|\vec{d}|=d$，我们将通过式 (13) 中的筹码发射过程从 $\vec{L}$ 得到的多次数为 $\vec{d}$ 的线丛记作 $L_{\vec{d}}$。

定义 4.6。X 上的极限线丛 $\vec{L}$ 若满足：对于所有满足 $|\vec{d}|=d$的次数分布 $\vec{d}$，均有 $h^0(X,\ L_{\vec{d}})\geq r+1$，则称其为 r-正的。定义次数为 d的 r-正极限线丛空间如下：

$$LW^r_dX:=\left\{\vec{L}\in\prod_i \mathrm{Pic}^d_{E^i}:\vec{L}\text{ is }r\text{-positive}\right\}.$$

空间 LW^r_dX获得了由行列式簇交集诱导的概形结构。

例 4.7。在我们的贯穿示例中，例 4.3 给出的各级数对应的极限线丛是 2-正的；这里我们不验证这一完整结论，而是检查次数分布 (4，0，0)、(3，0，1) 和 (1，2，1) 所需的截面，这些次数分布对应的分支已在例 4.2 中计算。

对于次数分布 (4，0，0)，所有截面都必须在 E^2 上恒等于零。因此，考虑点 p^2 处的一致条件可知，这些截面也必须沿 E^3 消失。最后，考虑点 p^1 处的一致条件，我们得到

$$H^0(X,L_{(4,0,0)})\simeq H^0(E^1,\mathcal{O}_{E^1}(4p^1)(-p^1))\simeq k^{\oplus 3}.$$

对于次数分布 (3, 0, 1)，同理，所有截面都必须沿 E^2 消失。但在这种情况下，由于 p^2 是 $L_{(3,0,1)}|_{E^3}\simeq$O$_{E^3}(p^2)$ 的基点，E^3 上的截面空间是一维的。此外，沿 E^1 有一个二维截面空间，同构于 $H^0(E^1,$ O$_{E^1}(3p^1)(-p^1))$。综上，$h^0(X,L_{(3,0,1)})=3$，如所需。最后，对于次数分布 (1,2, 1)，E^1 和 E^3 上分别有一维截面空间 $H^0(E^1,$ O$_{E^1}(p^1))$ 和 $H^0(E^1,$ O$_{E^3}(p^2))$。它们分别以 p^1 和 p^2 为基点。因此，为满足节点处的相容条件，E^2 上的截面必然是 $H^0(E^2,$ O$_{E^2}(p^1+p^2)(-p^1-p^2))$，其维数也是 1。综上，同样有 $h^0(X,L_{(1,2,1)})=3$。⌟

如果 $\vec{L}$ 是与线丛 L$|_X$ 对应的极限线丛——而 L$|_X$ 是 C中 L 的极限——那么对于任意次数分布 $\vec{d}$，线丛 $L_{\vec{d}}$也再次是 L的极限。如果 $h^0(C,\ L)\geq r+1$，那么根据半连续性定理，$h^0(X,\ L_{\vec{d}})\geq r+1$。因此，如果 $LW^r_dX=\varnothing$，那么 $W^r_dC=\varnothing$ 也成立。这将是我们证明布里尔 – 诺特不存在性定理的技巧。关键定义如下。

定义 4.8. 设 L 是次数为 d的 r-正极限线丛。对于每个 $1\leq i\leq g-1$ 和$0\leq n\leq r$，定义 $a^i_n:=a^i_n(\vec{L})$ 为满足以下条件的最大 $\alpha\in\mathbb{Z}$：对于所有满足 $|\vec{d}|=d$ 且满足$\sum_{j=1}^i d^j=\alpha$的 $\vec{d}$，我们有

$$h^0(X^{>i},L_{\vec{d}}|_{X^{>i}})\geq r+1-n.$$

引理 4.9。设 L 为一个次数为 d 的 r-正极限线丛。那么存在一个次数分布 $\vec{d}$，满足 $|\vec{d}|=d$ 和 $\sum_{j=1}^i d^j=a^i_n(\vec{L})$，使得

$$h^0(X^{>i},L_{\vec{d}}|_{X^{>i}})=r+1-n,\qquad and\qquad \mathrm{ev}_{p^i}\colon H^0(X^{>i},L_{\vec{d}}|_{X^{>i}})\to k\ is\ surjective.$$

证明。如果 $h^0(X^{>i},\ L_{\vec{d}}|_{X^{>i}})>r+1-n$或 ev$_{p^i}=0$，那么 $h^0(X^{>i},\ L_{\vec{d}}|_{X^{>i}}(-p^i))\geq r+1-n$。因此，如果当 $\sum_{j=1}^i d^j=\alpha$时这些条件之一总是成立，我们就可以将 α 增加 1（这相当于对所有 $X^{>i}$ 执行 firing，其效果是在 $X^{>i}$ 上向下扭曲 p^i，并在 $X^{\leq i}$上向上扭曲 p^i），这与 $a^i_n(\vec{L})$ 的极大性矛盾。□

推论 4.10。 序列 $a_0^i(\vec{L})\ a_1^i(\vec{L})\ldots,a_r^i(\vec{L})$ 严格递增 .

例 4.11. 回到我们一直讨论的例子：一个 2-正极限线丛，其级数已在例 4.3 中计算：

$$\vec{L}=(\mathcal{O}_{E^1}(4p^1),\mathcal{O}_{E^2}(2p^1+2p^2),\mathcal{O}_{E^3}(4p^2))\in LW_4^2(X),$$

我们将计算序列 $a_0^2(\vec{L})\ a_1^2(\vec{L})\ a_2^2(\vec{L})$。根据定义，我们必须考虑在 $E^1\cup E^2$ 上次数为 α、因而在 E^3 上次数为 $d-\alpha$ 的次数分布 $\vec{d}$。由于 E^3 是一条亏格为 1 的曲线，对任何这样的 d，我们有

$$h^0(E^3,L_{\vec{d}}|_{E^3})=\begin{cases}d-\alpha & :\ d-\alpha\geq 1,\\ 1 & :\ L_{\vec{d}}|_{E^3}\simeq\mathcal{O}_{E^3},\\ 0 & :\ \text{else.}\end{cases}\tag{15}$$

此外，根据用于改变次数分布的芯片发射过程 (13)，我们有 $L_{\vec{d}}|_{E^3}\simeq\mathcal{O}_{E^3}((d-\alpha)p^2)$。因此，将 (15) 与 $a_n^i(\vec{L})$ 的定义相结合，我们有

$$a_0^2(\vec{L})=1,\qquad a_1^2(\vec{L})=2,\qquad a_2^2(\vec{L})=4.$$

⌟

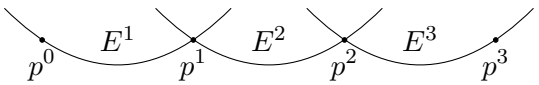
定义 4.12. 给定一个次数为 d 的 r-正极限线丛 L，对于 $1\leq i\leq g-1$ 以及对于 $0\leq n\leq r$，我们定义

$$b_n^i:=b_n^i(\vec{L})=d-a_{r-n}^i(\vec{L}).\tag{16}$$

注意到，推论 4.10 保证 $b_0^i(\vec{L})\ldots,b_r^i(\vec{L})$ 同样是一个递增序列。将 $a_n^i(\vec{L})$ 的定义扩展到 $i=0$，并将 $b_n^i(\vec{L})$ 的定义扩展到 $i=g$，规定

$$a_n^0(\vec{L}):=n,\qquad b_n^g(\vec{L}):=n.$$

例 4.13。 对于我们贯穿全文的例子 $\vec{L}$ （来自例 4.3），序列 $a_n^i(\vec{L})$ 和 $b_m^i(\vec{L})$ 如下图所示。我们将这些不变量按递增顺序记录，其中 a_n^i 位于节点 p^i 的右侧，b_m^i 位于节点 p^i 的左侧：



b_0^i	a_0^i	0	1	0	0	1	0
b_1^i	a_1^i	1	2	2	2	2	1
b_2^i	a_2^i	2	4	3	3	4	2

根据定义，跨节点 p^i 的互补 b_n^i 和 a_{2-n}^i 之和为 $d=4$。 ⌟

以下 是我们证明布里尔-诺特非存在定理时所使用的关键引理 .

