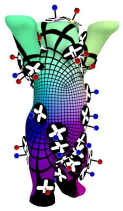
arXiv:2602.03684v1 [math.DG] 3 Feb 2026

闭曲面上的点涡动力学

By

MARCEL PADILLA 学籍号: 351206

数学系 柏林工业大学



根据理学硕士学位的要求，向柏林工业大学提交的论文。

2018年4月22日

导师：乌尔里希·平卡尔教授、博士；第二评审人：尤里·B·苏里斯教授、博士；提交日期：2018年5月2日

摘要

英语

点涡动力学理论自基尔霍夫于1891年提出以来便一直存在，并在与数学诸多领域的联系中持续发展。作为对涡量概念的大幅简化，该理论在基于涡量的流体模拟中具有计算速度快的优势，但精度会有所降低。Stefanella Boatto 和 Jair Koiller 的最新发现使这一理论得以扩展至闭曲面。本文全面介绍零亏格且总涡量为零的闭曲面上的点涡动力学。此外，文中还以统一平面、球面与闭曲面上的点涡动力学理论为目标，阐释了流体动力学和曲面的基础知识，并提供实现细节和补充材料。

德语

点涡动力学理论自基尔霍夫于1891年提出以来便一直存在，并在与数学诸多领域的联系中不断发展。作为对涡量的大幅简化，该模型在基于涡量的流体模拟中以计算速度快见长，但精度会有所降低。Stefanella Boatto 和 Jair Koiller 的新发现使这一理论得以扩展至闭曲面。本文介绍了一份通俗易懂的指南，讲解零亏格且总涡量为零的闭曲面上的点涡动力学。此外，文中还以统一平面、球面和闭曲面上的点涡动力学理论为目标，阐述流体动力学与曲面的基本概念，并提供实现细节和补充材料。

献词与致谢

谨以此文献给一直支持我的家人、最亲密的朋友，以及带给我无尽欢乐的亲爱的 *Natalia*。

目录

Page

1 引言 1

1.1 流体动力学的历史.1 1.2 现代流体动力学.4 1.3 涡动力学的历史.5 1.4 补充材料软件.6

2 流体动力学与涡量方程 9

2.1 纳维-斯托克斯方程.9 2.2 欧拉方程.13 2.3 常见流体方法注记.15 2.4 流体涡量.16 2.5 涡量方程.19

3 曲面流体 23

3.1 曲面流体.23 3.2 曲面上的格林函数.25 3.3 流函数.26 3.4 由涡量求速度.28 3.5 流函数的计算.31 3.6 二维流函数的计算.32 3.7 共形映射.34 3.8 辛流形与辛梯度.38

4 点涡旋 45

4.1 点涡的定义.45 4.2 点涡流函数的推导.47 4.3 点涡旋速度场.48 4.4 点涡动力学.49 4.5 点涡能量.53 4.6 方法论.57

4.7 值得关注的结果.58

5 平面点涡动力学 61

5.1 平面点涡动力学推导.62 5.2 平面点涡动力学结果.63

6 球　　面点涡动力学 6　　7

6.1 球面点涡动力学推导.67 6.2 球面点涡动力学结果.69

7 闭曲面　点涡动力学 73

7.1 闭曲面点涡动力学推导.74 7.2 闭曲面点涡动力学结果.78

8 实现 81

8.1 关于使用补充材料.81 8.2 平面点涡动力学实现.82 8.3 球面点涡动力学实现.83 8.4 闭曲面点涡动力学实现.85 8.4.1 离散共形映射.85 8.4.2 离散共形因子.87 8.4.3 利用共形映射.89 8.4.4 点采样.90 8.4.5 离散梯度.90 8.4.6 涡动力学.91

9 结论　　93

参考文献　　95

CHAPTER 1

引言

The 本学位论文的主要目标是严谨地阐述并推导闭曲面上的点涡运动理论，同时说明其实现方法。因此，我们将在开篇确立曲面流体模型所需的全部流体动力学细节，随后介绍离散几何的重要概念。最终成果将是一种实时流体点涡运动算法，它结合了 Boatello [Dri15] 关于点涡动力学的最新发现，以及离散几何处理算法的近期成果，以构造共形映射 [KSBC12]。截至本学位论文撰写之时，尚未发表过类似的实现，能够以如此精简的方式呈现闭曲面上的涡动力学流体模拟。

在简要回顾历史（第1章）和流体动力学基础（第2章）之后，我们将解释涡量的概念及其在流体模拟中的用途，并说明如何将这些概念应用于闭曲面（第3章）。接下来，我们将介绍通过点涡动力学对涡量进行约化（第4章），并从平面情形（第5章）逐步推进到球面情形（第6章），最后讨论任意零亏格闭曲面的情形（第7章）。

本学位论文中归档的所有结果将在补充材料中呈现；该补充材料在名为Houdini的影视软件中实现，并可完全访问所有带文档的代码及直接执行选项。第8章还给出了实现步骤与技巧的清晰路径。

1.1 流体动力学史

流体力学或许是数学中最古老、至今仍未被完全理解的课题之一。这门学科的诞生可追溯到阿基米德在公元前250年左右所著的《论浮体》 中对浮力的研究。此后很久，列奥纳多

达·芬奇（1452—1519）、艾萨克·牛顿（1642—1726）、布莱兹·帕斯卡（1623—1662）、丹尼尔·伯努利（1700—1782）、莱昂哈德·欧拉（1707—1783）、开尔文勋爵（1824—1907）、赫尔曼·冯·亥姆霍兹（1821—1894）、克劳德-路易·纳维（1785—1836）、乔治·加布里埃尔·斯托克斯（1819—1903）以及西莫恩·德尼·泊松（1781—1840）等著名学者，都进一步开拓了相关领域；他们中的许多人所作的贡献，至今仍以其姓名命名，体现在本文涉及的诸多定理、方程和算子之中。这门数学学科受到如此广泛的关注，却依然是一个难以解决的问题，令人惊叹；每个月都有许多出版物试图进一步阐明可能的解决方案。本文并不声称取得了重大突破，而是旨在清晰阐述闭曲面上的点涡动力学这一子课题，让任何人都能从这里入手，并获得关于仿真实现的指导。

或许流体力学与动力学之所以如此热门，正是因为它们与日常生活息息相关，因而为人熟知。我们呼吸的空气、饮用的水、掠过耳畔的风、溅在皮肤上的淋浴水花、在路上积成水洼的雨滴，或是神奈川冲浪里（图1.1），这些都是我们熟知的与流体的日常互动。我们对流体所遵循的运动定律形成了直觉，但这种直觉往往具有误导性；我们观察流体越仔细，它们似乎就越复杂。这种复杂性体现在流体运动几乎不可预测的特性上，因其对初始条件高度敏感。下次当你把茶包放入一杯热水，或把牛奶倒进咖啡时，仔细观察颜色的运动，你或许会彻底失去找到一种能够预测这些复杂图案的方法的希望。也许只有像波塞冬这样的神，才能彻底理解流体。

然而，莱昂哈德·欧拉在1757年发表的流体运动的一般原理 [Eul57] 迈出了巨大的一步，提出了欧拉方程（第2.2节定义4）。不过，这只是克劳德-路易·纳维和乔治·加布里埃尔·斯托克斯所提出的纳维–斯托克斯方程（1.1）的一种简化，我们将在第2.1节中对此进行更详细的解释。



图 1.1：神奈川冲浪里 葛饰北斋作。约1829年于日本。公有领域。

(1.1)
$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{u} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \vec{g} + \nu\Delta\vec{u}$$
$$\nabla\cdot\vec{u} = 0$$

从本质上说，流体动力学的研究就是对纳维–斯托克斯方程的研究。这足以让未来几代人投入大量工作，而解决纳维–斯托克斯方程的存在性与光滑性问题则可能由克雷数学研究所奖励你一百万美元。

数学工具的发展以及计算数学领域的诸多进步，为我们处理流体动力学带来了大量新的机遇。本学位论文的核心内容之一，将是基尔霍夫通过点涡动力学描述涡量的方法，该方法早在1891 [KHP91]中便已提出。



图 1.2：我通过观察红海来尝试理解流体。

1.2 现代流体动力学

幸运的是，计算时代已经到来，我们可以通过展示流体动力学理论的结果来获得洞见。坏消息是，就流体模拟而言，对内存和处理能力的需求非常高，因此理论被划分为多个应用领域。严谨的科学流体求解器可能运行得非常出色，但其计算成本高得惊人，使其无法用于大多数活动；然而，在模拟涡轮机或飞机测试时，这类求解器仍然不可或缺。当我们问自己该采用哪些流体方法时，必须始终根据它们的需求权衡各种选项。电影中的海洋表面在让波浪拍打悬崖时，需要更严谨的方法；但如果水只需随着船只轻微晃动，那么在相同的计算时间内，基于表面的流体就能提供高得多的视觉质量结果。在流体方法中，并不存在一条从高保真度到高性能的尺度。我们只能希望针对每项需求选择合适的方法。本学位论文的第2.3节将列出几种流体方法。简而言之，你可以将其想象成某种多维尺度空间，其中视觉质量、低计算成本和数值稳定性彼此竞争，或许无法像图1.3所示那样将它们全部兼顾。

然而，有时我们只想要流体和烟雾来提供视觉效果，并愿意牺牲真实性，例如在电子游戏或动画中。尤其是在电子游戏中，快速的运行性能至关重要。直到今天，许多电子游戏仍依赖基于二维透明纹理的虚假烟雾，而这种烟雾经常会穿过墙壁。简直令人不齿（图 1.4）。当然，像《汤姆·克兰西：彩虹六号：围攻》这样的游戏，旨在创建一种烟幕，使其能够在每位在线玩家的设备之间轻松同步，同时不会过度拖累性能。在一款动力学物理和可破坏性都极其出色的电子游戏中，这种不真实的元素却依然存在，着实有些滑稽。

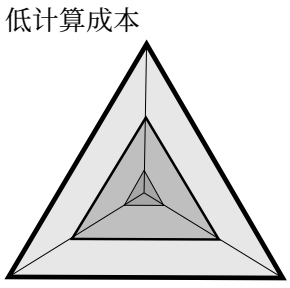


图1.3：用于说明流体动力学应用所提出需求复杂性的简化示意图。



图1.4：游戏彩虹六号：围攻中墙边烟雾弹的效果，从两个视角观察。烟雾明显穿透了曲面。

在常见的电子游戏中，实时流体很难跟上实时动力学物理的发展；后者在 Valve 于2004年推出 Source 游戏引擎后取得了重大突破。动力学物理经常被整合进游戏玩法中，或许有一天，功能完善的烟雾模拟也能以同样的方式为游戏玩法增添趣味。当前的二维烟雾纹理方法无法满足三维需求，尤其是在使用虚拟现实头显时。未来的实时烟雾模拟必须运行得足够快，以满足虚拟现实所需的高帧率，从而避免晕动症。

我们之所以简要提及电子游戏中的烟雾，是因为本学位论文中我们准备做出一些假设，以便用点涡动力学获得较快的性能。本质上，点涡是一种模型，通过对涡量进行采样，只关注流体中的涡旋及其运动，来表达流体的运动。本学位论文的目标是详细阐述该模型，并将其实现到闭曲面上，进而观察其在视觉效果方面的价值。需要强调的问题是，这种模拟流体的方式看起来是否仍然良好。

1.3 《涡动力学》的历史

当把流体运动视为速度向量场时，涡量描述的是该速度场的环量，并由如下方程定义

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$$

.

涡量的性质在过去一个世纪中日益受到关注，因为它能够凸显湍流，而最复杂的运动正发生于此，尤其是当它们被

模拟和更精确的实验所揭示。正是流体扭转最为剧烈的高涡量面积最难以描述，而这些面积对任何流体的运动都具有显著影响，因为环流周围的流体运动得快得多。涡量的详细描述将在第2.4节中给出。

基尔霍夫在 1891 年的讲座中引入了平面上的点涡方程 [KHP91]，由此开启了我们在此要探讨的课题。我们将在第 4 章严谨地阐述其细节。

尤其是从纳维–斯托克斯方程推导出的涡量方程，让我们有理由相信，可以仅凭涡量来模拟流体。我们将在第 2.5 节阐述这一涡量方程。让-巴蒂斯特·毕奥（1774—1862）和费利克斯·萨伐尔（1791—1841）提出了毕奥–萨伐尔积分，从而为近似计算给定涡量场所对应的速度场铺平了道路；我们将在第 3.4 节对此加以说明。

1992 年，P.G. Saffman 出版了《涡动力学》，汇集了描述涡量的各种方法的精要 [Saf92]（见第 2 章）。其中最重要的两种描述是涡片和线涡。涡片试图用二维涡片来模拟涡量，而线涡则将流体的涡量集中在一条曲线上。这些方法以及涡管、涡丝和点涡的进一步应用，见 [BM06]，目前仍是活跃的研究领域。

2007年，Elcott 等人 [ETK+07]发表了一种基于离散外微分（离散外微分）的曲面流体模型，该模型能够保持离散环流，从而避免涡量的数值扩散。这个方法尤其值得关注，因为我们在实现中也利用了离散外微分方法。Azencot 等人 2014 [AWO+14] 也发表了一种基于离散外微分和涡量的方法，用于模拟三角剖分网格上的曲面流体。他们的方法高效、时间可逆，能够守恒涡量，同时再现自然现象。我们并不打算取代这一方法，因为它需要追踪网格上每个静态点的涡量；而我们可以通过使用位于曲面任意位置的选定点涡来避免这一点，从而提高计算速度。

如今，闭曲面上的点涡动力学领域由 Stefanella Boatto、Jair Kolier 和 David Gerard Dritschel 开创。2008年，他们发表的《闭曲面上的涡》[BK08] 是了解这一领域的重要资料。2015年，他们又发表了一篇同名论文 [BK15] ，其中包含了实现本学位论文点涡动力学所需的核心理论，该论文也曾在 [Dri15]上发表。2016年，Boatto 等人进一步确立了 N点涡动力学与 N点引力动力学之间的关系[Sch16]。此外，2011年，A. Regis 以博士论文的形式发表了关于三轴椭球上涡动力学的研究[Reg11] 。

1.4 补充材料软件

本学位论文中归档的全部结果，都将在以 Houdini 实现的补充材料中呈现，并可完整访问所有附带文档的代码及其即时执行选项（在确保

已安装 SciPy）。实现步骤（图1.5）与技巧的清晰路径也在第8章中给出。这些文件可在以下 Git网站 找到：

https://github.com/marcelpadilla/Point-Vortex-Dynamics-on-Closed-Surfaces.git。

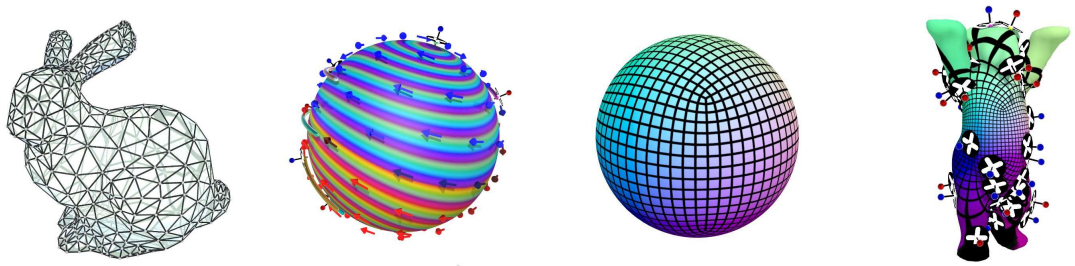


图1.5：使用补充材料创建的图像。

CHAPTER 2

流体动力学与涡量方程

本章将介绍流体动力学的基础知识，为读者理解本学位论文构建一个坚实的数学基础。

2.1 纳维–斯托克斯方程

谈论流体动力学，就不能不提它最重要的微分方程。这一方程为世界各地的数学家提供了无数工作机会。当然，这就是不可压缩纳维-斯托克斯方程，下面我们将以最一般的形式对其进行简要定义。

定义 1（不可压缩纳维–斯托克斯方程）。 给定容器内流体的流动由以下微分方程的解所支配:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{u} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \vec{g} + \nu\Delta\vec{u}$$
$$\nabla\cdot\vec{u} = 0$$

这里，t 表示时间， $\vec{u}$ 表示速度场， ρ 表示密度场，p 表示压力场， $\vec{g}$ 表示重力等外力， ν 表示黏度， ∇ 表示梯度算子， $\nabla\cdot$ 表示散度算子， $\Delta = \nabla\cdot\nabla$ 表示拉普拉斯算子。请注意，这里总共包含 4 个微分方程。第一行称为动量方程 ，第二行称为不可压缩条件。

数学家并不能无所不能（出人意料），而解析求解这些方程简直疯狂，在数值上和计算上也代价高昂且困难。尤其是在流体中纳入边界，会使一切变得糟糕得多。然而，边界条件

是我们可以避而不谈的内容，因为闭曲面、球面和平面都没有边界。

别忘了定义不可压缩流 究竟意味着什么。从物理上说，它描述的是流体微小体积内密度守恒的局部性质。下面给出形式化定义：

定义 2（不可压缩流）。 若流体的速度向量场 $\vec{u}$ 具有密度标量场 ρ，且其物质导数 ρ 为零，则称该流体为不可压缩，即

$$\frac{D}{Dt}\rho = \frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{u}\cdot\nabla\rho = 0 \tag{2.1}$$

为了初步了解纳维–斯托克斯方程，我们将快速看一看它们的推导。令人惊讶的是，这只依赖于物理定律的基本内容，我们将根据 [Bri15] 快速回顾这些内容。请注意，本文的主要结论并不需要我们接下来要确立的所有细节，但仔细了解这一过程确实有助于理解我们为通过欧拉方程（第 2.2 节）实现目标所作的假设。

牛顿那条被无数次引用的第一运动方程将是一切的出发点。现在，我们设想容器（图 2.1）中有一团质量为m 、体积为V 的流体，并问自己：有哪些力作用在这部分流体上？对于这团流体，动量的变化与总作用力成正比，而质量保持不变，因此我们可以写出：

$$m\frac{D}{Dt}\vec{u} = \vec{F} \tag{2.2}$$

我们如何表示 $\vec{F}$？我们都受到的基本外力是 重力 $m\vec{g}$，而且我们知道它应该出现在 $\vec{F}$ 中。

接下来我们应该思考压力 p。压力非常复杂，稍后会将其解释为一种保持体积的力，它与纳维-斯托克斯方程的无散条件有关。压力是一个标量值，会持续产生一种力，使流体各处的压力值保持平衡。我们知道，标量函数的梯度指向

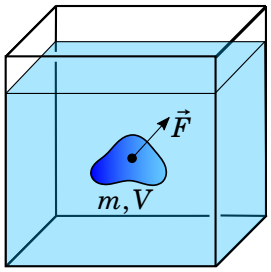


图 2.1：设想流体中有一小块流体，其质量为 m，体积为 V。作用在它上面的力 $\vec{F}$有哪些？我们忽略任何边界效应，并假设处于一个无限大的水容器中。

最速上升的方向，这就是为什么我们的压力作用力必须类似于 $-\nabla p$ ，以抵消其偏离零值的趋势。这与体积大小成正比，因此我们将梯度∇p 乘以流体团的体积V ，得到作用力 $-V\nabla p$。

接下来要介绍黏性力。黏度描述流体内部的摩擦程度，也就是流体团彼此之间的摩擦。它可以看作一种力，试图使一个流体团的速度与其周围的速度趋于一致。事实上，它试图减小速度差异，这与热流试图使固体中的温度趋于均匀类似。因此，涉及黏度的数学表达式中会出现我们熟悉的拉普拉斯算子 Δ，它将在本学位论文后续部分（第3章，但不是在黏度的语境下）受到重点关注。黏性力还需要乘以流体团的体积V 以及描述摩擦程度的动力黏度系数 μ 。因此得到的力为$V\,\mu\Delta\vec{u}$。

流体力:	重力（外力）	压力	黏性
表达式:	$+m\vec{g}$	$-V\,\nabla p$	$+V\,\mu\Delta\vec{u}$

将上表中的所有力合并，可得:

$$m\frac{D}{Dt}\vec{u} = m\vec{g} - V\nabla p + V\mu\Delta\vec{u} \tag{2.3}$$

现在，我们终于可以通过除以质量并取极限，从团块情形过渡到连续情形。这将引入密度 ρ ，其值为极限$m/V \longrightarrow \rho$。

$$\frac{D}{Dt}\vec{u} = \vec{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\mu}{\rho}\Delta\vec{u} \tag{2.4}$$

注意，物质导数可以写成

$$\frac{D}{Dt}\vec{u} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{u} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} \tag{2.5}$$

且运动黏度 ν 等于 $\frac{\mu}{\rho}$。现在只需稍作调整，就能得到纳维–斯托克斯方程中较大的那个方程。

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{u} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \vec{g} + \nu\Delta\vec{u} \tag{2.6}$$