引理 4.14。若 $L\in LW_d^rX$，则

$$h^0(E^i,L^i(-a_n^{i-1}p^{i-1}-b_m^ip^i))\geq r+1-n-m.$$

注记 3. 记号 $a_0^i,\ldots,a_r^i$ 可能会让你联想到线性级数在一点处的消失序列，而这并非偶然！熟悉极限线性级数理论的读者将会看到，引理 4.14 保证：对任意 r-正的极限线丛 L，存在一个精细极限线性级数，其消失序列为 a_n^i,b_m^i，且其底部分支线丛为 $\vec{L}$。

引理 *4.14* 的证明。 根据引理 4.9，存在一个次数分布 $\vec{d}_+$，定义在 X 上，并满足 $\sum_{j=i+1}^g d_+^j=d-a_{r-m}^i=b_m^i$，使得

$$h^0(X^{>i},L_{\vec{d}_+}|_{X^{>i}})=r+1-(r-m)=m+1,\qquad\text{and}\qquad \mathrm{ev}_{p_i}\text{ is surjective.}\tag{17}$$

根据 a_n^{i-1} 的定义，对于所有定义在 $X^{\le i-1}$ 上且总次数为 a_n^{i-1} 的次数分布 $\vec{d}$——特别是那些在 $X^{>i}$ 上与 $\vec{d}_+$ 一致的次数分布——我们有

$$h^0(X^{>i-1}, L_{\vec{d}}|_{X^{>i-1}}) \ge r+1-n. \tag{18}$$

设 $\vec{d}$ 是这样一个次数分布，它满足 $\sum_{j=1}^{i-1} d^j = a_n^{i-1}$，且限制到 $X^{>i}$ 时与 $\vec{d}_+$ 一致。由于这迫使 $\sum_{j=i+1}^{g} d^j = b_m^i$，我们得出 $d^i = d - a_n^{i-1} - b_m^i$。因此，根据将各方面与具有任意给定次数分布的极限之间转换的过程 (13)，我们有

$$L_{\vec{d}}|_{E^i} \simeq L^i(-a_n^{i-1}p^{i-1} - b_m^i p^i).$$

为了使 (17) 和 (18) 同时成立，差额必须由 E^i 上的截面补足，因此我们有

$$h^0(E^i, L_{\vec{d}}|_{E^i}) = h^0(E^i, L^i(-a_n^{i-1}p^{i-1} - b_m^i p^i)) \ge (r+1-n) - (m+1) + 1,$$

其中，最后一个 $+1$ 是用于满足 p^i 处的一致条件。 □

在证明 Brill–Noether 不存在性时，我们将通过以下简单推论应用引理 4.14。

推论 4.15。若 $\vec{L} \in LW_d^r X$，则 $h^0(E^i,\ L^i(-a_n^{i-1}p^{i-1} - b_{r-n}^i p^i)) \ge 1$。

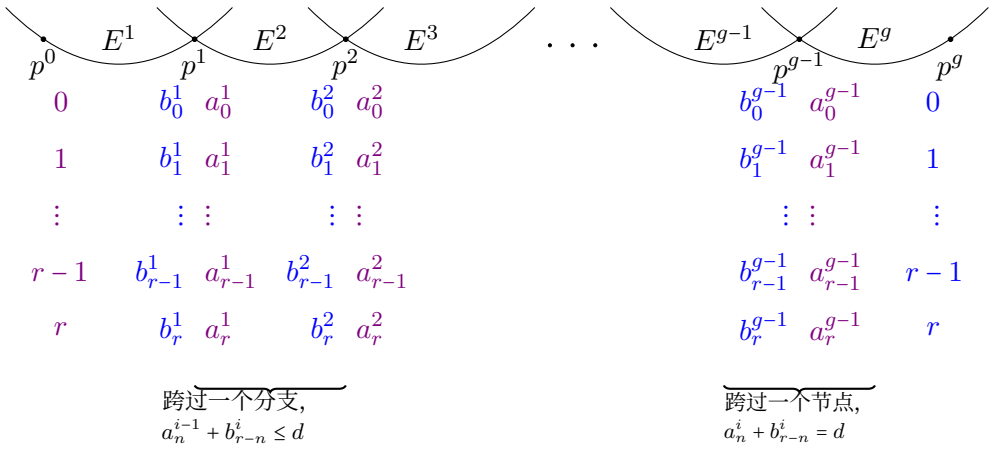
换言之，推论 4.15 表明，第 i个方面线丛 L^i 具有一个非零截面，它同时以消失阶数 a_n^{i-1}和 p^{i-1} 消失，并以消失阶数 b_{r-n}^i 在 p^i处消失。由于 L^i 的次数为 d，这立即蕴含：

推论 4.16. 设 L 是次数为 d的 r-正线丛。则对所有 $1 \le i \le g$ 以及所有$0 \le n \le r$，我们有 $a_n^{i-1} + b_{r-n}^i \le d$，并且若等式成立，则

$$L^i \simeq \mathcal{O}_{E^i}(a_n^{i-1}p^{i-1} + b_{r-n}^i p^i). \tag{$\bigstar_n^i$}$$

条件（$\bigstar_n^i$）之所以重要，是因为它决定 分面 L^i；这一情形在每个分支上至多出现一次（因为假定 p^{i-1} 与 p^i 是一般的，因而它们不满足任何线性关系），这一事实是 Brill–Noether 不存在性证明的关键。

布里尔–诺特不存在性定理 *4.1* 的证明。假设 $(g,\ r,\ d)$ 满足 $\rho(g,\ r,\ d) = g - (r+1)(g-d+r) < 0$。半连续性定理表明，只需证明$LW_d^r X = \varnothing$。反设 $L \in LW_d^r X$是 X上次数为 d的 r-正极限线丛。令 $a_n^i := a_n^i(\vec{L})$ 且 $b_m^i := b_m^i(\vec{L})$。我们可以如下图示地排列它们。



对于固定的 n （介于 0 和 r之间），考虑 p^{i-1} 处和 p^i 处的消失序列在所有分支上的互补项之和，推论 4.16 和（16）表明:

$$\begin{aligned} g(d-1)+\#\{i:(\bigstar_n^i)\text{ holds}\} &\geq \sum_{i=1}^{g} a_n^{i-1}+b_{r-n}^i \\ &= n+\left(\sum_{i=1}^{g-1} b_{r-n}^i+a_n^i\right)+(r-n) \\ &= r+(g-1)d. \end{aligned}$$

换言之，对于固定的 n，使($\bigstar_n^i$)成立——并且分面 L^i被确定——的分支数目至少为 $g-d+r$。因此，考虑所有 $0\leq n\leq r$，我们看到这确定了级数中的$(r+1)(g-d+r)$（同样是因为不可能存在任何重叠，因为 p^{i-1} 与 p^i在 E^i上不满足任何非平凡的线性关系）。由于总共只有 g 个级数，我们看到$g\geq(r+1)(g-d+r)$，换言之 $\rho(g,r,d)\geq 0$。□

4.2. 嵌入退化与变形理论。 在此设定中，我们并非从一条抽象曲线 C出发，而是从一条已经配备射影嵌入的曲线 $C\hookrightarrow\mathbb{P}^r$ 出发。然后我们利用 C 在射影空间 $\mathbb{P}^r$中的退化。为说明这一技巧，我们将证明布里尔–诺特存在定理的如下版本。

定理4.17 （布里尔–诺特存在性）。 假设 $\rho(g,r,d)=g-(r+1)(g-d+r)\geq 0$ 且$r\geq 3$。那么存在一个分支 $\mathcal{M}_g(\mathbb{P}^r,d)^{\mathrm{BN}}$，属于 $\mathcal{M}_g(\mathbb{P}^r,d)$，使得源映射的模空间

$$\mathcal{M}_g(\mathbb{P}^r,d)^{\mathrm{BN}}\to\mathcal{M}_g \tag{19}$$

在一般情形下是光滑的，且相对维数为预期值 $\rho(g,r,d)+(r+1)^2-1$；此外，由 $\mathcal{M}_g(\mathbb{P}^r,d)^{\mathrm{BN}}$ 参数化的一般映射是非退化嵌入。

由于该定理所保证的所有性质都是开性质，对于每个满足 $\rho(g,r,d)\geq 0$ 的元组 (g,r,d)，只需证明存在一个次数为 d 的非退化嵌入 $f:C\hookrightarrow\mathbb{P}^r$，它从亏格为 g 的光滑曲线 C 出发，且该映射 (19) 在此处光滑，具有相对维数$\rho(g,r,d)+(r+1)^2-1$。根据变形理论，映射 (19) 在点 $[f:C\to\mathbb{P}^r]$ 处的相对切空间同构于向量空间 $H^0(C,f^*T_{\mathbb{P}^r})$。此外，映射 (19) 在点 $[f:C\to\mathbb{P}^r]$ 处的光滑性障碍属于向量空间 $H^1(C,f^*T_{\mathbb{P}^r})$。因此，只需证明 $h^0(C,f^*T_{\mathbb{P}^r})=\rho(g,r,d)+(r+1)^2-1$，以及 $h^1(C,f^*T_{\mathbb{P}^r})=0$。事实上，这两个性质是等价的，因为

$$\chi(C,f^*T_{\mathbb{P}^r}):=h^0(C,f^*T_{\mathbb{P}^r})-h^1(C,f^*T_{\mathbb{P}^r})$$

可通过欧拉正合列计算

$$0\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)^{\oplus r+1}\to T_{\mathbb{P}^r}\to 0 \tag{20}$$

为 $\rho(g,r,d)+(r+1)^2-1$。因此，我们的目标是证明，对于每个满足 $\rho(g,r,d)\geq 0$ 的元组 (g,r,d)，都存在 $\mathbf{M}_g(\mathbb{P}^r,d)$ 上的一点 $[f:C\to\mathbb{P}^r]$，使得 f 是一个非退化嵌入，且 $h^1(C,f^*T_{\mathbb{P}^r})=0$。

上一段涵盖了本节标题中的“变形理论”部分。这种技巧与嵌入退化和归纳法相结合时尤其有力。也就是说，我们将空间 $\mathbf{M}_g(\mathbb{P}^r,d)$ 紧化为 $\overline{\mathbf{M}}_g(\mathbb{P}^r,d)$，后者是亏格为 g 的结点源曲线的稳定映射空间。根据半连续性定理以及非退化嵌入这一性质的开性，如果存在一点$[f_0:C_0\to\mathbb{P}^r]\in\overline{\mathbf{M}}_g(\mathbb{P}^r,d)$，使得 f_0是一个非退化嵌入，且 $h^1(C_0,f_0^*T_{\mathbb{P}^r})=0$，那么对于 $\overline{\mathbf{M}}_g(\mathbb{P}^r,d)$ 该分支中的一般点，情况也相同，因而其内部 $\overline{\mathbf{M}}_g(\mathbb{P}^r,d)$ 中的一般点也如此，正如所需。

我们必须对每个满足 $r \geq 3$ 且使 $g-(r+1)(g-d+r) \geq 0$ 的非负整数元组 $(g,\ r,\ d)$ 证明一个结果。在这个证明中，我们将 r 视为固定值，并把布里尔-诺特不等式看作规定了对于每个 $g,\ d$ 必须足够大。整理各项后，$\rho(g,\ r,\ d) \geq 0$ 等价于

$$d \geq \left\lceil \left(\frac{r}{r+1} \right) g \right\rceil + r. \tag{21}$$

满足 $r = 3$ 的 (21) 式的数对集合 (d, g) 如图1所示。

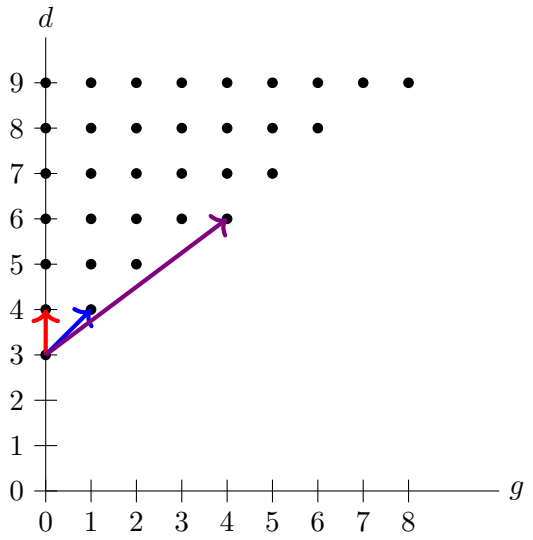


FIGURE 1. 对于固定的 r （此处 $r = 3$），满足 $\rho(g, r, d) \geq 0$（此处以黑色显示）的元组 (g, d) 集合，可以从有理正规曲线 $(0, r)$ 出发，通过依次应用以下操作之一得到：(A) $(d, g) \mapsto (d+1, g)$；(B) $(d, g) \mapsto (d+1, g+1)$；或最后 (C) $(d, g) \mapsto (d+r, g+r+1)$。

当 $g = 0$ 时，满足 (21) 的最小 d 是 $d = r$，从而得到有理正规曲线 $(g, r, d) = (0, r, r)$ 的不变量。另一个有趣的情形是 $g = r+1$，此时 (21) 变为 $d \geq 2r$；不变量 $(g, r, d) = (r+1, r, 2r)$ 描述了正则嵌入曲线。事实上，满足 $\rho(g, r, d) \geq 0$ 的元组 (g, d) 集合，可以从有理正规曲线 $(0, r)$ 出发，通过依次应用三种基本操作之一得到：

(A) 将 d 增加一：$(d, g) \mapsto (d+1, g)$，(B) 将 d 和 g 都增加一：$(d, g) \mapsto (d+1, g+1)$，(C) 将 d 增加 r、将 g 增加 $r+1$：$(d, g) \mapsto (d+r, g+r+1)$。

其中最后一种是从有理正规曲线到典范曲线。

Brill–Noether 数的这一数值性质自然地提示一种包含如上三个归纳步骤 (A)、(B) 和 (C) 的归纳论证。此外，我们可以通过由具有旧不变量者构造出具有新不变量的可约节点曲线来实现其中每一步：若 C的次数为 d、亏格为 g，则

(A) 在 C 上附接一条准横截 1-割线。(B) 在 C 上附接一条拟横截2割线。
(C) 在 C 上附接一条准横截$(r+2)$-割有理正规曲线。

唯一剩下的要素是下面这个初等引理，它确定了直线和有理正规曲线的限制切丛的同构类。

引理 4.18。*(1)* 设 $R \subset \mathbb{P}^r$ 是一条直线。那么 $T_{\mathbb{P}^r}|_R \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus r-1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$。
(2) 设 $R \subset \mathbb{P}^r$ 是一条有理正规曲线。那么 $T_{\mathbb{P}^r}|_R \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(r+1)^{\oplus r}$。