但这只是故事的一半。现在，我们要说明不可压缩条件 $\nabla\cdot\vec{u} = 0$ 的由来，以及它与不可压缩流定义之间的关系，而不只是名称上的联系。与物理学中的许多其他推导一样，我们从质量和动量的性质入手。密度函数 ρ 决定给定体积所包含的质量，而 $\rho\vec{u}$ 则决定其

动量。对流体子区域 Ω 上的这些函数积分，便得到 Ω中的总质量和总动量：

$$M = \iiint_\Omega \rho, \quad \vec{P} = \iiint_\Omega \rho\vec{u} \tag{2.7}$$

重要的是要看到，方程（2.7）计算的是整个流体域中任意子集 Ω 的质量和动量。对整个流体进行积分，会得到与质量守恒和动量守恒原理相对应的常数值。在任意子集 Ω 上，内部质量的变化量等于流入或流出 ω边界的流体量。用数学术语可表示为：

$$\frac{\partial}{\partial t}M = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_\Omega \rho = \iiint_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\rho = -\iint_{\partial\Omega} \rho\vec{u}\cdot\vec{n} \tag{2.8}$$

其中 $\vec{n}$ 表示边界 $\partial\Omega$的外法向。这类方程会立刻促使数学家尝试运用斯托克斯定理，从而得到：

$$\iiint_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\rho = -\iiint_\Omega \nabla\cdot(\rho\vec{u}) \quad \Leftrightarrow \quad \iiint_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla\cdot(\rho\vec{u}) = 0 \tag{2.9}$$

方程（2.9）是利用 Ω 建立的，并未对集合施加任何要求。由此我们得出该方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla\cdot(\rho\vec{u}) = 0 \tag{2.10}$$

我们将方程（2.10）称为连续性方程。正是在这里，我们可以顺畅地引入不可压缩流的定义，即密度的物质导数消失 ρ，$\frac{D}{Dt}\rho = \frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{u}\cdot\nabla\rho = 0$。将其从方程（2.10）中减去，便得到我们熟知且喜爱的不可压缩条件：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla\cdot(\rho\vec{u}) - \left(\frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{u}\cdot\nabla\rho\right) &= 0 \\
\nabla\cdot(\rho\vec{u}) - \vec{u}\cdot\nabla\rho &= 0 \\
\vec{u}\cdot\nabla\rho + \rho\nabla\cdot\vec{u} - \vec{u}\cdot\nabla\rho &= 0 \\
\rho\nabla\cdot\vec{u} &= 0
\end{aligned}$$

现在，只需除以非零密度，就能得到完整纳维-斯托克斯方程所需的最后一项。

(2.11) $$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

不可压缩性方程（2.11）是一项非常重要的条件，许多流体模拟都试图维持这一条件。正如在推导中所见，违反不可压缩性会导致流体质量发生变化。我们通常会将其称为不可压缩条件，而 $\vec{u}$ 则称为无散。我们确实应该为它单独给出一条推论。

推论 3（无散条件）。 满足不可压缩条件的流体流动的向量场 $\vec{u}$ $\frac{D}{Dt}\rho = \frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{u} \cdot \nabla \rho = 0$ 就其密度 ρ 而言，因此必须满足无散条件：

(2.12) $$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

若如此， $\vec{u}$ 便称为无散。

牺牲不可压缩条件精度的流体方法可能会很滑稽。想象一下搅拌静止的流体，却突然发现流体比之前更多。我们将在第2.2节中进一步说明不可压缩性假设。

2.2 欧拉方程

让我们更仔细地看看所谓的欧拉方程。它不如纳维-斯托克斯方程那样一般，但带有我们也对流体所作的假设。简而言之，欧拉方程就是不含黏度的纳维-斯托克斯方程，从而把二阶偏微分方程变为一阶偏微分方程。在本节中，我们将说明欧拉方程以及我们对无黏性、质量均匀性和不可压缩性的假设。欧拉方程在本学位论文中对我们更为重要，但先建立纳维-斯托克斯方程，才能理解我们对流体所作的假设。

定义 4（不可压缩欧拉方程）。 容器内无外力作用时，具有均匀密度的不可压缩无黏流的运动由以下方程决定：

$$\frac{D}{Dt}\vec{u} = -\nabla p$$
$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

此处 $\vec{u}$ 表示速度场，p 表示压力。

请注意，由于第一行以向量形式表示，这实际上又是四个偏微分方程。我们已经在第 10 页的定义 2 中提到过不可压缩性的重要性。

推导这些方程无需额外费力，因为其推导过程与第2.1节中纳维-斯托克斯方程的推导过程等价。无散条件 $\nabla \cdot \vec{u} = 0$与纳维–斯托克斯方程中的相同，对质量守恒也有完全相同的解释。稍后我们会看到，压力作用力 ∇p 恰恰是流体内部维持其无散状态、从而保持其体积所需的力。最后这一点纯粹是对压力的一种数学解释。

我们还没有讨论不可压缩性的意义。顾名思义，它描述的是流体无法压缩其密度。这意味着你无法将装有某种流体的容器挤压变小。然而，关于流体的常识告诉我们，气体可以被压缩后装入灭火器，而且声音在水和空气中是通过压缩波传播的。那么，研究不可压缩流体岂不是毫无意义？

当然不是。好消息是，流体压缩的影响在现实中微乎其微，对流体的整体运动几乎可以忽略不计。诚然，模拟声学需要流体压缩，但这并非我们的目标，而且实现起来代价极其高昂。采用不可压缩流体让我们轻松得多，也能更高效地把资源集中于流体运动。即便我们不只追求视觉效果，舍弃可压缩性也是非常常见的做法。

顺带一提，水和空气都很难压缩。要产生与不可压缩流体流动相比明显的效应，需要爆炸或强力泵送这类极快的运动。研究具有这些效应的流体的学科称为可压缩流。

好的，既然我们已经讨论了不可压缩性，现在可以谈谈我们对均匀恒定密度的假设。这同样与我们先前设定的不可压缩性有关。我们假设流体（例如空气和水）进入模拟时在初始压缩上没有任何偏差，也就是说各处密度相同，并且我们希望该密度保持恒定。对水而言，这一点本来就可以忽略不计，但对气体则没那么简单。不过，由于我们处理的是小尺度气体，仍然可以放弃这一要求。

接下来，我们来谈谈关于流体无黏性的假设。舍弃黏度会带来什么后果？幸运的是，水的黏度相当低，空气的黏度则更低。不过，其影响在很大程度上取决于操作的尺度。黏度尤其有趣的一点是，即使在理论上将它从流体方程中去掉，许多数值误差之后仍可被解释为黏性效应。不过，正如我们稍后将看到的，点涡并非如此。

2.3 常见流体方法笔记

计算流体力学的领域广泛而多样，基本上都是试图求解同一组微分方程。我们简要提到了流体动力学的发展历史，现在将介绍自计算机发明以来发展起来的一些主要计算技术。

1969年，P. McCormack提出了一种流体方法，如今称为McCormack方法。由于易于理解和实现，它至今仍广受欢迎；同时，因为易于讲解且适用于基准测试，近期文献中也仍有相关介绍 [McC12] 。这是一种二阶有限差分法，将流体容器划分为一个网格（图2.2）。

Hans Petter Langtangen（1962—2016）等人于 2002 [LMW02] 进行的一项调查汇总了当今常用的流体方法。计算流体力学中的常见数值方法通常通过有限体积法（FVM）、有限元法 （FEM）、有限差分法（FDM）或离散外微分 （DEC） [ETK+07] 方法对流体方程进行离散化，进而直接计算流体或涡流。请注意，不要将点涡与涡粒子 混淆，后者用于三维流体模拟 [SRF05]。

通过上述综述可以看出，这篇学位论文所采用的假设——将涡量建模为点——是一个非常强（粗略）的假设。其优点在于，它离散化的是涡量，而非像常见方法那样离散化空间本身。利用大量点涡，可以近似任意涡量场。此外，点涡还被称为经典数学的游乐场 [Are07]，可将经典数学的许多领域联系起来。

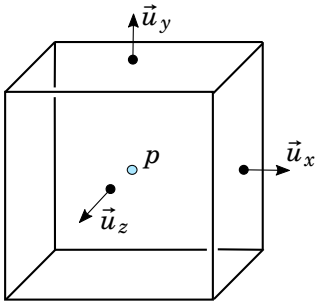


图 2.2：MacCormack 网格中的一个单元。压力位于单元中心，而速度标记在相邻单元的曲面上。

2.4 流体的涡量

涡量可表示为速度场的旋度。

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} \tag{2.13}$$

但这意味着什么？本节旨在帮助读者更好地理解涡量背后的概念，从而更好地理解本学位论文的其余部分。我们将说明二维和三维中的涡量以及旋度 算子。首先，让我们澄清基本定义。

定义 5（叉积）。 设u 和v 为 $\mathbb{R}^3$中的向量。u 与 v 的叉积 定义为:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

定义 6（旋度）。 设u 为区域$M \subset \mathbb{R}^3$上的一个向量场。向量场 u 的旋度 定义为:

$$\operatorname{curl} \vec{u} = \nabla \times \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} u_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} u_z - \frac{\partial}{\partial z} u_y \\ \frac{\partial}{\partial z} u_x - \frac{\partial}{\partial x} u_z \\ \frac{\partial}{\partial x} u_y - \frac{\partial}{\partial y} u_x \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

如我们所见，旋度的定义与维数为三这一条件密切相关。在二维空间中，必须重新定义旋度算子。为了合理地进行定义，我们首先需要理解旋度算子。

为了进行思想实验，我们不妨设想一个三维向量场 $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$，并假设 $u_z = 0$，也就是说，所有运动都发生在 x-y 平面内（这只是为了便于想象，数学上并不需要 $u_z = 0$）。例如，湖面上的流体流动就可以发生在这样的平面上。让我们在一个美好的日子里走到湖边，把一根木头浮木扔进水流中。现在，我们想观察这根浮木在水流中的运动情况，如图 2.3 所示。

我们知道，原木将沿流线运动，但这只刻画了平移变化。在现实中，我们的原木还会旋转，而涡量将精确刻画这种旋转。为了理解这一点，我们需要与木头浮木融为一体。从原木的视角出发，我们令 $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ 表示旋转向量。 $\vec{v}$ 确实存在，但我们尚未用数学方式将其表达出来。当从惯性参考系速度 $\vec{u}_I$ 切换到旋转参考系速度 $\vec{u}_R$ 时，下列方程必须成立:

$$\vec{u}_I = \vec{u}_R + \vec{v} \times \vec{x} \tag{2.16}$$

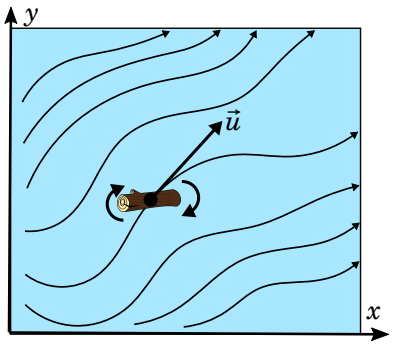


图 2.3：一根无穷小的原木在湖泊中欢快地流动。弯曲的箭头表示湖泊曲面的流线。这根原木将如何旋转?

假设木头浮木静止于流中的某一点，即 $\vec{u}_R = 0$，$\mathrm{grad}\,\vec{v} = 0$，让我们对这个系统施加旋度算子，并使用以下引理：

引理 7. 对于向量场 a 和 b，有

$$\nabla \times (a \times b) = (\nabla \cdot b)a + (b \cdot \nabla)a - (\nabla \cdot a)b - (a \cdot \nabla)b \tag{2.17}$$

这就是发生的情况：

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{u}_I &= \nabla \times (\vec{v} \times \vec{x}) \\
&= (\nabla \cdot \vec{x})\vec{v} + (\vec{x} \cdot \nabla)\vec{v} - (\nabla \cdot \vec{v})\vec{x} - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{x} \\
&= (3)\vec{v} + 0 - (0)\vec{x} - (v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z})\vec{x} \\
&= 3\vec{v} - \vec{v} \\
&= 2\vec{v}
\end{aligned}$$

这表明，旋度算子能够揭示物体在流中某一点的旋转 $\vec{v}$。通过这个旋度，我们不仅可以得知旋转轴，还能求出旋转速度。从物理上说，这种旋转是由于流线两侧的速度变化率不同而产生的。

现在，要过渡到具有切向速度场的二维曲面情形就非常简单了。唯一可能的旋转轴是曲面法向量 $\vec{n}$，因此我们知道，必定存在某个标量 ω 使得

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} = 2\vec{v} = \omega\vec{n} \tag{2.18}$$

由于 $\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle = 1$，我们现在可以利用上述关系定义二维旋度。

定义 8（二维旋度）。 设 $\vec{u}$ 是曲面M 上的二维向量场，其法向量为 $\vec{n}$。 $\vec{u}$ 的旋度定义为：

$$\operatorname{curl}\vec{u} = \langle \vec{n}, \vec{\omega} \rangle = \langle \vec{n}, \nabla \times \vec{u} \rangle \tag{2.19}$$

在欧几里得内积〈,〉下。

如你所见，根据定义 8，二维旋度是一个标量函数。考虑到三维旋度返回的是一个三维向量，这一点可能有些令人意外。这没有问题，因为二维中只有一个可能的旋转轴，而三维中则有三个。

旋转与涡量的标量值成正比，且正值对应顺时针旋转。二维和三维中没有涡量的向量场，即 $\operatorname{curl}\vec{u} \equiv 0$，称为无旋向量场。例如，在嵌入 $\mathbb{R}^3$的平面 $\mathbb{R}^2$中，我们有 $\vec{n} = (0, 0, 1)^T$，因此

$$\operatorname{curl}\vec{u} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

请看图 2.4、2.5 和 2.6 中最基础的向量场，以便熟悉它们。

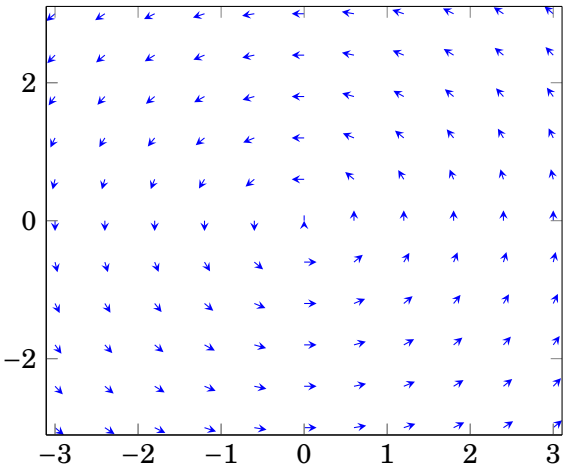


图 2.4：向量场（$-y$，x）处处具有涡量$\frac{\partial}{\partial x}x - \frac{\partial}{\partial y}(-y) = 2$。沿此向量场流动的物体会在流动过程中以恒定角速度旋转。

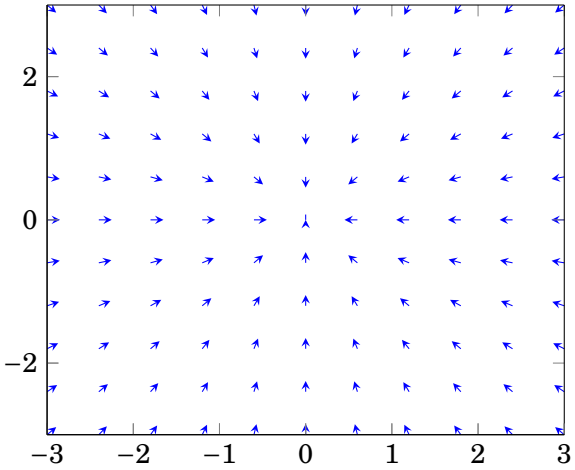


图2.5：这里我们看到引力势梯度场 $\nabla f = \nabla \frac{1}{r}$。由于旋度$\nabla f \equiv 0$任何梯度场都是无旋的。该场中的物体不会旋转。

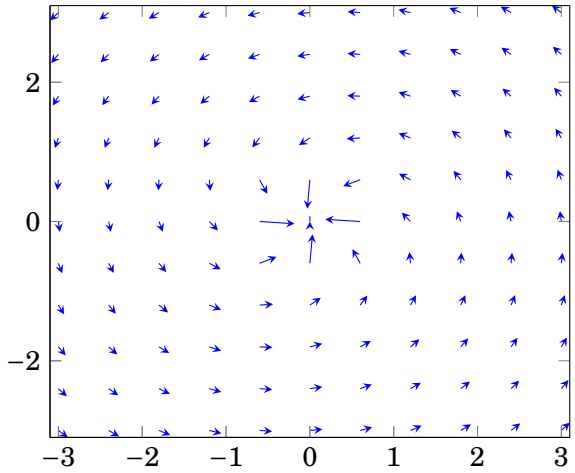


图2.6：这里我们看到 $\nabla \frac{1}{r}$ 与（$-y$，x）之和。总涡量是各涡量之和，因此相对于 $\omega = 2$为常数。

2.5 涡量方程

这篇学位论文主要讨论点涡，因此也涉及涡方法，但我们迄今见过的所有流体方程都只涉及速度场，甚至完全没有提到我们钟爱的涡量 $\vec{\omega}$。现在是时候改变这一点了。我们可以对微分方程进行一番推演，最终得到一条涡量方程，它关注的是 $\vec{\omega}$，而非 $\vec{u}$。为此，我们将以 [Poz11]为指引。

目前有一个很有用的引理：

引理 9. 对于向量场 $\vec{u}$ 和 $\vec{\omega} := \nabla \times \vec{u}$，我们有

$$\nabla \times ((\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}) = (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{u} \tag{2.20}$$

现在，我们只需对整个不可压缩欧拉方程施加旋度算子，并希望能得到一些与涡量有关的有用项。于是，不可压缩欧拉方程的主要部分如下：

$$\frac{D}{Dt}\vec{u} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\nabla p$$

请记住，旋度算子作用于x、y、z，而不作用于时间t。因此，我们可以交换旋度算子与时间微分的顺序。施加旋度算子后，得到：

$$\begin{aligned}
\nabla \times \left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) &= \nabla \times (-\nabla p) \\
\nabla \times \frac{\partial}{\partial t}\vec{u} + \nabla \times (\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}) &= -\nabla \times \nabla p \\
\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{\omega} - \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u} &= -0 \\
\frac{\partial}{\partial t}\vec{\omega} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{\omega} - \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u} &= 0 \\
\frac{D}{Dt}\vec{\omega} - \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u} &= 0
\end{aligned}$$

由此可以得出以下重要结论：

$$\frac{D}{Dt}\vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{u} \tag{2.21}$$

这个方程也可以利用李导数 $\mathscr{L}_u \vec{\omega} := \vec{u} \cdot \nabla \vec{\omega} - \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u}$ 改写为：

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\omega} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{\omega} - \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{\omega} + \mathscr{L}_u \vec{\omega} = 0 \tag{2.22}$$

根据 [ETK+07]，这个方程说明涡量只是沿着流体流动被平流输运。这是一个极其重要的结论，因为它是点涡动力学理论依据的基础。本质上，我们将用点涡近似涡量，以计算速度场，然后再用这个速度场输运点涡（见图 2.7）。

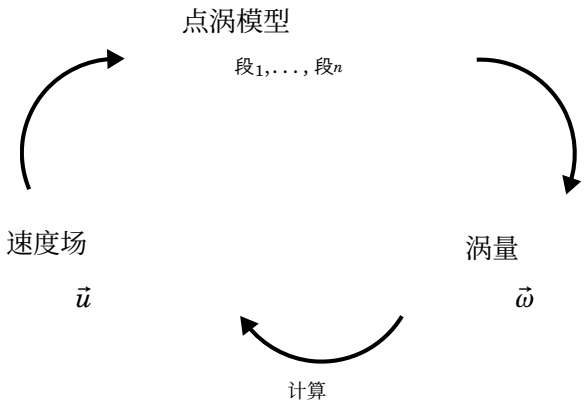


图 2.7：点涡模型在模拟中的运动轨迹。

CHAPTER 3

曲面流体

到目前为止，我们已经对流体建立了基本的认识，但仍有必要进一步明确“曲面流体”这一术语。我们所讨论的究竟是哪类曲面？为了完成本学位论文的目标，我们需要回顾关于这些曲面的哪些基础知识？除了说明如何将流体约束在闭曲面上，我们还将阐明格林函数和流函数是什么。

3.1 曲面流体

正如本学位论文的名称所示，我们只研究闭曲面；在最终结果中，这意味着研究 $\mathbb{R}^3$ **零亏格**曲面，且**没有任何边界**。这里的大部分理论仍适用于任意亏格的无边界曲面，但最终定理仅适用于零亏格曲面。请先看图 3.1。