证明。 (1) 这可由法丛正合列推出

$$0 \to T_R \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \to T_{\mathbb{P}^r}|_R \to N_{R/\mathbb{P}^r} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus r-1} \to 0,$$

因为该扩张必然是分裂的。

(2) 将欧拉正合列 (20) 限制到 R:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(r)^{\oplus r+1} \to T_{\mathbb{P}^r}|_R \to 0.$$

第一个映射 $\mathsf{O}_{\mathbb{P}^1} \to \mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(r)^{\oplus r+1}$ 是由定义非退化嵌入 $R \hookrightarrow \mathbb{P}^r$ 的 $\mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(r)$ 的（线性无关）截面所作的乘法。向量丛 $T_{\mathbb{P}^r}|_R$ 的秩为 r，次数为 $r(r+1)$。因此，要证明它完全平衡，只需排除次数至多为 r 的直和项；等价地，只需排除非零映射 $T_{\mathbb{P}^r}|_R \to \mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(r)$。再次考虑欧拉正合列，任何这样的映射都会导出一个非零映射 $\mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(r)^{\oplus r+1} \to \mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(r)$，该映射与映射 $\mathsf{O}_{\mathbb{P}^1} \to \mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(r)^{\oplus r+1}$复合后为零；但这是不可能的，因为定义映射 $\mathsf{O}_{\mathbb{P}^1} \to \mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(r)^{\oplus r+1}$ 的截面线性无关。□

定理*4.17*的证明。 如上所述，变形理论将问题归结为：对于每个满足 $\rho(g,r,d) \geq 0$ 的元组 (g,r,d)，寻找一个结点曲线 $f_0: C_0 \to \mathbb{P}^r$ 的非退化嵌入，使得 $h^1(C_0, f_0^* T_{\mathbb{P}^r}) = 0$。对于每个固定的 $r \geq 3$，我们将对 (g,d) 使用归纳法证明这一点。基础情形是 $(g,d) = (0,r)$ 有理正规曲线，此时结论由引理 4.18 得出。

现在通过归纳法假设，存在一个亏格为 g 的光滑曲线 C 的非退化次数 d 嵌入 $[f: C \to \mathbb{P}^r]$，使得 $h^1(C,\ f^* T_{\mathbb{P}^r}) = 0$。对于归纳步骤 (A)、(B) 和 (C)，令 R 表示所附加的有理曲线，因此 $C_0 := C \cup R$ 具有所需的新不变量。将其限制到 C，得到一个正合列

$$0 \to T_{\mathbb{P}^r}|_R(-C \cap R) \to T_{\mathbb{P}^r}|_{C \cup R} \to T_{\mathbb{P}^r}|_C \to 0.$$

根据归纳法，我们知道 $h^1(C,\ f^* T_{\mathbb{P}^r}) = 0$。此外，由引理 4.18 以及 $\#C \cap R = 1$ 分别为 2 和 $r+2$ 这一事实，在我们的每个归纳步骤中都有

(A) $T_{\mathbb{P}^r}|_R(-C \cap R) \simeq \mathsf{O}^{\oplus r-1} \oplus \mathsf{O}(1)$,

(B) $T_{\mathbb{P}^r}|_R(-C \cap R) \simeq \mathsf{O}(-1)^{\oplus r-1} \oplus \mathsf{O}$,

(C) $T_{\mathbb{P}^r}|_R(-C \cap R) \simeq \mathsf{O}(-1)^{\oplus r}$。

在上述每种情形中，该向量丛都没有高阶上同调。因此，考虑上同调长正合列，我们有 $h^1(C \cup R,\ T_{\mathbb{P}^r}|_{C \cup R}) = 0$。于是 $f_0: C \cup R \to \mathbb{P}^r$ 满足关于新不变量的结论。□

4.3. **法丛的修改**。 我们将要说明的最后一种技巧同样涉及 Brill–Noether 曲线的嵌入退化，但重点将放在法丛上。我们将通过证明定理 3.18 的以下一个非常特殊的情形，说明此处会出现的新微妙之处。该情形最初由 Sacchiero 提出 [Sac80, 第 1] 页上的 (II)。我们给出的证明并非最简捷的解法，但将展示近年来 [ALY19, LV23, CLV, CLV24] 中发展出的一些强大技巧。

命题 4.19。 设 $C \subset \mathbb{P}^3$ 是一条亏格为 0 且次数为奇数 $d \geq 3$ 的一般曲线。那么

$$N_C \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2d-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2d-1)$$

是完全平衡的。特别地，$\mathbb{P}^3$ 中的奇数次有理曲线可以插值预期数量的一般点。

⚠ **警告 4.20.** 我们并非出于显而易见的理由而将范围限定为奇数次有理曲线：对于偶数次有理曲线，该结论按原样表述是错误的！这是因为该结论在特征2下不成立。更一般地，如果 $d \not\equiv 1 \pmod{r-1}$，那么次数为 d 的有理曲线在 $\mathbb{P}^r$ 中的法丛永远不平衡。关于这一现象的更多细节，请参见 [LV23，第2节。2]

次数为 d 的有理曲线 $C \subset \mathbb{P}^3$ 的 N_C 平衡性等价于 $h^0(C, N_C(-2d)) = 0$，也等价于 $h^1(C, N_C(-2d)) = 0$。插值性质（[LV23，定义 1.3]）对于 N_C 而言，等价于 N_C 是平衡的，因为它是非特殊的（例如，根据上一节第 4.2 节中的论证，因为 N_C 是 $T_{\mathbb{P}^r}|_C$ 的商丛）。

一种技巧　　是从一点 $q \in C$ 进行投影，并使用下面的正合列 (23)　　.

定义 4.21. 设 $C \subset \mathbb{P}^r$ 是一条光滑曲线，且 $q \in \mathbb{P}^r$。记 S 为以 q为顶点、以 C 为底的锥面。（法）指向丛 $N_{C\to q}$ 是 N_C 的唯一线子丛，在 q 之外与$N_{C/S}$ 一致（仅当 $q \in C$时才涉及这一点）。

指向丛之所以得此名称，是因为它的截面是“指向q”的法向方向。一个局部计算 [ALY19，第 6.2 和 6.3] 命题表明

$$N_{C\to q} \simeq \begin{cases} \mathcal{O}_C(1) & : \ q \notin T_pC \text{ for any } p \in C, \\ \mathcal{O}_C(1)(2q) & : \ q \in C^{\mathrm{sm}} \text{ is not an inflection point and } q \notin T_pC \text{ for any } p \neq q. \end{cases} \tag{22}$$

假设点 $q \in C^{\mathrm{sm}}$ 是一般点。从 q 进行投影可得到映射 $\pi_q: C \to \mathbb{P}^{r-1}$和一个正合列

$$0 \to N_{C\to q} \simeq \mathcal{O}_C(1)(2q) \to N_C \to N_{\pi_q}(q) \to 0, \tag{23}$$

其中 N_{π_q} 是映射 π_q 的法层（当π_q 是嵌入时，它与法丛 $N_{\pi_q(C)}$ 一致）。在 $r = 3$ 且 π_q 通常不是嵌入的情形下，法层可通过伴随公式 $N_{\pi_q} \simeq \pi_q^* K_{\mathbb{P}^2}^\vee \otimes K_C$计算。在 $C \subset \mathbb{P}^3$是次数为 d的有理曲线时，可得 $N_{\pi_q} \simeq \mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(3(d-1)) \otimes \mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \simeq \mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(3d-5)$。

仅凭这一技巧，就足以处理以下第一个情形。

例 4.22（扭曲三次曲线）。设 $C \subset \mathbb{P}^3$ 是一条扭曲三次曲线。对于 $q \in C$，像$\pi_q(C)$ 是一条光滑平面二次曲线，因此其法丛同构于 $\mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(4)$。利用这一点和 (22)，投影正合列 (23) 因而简化为