定义 10 （$\mathbb{R}^3$中的闭曲面）。 一个光滑的闭曲面是 $\mathbb{R}^3$ 中没有边界的二维流形。它是一个集合 $M \subset \mathbb{R}^3$，满足对于每个点$p \in M$，都存在一个$\epsilon > 0$，使得 ϵ-球$B_\epsilon(p) := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x - p| < \epsilon\}$与$M$的交集可以被光滑地映射到 $\mathbb{R}^2$中的一个开集。

我们在此只关心光滑曲面。让我们明确零亏格，以突出最终结果中所处理的对象。

定义 11 （$\mathbb{R}^3$ 中亏格为零的闭曲面）**.** 若一个闭曲面 可以光滑形变为球面，则其亏格为零。即它没有把手，也没有边界。

没有边界这一点尤其重要，因为边界会迅速让数学家与其流体模拟之间的关系变得糟糕。边界对

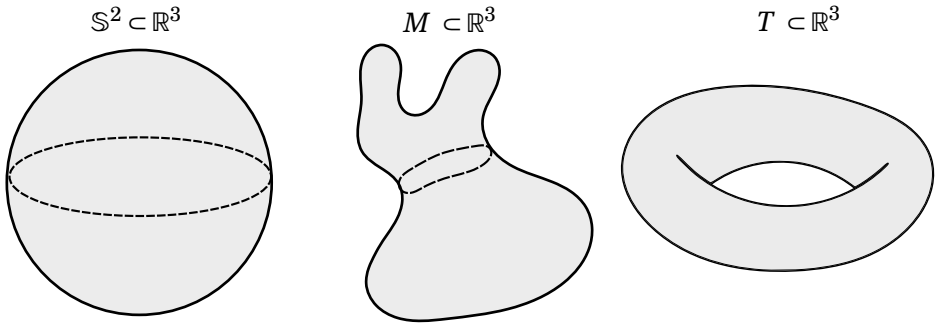


图 3.1：在我们的模型中，我们将特别关注球面 $\mathbb{S}^2$ （左）以及任意亏格为零的闭曲面$M \subset \mathbb{R}^3$ （中）。环面（右）的亏格为1，因此不会用于最终结果。

流体运动的影响极其巨大，除非容器大得不可思议。为了考虑这些影响，必须在求解器中加入大量额外工作。关于这对 $\mathbb{R}^2$ 中的平面点涡意味着什么，可以在 [Poz11]（第 11.2.5 节）中略窥一二。这涉及边界后的幽灵点涡。确实令人害怕。

闭曲面没有边界，因此我们可以略过专门讨论边界条件的一章。顺便说一句，零亏格闭曲面是除无限平面和周期平面片段之外最接近无边界的对象。大气可以作为曲面流体的一个例子。接下来我们进一步详细讨论并定义切平面。

定义 12 （切空间）。 对于曲面$M \subset \mathbb{R}^3$，T_pM 表示M 在点 p 处的切空间 $\in M$。它是曲面上经过 p 的光滑曲线在p处的所有导数构成的集合。

$$T_pM := \{\ \gamma'(0) :\ \gamma : (-1,1) \longrightarrow M \text{光滑曲线，且 } \gamma(0) = p\}$$

定义 $TM := \{T_pM : p \in M\}$。图 3.2 展示了一个示例中的T_pM。同样重要的是，要明确说明转到曲面后我们的向量场会受到怎样的影响。我们希望流体不会溢出曲面，因此必须确保曲面上的每一点p 处，速度向量 $\vec{u}_p$ 都位于该点的切平面T_pM 内。

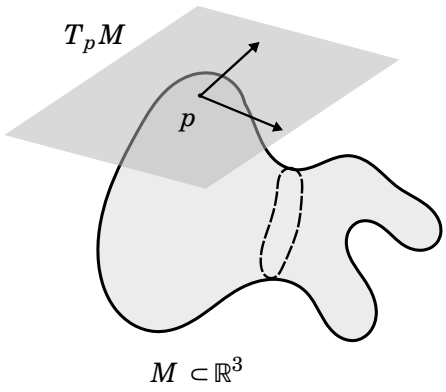


图 3.2：点 $p \in M$上的切向量场 T_pM

定义 13（曲面上的切向量场）。 曲面M 上的向量场 $\vec{u}$ 若其每个向量都位于对应点的切平面内，则称其与 M 相切。

$$p \mapsto \vec{u}(p) \in T_pM$$

好消息是，我们不必为这些曲面重新定义散度、梯度和旋度。现在，曲面流体就是曲面 M 上的一个切向量场 $\vec{u}$ ，它满足曲面 M上的纳维–斯托克斯方程。一旦 $\vec{u}$ 处于该切空间中，它的流就会永远留在切空间内，无处可逃。每当我们说 $\vec{u}$ 是流体的速度场时，我们指的始终是一个切向量场。法向量 $\vec{n} : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ 是曲面 M上的一个非切向量场的例子。

3.2 曲面上的格林函数

在第3.4节中，我们将利用格林函数来得到具有给定涡量 ω的速度场 $\vec{u}$ 。在此，我们希望为学位论文中将涉及的两个最重要情形建立格林函数的精确定义与精确表达式：平面和单位球面 $\mathbb{S}^2$。作为提醒：

定义 14 （格林函数）**.** 设 Δ为流形M 上作用于x 的拉普拉斯算子，且δ为M上的狄拉克δ函数，则我们称

$$G : M^2 \setminus \{(x,x) : x \in M\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \mapsto G(x,y)$$

当它满足以下方程时，称其为M 上的格林函数：

$$\Delta_x G(x,y) = \delta(x-y) \tag{3.1}$$

格林函数并非只有一个，因为每当我们选择形状不同的M 时，拉普拉斯算子也会随之改变。通常，很难计算任意形状曲面上的格林函数，但我们将看到，仅凭平面和球面的格林函数（摘自 [Kim99]），就能推导出许多结论。

命题15 （二维平面上的格林函数）。 二维平面上的格林函数为

$$G(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\ln(|x-y|) \tag{3.2}$$

命题 16 （ $\mathbb{S}^2$上的格林函数）。 $\mathbb{S}^2$ 上的格林函数为

$$G(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\ln\left(\sin\left(\frac{1}{2}d(x,y)\right)\right) \tag{3.3}$$

其中$d(x,y) = \operatorname{acos}(x\cdot y)$是$x$ 与y 在 $\mathbb{S}^2$上的欧几里得距离。

要验证上述方程是否正确，只需在一些小邻域上进行几次积分，看看 $\Delta G(x,y)$ 的表现是否与 δ 相同。

3.3 流函数

了解速度场的流函数，能让描述流体的流动容易得多。我们介绍流函数，因为它是点涡模型能帮助我们计算的诸多妙妙成果之一。求出流函数通常并非易事，但稍后我们会揭示点涡模型如何在格林函数与流函数之间建立起一种简单直接的联系。

定义 17 （三维流函数）。 对于流体流动的速度场 $\vec{u}$ ，向量场 $\vec{\psi}:M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ 若满足以下条件，则称为流函数：

$$\vec{u} = \nabla \times \vec{\psi} \tag{3.4}$$

对于二维情形，流函数是一个标量势，因此

定义 18 （二维流函数）。 对于欧几里得曲面$M \subset \mathbb{R}^3$ 上的流体流动速度场 $\vec{u}$ ，标量函数 $\psi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ 称为流函数，条件是：

$$\vec{u} = \vec{n} \times \nabla \psi \tag{3.5}$$

其中 $\vec{n}$ 是曲面法向量。

这意味着，求解流动的流函数也能得到速度场 $\vec{u}$，从而同样解决流体动力学问题。方程（3.5）是向量势形式的简化版本，因为在二维情形下，我们只需考虑一种取向。请注意，流函数的符号约定并不统一，而且在尝试将三维和二维流函数联系起来时，它们的定义实际上符号相反。关于这一点，详见第3.6节注释1。

在二维情形下，梯度 $\nabla\psi$指向上升最快的方向；在二维空间中，将该方向旋转 90 度，即应用 $\vec{n} \times ( )$，意味着 $\vec{u}$沿着 ψ 保持不变的曲线运动。换句话说，沿着向量场 $\vec{u}$ 运动的示踪点会沿着 ψ 的等值线移动。图 3.3 展示了一个向量场示例中的流线。对于三维流函数，无法作出如此简洁的解释。第3.8节 辛流形与辛梯度将对此进行更详细的说明。

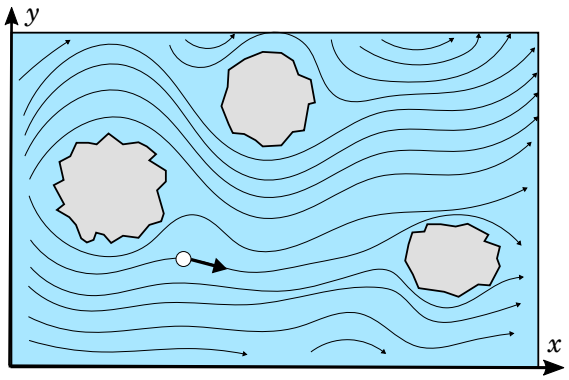


图3.3：含有物体的流体流动截面中流函数的等值线。若流动恒定，将一个白色乒乓球放入流中，它会沿其中一条等值线移动。

3.4 从涡量求速度

我们究竟如何根据涡量估算速度？下一节将说明如何在给定 $\vec{\omega}$ 的情况下求出相应的 $\vec{u}$，这对于后续推导本学位论文中用于驱动点涡运动的结果至关重要。涡量与速度之间的关系由下式给出

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$$

显然，对于任意给定的涡量场 $\vec{\omega}$，我们未必都能找到相应的 $\vec{u}$ 使该关系成立。更糟的是，一个常见的微分恒等式是，对于任意光滑标量场f，都有 $\nabla \times \nabla f = 0$，这意味着，对于方程 3.4 的一个解 $\vec{u}$，我们可以加上任意标量场f 的梯度 ∇f，从而得到一个新的解。

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R} \ , \nabla \times \vec{u} = \vec{\omega}$$
$$\Rightarrow \quad \nabla \times (\vec{u} + \nabla f) = \nabla \times \vec{u} + \overbrace{\nabla \times \nabla f}^{=0} = \vec{\omega}$$

如果我们想基于涡量，从流体动力学中获得实质性成果，显然需要找到一个合理的方法，从涡量得到唯一且有意义的速度。为此，我们首先需要证明解的存在性，然后消除速度场的不唯一性。

给定涡量场 $\vec{\omega}$，寻找合适速度场 $\vec{u}$ 的一种方法是寻找使差值最小的解。

$$\arg\min_{\vec{u}} \int\int\int ||\nabla \times \vec{u} - \vec{\omega}||^2$$

让我们尝试将其作为一个能量最小化问题来求解。设 $\vec{p}$ 为一个向量场，它会随着与原点距离的增加而衰减至零；设 s 为一个参数，用于控制 $\vec{p}$ 对输出的影响程度。那么，$\vec{u} + s\vec{p}$ 的能量为

$$g(s) := \int\int\int ||\nabla \times (\vec{u} + s\vec{p}) - \vec{\omega}||^2$$

如果我们假设选定的 $\vec{u}$ 满足 $\nabla \times \vec{u} = \vec{\omega}$，那么它必定是在$s = 0$处使该能量最小的函数，即 $g'(s) = 0$。这个论证可以用来推导$\vec{u}$必须满足的条件。我们先将 g 改写成更有用的形式。

$$\begin{aligned} g(s) &= \iiint (\nabla \times (\vec{u} + s\vec{p}) - \vec{\omega}) \cdot (\nabla \times (\vec{u} + s\vec{p}) - \vec{\omega}) \\ &= \iiint ||\nabla \times \vec{u} - \vec{\omega}||^2 + 2(\nabla \times \vec{u} - \vec{\omega}) \cdot (\nabla \times \vec{p})s + ||\nabla \times \vec{p}||^2 s^2 \end{aligned}$$

正如我们所见，数学之神赐予了我们一个简单的二次函数。对于这个二次函数，当满足以下条件时，$s = 0$ 使$g'(s) = 0$ 取最小值

$$\begin{aligned} 0 = & \iiint 2(\nabla \times \vec{u} - \vec{\omega}) \cdot (\nabla \times \vec{p}) \\ & = -2 \iiint \nabla \times (\nabla \times \vec{u} - \vec{\omega}) \cdot \vec{p} = 0 \end{aligned}$$

在上一部分中，我们使用了旋度算子的分部积分。

Le引理 19 (旋度分部积分)。 对于无边界流形上的向量场 $\vec{x}$、$\vec{y}$ y:

$$\int \vec{x} \cdot \nabla \times \vec{y} = - \int \nabla \times \vec{x} \cdot \vec{y}$$

若 $\vec{u}$ 满足 $\nabla \times \vec{u} = \vec{\omega}$，则 $\iiint \nabla \times (\nabla \times \vec{u} - \vec{\omega}) \cdot \vec{p} = 0$ 对任意函数 $\vec{p}$（该函数在远离原点时衰减至零）都成立。因此我们可以得出结论，以下表达式必定等于零

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{u} - \vec{\omega}) = 0 \Leftrightarrow \nabla \times \nabla \times \vec{u} = \nabla \times \vec{\omega} \tag{3.6}$$

这个关系看起来相当显然，但请记住，我们原本希望从能量最小化开始推导。现在我们知道，求解 $\nabla \times \nabla \times \vec{u} = \nabla \times \vec{\omega}$ 就能得到一个解。另一个微分恒等式指出

引理 20 (双重旋度)。 对于任意光滑向量场 $\vec{u}$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{u} = -\nabla \cdot \nabla \vec{u} + \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) \tag{3.7}$$

因此，我们得出结论，要使 $\nabla \times \vec{u} = \vec{\omega}$ 成立，必须满足条件

$$-\nabla \cdot \nabla \vec{u} + \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) = \nabla \times \vec{\omega} \tag{3.8}$$

奇妙之处就在这里。还记得我们的不可压缩条件（定义 2）吗？简而言之，它就是体积守恒条件，正如我们在第 2.1 节中推导的那样，最终可归结为无散条件。如果由给定涡量 $\vec{\omega}$ 导出的解 $\vec{u}$ 要用于描述不可压缩流体，我们还必须要求它满足不可压缩性方程 $\nabla \cdot \vec{u} = 0$。这意味着现在我们也可以在推导解 $\vec{u}$时使用 $\nabla \cdot \vec{u} = 0$；不过，别忘了之后还要检查最终得到的解是否确实满足这个条件（见第 3.5 节）。利用这一点，可以将方程简化为

$$\nabla \cdot \nabla \vec{u} = \Delta \vec{u} = -\nabla \times \vec{\omega} \tag{3.9}$$

没想到吧！泊松方程悄然出现在我们的问题中！这再好不过了，因为关于如何求解泊松方程，已有大量相关理论。求解泊松方程的一种具体方法是使用格林函数，这种方法在我们的情境中最有帮助。

格林函数在第14节中定义如下：

$$G : M^2 \setminus \{(x,x) : x \in M\} \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto G(x,y),\ \Delta_x G(x,y) = \delta(x-y) \tag{3.10}$$

这样，我们便能将泊松方程的解表示为函数$G(x,p)$的组合，其中M 曲面上的p 可以按需取任意多个。

命题21（毕奥-萨伐尔定律）**.** 给定涡量 $\vec{\omega}$，方程 $\Delta \vec{u} = -\nabla \times \vec{\omega}$ 的一个解可表示为

$$\vec{u}(x) = \int_M \nabla_p G(x,p) \times \vec{\omega}(p)\, dp \tag{3.11}$$

证明。 首先，我们对右侧应用基本的分部积分，以替换

$$\nabla_p G(x,p) \times \vec{\omega}(p) = -G(x,p)\, \nabla_p \times \vec{\omega}(p)$$

现在，我们只需将 Δ_x 代入其中，验证该解即可。

$$\begin{aligned}
\Delta_x \vec{u}(x) &= \Delta_x \int_M \nabla_p G(x,p) \times \vec{\omega}(p)\, dp \\
&= \Delta_x - \int_M G(x,p)\, \nabla_p \times \vec{\omega}(p)\, dp \\
&= -\int_M \Delta_x G(x,p)\, \nabla_p \times \vec{\omega}(p)\, dp \\
&= -\int_M \delta(x-p)\, \nabla_p \times \vec{\omega}(p)\, dp \\
&= -\nabla \times \vec{\omega}(x)
\end{aligned}$$

□

由此，我们展示了一种通过涡量计算速度的方法，即所谓的毕奥-萨伐尔定律[Bri15]。无散条件消除了部分非唯一性。对于标量函数 f

$$\nabla \times (\vec{u} + \nabla f) = \vec{\omega}$$

$$\nabla \cdot (\vec{u} + \nabla f) = 0 \Longrightarrow \Delta f = 0$$

因此，速度场仅剩下调和函数 f（定义：$\Delta f = 0$）这一自由度。不过，在下一节中，我们将仅用流函数来表示 $\vec{u} = \nabla \times \vec{\psi}$。

3.5 计算流函数

第3.4节为我们提供了足够的技巧来构造这种流体的流函数。这样做还将使我们能够证明，由毕奥-萨伐尔定律（命题21）所确定的速度场 $\vec{u}$ 也是无散的。

命题 22（$\vec{u}$的流函数）。给定向量场 $\vec{u}(x) = \int_M \nabla_p G(x,p) \times \vec{\omega}(p)\, dp$，以下是方程 $\vec{u} = \nabla \times \vec{\psi}$ 的一个解，因此也是一个流函数：

$$\vec{\psi} : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{\psi}(x) := \int_M G(x,p)\, \vec{\omega}(p)\, dp$$

证明。[Bri15] 根据构造，格林函数总是对称的 $G(x,p) = G(p,x)$。因此我们也有

$$\nabla_p G(x,p) = \nabla_x G(p,x)$$

我们结合分部积分（引理 19）来运用以下巧妙方法：

$$\begin{aligned}
\vec{u}(x) &= \int_M \nabla_p (G(x,p)) \times \vec{\omega}(p)\, dp \\
&= \int_M \nabla_x G(x,p) \times \vec{\omega}(p)\, dp \\
&= \int_M \nabla_x \times (G(x,p)\vec{\omega}(p))\, dp \\
&= \nabla_x \times \underbrace{\left(\int_M G(x,p)\vec{\omega}(p)\, dp \right)}_{\vec{\psi} :=}
\end{aligned}$$

最后一个方程符合流函数的定义 $\vec{u} = \nabla \times \vec{\psi}$，只要我们将积分项定义为流函数即可。□

好的！别忘了，我们在方程（3.8）中应用了无散条件，从而得到泊松问题。现在，我们必须检查 $\vec{u}$ 的解是否确实无散。多亏了流函数 $\vec{\psi}$，这很容易看出，因为旋度的散度始终为零。

$$\nabla \cdot \vec{u} = \nabla \cdot \nabla \times \vec{\psi} = 0 \tag{3.12}$$

由此可知，掌握 $\vec{\psi}$ 后，我们便能根据给定的涡量场 $\vec{\omega}$轻松计算出一个（非唯一的）无散速度场 $\vec{u}$。然而，要找到函数 $\vec{\psi}$ 的表达式并不容易，因为它在很大程度上取决于格林函数G 以及区域 M的形状。我们仍需先求解泊松问题 $\Delta G = \delta$，所以我们的工作还没有结束。

结束本节之前，我们想指出，还有另一个值得注意的有趣关系。

定理23。 对于涡量为 $\vec{\omega}$、流函数为 $\vec{\psi} = \int_M G(x,p)\ \vec{\omega}(p)\, dp$ 的流体，我们有

$$\vec{\omega} = -\Delta\vec{\psi}$$

因此， $\vec{\psi}$ 和 $\vec{\omega}$ 也构成一个泊松问题。

证明。 首先注意到， $\vec{\psi}$的散度为零：

$$\begin{aligned}
\nabla_x \cdot \vec{\psi}(x) &= \nabla_x \cdot \int_M G(x,p)\ \vec{\omega}(p)\, dp \\
&= \int_M (\nabla_x \cdot G(x,p))\ \vec{\omega}(p)\, dp \\
&= \int_M (\nabla_p \cdot G(x,p))\ \vec{\omega}(p)\, dp \\
&= -\int_M G(x,p)\ \nabla_p \cdot \vec{\omega}(p)\, dp \\
&= -\int_M G(x,p)\ \underbrace{\nabla_p \cdot \nabla \times \vec{u}(p)}_{=0}\ dp = 0
\end{aligned}$$