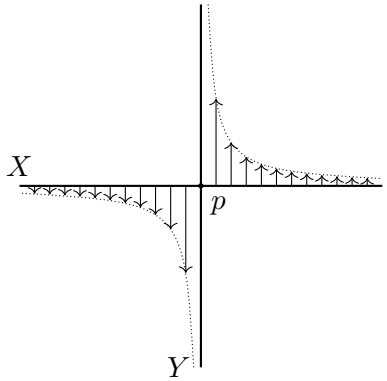
$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(5) \to N_C \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(5) \to 0,$$

因此 $N_C \simeq \mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(5)^{\oplus 2}$。 ⌟

投影正合列之所以能立即发挥作用，是因为它完全平衡：子线丛和商线丛的次数相等。一般而言，投影正合列远非平衡：子丛 $\mathsf{O}_C(1)(2q)$ 的次数为 $d+2$，而商丛 $N_{\pi_q}(q)$ 的次数为 $3d-4$。

为了处理次数大于 3 的情形，如前面的第 4.2 节所示，我们将 C 退化为一条可约节点曲线 $X \cup Y$。根据半连续性定理，只需证明退化后所需的上同调消失，而它等价于平衡性／插值。

涉及法丛的退化论证，远比使用限制切丛的论证困难得多，例如前面第 4.2 节中的论证。关键区别在于，$T_{\mathbb{P}^r}$ 是定义在整个 $\mathbb{P}^r$上的向量丛，而法丛 N_C 仅定义在曲线$C \subset \mathbb{P}^r$上。对于前一种情况，当我们将 C 退化为可约节点曲线 $X \cup Y$时，显然$T_{\mathbb{P}^r}|_C$会退化为 X上的向量丛 $T_{\mathbb{P}^r}|_X$和 Y上的 $T_{\mathbb{P}^r}|_Y$，并在节点处按显然的方式粘合。另一方面，尽管 $N_{X\cup Y}$是定义在节点曲线 $X\cup Y$上的向量丛，但它在分支 $N_{X\cup Y}|_X$ 上的限制并不同构于 N_X。这并不令人意外：变形理论保证，法丛的截面参数化了曲线的一阶变形；而在点 $p \in X \cap Y$处平滑化节点的变形，当视为 N_X中的变形时，在 p 处必然不正规。



按照这一思路，我们可以用 N_X 很好地描述 $N_{X\cup Y}|_X$ ，对于 Y 也同样如此（见下文引理 4.24）。然而，仅凭两个限制 $N_{X\cup Y}|_X$ 和 $N_{X\cup Y}|_Y$ 还不足以描述向量丛 $N_{X\cup Y}$；节点处的粘合条件十分微妙，只有在特定的退化情形下才得到充分理解。

首先要了解可约节点曲线 $N_{X\cup Y}$ 的法丛与某个分支的法丛 N_X 之间的关系。这是 Hartshorne–Hirschowitz 的经典结果。要完整陈述这一结果，我们需要以下定义。

定义 4.23. 设 E 是簇 X上的一个向量丛， $D \subset X$ 是一个卡蒂埃除子， $F \subset E|_D$ 是一个子丛。沿着 D 、朝向 F 对 E 作负初等修改，所得向量丛为

$$E[D \xrightarrow{-} F] := \ker\left(E \to E|_D/F\right).$$

沿着 D、朝向 F对 E作正初等修改，所得向量丛为 $E[D \xrightarrow{+} F] := E[D \xrightarrow{-} F](D)$。

向量丛 $E[D \xrightarrow{+} F]$ 比 E 更为正，因为它的截面允许在子丛 F中的 D上有极点。例如，若 $E \simeq F \oplus F\prime$，则 $E[D \xrightarrow{+} F|_D] \simeq F(D) \oplus F'$。更一般地，给定一个正合列 $0 \to F \to E \to Q \to 0$, 则修改所诱导的正合列为

$$0 \to F(D) \to E[D \xrightarrow{+} F|_D] \to Q \to 0. \tag{24}$$

另一方面，如果我们有关于 D 的正合列 $0 \to F \to E|_D \to Q \to 0$ ，那么会诱导出一个正合列

$$0 \to Q \to E[D \xrightarrow{+} F]|_D \to F \otimes \mathcal{O}(D)|_D \to 0. \tag{25}$$

引理 4.24 (Hartshorne–Hirschowitz [HH85, 推论 3。2])。 设 $X \cup Y$ 是一条可约节点曲线，具有 $X \cap Y = \{p_1, \ldots, p_m\}$ ，并且对每个 i，令 $q_i \in T_{p_i}Y \smallsetminus p_i$。则

$$N_{X\cup Y}|_X \simeq N_X[p_1 \xrightarrow{+} N_{C\to q_1}]\cdots[p_m \xrightarrow{+} N_{C\to q_m}].$$

证明概要。 首先，假设 $X\cup Y$ 包含在光滑曲面 S 中。于是 $X+Y$ 是 S 上的卡蒂埃除子，且 $N_{X\cup Y} \simeq \mathsf{O}_S(X+Y)|_{X\cup Y}$ 和 $N_X \simeq \mathsf{O}_S(X)|_X$。这推出关系式

$$N_{X\cup Y}|_X \simeq \mathcal{O}_X(X)(X \cap Y) \simeq N_X(X \cap Y),$$

这就是所需的结果，因为对于任意点 $p \in X\cap Y$，空间 $N_X|_p$ 是 1 维的，因此同构于 T_pY。

一般情形由此可得，因为这是一个局部性质，且节点奇点是平面的，所以在 $X \cap Y$ 中任意一点的邻域内，$X \cup Y$局部包含于一个光滑曲面中。□

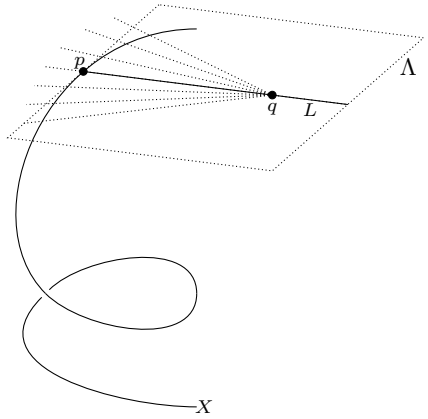
例 4.25. 考虑前一节第 4.2 节中的退化（A），即由曲线 X 和准横截 1-割线 L 的并组成，二者在点 p 处相交。令 $q \in L \smallsetminus p$，并令 S 为以 q 为顶点、以 X 为底的锥面（沿 X 光滑）。令 $\Lambda := T_pX$， q 为

包含 L 和切线 T_pX 的二维平面，该切线是以切线 $T_pX \smallsetminus p$ 上一点为顶点、以 L 为底的锥面。由引理 4.24 可知

$$N_{X\cup L}|_X \simeq N_X[p \dashrightarrow N_{X/S}]$$
$$N_{X\cup L}|_L \simeq N_L[p \dashrightarrow N_{L/\Lambda}] \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus r-2}.$$

⌟

现在我们来研究 $X \cap Y$ 各点处粘合数据的问题。我们重点关注例 4.25 中的 1-割线退化 $Y = L$。这是少数几种存在良好描述的情形之一，也是证明命题 4.19 所需的唯一一种退化。向量丛 $N_{X\cup L}|_L$ 有特定直和项 $\mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$，问题在于确定它与 $N_X[p \dashrightarrow N_{X/S}]|_p$ 中哪个一维子空间粘合。[ALY19，引理 8.4] 中的关键观察是，锥面 S 沿着 L 处处与平面 Λ 相切，尤其是在 p 处。



因此，两个一维子空间 $\mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \simeq N_{L/\Lambda}(p)|_p$ 和 $N_{L/S}(p)|_p$ 在 $N_{X\cup L}|_p$ 中相同。由于 $N_{L/S}(p)|_p$ 与 $N_{X/S}(p)|_p$ 粘合——二者都与向量丛 $N_{X\cup L/S}$ 在 p 处的纤维相对应——这便确定了特定的一维子空间。由此得到一个重要的归纳工具。我们以完全一般的形式陈述它，因为其证明与有理曲线在 $\mathbb{P}^3$ 中的情形相比并不更难。

引理 4.26 ([CLV，命题 4.2])。设 $X \subset \mathbb{P}^r$ 是一条光滑曲线，且 $L = p、q$ 是一条拟横截的 1-割线。若向量丛 $N_X[2p \dashrightarrow N_{X\to q}]$ 满足插值性质，则 $X \cup L$ 的一般平滑化的法丛也满足插值性质。

证明概要。沿用 S 的记号，它是以 q 为顶点、以 X 为底的锥面。考虑一个单参数平滑化 $\mathsf{C} \to \operatorname{Spec} K[\![t]\!]$，其一般纤维为 C，特殊纤维为 $X \cup L$。设 N 是 C 上的向量丛，其在 C 上的限制为法丛 N_C，在 $X \cup L$ 上的限制为向量丛 $N_{X\cup L}$。定义 $\mathsf{N}' := \mathsf{N}[L \dashrightarrow N_{L/\Lambda}(p)](L)$。利用 (25) 中取 $Q = \mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus r-2}$ 和 $F = N_{L/\Lambda}(p) \simeq \mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$ 时的正合列，可得 $\mathsf{N}'|_L \simeq (\mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus r-1})(-p) \simeq \mathsf{O}_L^{\oplus r-1}$。对于到 X 的限制，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{N}'|_X &\simeq N_{X\cup L}|_X[p \dashrightarrow N_{X/S}(p)](p),\\ &\simeq N_X[p \dashrightarrow N_{X/S}][p \dashrightarrow N_{X/S}(p)](p),\\ &\simeq N_X[2p \dashrightarrow N_{X/S}](p).\end{aligned}$$

由于 L 是 C 上的一条 (-1)-曲线，因此可以将其收缩，得到 $\mathsf{C}^- \to \operatorname{Spec} K[\![t]\!]$；形式函数定理以及 L上的平凡向量丛没有高阶上同调这一事实表明，N'是从 C^-拉回的。因此，向量丛 $N_X[2p \dashrightarrow N_{X/S}](p)$ 是 N_C 的一个特化。于是，如果 $N_X[2p \dashrightarrow N_{X/S}]$满足插值，那么 $N_X[2p \dashrightarrow N_{X/S}](p)$ 也满足插值，进而 N_C也满足插值。□

备注 4. 在引理 4.26 的陈述中，我们可以用某种修改 $N_{\prime X}$ 来替换 N_X；关于这种一般性，参见[CLV 第 4] 节。这意味着我们可以剥去多条 1-割线，并反复应用引理 4.26。

⚠ **警告 4.27**。 正如引理 4.26 的证明所示，向量丛 $N_X[2p \xrightarrow{+} N_{L/S}](p)$ 实际上是这样一个向量丛：对于 $X \cup L$ 的一般平滑化 C，它与 N_C 一起属于一个平坦族。去掉 p 的扭曲后，每次应用这种退化，次数都会减少秩这么多。虽然这不会影响其完全平衡的性质，却会改变它同构于哪一个平衡向量丛。

反复应用引理 4.26，可以将 N_C 的插值问题化为经多重修改的 $N_X[2p_1 \xrightarrow{+} N_{X\to q_1}]\cdots[2p_m \xrightarrow{+} N_{X\to q_m}]$ 的插值问题，其中 X 是一条次数为 $d-m$ 的曲线。然而，作为一种归纳策略，这略有问题，因为修改会不断累积。解决办法妙不可言：我们发现的这两种技巧各自的问题——(1) 投影序列往往远非平衡；(2) 退化会产生不断累积的修改——实际上恰好可以彼此化解。我们将在下面的证明中说明这一思路。

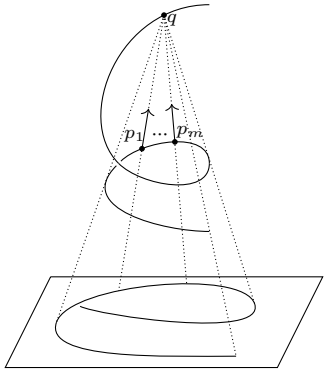
命题 *4.19* 的证明。我们将应用 $(d-3)/2$ 次 1-割线退化，从而归结为证明

$$N_X[2p_1 \xrightarrow{+} N_{X\to q_1}]\cdots[2p_{(d-3)/2} \xrightarrow{+} N_{X\to q_{(d-3)/2}}]$$

是完全平衡的，其中 X 是次数为 $(d+3)/2$ 的曲线。（注意：这里我们关键地用到了 d 是奇数！）现在将所有点 $q_1,\dots,q_{(d-3)/2}$ 一起特化到同一个一般点 $q \in C$。由于完全平衡这一性质是开性质（例如，根据半连续性定理，因为它等价于上同调消失），只需证明

$$N_X[2p_1 \xrightarrow{+} N_{X\to q}]\cdots[2p_{(d-3)/2} \xrightarrow{+} N_{X\to q}] \simeq N_X[2p_1+\cdots+2p_{(d-3)/2} \xrightarrow{+} N_{X\to q}] \tag{26}$$

是完全平衡的。



考虑从 q 作投影所对应的投影正合列 (23)。根据 (24)，(26) 中的修改后的法丛包含在诱导的短正合列中

$$0 \to N_{X\to q}(2p_1+\cdots+2p_{(d-3)/2}) \to N_X[2p_1+\cdots+2p_{(d-3)/2} \xrightarrow{+} N_{X\to q}] \to N_{\pi_q}(q) \to 0. \tag{27}$$

根据 (22)，该子丛同构于 $\mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}((d+3)/2+2+(d-3)) \simeq \mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}((3d+1)/2)$。如前所述，伴随公式意味着该商丛同构于 $\mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(3(d+3)/2-4) \simeq \mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}((3d+1)/2)$。因此，正合列 (27) 是完全平衡的，故 (26) 也完全平衡。由引理 4.26 可得，一般的奇数次 d 有理曲线也必定具有这一性质。□

References

[ABFS16] E. Arbarello、A. Bruno、G. Farkas 和 G.Sacc ` *Comment.* a。
Math. Helv. 91 3 477 491, 2016
《显式的 Brill-Noether-Petri 一般曲线》。, ( ): – .

[ACGH85] E. Arbarello、M. Cornalba、P. A. Griffiths 和 J. Harris。 *Geometry of algebraic curves. Vol. I*, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*第267卷。施普林格出版社，纽约，1985年。[AF11] M. Aprodu 和 G. Farkas。Koszul上同调及其在模空间中的应用。载于 *Grassmannians moduli*，，第卷，属，页码 *spaces and vector bundles* 14 *Clay Math. Proc.* 25 50 –。美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，2011 年。[AFO16] M. Aprodu 、 G. Farkas 和 A. Ortega。受限Lazarsfeld-Mukai丛与典范曲线。载于*Development of moduli theory—Kyoto 2013*，第69卷， *Adv. Stud. Pure Math.*，第303–322页。日本数学会， [东京], 2016。[AH25] A. Auel 和 R. Haburcak。通过K3曲面获得极大Brill-Noether轨迹。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，(20)：论文编号 rnaf313，36页，2025年。[AHK] A. Auel、R. Haburcak 和 A. Knutsen。区分Brill–Noether轨迹。arXiv:2406.19993。[AHL] A. Auel、R. Haburcak 和 H. Larson。通过亏格分层获得极大Brill-Noether轨迹。 *Michigan Math. J.* 即将发表。[ALY19]