这里用到了旋度的散度恒为零这一性质。现在只需对方程 $\vec{u} = \nabla \times \vec{\psi}$ 两边取旋度，并使用引理20双重旋度：

$$\begin{aligned}
\omega &= \nabla \times \vec{u} \\
&= \nabla \times \nabla \times \vec{\psi} \\
&= -\nabla \cdot \nabla\vec{\psi} + \underbrace{\nabla(\nabla \cdot \vec{\psi})}_{=0} = -\Delta\vec{\psi}
\end{aligned}$$

□

3.6 在二维中计算流函数

到目前为止，本节仅介绍了流函数的三维理论。要将这些知识应用于曲面，并不需要做太多工作。事实上，下面的定理让从三维过渡到二维显得轻而易举。请注意，此时速度场将与曲面相切，而涡量将指向法向，即$\vec{\omega} = \omega n$。

备注 1（符号约定混淆警告）。 三维和二维流函数的定义分别由方程 $\vec{u} = \nabla \times \vec{\psi}$ 和 $\vec{u} = \vec{n} \times \nabla \psi$ 给出。也可以同时在右侧以及 $\vec{\psi}$、ψ 前添加负号，而不会产生任何影响。文献中两种符号约定都曾被采用，而这里使用的两个方程实际上会得出相反的符号。这一点在方程 $\Delta \vec{\psi} = -\vec{\omega}$、$\Delta \psi = \omega$中显而易见。为了与相关资料保持一致，这里也采用了这一符号约定。**这就是三维和二维流函数符号不同的原因**。

命题24（ $\vec{u}$的二维流函数）。 对于具有法向量 $\vec{n}$ 的曲面M 以及不可压缩流的速度矢量场 $\vec{u}$，若其涡量为 $\omega = \vec{n} \cdot \nabla \times \vec{u}$，则标量流函数可由下式确定：

$$\psi : M \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\psi(x) = \int_M G(x,p)\, \omega(p)\, dp$$

其中，$G\colon\ M^2 \setminus \{(x,x) : x \in M\} \longrightarrow \mathbb{R}$ 是曲面M的格林函数。

证明。 根据流函数的定义，我们要求

$$\vec{u} = \vec{n} \times \nabla \psi$$

如 [Dri15] plugin 中所示，将这一速度表达式代入涡量公式，可得

$$\omega = \Delta \psi$$

如第 3.4 节从涡量求速度中所述，我们将利用曲面M 的格林函数G 来求解泊松问题，从而得到公式

$$\psi(x) = \int_M G(x,p)\, \omega(p)\, dp$$

既然

$$\begin{aligned}
\Delta_x \psi(x) &= \Delta_x \int_M G(x,p)\, \omega(p)\, dp \\
&= \int_M \Delta_x G(x,p)\, \omega(p)\, dp \\
&= \int_M \delta(x-p)\, \omega(p)\, dp \\
&= \omega(x)
\end{aligned}$$

□

3.7 共形映射

现在我们将注意力转向共形映射理论。相关综述可见此处[Coh10]。我们还将回顾理解本学位论文所需的基础知识。首先，我们回顾黎曼度量的定义 [Wei03]。

定义25 （度量）。 流形M 上的度量 g 是一组定义在TM上的内积。对于任意$p \in M$，都有一个内积

$$g_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$

切向量X、$Y \in T_pM$被赋予$g_p(X,Y)$。

最直观的度量是欧几里得度量$g_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle = X^T Y = X \cdot Y$。度量定义了流形（如曲面）上的距离和面积的含义。带有度量的流形称为黎曼流形。

为了研究我们的零亏格闭曲面$M \subset \mathbb{R}^3$，我们需要一个从该曲面到球面 $\mathbb{S}^2$的共形映射。我们的思路是研究球面上采用修正度量的点涡动力学，而不是研究任意曲面M 上采用其欧几里得度量的点涡动力学。

在介绍保角映射之前，我们还需要回顾传输。

定义 26 （传输）。 设$f : M \longrightarrow N$是两个流形之间的映射，且$p \in M$，$X \in T_pM$。对于一条光滑曲线 $\gamma : (-1,1) \longrightarrow M$，满足 $\gamma(0) = p$，以及$X = \gamma'(0) \in T_pM$，我们定义

$$d_f X := (f \circ \gamma)'(0)$$

我们称 $d_f X$为 通过 f 将 X 从 M 传输到 N。它是良定义的。注意，X、$Y \in T_pM$，而 $d_f X$、$d_f Y \in T_{f(p)}N$。

传输实质上描述了切向量如何通过 f 从 T_pM 传输到T_pN。现在我们想要对这样的映射进行分类：它们传输向量时不会扭曲向量之间的角度。

定义 27 （共形映射）。 设 M、$N \subset \mathbb{R}^3$ 是带有度量$\tilde{g}$、g 的黎曼流形。若映射 $f : M \longrightarrow N$ 处处保角，则称其为 共形映射 。也就是说，对于任意 $p \in M$ 以及 X、$Y \in T_pM$，都有

$$\frac{\tilde{g}_p(X,Y)}{\sqrt{\tilde{g}_p(X,X)\tilde{g}_p(Y,Y)}} = \frac{g_{f(p)}(d_f X, d_f Y)}{\sqrt{g_{f(p)}(d_f X, d_f X) g_{f(p)}(d_f Y, d_f Y)}}$$

从上面的方程可以看出角度保持不变。仅对于欧几里得度量，该定义表示：

$$\cos(\theta_M) = \frac{\langle X, Y \rangle}{|X||Y|} = \frac{\langle d_f X, d_f Y \rangle}{|d_f X||d_f Y|} = \cos(\theta_N)$$

其中， θ_M、 θ_N分别表示X、Y在M中的夹角，以及$d_f X$、$d_f Y$在N中的夹角。

定理 28 （亏格为零的闭曲面上的共形映射）**.** 设 $M \subset \mathbb{R}^3$ 为亏格为零的闭曲面。则存在一个共形映射

$$f : M \longrightarrow \mathbb{S}^2$$

证明。 这是一致化定理 的直接结果，该定理指出，任意曲面上的任意黎曼度量都共形等价于一个常曲率度量。亏格 0 的闭曲面共形等价于曲率为 1 的常曲率曲面，而该曲面必定是 $\mathbb{S}^2$。 □

因此，我们当然需要一个共形映射；我们不会做懒惰的数学家，只说“它存在。如何找到它不是我的问题！”而是将通过实现第8章介绍 Kazhdan 等人的方法 [KSBC12]。图3.4展示了用这种方法得到的一个共形映射示例。请注意，通过观察纹理上的直角，可以看到球面上的所有角度在闭曲面上都得到了保持。如果共形映射 f 是双射的，那么逆映射 f^{-1} 也将是一个共形映射。

当然，我们也不能忘记共形因子。由于保角映射保持角度，它们仍可能无法保持尺度。共形因子恰好刻画了这一点。

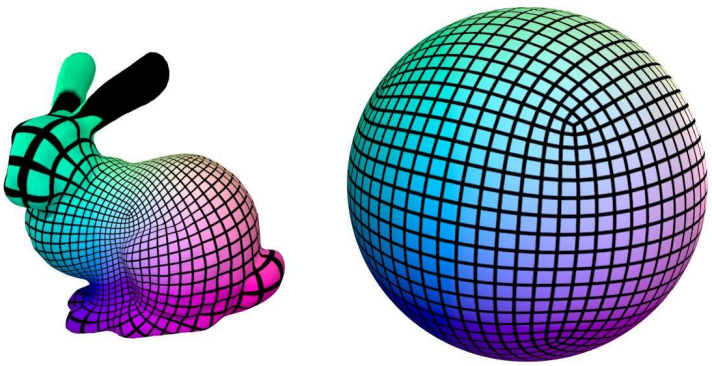


图 3.4：具有许多直角的纹理正通过保角映射传输。颜色由球面上的法线决定。直角得以保留。

定义 29 （共形因子）。 给定一个共形映射f：$M \longrightarrow \mathbb{S}^2$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中，共形因子定义为满足以下条件的函数h：$M \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\tilde{g}_p(X,Y) = h(p)^2 g_{f(p)}(d_f X, d_f Y)$$

其中X、Y、$d_f X$、$d_f Y$的定义与上文保角映射的定义相同。

共形因子的存在性源于共形映射的存在性。细心的读者很快就会从保角映射的定义中注意到：

$$\frac{\tilde{g}(X,Y)}{\sqrt{\tilde{g}(X,X)\tilde{g}(Y,Y)}} = \frac{g(d_f X, d_f Y)}{\sqrt{g(d_f X, d_f X) g(d_f Y, d_f Y)}}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{g}(X,Y) = \underbrace{\sqrt{\frac{\tilde{g}(X,X)\tilde{g}(Y,Y)}{g(d_f X, d_f X) g(d_f Y, d_f Y)}}}_{h^2:=} g(d_f X, d_f Y)$$

需要牢记的重要一点是，从数学角度来看，点涡是否.....

1. 位于具有欧几里得度量的曲面M 上，或者.....

2. 位于 $\mathbb{S}^2$ 上，采用由从M到 $\mathbb{S}^2$的共形映射f 所导出的调整后的度量 $\tilde{g}$ 。

因此，为了便于之后应用一个定理，我们就采用上面提到的第二种视角吧。

注记 2 （共形等价）。我们多次讨论过，M 是一个具有零亏格和欧几里得度量的闭曲面。我们也可以讨论M 与N的共形关系，也就是说，实际上我们讨论的是带有修正度量的N 。因此，从某种意义上说，M=N ，前提是显然我们使用的是由共形映射得到的度量，而非欧几里得度量。

真正的妙处在于下面这个推论：

推论 30（共形映射后的新度量）。设 f : M ⟶ N 是从具有欧几里得度量的曲面 M 到 N 的双射共形映射。由此可得， $\tilde{f} := f^{-1}$ 也是一个共形映射，并且对于 $\tilde{X}$、$\tilde{Y} \in \in TpM$，有 $\langle \tilde{X}, \tilde{Y} \rangle = h(p)^2 g f(p)(d f \tilde{X}, d f \tilde{Y})$。若已知共形因子 h : M ⟶ N，我们便可以直接指定 N 的度量 g，如下所示：

$$g_q(X,Y) = \frac{1}{h(\tilde{f}(q))^2} \langle d_{\tilde{f}} X, d_{\tilde{f}} Y \rangle$$

其中 $q \in N$、X、$Y \in TqN$ 以及 $d_{\tilde{f}} X$、$d_{\tilde{f}} Y \in T_{\tilde{f}(q)} M$。

这个推论将使我们能够在共形映射后对目标度量进行操作，进而让我们使用 Boatto 关于点涡动力学的结果 [BK15] 。我们究竟如何获取共形因子？我们将在实现章节 8 的第 8.4.2 节离散共形因子中展示一种方法。参见图 3.5。

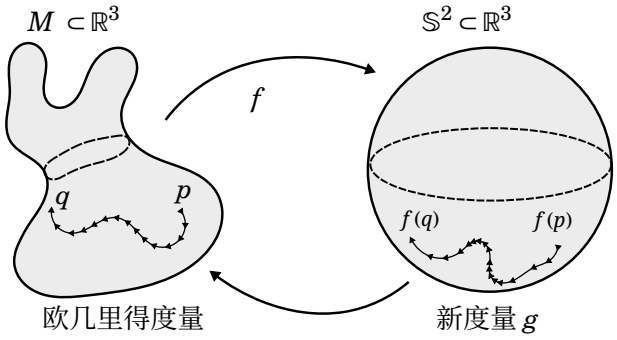


图 3.5：共形映射 f：$M \to \mathbb{S}^2$ 将一条曲线从p 映射到q。注意，曲线现在发生了变形，但仍可通过保角映射f、f^{-1}直接识别。

3.8 辛流形与辛梯度

我们还必须回顾辛流形理论，因为它将在探索曲面上的点涡动力学时发挥关键作用。我们强烈建议有志深入阅读的读者参阅 V.I. Arnold 的著作 [VIA89]。不过，由于我们的点涡模型并不需要完整无删节的理论，本章只会重述真正需要的内容，以免增加读者的负担。我们特别注重以几何方式阐释这一理论，使其更易于理解。

能量守恒的思想将成为本学位论文中推导涡旋运动的关键论据。能量由系统所有可能构型空间上的一个标量函数 H 表示，称为哈密顿量。

虽然我们尚未定义点涡是什么，但可以做一个小小的思想实验。设曲面上有 $n \in \mathbb{N}$ 个点涡$p_i \in M$。它们共同定义了总动能 $H(p_1,...,p_n)$。照常理，我们要求H 根据能量守恒保持不变，并且知道 H 存在于空间M^n上。我们已经可以看出，所有可能构型的集合

$$\{ (p_1,...,p_n) \in M^n \ : \ H(p_1,...,p_n) = const. \}$$

是M^n中的一个流形。因此，我们可以通过深入研究这个流形来描述点涡系统；图3.6试图将其概念化。为此，我们首选的工具是辛流形和辛梯度。

什么是辛梯度 sgrad$H$? 一般来说，我们知道函数H 的梯度 grad$H$ 指向最陡峭的方向，但由于我们计划守恒能量H ，因此希望沿着能够保持H 恒定的方向移动。

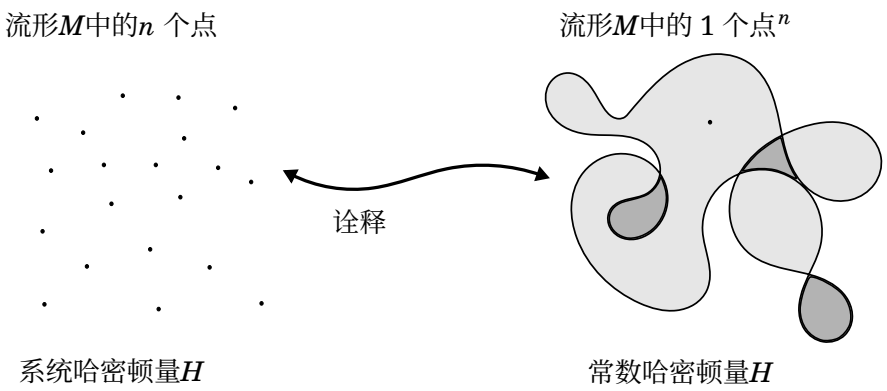


图 3.6：将 n 点动力学重新诠释为高维流形上的单点动力学这一概念的示意图。

在具有欧几里得度量的二维曲面上，显然，H 保持不变的方向所对应的切向量必须垂直于梯度 grad$H$。为什么？因为任何方向导数都可以用一个单位切向量表示：$X \in T_pM$，并且$dH(X) = \langle \operatorname{grad} H, X \rangle$，因此$dH(X) = 0 \Leftrightarrow X \perp \operatorname{grad} H$。曲面的二维性使我们能够轻松地利用法向量 $\vec{n}$ 和叉积，在T_pM 中定义垂直向量。这个算子

$$\vec{n} \times (\cdot) : T_pM \longrightarrow T_pM$$

$$X \mapsto \vec{n}(p) \times X$$

恰好是在曲面上逆时针旋转90度。法向量的要求不会成为问题，因为我们始终只处理亏格 0 的闭曲面，而这类曲面总是可定向的。图 3.7 展示了这一点。

然而，上述几何描述只适用于欧几里得度量的情形。为了随后推导辛梯度经过共形映射传输后的变化，我们遗憾地必须深入讨论更多细节。

定义 31（辛流形）。若可微流形 M 配备了闭非退化二形式 $\forall p \in M$，$\sigma_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$，则称其为辛的。$\sigma$ 称为辛形式。

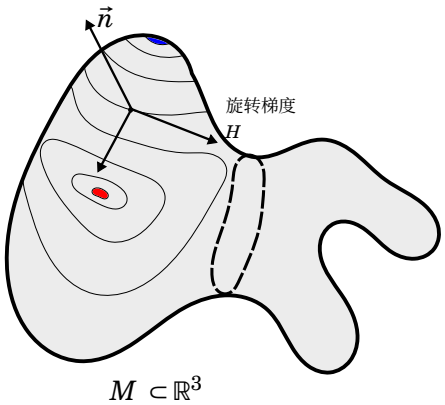


图 3.7：欧几里得曲面 $M \subset \mathbb{R}^3$ 上函数H的等值线所对应的辛梯度示意图。红色和蓝色分别表示H的最大值和最小值。

注 3（辛流形）。 σ 什么？什么是闭非退化二形式？简而言之，它是在T_pM 上的交替非退化双线性映射，其外微分为零。什么是外微分？建议好奇的读者看看 [DKT06]，因为对于我们在 $\mathbb{R}^3$ 中的情形，可以使用一个更简单的框架。

我们讨论的所有情形都涉及二维曲面$M \subset \mathbb{R}^3$，其法向量为 $\vec{n}$，且与具有欧几里得度量的曲面共形。因此，只需使用

$$\sigma_p(X,Y) := g_p(X, \vec{n}(p) \times Y)$$

在流形M 上，函数$H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ 的梯度可以利用度量g来定义，具体为

(3.13) $$Y = \operatorname{grad} H \in T_pM \Leftrightarrow \forall X \in T_pM : g_p(X,Y) = dH(X)$$

其中，$dH(X)$是标量函数H沿X的方向导数。我们将用这个方程来说明辛梯度与通常的梯度之间的类比。

定义 32（辛梯度）**.** 对于具有法向量$n : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ 的二维定向流形$M \subset \mathbb{R}^3$，以及光滑函数$H : M \longrightarrow \mathbb{R}$，辛梯度 sgrad$H$ 定义为满足下式的向量Y

$$Y = \operatorname{sgrad} H \in T_pM \Leftrightarrow \forall X \in T_pM : \sigma_p(X,Y) = dH(X)$$

它不仅与梯度正交，而且在 σ的定义中也遵循度量g 。现在，我们终于具备了足够的基础，可以了解辛梯度如何适应通过共形映射进行的传输。

我们需要 $\mathrm{f} : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N}$ 是一个双射保角映射，其共形因子为 $\mathrm{h} : \mathrm{M} \longrightarrow \mathbb{R}$。如前所述，在二维可定向曲面 M、N 上，辛形式已经可以确定。~ ~M 是欧几里得的，N 配备度量 g，因此 $\sigma_{p\in M} = \langle \mathrm{X}, \vec{\mathrm{n}}_M(\mathrm{p}) \times \mathrm{Y} \rangle$ 和 $\sigma_{q\in N} = \mathrm{g}(\mathrm{X}, \vec{\mathrm{n}}_N(\mathrm{q}) \times \mathrm{Y})$~ ~分别成立，其中 $\mathrm{p} \in \mathrm{M}$，$\mathrm{q} \in \mathrm{N}$，X、$\mathrm{Y} \in \mathrm{T}_p\mathrm{M}$，X、$\mathrm{Y} \in \mathrm{T}_q\mathrm{N}$。$\mathrm{H} : \mathrm{N} \longrightarrow \mathbb{R}$是我们要用来计算梯度的光滑函数。

由于 M 是欧几里得的，$p \in M$ 处的辛梯度为

$$\operatorname{sgrad}_{p\in M} H = \vec{n}_M(p) \times \operatorname{grad}_p H(p)$$

其中 $\vec{n}_M(p)$是曲面M上p 处的法向量。现在的关键问题是，我们如何定义N的辛梯度，即旋转梯度$q\in N$？

定理 33 （共形映射后的辛梯度）**.** 设M 为具有欧几里得度量 $\tilde{g} = \langle , \rangle$ 的二维曲面，且N 为具有度量g的二维曲面。$f: M \longrightarrow N$ 是具有共形因子$h: M \longrightarrow \mathbb{R}$的双射保角映射，$\tilde{f}: = f^{-1}$。$H: N \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个光滑函数$\tilde{\quad}$ $\tilde{\quad}$，且$H: = H \circ f$是其到N的推前。则：

$$\operatorname{sgrad}_{q \in N} \tilde{H}(q) = h(\tilde{f}(q))^2 d_f \operatorname{sgrad}_{\tilde{f}(q) \in M} H = h(\tilde{f}(q))^2 \vec{n}_N() \times d_f \operatorname{grad}_{\tilde{f}(q)} H$$

证明。 图 3.8 展示了我们要研究的内容。首先，我们需要回顾推论 30，其中指出，N 上q 处的度量 g 可以用逆保角映射 $\tilde{f} = f^{-1}$来描述。

$$g_q(X,Y) = \frac{1}{h(\tilde{f}(q))^2} \langle d_{\tilde{f}} X, d_{\tilde{f}} Y \rangle$$

因此，$g_q(X,Y) = 0 \Leftrightarrow \langle d_{\tilde{f}} X, d_{\tilde{f}} Y \rangle = 0$；根据欧几里得度量，我们知道，最后一个等式成立的情形是$d_{\tilde{f}} X$ 和$d_{\tilde{f}} Y$ 彼此垂直。现在，由于保角映射保持角度，我们立刻知道，传输$d\tilde{f}$ 没有改变角度，因此

$$\begin{aligned} g_q(X,Y) = 0 &\Leftrightarrow \langle d_{\tilde{f}} X, d_{\tilde{f}} Y \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow d_{\tilde{f}} X, d_{\tilde{f}} Y \text{ right angled} \\ &\Leftrightarrow X, Y \text{ right angled} \\ &\Leftrightarrow \langle X, Y \rangle = 0 \end{aligned}$$

这尤其意味着

$$d_f(\vec{n}_M(p) \times \tilde{X}) = \vec{n}_N(f(p)) \times d_f \tilde{X}$$

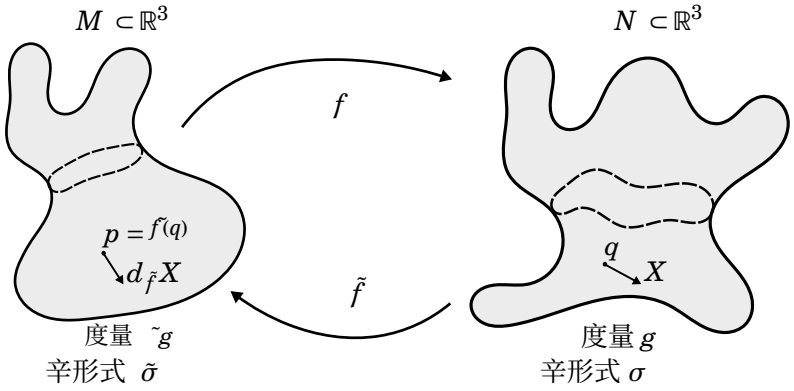


图 3.8：我们在本理论中所处理的数学对象概览 em.

这个优美的结果现在将帮助我们表示赋有度量g的N上的辛梯度。设$\tilde{\sigma}$、σ分别为M和N上的辛形式，则该共形映射建立了

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_p(X,Y) &= \tilde{g}_p(X, \vec{n}_M(p)\times Y) \\ &= h(p)^2 g_{f(p)}(d_f X, d_f(\vec{n}_M(p)\times Y)) \\ &= h(p)^2 g_{f(p)}(d_f X, \vec{n}_N(f(p))\times d_f Y) \\ &= h(p)^2 \sigma_{f(p)}(d_f X, d_f Y)\end{aligned}$$

这个结果将两个辛形式巧妙地联系在一起。当然，我们也可以通过使用f而不是f来反转这一陈述~。我们要寻找一个$Y \in TqN$的表达式，使其符合我们对辛梯度的定义。

$$\begin{aligned}d\tilde{H}(X) &= \sigma_q(X,Y) \\ d(H\circ\tilde{f})(X) &= \frac{1}{h(\tilde{f}(q))^2}\tilde{\sigma}(d_{\tilde{f}}X, d_{\tilde{f}}Y) \\ dH(d_{\tilde{f}}X) &= \tilde{\sigma}(d_{\tilde{f}}X, \frac{1}{h(\tilde{f}(q))^2}d_{\tilde{f}}Y) \\ dH(\tilde{X}) &= \tilde{\sigma}(\tilde{X}, \frac{1}{h(\tilde{f}(q))^2}d_{\tilde{f}}Y)\end{aligned}$$

~将$X := d\ {}_{\sim}fX \in T\ {}_{\sim}f(q)M$重新命名后，便能清楚看出它与曲面$M$上的辛梯度之间的联系。根据其定义可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{h(\tilde{f}(q))^2}d_{\tilde{f}}Y &= \mathrm{sgrad}_{\tilde{f}(q)}H \\ d_{\tilde{f}}Y &= h(\tilde{f}(q))^2\,\mathrm{sgrad}_{\tilde{f}(q)}H \\ d_f d_{\tilde{f}}Y &= d_f(h(\tilde{f}(q))^2\,\mathrm{sgrad}_{\tilde{f}(q)}H) \\ Y &= h(\tilde{f}(q))^2 d_f\,\mathrm{sgrad}_{\tilde{f}(q)}H \\ \mathrm{sgrad}_q\tilde{H} &= h(\tilde{f}(q))^2 d_f(\vec{n}_M(\tilde{f}(q))\times \mathrm{grad}_{\tilde{f}(q)}H) \\ \mathrm{sgrad}_q\tilde{H} &= h(\tilde{f}(q))^2\vec{n}_N(q)\times d_f(\mathrm{grad}_{\tilde{f}(q)}H)\end{aligned}$$

至此，我们的证明结束。

□

注记 4（共形映射后的辛梯度）**.** 我们使用了共形关系$\tilde{g} = h^2 g$，用于映射$f\colon M \longrightarrow N$，其度量分别为 $\tilde{g}$、g，对应的流形分别为M、N。然而，有时也会改用关系$h^2\,\tilde{g} = g$。在这种情况下，定理 33 需通过翻转共形因子来作相应调整：

$$\operatorname{sgrad}_{q\in N}\tilde{H}(q) = \frac{1}{h(\tilde{f}(q))^2} d_f \operatorname{sgrad}_{\tilde{f}(q)\in M} H$$

到目前为止，我们只考察了$p \in M$中的一个点，并为这个点定义了辛梯度。如果我们想描述n个点的动力学，该如何使用M^n中一点的辛梯度呢?

$$\underbrace{M \times \ldots \times M}_{n\text{times}} = M^n$$

答案是，我们需要取n个辛梯度，并将它们合并为一个作用于各个空间的大算子。设想在一个哈密顿量为H的n点系统中，有这些点：$p_1, \ldots, p_n \in M$。如果在$t = 0$时刻固定其中$n-1$个点，系统就会重新变成一个单点系统，而可移动点p_i的运动又可以像上文所述那样用M上的辛梯度来描述。对于p_i的运动而言，在无穷小尺度上，其他$n-1$个点是否固定并无区别，因此我们可以用每个点各自的辛梯度来表示其运动。

为了写出统一表示 n 点系统中每个点的所有辛梯度的线性算子，我们将算子 $\vec{n}\times(\,)$ 改写为一个 3×3 矩阵

$$[\vec{n}]_\times = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} \iff [\vec{n}]_\times p = \vec{n} \times p$$

接下来，我们将所有点坐标$p \in M$堆叠成一个位于$\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{\dim(M)}$中的大向量，并定义矩阵：

$$J = \left(\begin{array}{c|c|c|c} [\vec{n}(p_1)]_\times & & & \\ \hline & [\vec{n}(p_2)]_\times & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & [\vec{n}(p_n)]_\times \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{\dim(M)n \times \dim(M)n}$$

因此，$H\colon M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 的辛梯度现在变为

$$\operatorname{sgrad}_{\mathbf{p}} H = J\nabla H$$

如果这种思路听起来有些奇怪，我们想提醒大家以下这一点：设想在 $\mathbb{R}^3$ 中的$n \in \mathbb{N}$体动力学，其中每个点都由位置x_i和动量p_i描述。

能量通常由势能和动能构成，因此是H的函数：$M^n \longrightarrow \mathbb{R}$，其中$M$是位置-动量空间$M = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$。哈密顿力学认为，这个系统的时间演化由以下因素唯一确定：

$$\forall i : \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \frac{dx_i}{dt} = +\frac{\partial H}{\partial p_i}$$

事实上

$$\forall i : \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx_i}{dt} \\ \frac{dp_i}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\frac{\partial H}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_i} \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{pmatrix} = J_i \operatorname{grad}_M H = \operatorname{sgrad}_M H$$

其中，$\begin{pmatrix} x_i p_i \end{pmatrix}$是位置-动量空间$M = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$中的一个元素。这仅展示了$M$中一个$i$对应的辛梯度。

整个系统会将所有i排列在同一个向量中，并配上矩阵

$$J = \left(\begin{array}{c|c|c|c} J_1 & & & \\ \hline & J_2 & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & J_n \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

J_i是位置-动量空间M中$\operatorname{grad}_M H$的旋转。J只是汇集各个分离空间中的所有这些旋转，以便将其作用于M^n中的元素。因此，我们整个哈密顿系统都可以用$\operatorname{sgrad}_{M^n} H = J \operatorname{grad}_{M^n} H$来描述。这里，$\operatorname{sgrad} H = J \nabla H$。

CHAPTER 4

点涡

终于，我们来到了深入探讨本学位论文主要方法细节的章节。前几章介绍了相关历史、背景、研究动机和基础知识，以帮助读者理解接下来要呈现的内容。现在，我们将正式定义点涡，并说明如何利用它们实现快速流体模拟。

阅读时请牢记以下内容：点涡试图通过有限个点来近似任意给定的涡量函数 ω 。

4.1 点涡的定义

定义 34 （点涡）。 给定$n \in \mathbb{N}$个点$p_i \in M$以及分别对应的n个标量 $\omega_i \in \mathbb{R}$，如果它们所代表的流体的涡量表示为以下形式，我们就称这些“p_i”为具有涡强度 ω_i 的点涡：

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \delta(x - p_i) \tag{4.1}$$

其中 δ 是M上的狄拉克δ函数 .

这是一个大胆的举动吗？我们不再适应给定的初始速度场 $\vec{u}$ ，而是将速度场置之不理，按照我们希望的方式定义涡量场 ω 。此外，我们还在曲面上的点涡处引入了奇点和尖峰。

别担心，我们现在就来解释。为此，我们需要回顾一下我们在第2.4节中对涡量的描述。在那里，我们说明了涡量的大小如何描述物体在流中所经历的旋转程度。流体中螺旋状漩涡的中心处，旋转程度极高，因此我们要通过聚焦于涡量最强的部分来近似涡量。

使用 狄拉克δ函数 δ 总是有风险的，只有在涉及积分时才有意义。这正是我们在第3.6节计算二维流函数中所做的准备。当我们试图计算非常接近点涡的速度时，奇点会成为问题；但正如我们稍后将看到的，计算点涡自身的速度并不难。在离这些点有一定距离处计算速度，所得结果与涡量并非集中在一点、而是分布在该点邻域内时相似。原因类似于我们在计算引力时常常可以把行星视为点质量。

我们所做的只是近似地令 $\nabla \times \vec{u}(x) = \omega(x) \approx \sum^{n}{}_{i=1} \omega_i \delta(x - p_i)$。作为一种直观的比喻，我们可以看看味噌汤碗，并用勺子在里面划动。你会注意到曲面上有两个朝相反方向旋转的螺旋。设想每个螺旋的中心都是一个点涡，而旋转速度就是它的涡强度。参见图4.1。

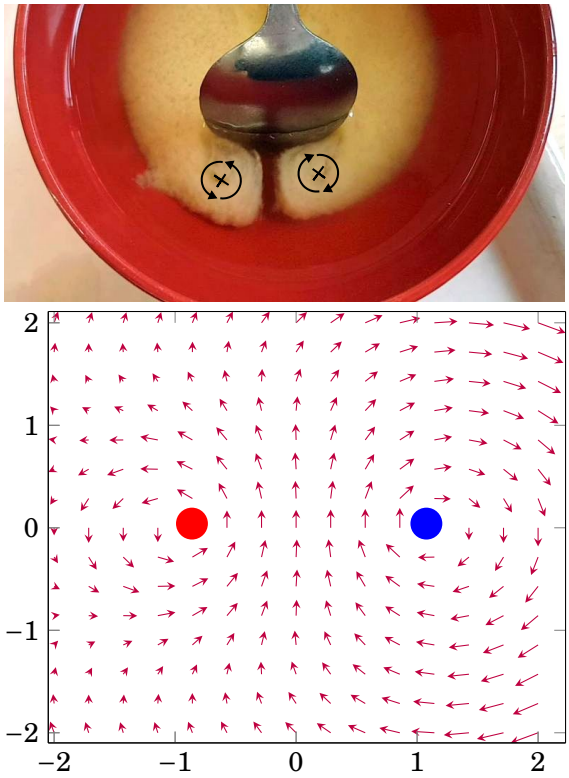


图4.1：数学家眼中的汤。勺子正在向上滑动，此时流体从勺子边缘绕两点形成螺旋。我们将点涡视为每个螺旋的中心。

4.2 点涡流函数的推导

在第3.6节中，我们通过结合积分与格林函数G的论证，推导了如何从涡量计算速度场。我们的点涡定义（定义34）使用了狄拉克δ函数，而这正是我们即将利用流函数 ψ来处理的。

定理35 （点涡流函数）。 给定曲面M上涡量为$\omega(x) = \sum^n{}_{i=1} \omega_i \delta(x - p_i)$的点涡系统，相应的流函数可写为

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i G(x, p_i)$$

对于$x \notin \{p_1, \ldots, p_n\}$。

证明。 我们先回顾命题24，因为它将涡量 ω 与二维流函数 ψ联系起来。

$$\psi(x) = \int_M G(x,p)\, \omega(p)\, dp \tag{4.2}$$

现在，我们可以代入点涡旋假设，并根据流函数的定义，用有限个狄拉克δ函数之和来表示涡量 ω 。这会引出以下一系列变化：

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \int_M G(x,p)\,\omega(p)\,dp \\ &= \int_M G(x,p)\,\sum_{i=1}^{n}\omega_i\delta(p-p_i)\,dp \\ &= \sum_{i=1}^{n}\omega_i\int_M G(x,p)\delta(p-p_i)\,dp \\ &= \sum_{i=1}^{n}\omega_i G(x,p_i)\end{aligned}$$

由此完成了我们的证明。

□

4.3 点涡旋速度场

定理35给出了一个简便的方法：如果我们知道曲面 M 的格林函数，就能计算点涡旋系统的流函数。这样，我们便可以通过流函数，利用以下关系直接计算涡量所诱导的速度：

$$\vec{u} = \operatorname{sgrad}\psi$$

定理 36 （点涡旋速度场）。 设曲面 M 上有 $n \in \mathbb{N}$ 个点涡 p_i，其涡强度分别为 $\omega_i \in \mathbb{R}$，则在点 $x \in M$ 处、满足 $\forall i : x \neq p^j$ 的速度 $\vec{u}$ 可表示为

$$\vec{u}(x) = \sum_{i=1}^{n}\omega_i \operatorname{sgrad}_x G(x,p_i) \tag{4.3}$$

其中，J 表示绕曲面法向量逆时针旋转90度。

证明。J 只需将定理35中构造的流函数代入关系式 $\vec{u} = \vec{n} \times \nabla\psi$.

$$\begin{aligned}\vec{u}(x) &= \operatorname{sgrad}_x \psi(x) \\ &= \operatorname{sgrad}_x \sum_{i=1}^{n}\omega_i G(x,p_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\omega_i \operatorname{sgrad}_x G(x,p_i)\end{aligned}$$

□

现在，我们几乎可以在任意位置轻松求得流体速度场，并且可以对任意被动点进行平流输运。然而，我们仍然无法计算各个点涡处的速度。问题在于，当上式中$x = p_i$时，格林函数是奇异的。下一节将说明应如何计算 $\vec{u}(p_i)$。

4.4 点涡动力学

定理 36 使我们能够轻松求得远离点涡处的流体速度场。然而，我们仍需找到一个描述每个点涡运动的表达式。正如在第 3.3 节引入流函数时所提到的，流函数 我们可以使用以下公式计算流体中远离涡旋的任意点$q \in M$处的速度 $\vec{u}$：

$$\vec{u} = \vec{n} \times \nabla\psi = \operatorname{sgrad}\psi \tag{4.4}$$

上一个方程中的算子旋转梯度是旋转算子与梯度的组合，正如第3.8节所述。 $\vec{n}\times()$ 表示绕曲面法向量的逆时针旋转。在代入不同的格林函数之前，我们先归纳几条关于这个诱导速度场的结论。

在点涡本身的位置，我们无法计算速度，因为那里存在奇点。事实上，单个点涡诱导的速度与到该点的距离成反比，因此越接近涡点，速度就越趋于无穷大。点涡诱导的速率与点涡强度成正比 ω_i。见图 4.2。

图 4.3 展示了单个点涡 $\omega = \delta$ 在平面 $\mathbb{R}^2$上产生的流函数所诱导的速度场 $\vec{u} = J\nabla\psi$。即使不在平面上，我们也可以设想每个点涡都会在自身周围诱导旋转，其速度大小会随曲面上到该点的距离增加而成反比减小。涡强度为正时，旋转方向为逆时针；否则为顺时针。

我们该从哪里着手描述点涡的动力学？所有点涡所诱导的速度场如何影响点涡自身？最有力的依据来自第 2.5 节，我们在那里建立了涡量方程，并推导出如下结论：涡量

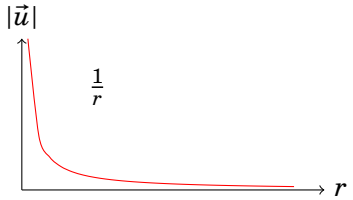


图 4.2：一个点涡诱导的速度 $|\vec{u}|$ 的大小与到该点的距离 r 的关系图。

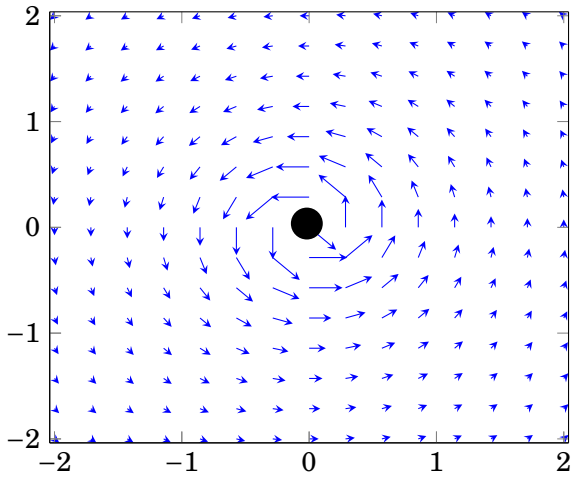


图 4.3：平面中单个点涡 $\omega(\vec{x}) = \delta(\vec{x})$ 所诱导的速度。涡旋用一个黑点表示。

只是沿着流体流动被平流输运 [ETK+07]。这意味着我们要让 ω 沿着它们诱导的速度场所形成的流进行平流输运，因此必须让点涡自身也沿着该流运动。要继续讨论，我们需要基尔霍夫假设 [KHP91]；下面将通过一些示例图来论证这一假设。

图4.4展示了三种不同情况下速度场的形态。首先，我们看到一个向左偏移且涡量强度为正的点涡。它的涡量为

$$\omega_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := +\delta\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \tag{4.5}$$

第二幅图中的点涡向右偏移，涡量为负，因此在其周围产生顺时针流动的速度场。它的涡量为

$$\omega_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := -\delta\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \tag{4.6}$$

图4.4的最后一幅图展示了两个点涡共同作用时的速度场。此时涡量为

$$\omega \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \omega_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \omega_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \delta\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) - \delta\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \tag{4.7}$$

这些图要传达的重要信息是，随着涡量叠加，速度场也会叠加。一个点涡会使另一个点涡产生的整个速度场发生移动，反之亦然。

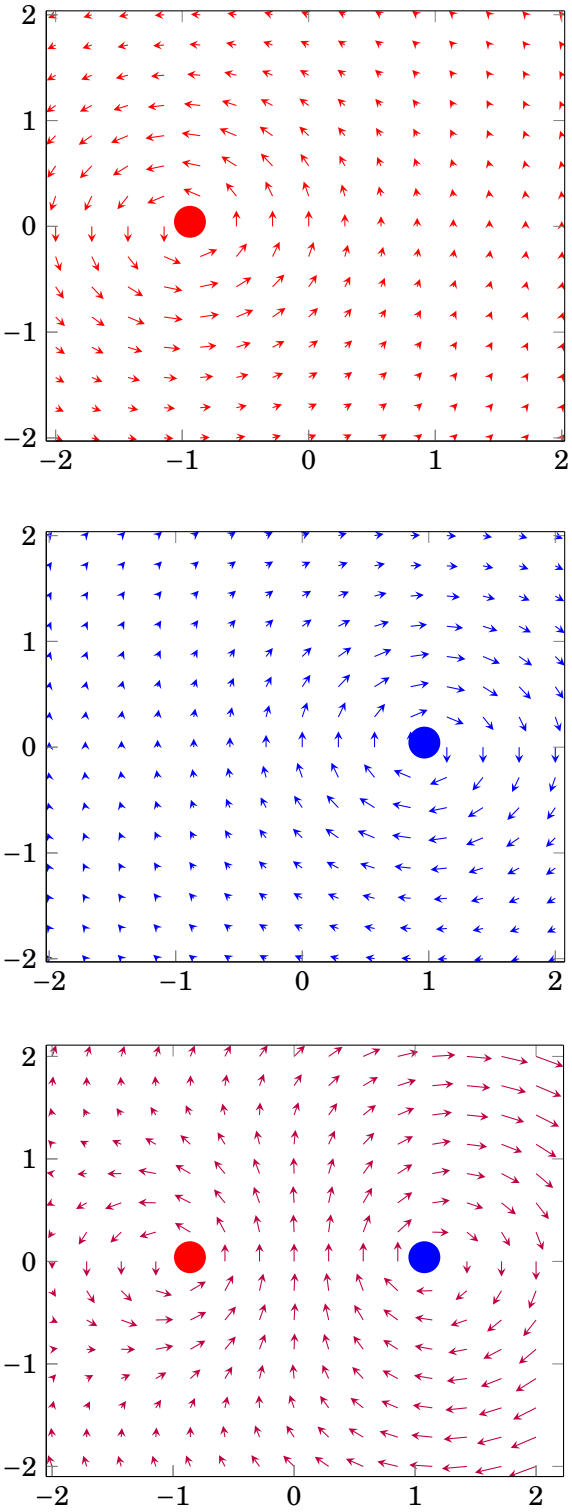


图4.4：左侧点涡的涡强度为 $\omega = +1$（上）。右侧点涡的涡强度为 $\omega = -1$（中）。两个点涡共同作用（下）。

推论 37 (涡量场叠加)**.** 设 M 为带有 $n \in \mathbb{N}$ 点涡 $p_i \in M$、涡量强度分别为 $\omega_i \in \mathbb{R}$ 的曲面。每个点涡定义一个涡量场

$$\tilde{\omega_i}(x) := \omega_i \delta(x - p_i)$$

每个涡量场在 $x \neq p_i$ 处诱导一个速度

$$\tilde{u}_i(x) := \omega_i \operatorname{sgrad} G(x, p_i)$$

点涡系统的合成涡量由下式给出

$$\omega(x) := \sum_{i=1}^{n} \tilde{\omega}_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \delta(x - p_i)$$