A. Atanasov、E. Larson 和 D. Yang。一般曲线法丛的插值。 *Mem. Amer.*，( ):v，。[Bal89] *Math. Soc.* 257 1234 +105 2019
E. Ballico。关于一般 k 3 2 195 197, -重曲线上的线性级数的一则评论。 *Boll. Un. Mat. Ital. A (7)*，( ): –。[Bal12] E. Ballico。一般曲线嵌入射影空间：二次曲面的范围。 *Lith. Math. J.*，52 2 134 137, 2012 ( ): –。[Bay18] A. Bayer。墙穿越蕴含Brill-Noether：曲面稳定性条件的应用。载于 *Algebraic geometry: Salt Lake City 2015* 97 1 *Proc. Sympos. Pure Math.* 3 27 ，第 . 卷，属，第 –页。美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，2018 年。[BE87] E. Ballico 和 P. Ellia。P^n 中非特殊曲线的最大秩猜想。 *Math. Z.*，196(3)：355–367，1987年。[BH] A. Bud 和 R. Haburcak。通过退化和双覆盖获得极大Brill–Noether轨迹。 *Ann. Sc.* 。即将发表。[BK *Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)* 96] E. Ballico 和 C. Keem。关于一般 k-重射影曲线上的线性级数。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，124 1 7 9, 1996( ): –。[BN74] A. Brill 和 M. Noether。关于代数函数及其在几何中的应用。*Math. Ann.*，7：269–310，1874年。[Bud25] A. Bud。Brill-Noether轨迹与微分层。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，378(11)：7777–7798，2025年。[CDPR12] F. Cools、J. Draisma、S. Payne 和 E. Robeva。Brill-Noether定理的热带证明。 *Adv.*，( ): –。[CHN24] *Math.* 230 2 759 776, 2012
I. Coskun、J. Huizenga 和 H. Nuer。曲面上层模空间的Brill-Noether理论。载于 *Moduli spaces and vector bundles—new trends*，第803卷， *Contemp. Math.*，第103–151页。美国数学学会， [普罗维登斯], ，罗德岛州， [2024] ©2024。[CHT] K. Christ、X. He 和 I. Tyomkin。环面曲面上Hurwitz空间与Severi簇的不可约性。arXiv:2501.16238。[CK90] M. Coppens 和 T. Kato。具有平面模型的光滑曲线的亏格。 *Manuscripta Math.*，70(1)：5–25，1990年。[CKM94] M. Coppens、C. Keem 和 G. Martens。一般 k *Indag. Math.* -重曲线的原始长度。， *(N.S.)* 5 2 145 159, 1994
( ): –。[CLV] I. Coskun 、 E. Larson 和 I. Vogt。Grassmann 流形中有理曲线的法丛。 *Algebra Number Theory* 。即将发表。[CLV 22] I. Coskun、E. Larson 和 I. Vogt。空间曲线法丛的稳定性。 *Algebra Number Theory*，16 4 919 953, 2022 ( ): –。[CLV 24] I. Coskun、E. Larson 和 I. Vogt。亏格至少为7的一般典范曲线的法丛是半稳定的。 *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*，2024年。[CM99] M. Coppens 和 G. Martens。一般 k-重曲线上的线性级数。 *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*，69 347 371, 1999 : –。[CM00] M. Coppens 和 G. Martens。4重曲线上的线性级数。 *Math. Nachr.*，213：35–55，2000年。[CM02] M. Coppens 和 G. Martens。关于特殊除子簇。 *Indag. Math. (N.S.)*，13 45, 2002 1 29( ): –。[CPJ22a] K. Cook-Powell 和 D. Jensen。固定亏格曲线的Brill-Noether轨迹分支。 *Michigan Math. J.* 71 1 19 45, 2022 ，( ): –。[CPJ22b]

K. Cook-Powell 和 D. Jensen。Hurwitz-Brill-Noether理论中的热带方法。 *Adv. Math.*，398：论文编号108199，2022年。

[CPJL+] K. Cook-Powell、D. Jensen、E. Larson、H. Larson 和 I. Vogt。Hurwitz–Brill–Noether 理论中的嵌入定理。 *Trans. Amer. Math. Soc.* 即将出版。[CS25] I. Coskun 和 G. Smith。Brill-Noether 曲线法丛的稳定性。 *Math. Ann.*，391(4):4997–5032，2025。[Edi91] D. Edidin。某些线性级数族的单值群至少是交错群。 *Proc.* ，( ): – 。[*Amer. Math. Soc.* 113 4 911 922, 1991
Edi92] D. Edidin。稳定曲线模空间的余维二同调是代数的。 *Duke Math.* ，( ): – 。[*J.* 67 2 241 272, 1992
Edi93] D. Edidin。余维二中的布里尔-诺特理论。 *J. Algebraic Geom.*，2(1):25–67，1993。[EH83a] D. Eisenbud 和 J. Harris。一般曲线上的除子与尖点有理曲线。 *Invent. Math.*，74 3 371 418，1983 ( ): – 。[EH83b] D. Eisenbud 和 J. Harris。关于特殊除子的 Gieseker-Petri 定理的一个更简明证明。 *Invent.* ，( ): – 。[*Math.* 74 2 269 280, 1983
EH87a] D. Eisenbud 和 J. Harris。若干线性级数族的不可约性与单值群。 *Ann. Sci.École Norm. Sup. (4)*，20(1):65–87，1987。[EH87b] D. Eisenbud 和 J. Harris。亏格为 ≥ 23 *Invent.* 的曲线模空间 *Math.* 90 2 359 387, 1987
的 Kodaira 维数。 ，( ): – 。[EH89] D. Eisenbud 和 J. Harris。Brill-Noether 数为 -1 的若干线性级数族的不可约性。 *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*，22(1):33–53，1989。[Far00] G. Farkas。亏格为 23 的曲线模空间的几何。 *Math. Ann.*，318(1):43–65，2000。[Far08] G. Farkas。一般曲线上的高阶分歧与割线除子簇。 *J. Lond. Math. Soc.* ，( ): – 。[*(2)* 78 2 418 440, 2008
FFR] G. Farkas、S. Feyzbakhsh 和 A. Rojas。通过 K3 曲面与稳定性条件研究 Hurwitz–Brill–Noether 理论。 arXiv:2505.19890。[FJP24] G. Farkas、D. Jensen 和 S. Payne。M_{13} 上的非阿贝尔 Brill-Noether 除子与 R_{13} 的 Kodaira 维数。 *Geom. Topol.*，28(2):803–866，2024。[FJP25] G. Farkas、D. Jensen 和 S. Payne。M_{22} 与 M_{23} 的 Kodaira 维数。 *Camb. J. Math.*，13 3 431 607，2025 ( ): – 。[FL81] W. Fulton 和 R. Lazarsfeld。退化轨迹与特殊除子的连通性。 *Acta Math.*，146 3 4 271 283，1981 (-): – 。[Ful69] W. Fulton。Hurwitz 概形与代数曲线模空间的不可约性。 *Ann. of Math. (2)*，90:542–575，1969。[GH80] P. Griffiths 和 J. Harris。一般代数曲线上的特殊线性系簇。 *Duke Math. J.* 47 1 233 272, 1980 ，( ): – 。[
Gie82] D. Gieseker。稳定曲线与特殊除子：Petri 猜想。 *Invent. Math.*，66(2):251–275，1982。[GLPV] N. Gonz´alez、H. Larson、O. Pechenik 和 I. Vogt。Hurwitz–Brill–Noether 理论中的单值群。准备中。[GTiB09] I. Grzegorczyk 和 M. Teixidor i Bigas。稳定向量丛的布里尔-诺特理论。载于 *Moduli spaces and vector bundles* 359 *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* 29 50 ，第 卷，页码 – 。剑桥大学出版社，剑桥，2009。[Hab] R. Haburcak。亏格为 ≤ 12 的 Brill–Noether 轨迹。arXiv:2507.04902。[HH85] R. Hartshorne 和 A. Hirschowitz。代数空间曲线的平滑化。载于 *Algebraic geometry Sitges (Barcelona) 1983* 1124 *Lecture Notes in Math.* 98 131 1985 ，第 卷，页码 – 。施普林格，柏林，。[Hir81] A. Hirschowitz。关于有理曲线的一般位置条件。 *Acta Math.*，(-): – 。[HTiB] R. Haburcak 和 M. Teixidor i Bigas。若干可约与不可约的 Brill—Noether 轨迹。arXiv:2503.16255。[JP14] D. Jensen 和 S. Payne。热带独立性 I：除子的形状及 Gieseker-Petri 定理的证明。 *Algebra Number Theory*，8(9):2043–2066，2014。[JP16] D. Jensen 和 S. Payne。热带独立性 II：二次曲面的最大秩猜想。 *Algebra Number Theory* 10 8 1601 1640, 2016 ，( ): – 。[JP
25] D. Jensen 和 S.. Payne。布里尔–诺特理论的最新进展。载于 *Varieties Polyhedra Computation* 143 158 2025 ，第 卷，EMS 大会报告系列，页码 – 。EMS 出版社，。[JR21] D. Jensen 和 D. Ranganathan。固定 Gonality（纤维丛阶数）曲线的布里尔-诺特理论。 *Forum Math. Pi*，9 1，33，2021：论文编号 e。[Kem71] G. Kempf。舒伯特方法及其在代数曲线中的应用。 *Pub. Math. Centrum, Amsterdam*，1971。[KL72] S. Kleiman 和 D. Laksov。特殊除子的存在性。 *Amer. J. Math.*，94:431–436，1972。