由合成涡量产生的速度场则等于对 $x \notin \{p_1, \ldots, p_n\}$ 分别诱导的速度场之和。

$$\vec{u}(x) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{u}_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \operatorname{sgrad} G(x, p_i)$$

证明. 该证明只是运算线性性的直接结果。 □

推论 37 为我们提供了一个计算点涡自身速度的线索。关键思想是，每个点涡的运动仅由所有其他点涡所产生的速度场决定。这是基尔霍夫 [KHP91] 所采用的标准假设。

图4.4用平面上的两个涡旋说明了这一点。可以看到，蓝色点涡本身并不能确定其所在位置的速度方向，但红色点涡确实会在蓝色点涡的位置产生速度。事实上，我们可以想象，蓝色点涡产生的整个速度螺旋结构都受到红色点涡速度场的平流作用，反之亦然。

这启发我们在计算点涡的速度时，只需忽略该点涡自身对自身的贡献。关于速度场求和的推论 37 使这一计算变得格外简单。

具体对于图4.4，这意味着

$$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = \omega_2 \operatorname{sgrad} G\left(\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}+1\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$\vec{u}\begin{pmatrix}+1\\0\end{pmatrix} = \omega_1 \operatorname{sgrad} G\left(\begin{pmatrix}+1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right)$$

其中 $G(x, p) := -\frac{1}{2\pi} \ln(|x - p|)$，如针对 $\mathbb{R}^2$ 的命题15中所述。我们将这一陈述的一般形式表述为一个命题。

命题38 （《涡动力学》）。给定曲面 M 上的$n \in \mathbb{N}$ 个点涡p_i，其涡强度分别为 $\omega_i \in \mathbb{R}$，则位于 p_j 处的点涡的速度 $\vec{u}(p_j)$ 表示为

$$\vec{u}(p_j) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \omega_i \operatorname{sgrad}_{p_i} G(p_j, p_i) \tag{4.8}$$

再次注意，求得格林函数G 是一项艰巨的挑战。还要注意，如果我们得到了它，就能轻松计算出我们想要的大多数流体属性。格林函数的妙处在于，它囊括了M的所有形状属性。我们推导整个过程中都没有涉及曲率。

4.5 点涡能量

对于平面和球面涡动力学，我们已经具备描述其运动所需的全部工具；但对于一般的闭曲面，则有必要引入系统的能量。由于流函数 ψ 在点涡处存在奇点，这并非易事。

先简单说明：

引理 39. 对于任意标量函数 ψ，以下等式成立：

$$\nabla \cdot (\psi \nabla \psi) = |\nabla \psi|^2 + \psi \Delta \psi$$

接下来，我们想补充一条关于系统动能的陈述：

引理40. 在均匀质量的不可压缩流中，若涡量为 ω 且流函数为 ψ，定义在闭曲面M 上，则动能可表示为：

$$E = -\frac{1}{2} \int_M \psi(p) \omega(p) dp$$

证明。 为证明这一点，我们使用刚才提到的引理、在第 3.5 节中建立的关系 $\omega = \Delta \psi$，以及散度定理；此外，我们的闭曲面没有边界$\partial M = \emptyset$。

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}\int_M |\vec{u}(p)|^2 dp \\
&= \frac{1}{2}\int_M |\operatorname{sgrad}\psi(p)|^2 dp \\
&= \frac{1}{2}\int_M |\vec{n}\times\nabla\psi(p)|^2 dp \\
&= \frac{1}{2}\int_M |\nabla\psi(p)|^2 dp \\
&= \frac{1}{2}\int_M \nabla\cdot(\psi(p)\nabla\psi(p)) - \psi(p)\underbrace{\Delta\psi(p)}_{=\omega(p)} dp \\
&= \frac{1}{2}\int_M \nabla\cdot(\psi(p)\nabla\psi(p))dp - \frac{1}{2}\int_M \psi(p)\omega(p)dp \\
&= \frac{1}{2}\int_{\partial M=\emptyset} \vec{n}\cdot(\psi(p)\nabla\psi(p)) - \frac{1}{2}\int_M \psi(p)\omega(p)dp \\
&= -\frac{1}{2}\int_M \psi(p)\omega(p)dp
\end{aligned}
$$

□

接下来，我们要将引理40的结果与点涡旋假设的所有结果结合起来。

定理41（点涡系统的动能）。给定闭曲面 M 上位于 p_i 、强度为 ω_i 的 n 个点涡，我们可以将该系统的有限过剩能量表示为：

$$E = -\sum_{i<j}^{n} \omega_i\omega_j G(p_i, p_j)$$

证明。点涡旋关系告诉我们，$\omega(p) = \sum^n{}_{i=1}\omega_i\delta(p-p_i)$，并且由定理35可知，$\psi(p) = \sum^n{}_{j=1}\omega_j G(p,p_j)$。我们希望将这两个关系代入引理40的结果中。

但是等等！这些奇点！如果我们真的代入这两个方程，求和中就会出现$G(p_i,p_i)$ 项。这是不允许的！看看我们能做到哪一步：

$$
\begin{aligned}
E &= -\frac{1}{2}\int_M \psi(p)\omega(p)dp \\
&= -\frac{1}{2}\int_M \left(\sum_{j=1}^{n} \omega_j G(p,p_j)\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i \delta(p-p_i)\right)dp \\
&= -\frac{1}{2}\int_M \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} \omega_i\omega_j G(p,p_j)\delta(p-p_i)dp \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} \omega_i\omega_j \int_M G(p,p_j)\delta(p-p_i)dp \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} \omega_i\omega_j G(p_i,p_j) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n} \omega_i\omega_j G(p_i,p_j) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 G(p_i,p_i) \\
&= -\sum_{i<j}^{n} \omega_i\omega_j G(p_i,p_j) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 G(p_i,p_i)
\end{aligned}
$$

这些$G(p_i,p_i)$项描述的是点涡对自身的作用。它们似乎试图产生一个方向不定的无限大速度。显然，我们必须想办法在计算中纳入 Kirrchoff 假设 [KHP91]，即每个点涡的运动仅由所有其他点涡诱导的速度场决定。一种方法是修改流函数，使求和中的$j \neq i$。

$$\omega(p)\psi(p) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \delta(p-p_i) \sum_{j=1}^{n} \omega_j G(p,p_j)$$

becomes

$$\omega(p)\psi(p) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \delta(p-p_i) \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \omega_j G(p,p_j)$$

这是有命题38作为依据的：我们排除了点涡对自身产生的速度，这相当于从流函数中去掉一项。让我们看看结果如何：

$$
\begin{aligned}
E &= -\frac{1}{2}\int_M \omega(p)\psi(p)dp \\
&= -\frac{1}{2}\int_M \sum_{i=1}^{n} \omega_i \delta(p-p_i) \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \omega_j G(p,p_j)dp \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1 \\ j\neq i}}^{n} \omega_i\omega_j \int_M G(p,p_j)\delta(p-p_i)dp \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1 \\ j\neq i}}^{n} \omega_i\omega_j G(p_i,p_j) \\
&= -\sum_{i<j}^{n} \omega_i\omega_j G(p_i,p_j)
\end{aligned}
$$

如你所见，奇点消失了，我们终于可以安心了。

□

由此，我们便可以建立能量的辛梯度与点涡速度之间的如下联系：

定理 42 （点涡能量运动）。 设闭曲面M上有n 个互不相同的点涡p_i ，其强度分别为ω_i。那么，根据基尔霍夫假设，第k个点涡的速度 $\vec{u}(p_k)$可表示为：

$$\vec{u}(p_k) = -\frac{1}{\omega_k}\operatorname{sgrad}_{p_k} E$$

证明。 我们从右边开始处理，直到可以将命题38《涡动力学》应用于该方程。由于给出了基尔霍夫假设，这样做是允许的。$\nabla_{p_k} G(p_i,p_j)$ 会在$i \neq k$ 和$j \neq k$时消失。

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{\omega_k}\operatorname{sgrad}_{p_k} E &= -\frac{1}{\omega_k}\operatorname{sgrad}_{p_k}\left(-\sum_{i<j}^{n}\omega_i\omega_j G(p_i,p_j)\right)\\
&= \sum_{i<j}^{n}\frac{\omega_i\omega_j}{\omega_k}\operatorname{sgrad}_{p_k} G(p_i,p_j)\\
&= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\frac{\omega_i\omega_k}{\omega_k}\operatorname{sgrad}_{p_k} G(p_i,p_k)\\
&= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\omega_i\operatorname{sgrad}_{p_k} G(p_i,p_k)\\
&= \vec{u}(p_k)
\end{aligned}
$$

□

这个能量表达式之后可以并且将会用于推导一般闭曲面上点涡的运动方程。我们该如何理解定理 42？数学结果表明，它给出了正确的速度，但为什么要除以 ω_k？简单来说，除以 ω_i 并通过 ∇_{p_k} 消去非p_k项，恰好完成了基尔霍夫假设所需的调整。

请记住：截至目前，本节中我们唯一的假设是，光滑闭曲面上存在点涡。所有这些结果仍适用于平面、球面和其他闭曲面。

4.6 方法论

在接下来的三章中，我们将把同样的方法论应用于当前的问题。每章的差异仅源于用作点涡运动所依托背景的几何形状不同。我们按从最简单到最复杂的顺序展开，引导读者逐步理解这些情形。

平面情形 ⟶ 球面情形 ⟶ 闭曲面情形（零亏格）

1: 首先，我们从平面涡动力学（第5章）开始。在推导易于理解的运动方程时，无需考虑曲率的影响。这为读者提供了理想的入门内容，使其熟悉涡动力学的影响；这些内容随后将在后续章节中推广。

2: 接下来，我们将阐述球面涡动力学（第6章）；幸运的是，我们还能直接完整推导运动方程。至此，曲率的影响变得更加明显。

3: 最后，我们将阐述闭曲面涡动力学（第7章），并详细说明 [BK15] 的研究结果，以及如何利用这些结果建立任意亏格为零的闭曲面上的点涡旋动力学。对于上述三章中的每一章，我们将重复以下步骤：

> 观察给定几何形状下系统的流函数或能量⌊从流函数或能量推导运动方程⌊模拟结果。观察测试案例。

完成所有这些光滑理论案例后，我们将转到第8章，为读者提供关键的实现细节，使其能够全面了解其执行过程，并在必要时自行实现。

4.7 要观察的结果

我们来介绍一些预期行为，以便观察涡动力学中的表现，并比较不同几何案例的结果。

我们希望看到的第一个、也是最有趣的涡动力学效应是木村猜想 [Kim99], ，该猜想指出，一对距离无穷小、涡量大小相等但方向相反的点涡会沿着一条测地线共同移动。在闭曲面上观察点涡对将尤其有趣。

涡对在三维中的对应物，是在流体内部向前运动的涡环。请看图 4.5，便能明白我们的意思。这种涡环的二维切片表示，看起来恰好就像两个彼此相邻的点涡。这也让人想起一个现实生活中的点涡示例：它出现在流体表面上。

另一个巧妙的现象是两个涡环的跳蛙运动 [Lim97]，它也可以用二维中的四个点涡来表示。图 4.6 展示了现实生活中涡环跳蛙运动的影像。看着这些画面，很容易想象用 4 个点涡时会是什么样子。

除了非常简单的情况，要预测多个点涡共同运动时的具体运动情况就很困难了。不过，这不应让我们气馁，因为高度敏感且混沌无序是流体运动的一种自然（令人恼火的）特性。

由于点涡描述了对涡量的离散化 ω ，我们可以近似模拟更大规模的涡旋情形，并观察点涡的行为。这样一来，我们终于可以进行更自然的流体模拟，而不只是观察少量点涡。我们通过以下方式来实现这一点

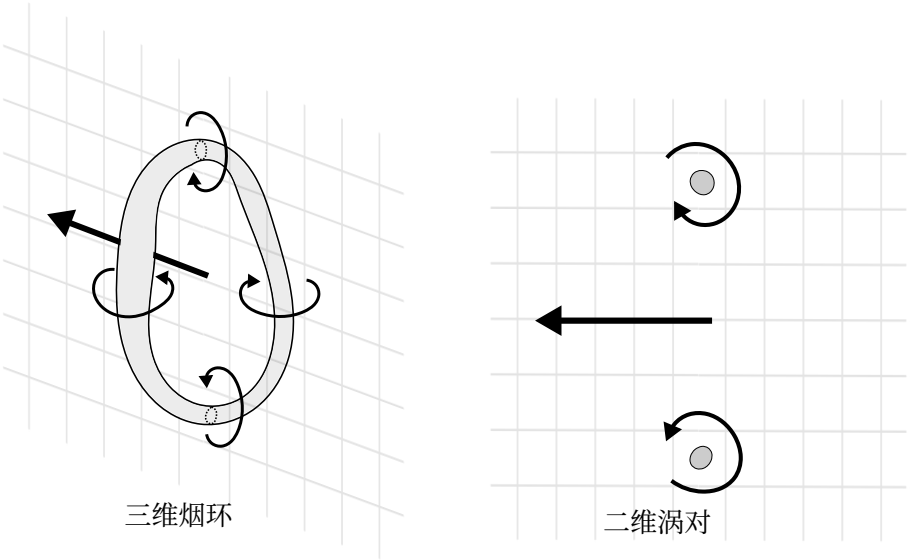


图 4.5：向前运动的涡环（左）。涡环的二维切片表示，其中将其表示为点涡（右）。

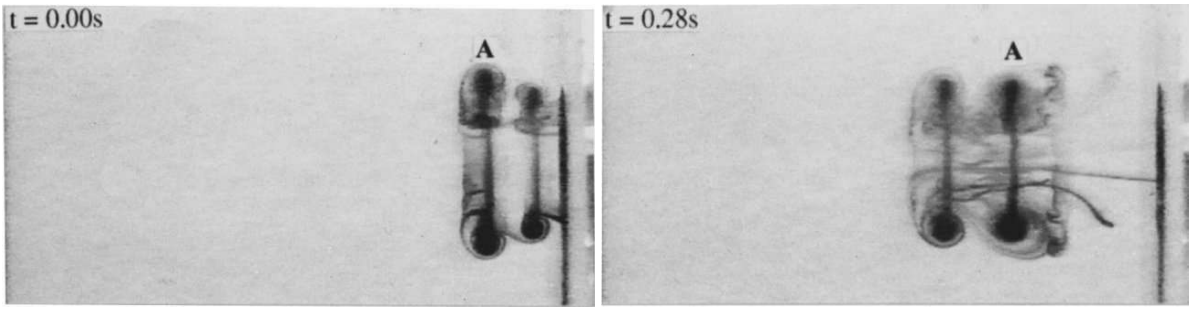


图 4.6：两个时刻的烟环向前跃动。未标记的烟环从已标记的烟环中穿过。图片由 [Lim97]提供。如果这些暗点是点涡，它们的运动方式应该相似。

通过大幅增加点涡的数量，同时降低每个点涡的涡量（否则它们只会互相猛烈排斥）。

我们选择以《MCP》中详尽研究过的泰勒涡作为检验对象。研究中，具有相同涡量的分离区域会合并、再分裂。 [AWO+14] 中也采用了同样的检验，并在此处的图4.7中展示。

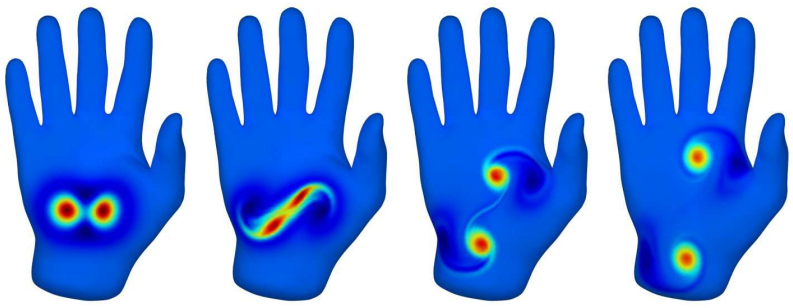


图4.7：图片来自 Ascencot 等人 [AWO+14]。手部曲面上的泰勒涡先合并，然后分裂。红色表示涡量较高的区域。

CHAPTER 5

平面点涡动力学

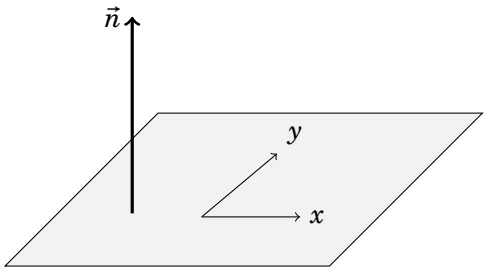


图 5.1：嵌入在 $\mathbb{R}^3$ 中的平面 $\mathbb{R}^2$。让我们放入一些点涡，观察它们如何流动。

我们的第一个案例研究是平面，它具有最简单的点涡动力学、完全的对称性和零曲率。为与理论的其余部分保持一致，我们将平面描述为三维空间中经过原点的二维曲面，其法向量恒定为 $\vec{n} = (0,0,1)$。这样，例如，我们仍可像流函数定义18中那样使用叉积，其中用到了 $\vec{n}$。不过，由于这种运算相当简单：

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix} \tag{5.1}$$

我们可以直接把 $\vec{n} \times ()$替换为90度逆时针旋转算子$J = \left(\begin{smallmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$，从而再次只在二维中进行运算。

5.1 平面点涡动力学的推导

现在的一大好处是，我们可以取第4.4节命题38点涡动力学 中的结果，并代入我们在第 3.2 节命题15中建立的平面的格林函数。

设$M = \mathbb{R}^2$是一个曲面，其上有$n \in \mathbb{N}$个点涡，位置为$p_i \in M$，相应的涡强度为 ω_i。其动力学由下式描述：

$$\vec{u}(p_j) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \omega_i \operatorname{sgrad} G(p_j, p_i)$$

请记住， $\mathbb{R}^2$ 的格林函数为：

$$G(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln(|x - y|)$$

让我们显式计算每个点涡产生的速度。为此，我们需要格林函数的梯度。

引理43。 $\mathbb{R}^2$ 中的格林函数，其中 $\mathbb{R}^2$ 嵌入为 $\mathbb{R}^3$ 中的一个曲面，我们可以计算：

$$\operatorname{sgrad}_x G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{\vec{n} \times (x - y)}{|x - y|^2}$$

证明。 旋转梯度$_x = \vec{n} \times \nabla$。请记住，为了应用我们已建立的理论，$x$、$y \in \mathbb{R}^3$的 z 分量应为零。另外请注意，

$$\nabla_x \ln(|x - y|) = \frac{x - y}{|x - y|^2}$$

□

有了这一结果，我们可以直接讨论流体的诱导速度场和点涡动力学：

定理44 （平面点涡速度场）。 给定曲面$M = \mathbb{R}^2$上的$n \in \mathbb{N}$个点涡p_i，其涡强度分别为 $\omega_i \in \mathbb{R}$，则点$x \in M$处的速度 $\vec{u}$ （其中 $\forall i: x \neq pj$）表示为

$$\vec{u}(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \frac{\vec{n} \times (x - p_i)}{|x - p_i|^2} \tag{5.2}$$

其中 $\vec{n}$为曲面法向量 $(0, 0, 1)^T$。

定理45 （平面点涡动力学）。 给定$n \in \mathbb{N}$个位于曲面$M = \mathbb{R}^2$上的点涡p_i，其涡强度分别为$\omega_i \in \mathbb{R}$，则位于p_j处的点涡速度 $\vec{u}(p_j)$ 表示为

$$\frac{\partial}{\partial t} p_j = \vec{u}(p_j) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \omega_i \frac{\vec{n} \times (p_j - p_i)}{|p_j - p_i|^2}$$

其中， $\vec{n}$是曲面法向量$(0, 0, 1)^T$。

这些就是基尔霍夫在提出点涡思想时已经推导出的结果。

5.2 平面点涡动力学结果

定理45给出了我们在平面$M = \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$上模拟点涡动力学所需的全部微分方程。实现细节留待第8章介绍。所选颜色表示流函数的等值线，分别以暖色和冷色表示正值和负值。

我们来快速回顾一下第 4.7 节中预测的结果。首先，Kimura 猜想预测，对于 $M = \mathbb{R}^2$，一对涡量相反的涡对会沿直线运动。图 5.2 显示，事实确实如此。

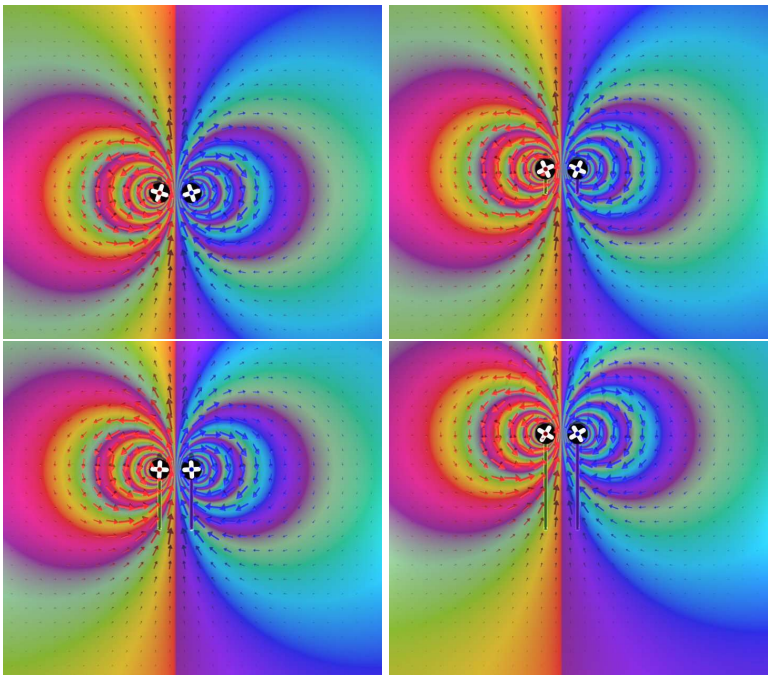


图 5.2：两个涡量分别为 $+1$ 和 -1 的点涡沿一条直线一起运动。（从左上到右）

我们也可以通过数学方式演示这一点，让读者更熟悉实际公式。不失一般性，我们固定平移和方向，并考察位于 $p_1=(1,0,0)^T$ 和 $p_2=(-1,0,0)^T$ 的两个涡旋，其涡强度分别为 $\omega_1=-1,\omega_2=+1$。那么，根据我们的公式，这些点将按如下方式运动：

$$\begin{aligned}\vec{u}(p_1) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\omega_i\frac{\vec{n}\times(p_j-p_i)}{|p_j-p_i|^2}\\ &= \frac{1}{2\pi}\omega_2\frac{\vec{n}\times(p_1-p_2)}{|p_1-p_2|^2}\\ &= \frac{1}{2\pi}(+1)\frac{(0,0,1)^T\times((1,0,0)^T-(-1,0,0)^T)}{|2|^2}\\ &= \frac{1}{4\pi}(0,0,1)^T\times(1,0,0)^T\\ &= \frac{1}{4\pi}(0,1,0)^T\end{aligned}$$

同样可以验证 $\vec{u}(p_2)=\frac{1}{4\pi}(0,1,0)$，从而表明两个点涡都沿一条直线（$\mathbb{R}^2$中的一条测地线）运动。它们越靠近，沿该测地线运动得就越快。

我们也可以通过设置四个点涡来观察蛙跳涡旋，如图5.3所示。这似乎也同样效果良好。

一旦点涡更多，许多效应就会混在一起，因而很难预测任何结果。尽管如此，我们仍想展示仅再增加几个涡旋时的情形，如图5.4所示。

最后，我们想通过构建泰勒涡旋实验来展示大量点涡聚集在一起时的样子。我们观察到，这种使用点涡的方法无法呈现新形成的涡量团典型的分裂现象。如图5.5所示。该现象无法复现，因为没有产生真正使涡量展平的新点涡。不过这并不值得遗憾。许多流体求解器都无法通过这一测试，而我们仍能以很低的代价获得视觉上吸引人的运动。

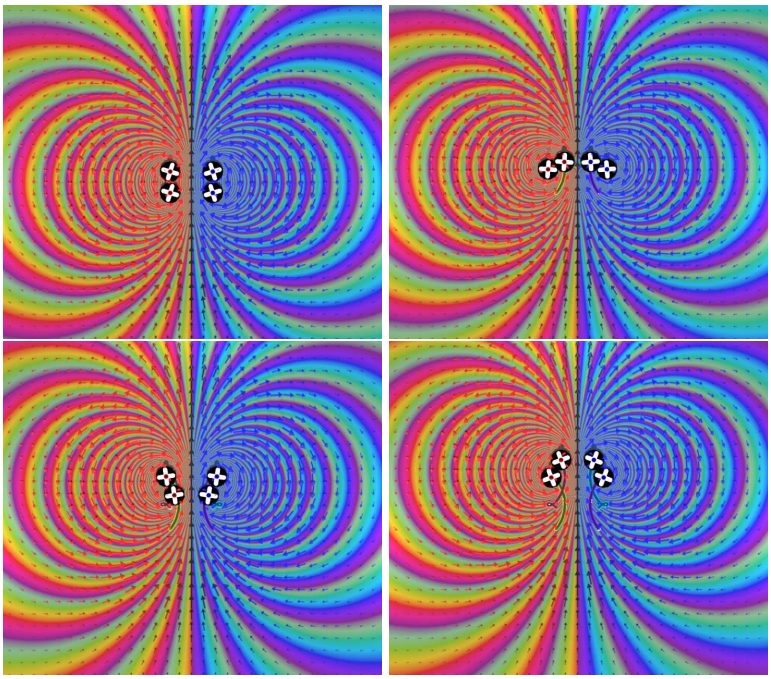


图 5.3：4 个点涡以 leapfrogging 的方式排列，涡量分别为 +1、+1、−1 和 −1。（从左上到右）

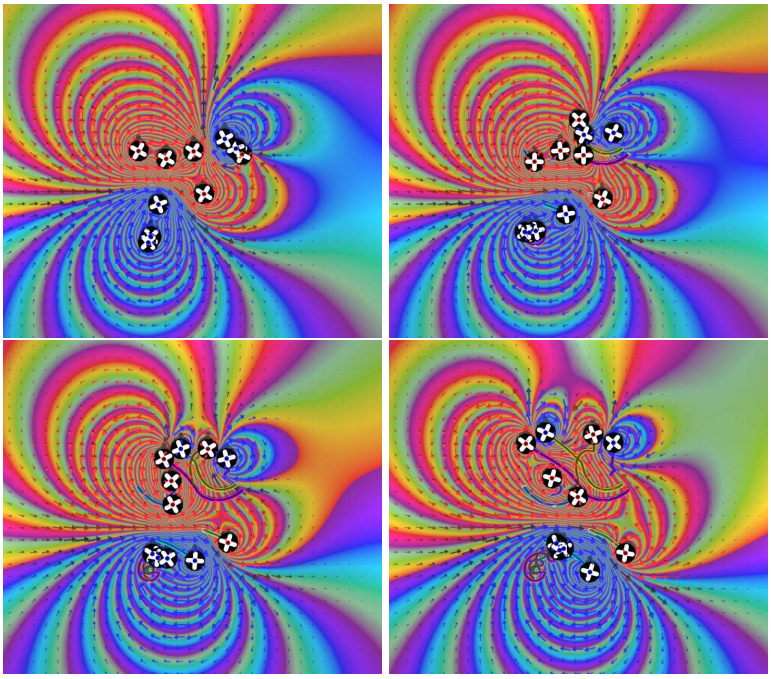


图 5.4：许多点涡的涡量在 [-1、+1] 中均匀随机分布。（从左上到右）

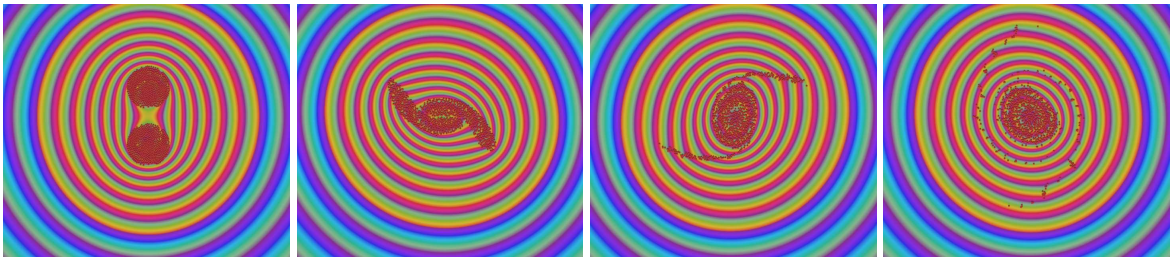


图5.5：许多具有相同较小正涡量的点涡形成泰勒涡实验。（从左到右）

CHAPTER 6

球面点涡动力学

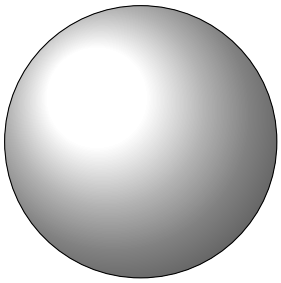


图 6.1：嵌入 $\mathbb{R}^3$中的 $\mathbb{S}^2$ 球面。

我们接着进入第二个案例研究，其中我们舍弃平面中所见的零曲率性质，但仍保持完全对称性。这一次我们具有常曲率，以及一点$x \in \mathbb{S}^2$ 处的法向量就是该点本身（ $\vec{n} = x$ ）这一性质。

6.1 球面点涡动力学推导

我们为这一刻所做的准备，使我们能够完全类比于平面情形得到动力学。我们可以取第4.4节命题38点涡动力学的结果，并代入我们在第 3.2 节命题 16 中建立的 $\mathbb{S}^2$ 的格林函数。

设$M = \mathbb{S}^2$ 为一个曲面$n \in \mathbb{N}$，其上有位于$p_i \in$ 的点涡M，其对应的涡强度为 ω_i。则其动力学由下式描述：

$$\vec{u}(p_j) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \omega_i \operatorname{sgrad} G(p_j, p_i)$$

请记住， $\mathbb{S}^2$ 的格林函数由下式给出：

$$G(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\ln\left(\sin\left(\frac{1}{2}d(x,y)\right)\right)$$

其中 $d(x,y) = \operatorname{acos}(x\cdot y$。对这个格林函数求梯度比较麻烦，但我们别无选择：

引理 46。 对于 $\mathbb{S}^2$ 上的格林函数，我们可以计算：

$$\operatorname{sgrad}_x G(x,y) = \frac{1}{4\pi}\frac{x\times y}{1-x\cdot y}$$

证明。 让我们以表示坐标轴的坐标 $i \in \{1,2,3\}$为例，明确展示这一点：

$$\begin{aligned}
\partial_i \ln\left(\sin\left(\tfrac{1}{2}\operatorname{acos}(x\cdot y)\right)\right) &= \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{acos}(x\cdot y)\right)}\partial_i\left(\sin\left(\tfrac{1}{2}\operatorname{acos}(x\cdot y)\right)\right)\\
&= \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{acos}(x\cdot y)\right)}\cos\left(\tfrac{1}{2}\operatorname{acos}(x\cdot y)\right)\ \partial_i(\tfrac{1}{2}\operatorname{acos}(x\cdot y))\\
&= \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{acos}(x\cdot y)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{acos}(x\cdot y)\right)}\tfrac{1}{2}\ \partial_i \operatorname{acos}(x\cdot y)\\
&= \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{acos}(x\cdot y)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{acos}(x\cdot y)\right)}\tfrac{1}{2}\frac{-1}{\sqrt{1-(x\cdot y)^2}}\partial_i(x\cdot y)\\
&= \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{acos}(x\cdot y)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{acos}(x\cdot y)\right)}\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1-(x\cdot y)^2}}y_i\\
&= \frac{\cos\left(\frac{1}{2}d(x,y)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}d(x,y)\right)}\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\cos(d(x,y))^2}}y_i\\
&= \frac{\cos\left(\frac{1}{2}d(x,y)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}d(x,y)\right)}\frac{-\frac{1}{2}}{\sin(d(x,y))}y_i\\
&= -\tfrac{1}{2}y_i\frac{\cos\left(\frac{1}{2}d(x,y)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}d(x,y)\right)\ \sin(d(x,y))}\\
&= -\tfrac{1}{2}y_i\frac{\cos\left(\frac{1}{2}d(x,y)\right)}{\cos(\frac{1}{2}d(x,y))-\cos(d(x,y))\cos(\frac{1}{2}d(x,y))}\\
&= -\tfrac{1}{2}y_i\frac{1}{1-\cos(d(x,y))}\\
&= -\frac{y_i}{2}\frac{1}{1-x\cdot y}
\end{aligned}$$

where 我们使用了余弦和公式 $\cos(\ 1\ 2\ d)\ = \cos(d - \frac{1}{2}d)\ = \cos d\cos\ 1\ 2\ d\ + \sin d\sin\ 1\ 2\ d$。_Thu s

$$\nabla_x G(x,y) = \frac{y}{4\pi(1-x\cdot y)}$$

最后，我们使用关系式旋转梯度 $= \vec{n} \times \nabla$ 其中 $\vec{n}(x) = x$ 在 $\mathbb{S}^2$。

$$\operatorname{sgrad}_x G(x,y) = \frac{1}{4\pi} \frac{x \times y}{1 - x \cdot y}$$

□

接下来，我们只需将最后这个引理补充到点涡定理中：

定理 47 （球面点涡速度场）。 设曲面 $n \in \mathbb{N}$ 个点涡旋 p_i 位于曲面 $M = \mathbb{S}^2$ 上，其涡强度分别为 $\omega_i \in \mathbb{R}$，则点 $x \in M$处的速度 $\vec{u}$ （其中 $\forall i : x \neq p^j$）可表示为

$$\vec{u}(x) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \frac{x \times p_i}{1 - x \cdot p_i} \tag{6.1}$$

定理 48 （球面点涡动力学）。 设有 $n \in \mathbb{N}$ 个点涡旋 p_i 位于曲面$M = \mathbb{S}^2$ 上，其涡强度分别为 $\omega_i \in \mathbb{R}$，则位于p^j 处的点涡速度 $\vec{u}(p^j)$ 可表示为

$$\vec{u}(p_j) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \omega_i \frac{p_j \times p_i}{1 - p_j \cdot p_i}$$

这些公式与 [Dri15]中推导出的公式相同。

6.2 球面点涡动力学结果

定理 48 给出了我们描述球面 $M = \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ 上点涡动力学所需的关键微分方程。其实现将在第8章中介绍。所选颜色表示流函数的等值线，其中暖色和冷色分别对应正、负流函数值。

我们来快速看一下第 4.7 节预测的结果。首先，Kimura 猜想指出，对于 $M = \mathbb{S}^2$，一对无限接近且涡量相反的涡对应该沿球面上的大圆运动。图 6.2 展示了事实确实如此。

从数学上看，这种测地线行为很容易验证。由于我们只有$p_1, p_2 \in \mathbb{S}^2$，点涡的速度将指向$p_2 \times p_1$ 的方向。

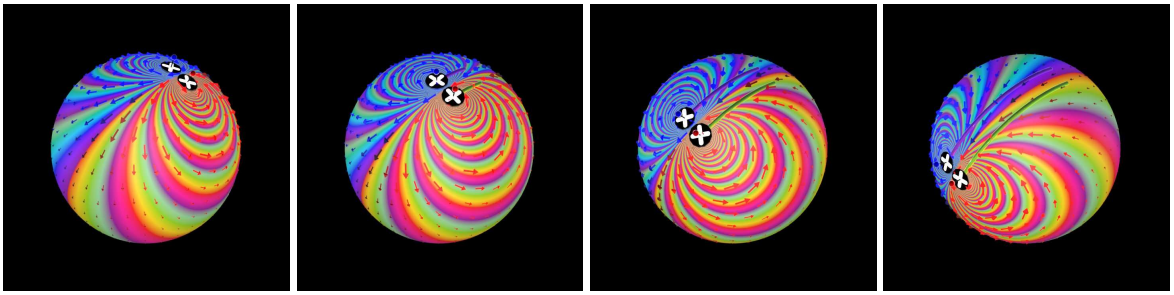


图 6.2：两个相反涡量的点涡沿大圆弧一起运动。（从左到右）

$$
\begin{aligned}
\vec{u}(p_1) &= \frac{1}{4\pi}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\omega_i\frac{p_j\times p_i}{1-p_j\cdot p_i}\\
&= \frac{\omega_2}{4\pi(1-p_2\cdot p_1)}p_2\times p_1\\
&= \alpha p_2\times p_1\\
\vec{u}(p_2) &= \frac{\omega_1}{4\pi(1-p_1\cdot p_2)}p_1\times p_2\\
&= \frac{-\omega_2}{4\pi(1-p_1\cdot p_2)}(-p_2\times p_1) = \alpha p_2\times p_1
\end{aligned}
$$

请注意，由于$p_1 \neq p_2$，但它们仍然无限接近，因此我们可以确定一个包含p_1, p_2的平面。垂直于该平面的$p_2 \times p_1$，就是这些点将沿其移动的方向，正如在大圆弧上一样。

我们还可以通过设置四个点涡来观察涡旋的 leapfrogging，如图 5.3 所示。这似乎也很有效。

此外，在 $\mathbb{S}^2$ 中，一旦点涡数量增多，许多效应便会交织在一起，使得任何预测都变得困难。尽管如此，我们还是想在图6.4中展示再多加入几个点后的情形。