[KL74] S. Kleiman 和 D. Laksov。关于特殊除子存在性的另一种证明。 *Acta Math.*，132 176，1974 163: – 。[Lar] E. Larson。最大秩猜想。arXiv:1711.04906。[Lar21a] E. Larson。有界误差下射影空间中曲线的插值。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，(15):11426–11451，2021。[Lar21b] H. Larson。Hurwitz 空间上的精细布里尔-诺特理论。 *Invent. Math.*，224(3):767–790，2021。[Laz86] R. Lazarsfeld。不经退化的 Brill-Noether-Petri 理论。 *J. Differential Geom.*，23(3):299–307，1986。[LC13] M. Lelli-Chiesa。曲面上秩为 3 $K3$ *Proc. Lond. Math. Soc.* 的 *(3)* 107 2 451 479, 2013

Lazarsfeld-Mukai 向量丛的稳定性。，( ): – 。[Lin] F. Lin。分裂轨迹奇点的消解。arXiv:2507.01233。[Liu03] Q. Liu。曲线有限覆盖的约化与提升。载于 *Proceedings of the 2003 Workshop on Cryptography and Related Mathematics* *Chuo University* 161 180, 2003 ，页码 – 。[LLV25] E. Larson、H. Larson 和 I. Vogt。Hurwitz 空间上的全局布里尔-诺特理论。 *Geom. Topol.*，29 1 193( ): –257，2025。[LM05] L. Lapointe 和 J. Morse。 $k+1$-核上的杨表、仿射置换的约化词与 k-Schur 展开。 *J. Combin. Theory Ser. A*，112(1):44–81，2005。[LOTiBZ21] F. Liu、B. Osserman、M. Teixidor i Bigas 和 N. Zhang。极限线性级数与乘法映射的秩。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，374(1):367–405，2021。[LOTiBZ24] F. Liu、B. Osserman、M. Teixidor i Bigas 和 N. Zhang。强最大秩猜想与曲线模空间。 *Algebra Number Theory*，18(8):1403–1464，2024。[LV] H. Larson 和 S. Vemulapalli。平面及 Hirzebruch 曲面上光滑曲线的布里尔–诺特理论。arXiv:2408.12678。[LV21] E. Larson 和 I. Vogt。 $\mathbb{P}^4$ 中 Brill-Noether 曲线的插值。 *Eur. J. Math.*，7(1):235–271，2021。[LV23] E. Larson 和 I. Vogt。Brill-Noether 曲线的插值。 *Forum Math. Pi*，11 25，90，2023：论文编号 e。[Mar96] G. Martens。奇数 Gonality（纤维丛阶数）曲线。 *Arch. Math. (Basel)*，67(1):80–88，1996。[Muk93] S. Mukai。曲线与 Grassmann流形。载于 *Algebraic geometry and related topics (Inchon, 1992)*，*Conf. Proc. Lecture Notes Algebraic Geom.* 第 I 卷，页码 19–40。国际出版社，马萨诸塞州剑桥，1993。[New22] P. Newstead。高秩布里尔-诺特理论与相干系统：开放问题。 *Proyecciones*，41 2 449 480，2022 ( ): – 。[Noe82] M. Noether。论代数空间曲线理论的奠基。 *J. Reine Angew. Math.*，93 271 318，1882：– 。[Par02] S.-S. Park。一般 5 *Abh. Math. Sem. Univ.* -重曲线上的特殊线 *Hamburg* 72 283 291, 2002
性级数簇。，: – 。[Pfl17] N. Pflueger。 k-重曲线的布里尔-诺特簇。 *Adv. Math.*，312:46–63，2017。[Pfl23] N. Pflueger。借助节俭乐高构造的、具有 $\rho < 0$ 797 193 228, 的线性级数。 2023 *J. Reine Angew. Math.*，: – 。[Ran07] Z. Ran。射影空间中有理曲线的法丛。 *Asian J. Math.*，11(4):567–608，2007。[Sac80] G. Sacchiero。射影空间中有理曲线的法丛。 *Ann. Univ. Ferrara Sez. VII (N.S.)*，26 33 40 1981 1980：– ( )，。[Sev15] F. Severi。论代数曲线的分类及黎曼存在定理。 *Rend. R.*，( ): – 。[Ste89] J. Stevens。确定一条典范曲线的点数。 *Acc. Naz. Lincei* 241 5 877 888, 1915

Nederl. Akad. Wetensch. Indag.，( ): – 。[Ste98] F. Steffen。广义主理想定理及其在布里尔-诺特理论中的应用。 *Math.* 51 4 485 494, 1989

Invent.，( ): – 。[Tar13] N. Tarasca。余维二中的布里尔-诺特轨迹。 *Math.* 132 1 73 89, 1998

Compos. Math.，149(9):1535–1568，2013。[TiB03] M. Teixidor i Bigas。线丛对称映射的单射性。 *Manuscripta Math.*，112(4):511–517，2003。[TiB25] M. Teixidor i Bigas。布里尔-诺特轨迹。 *Manuscripta Math.*，176(1):论文编号 14，17，2025。[Vog18] I. Vogt。Brill-Noether 空间曲线的插值。 *Manuscripta Math.*，156(1-2):137–147，2018。[Voi02] C. Voisin。位于 $K3$ *J. Eur.* 曲面上的偶数亏格 *Math. Soc. (JEMS)* 4 4 363 404, 2002
曲线的格林一般型协同猜想。，( ): – 。[Voi05] C. Voisin。奇数亏格一般曲线的格林典范协同猜想。 *Compos. Math.*，141 5 1163 1190，2005 ( ): – 。[Wel85] G. Welters。适用于普里姆簇的 Gieseker-Petri 型定理。 *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*，18 4 671 683，1985 ( ): – 。[Wey03] J. Weyman。 *Cohomology of vector bundles and syzygies*，*Cambridge Tracts in Mathematics* 第 149 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2003。