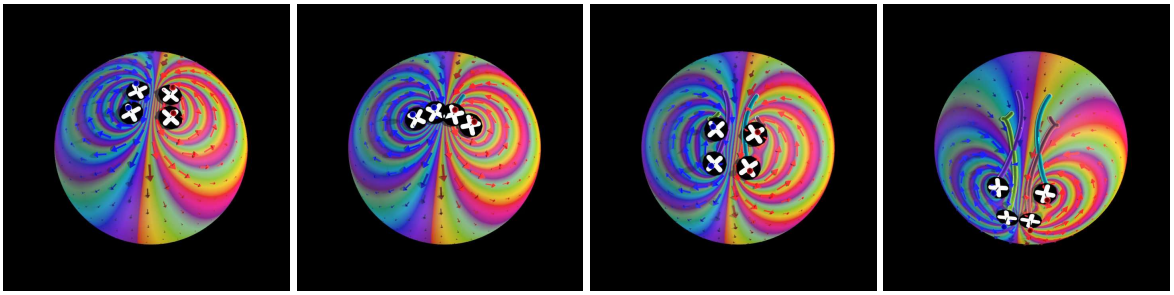


图 6.3： $\mathbb{S}^2$ 上四个点涡的 leapfrogging。（从左到右）

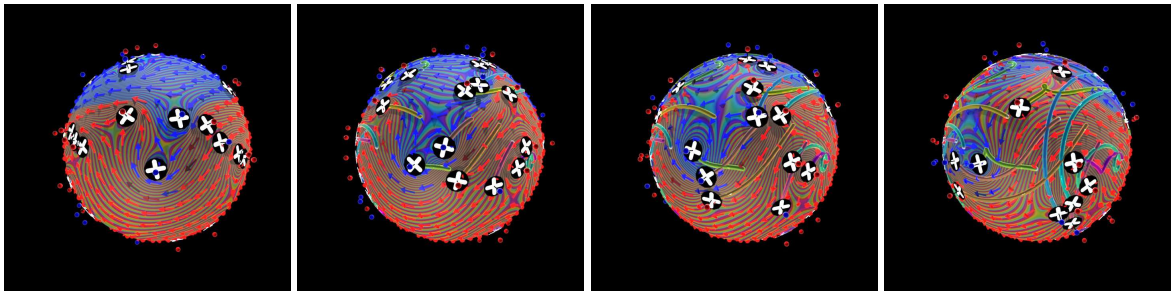


图6.4：$\mathbb{S}^2$ 上的许多点涡，其涡量在 [-1,+1]内均匀随机分布。（从左到右）

最后，我们仔细观察球面上的泰勒涡（图5.5）。与平面情形一样，我们发现，采用这种点涡方法无法揭示典型的分裂现象。原因相同。不过，这表明球面动力学仍然成立。

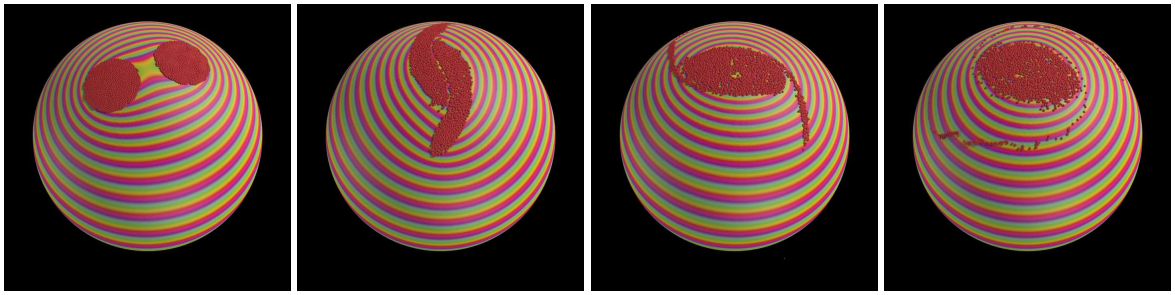


图6.5：许多涡量相等且较小的正点涡形成泰勒涡实验。（从左到右）

CHAPTER 7

闭曲面点涡动力学

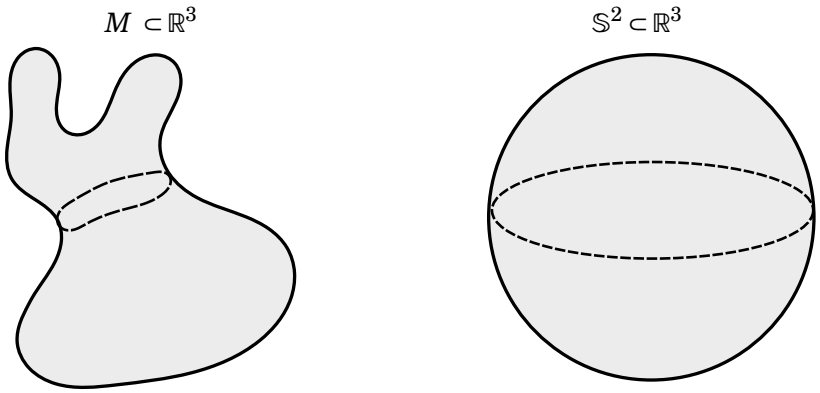


图 7.1：两个亏格 0 的闭曲面。

至此，我们的旅程来到了最后一站。这无疑是最难处理的情形，需要运用最多的技巧才能克服。为了让最后这些步骤变得容易得多，本学位论文已经介绍了所有背景知识，以及平面情形和球面情形。

请看图7.1。我们该如何顾及这些在平面和球面上都不存在的任意变形呢？解决这个问题的关键，是使用从任意亏格为0的闭曲面M 到 $\mathbb{S}^2$ 的共形映射f，以便在球面上用修正后的形式表示点涡动力学。这项技术由 Boatto 等人正式发表于 [BK15]。第 3.7 节共形映射介绍了目前所需了解的共形映射知识，并说明我们可以依赖这类映射的存在性。

7.1 闭曲面上的点涡动力学推导

设M 是我们要在其上研究点涡的闭曲面。如果已知M 的光滑参数化，并且能够推导出其格林函数，那么恭喜你：可以跳过本节的大部分内容，直接仿照平面和球面情形的步骤，利用命题38推导点涡的运动方程。遗憾的是，对大多数曲面而言，情况并非如此，因此下面的方法会很有用。

别灰心！共形映射将为我们提供一种方法，使我们无需显式计算格林函数，就能直接计算点涡系统能量。此方法的实现要归功于 Stefanella Boatto 和 Jair Koiller 于 2015年 发表的成果[BK15]。我们将详细回顾这一成果，以便加以运用。

定理49 (“共形度量”， [BK15])。 考虑具有强度 ω_i 的曲面上$n \in \mathbb{N}$ 个p_i点涡，并考虑共形类 $\mathbb{S}^2$ 中的两个度量，它们由共形因子 h 关联，即 $\tilde{g} = h^2 g$，以及二形式 $\Omega_{\tilde{g}}$。度量 $\tilde{g}$ 下涡旋系统的哈密顿量 $\tilde{H}$，可以通过在度量g 下的哈密顿量H 上加上两项得到：

$$\tilde{H} = H - \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{n}\omega_i^2 \log(h(p_i)) - \left(\sum_{i=1}^{n}\omega_i\right)\frac{1}{\tilde{A}(\mathbb{S}^2)}\sum_{i=1}^{n}\omega_i \Delta_g^{-1} h^2(p_i) \tag{7.1}$$

$\tilde{A}(\mathbb{S}^2)$表示在 $\tilde{g}$ 范数下的面积。目前我们将 $\tilde{H}$ 称为度量哈密顿量。

证明。 见 [BK15] 第 13–15 页。 □

此处我们不得不对点涡提出一项非常重要的要求，即总涡量 $\int_M \omega(x)dx = 0$ 在我们的曲面上为零。

注释5 （涡量和为零的要求）。 对于含有 $n \in \mathbb{N}$ 个点涡、其强度分别为 ω_i 的点涡系统，我们要求总涡量为零；在本例中，这意味着涡量和必须为零。

$$0 = \int_M \omega(x)dx = \int_M \sum_{i=1}^{n}\omega_i \delta(x-p_i)dx = \sum_{i=1}^{n}\omega_i \int_M \delta(x-p_i)dx = \sum_{i=1}^{n}\omega_i \tag{7.2}$$

我们这样做是为了便于应用定理49：

$$\tilde{H} = H - \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{n}\omega_i^2 \log(h(p_i)) \tag{7.3}$$

让我们在下面的命题中综合运用所学知识。

定理 50 （闭曲面点涡动力学）。设f 是从M到 $\mathbb{S}^2$ 的共形映射，h 是该映射的共形因子。设$n \in \mathbb{N}$ 个点涡q_i 位于亏格为零的闭欧几里得曲面$M \subset \mathbb{R}^3$ 上，其涡强度分别为 $\omega_i \in \mathbb{R}$。令$p_i := f(q_i) \in \mathbb{S}^2$ 为这些点的像，并令 $\sum^n{}_{i=1} \omega_i = 0$。那么，位于 Sp 上 p_j处的点涡速度 $\vec{u}(p_j)$ 表示为

$$\vec{u}(p_j) = \frac{1}{4\pi h(p_j)^2}\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\left(\omega_i \frac{p_j \times p_i}{1 - p_j \cdot p_i}\right) + \frac{1}{h(p_j)}\omega_j p_j \times \nabla_{p_j} h(p_j)\right) \tag{7.4}$$

证明。 请看图 7.2 以理解这一设定。有了方程 7.3 中的哈密顿量，现在便清楚我们为何需要保角映射。我们希望利用该哈密顿量，借助第 4.5 节定理 42 点涡旋能量运动 中先前导出的方法，推导点涡的运动方程，以求得点速度。

$$\vec{u}(p_j) = -\frac{1}{\omega_j}\operatorname{sgrad}_{p_j} E$$

但请注意！对于任意给定的度量，旋转梯度p_j 并不相同。我们首先通过f 将共形曲面M 映射到球面 $\mathbb{S}^2$ 上，并可依据一致化定理确定f 的存在性。为了结合这两个结果，我们需要映射f的共形因子h 。事实上，在我们的情形下，必须对旋转梯度p_j 作如下调整，才能将其用于 $\mathbb{S}^2$ ：

$$\operatorname{sgrad} \longrightarrow \operatorname{sgrad}^* := \frac{1}{h^2}\operatorname{sgrad}$$

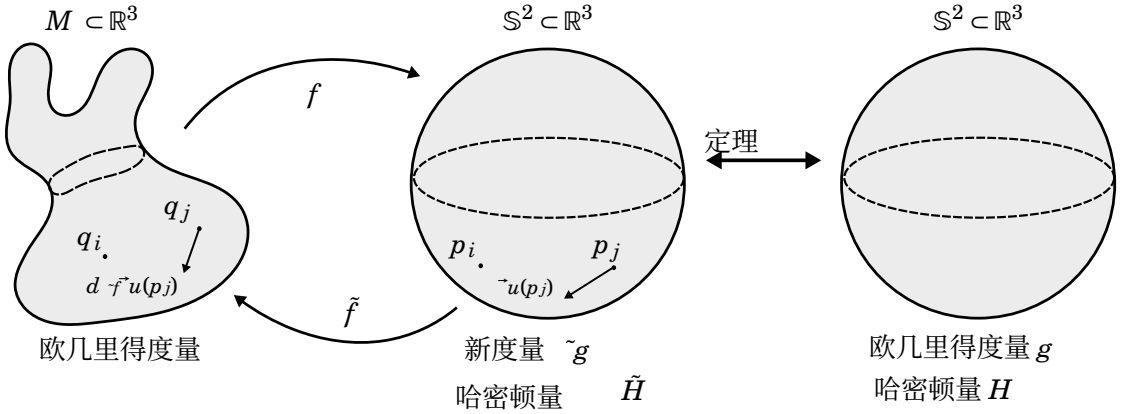


图 7.2：为展示我们如何通过传输得到结果而绘制的示意图。f 是从M 到 $\mathbb{S}^2$ 的共形映射。涡动力学都发生在 $\mathbb{S}^2$ 上，并受到共形因子h 的影响，结果随后被传输回M。

相关论证可参见第3.8节和注释33。因此，方程（7.3）中的度量哈密顿量表明，我们可以直接沿用球面涡动力学的结果。

$$\underbrace{\tilde{H}}_{\text{metric Hamiltonian}} = \underbrace{H}_{\text{sphere Hamiltonian}} \underbrace{-\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{n}\omega_i^2 \log(h(p_i))}_{\text{new contribution}}$$

这里，球面涡动力学的运动将直接通过球面哈密顿量 H 插入。

$$-\frac{1}{\omega_j}\operatorname{sgrad}_{p_j} H = \frac{1}{4\pi}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\omega_i \frac{p_j \times p_i}{1 - p_j \cdot p_i}$$

同时，新的贡献为我们提供了可供计算的内容。我们回忆一下，在 $\mathbb{S}^2$上有 $\vec{n}(p) = p$。

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\omega_j}\operatorname{sgrad}_{p_j}\left(-\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{n}\omega_i^2\log(h(p_i))\right) &= \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{n}\frac{\omega_i^2}{\omega_j}\operatorname{sgrad}_{p_j}\log(h(p_i)) \\
&= \frac{1}{4\pi}\frac{\omega_j^2}{\omega_j}\vec{n}(p_j)\times\nabla_{p_j}\log(h(p_j)) \\
&= \frac{1}{4\pi h(p_j)}\omega_j p_j \times \frac{1}{h(p_j)}\nabla_{p_j}h(p_j) \\
&= \frac{\omega_j}{4\pi h(p_j)} p_j \times \nabla_{p_j}h(p_j)
\end{aligned}$$

最后，旋转梯度p_j 算子的线性性使我们可以将这两项相加，得到最终结果：

$$\begin{aligned}
\vec{u}(p_j) &= -\frac{1}{\omega_j}\operatorname{sgrad}^*{}_{p_j}\tilde{H} \\
&= -\frac{1}{h(p_j)^2\omega_j}\operatorname{sgrad}_{p_j}\tilde{H} \\
&= -\frac{1}{h(p_j)^2\omega_j}\operatorname{sgrad}_{p_j}\left(H - \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{n}\omega_i^2\log(h(p_i))\right) \\
&= \frac{1}{h(p_j)^2}\left(-\frac{1}{\omega_j}\operatorname{sgrad}_{p_j}H - \frac{1}{\omega_j}\operatorname{sgrad}_{p_j}\left(-\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{n}\omega_i^2\log(h(p_i))\right)\right) \\
&= \frac{1}{4\pi h(p_j)^2}\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\left(\omega_i\frac{p_j\times p_i}{1-p_j\cdot p_i}\right) + \frac{1}{h(p_j)}\omega_j p_j \times \nabla_{p_j}h(p_j)\right)
\end{aligned}$$

□

该定理表明，点涡的运动仿佛发生在球面上，但还受到一个额外的自项$\frac{1}{2}h(p_j)\,\omega_j p_j \times \nabla_{p_j} h(p_j)$，该项由共形因子的梯度给出；与此同时，整体速度按 $4\pi\ ^{2}h(p_j)$ 重新缩放。

$$\vec{u}(p_j) = \underbrace{\frac{1}{4\pi}}_{\text{factor}} \underbrace{\frac{1}{h(p_j)^2}}_{\text{conformal influence}} \left(\underbrace{\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \left(\omega_i \frac{p_j \times p_i}{1 - p_j \cdot p_i} \right)}_{\text{spherical dynamics}} + \underbrace{\frac{1}{h(p_j)} \omega_j p_j \times \nabla_{p_j} h(p_j)}_{\text{self term}} \right)$$

该定理描述的是 $\mathbb{S}^2$ 上的切向量，而非 M 上的切向量。这只需传输一次 $d\,\tilde{f}\vec{u}(p_j)$，即可将结果带回 M。我们建议在实现时也始终留在 $\mathbb{S}^2$ 上，而不要将每个切向量都传输回 M。在 $\mathbb{S}^2$ 上求解微分方程，再将得到的点传输回 $p_j \mapsto \tilde{f}(p_j)$，在处理离散化时会稍微准确一些。

利用中性涡粒子，我们可以轻松推导任意给定点处的诱导速度场：

定理 51（闭曲面点涡速度场）。给定闭曲面 M 上的 $n \in \mathbb{N}$ 个点涡 p_i，其涡强度分别为 $\omega_i \in \mathbb{R}$，且满足 $\sum^{n}{}_{i=1}\omega_i = 0$。设 f 是从 M 到 $\mathbb{S}^2$ 的共形映射，h 是该映射的共形因子。那么，在远离任何点涡的 $p \in M$ 处，速度 $\tilde{u}(p)$ 表示为

$$\vec{u}(p) = \frac{1}{4\pi h(p)^2} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \frac{p \times p_i}{1 - p \cdot p_i} \tag{7.5}$$

证明。我们只需简单地再放置一个额外的点涡p_{n+1}，其涡量为 $\omega_{n+1} = 0$，即可进行论证。于是它表现为一个被动点涡，因为它仍被所有其他点涡所移动，而并不移动自身。公式随后为

$$\begin{aligned}
\vec{u}(p_{n+1}) &= \frac{1}{4\pi h(p_{n+1})^2} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq n+1}}^{n+1} \left(\omega_i \frac{p_{n+1} \times p_i}{1 - p_{n+1} \cdot p_i} \right) - \frac{1}{h(p_{n+1})} \omega_{n+1} p_{n+1} \times \nabla_{p_{n+1}} h(p_{n+1}) \right) \\
&= \frac{1}{4\pi h(p_{n+1})^2} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \frac{p_{n+1} \times p_i}{1 - p_{n+1} \cdot p_i}
\end{aligned}$$

□

换句话说，它的运动方式就像在球面上一样，只是速度经过了共形因子 h^2的调整。结果看起来多么平凡！考虑到这个问题的复杂性似乎仅仅编码在共形因子 h 中，这实在令人印象深刻。

7.2 闭曲面点涡动力学结果

让我们来看看实现。与平面 $\mathbb{R}^2$ 和球面 $\mathbb{S}^2$ 不同，这次我们无法计算流函数 ψ，因此改用球面的法线着色。

就像在平面情形和球面情形中一样，我们将通过 Kimuara猜想观察涡对所经过的测地线路径。你会注意到，这些测地线似乎是正确的，但由于涡对在 $\mathbb{S}^2$ 中彼此之间具有非零的固定距离，而在 M 中并非如此。逆保角映射 f^{-1} 将它们映射到 M 后，似乎会根据共形因子使涡旋扩散或收缩。

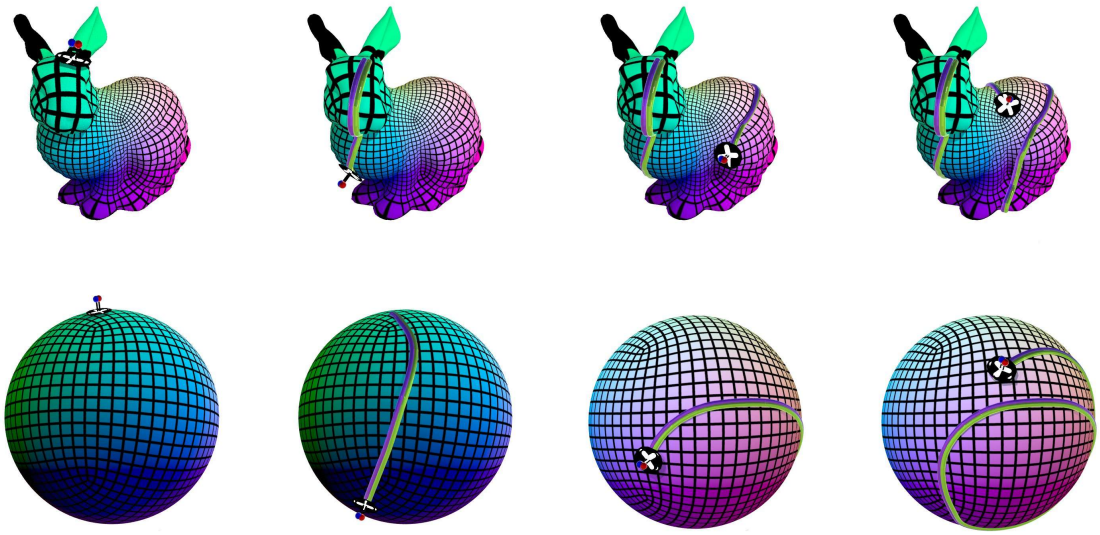


图7.3：一对点涡沿M 上的一条测地线运动（上排从左至右），以及经过 $\mathbb{S}^2$共形映射f 后的运动（下排）。此处将 $\mathbb{S}^2$ 旋转，以使其沿着涡对的运动路径。

我们还在图7.4中观察到了跳蛙运动。请注意，经过几次迭代后，该运动便开始瓦解。这可能是由于每个点涡在曲面上所经过的路径不同。

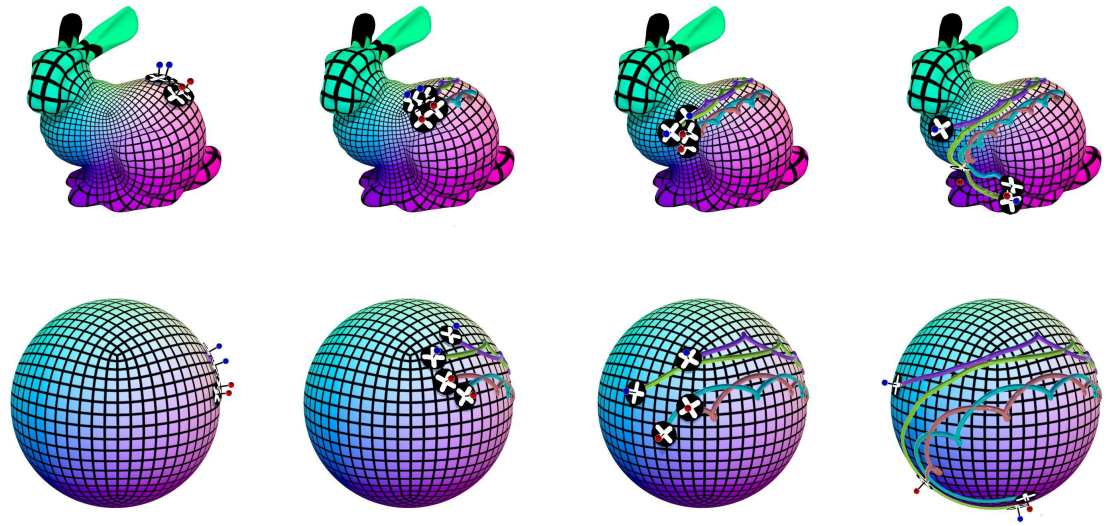


图 7.4：曲面 M （上排）和 $\mathbb{S}^2$ （下排）上的 4 个点涡正在 leapfrogging。注意这组点后来如何散开。（从左上到右）

在这种情况下，当你观察数量更多的点涡时，情况会变得尤其复杂。图 7.5 展示了这一点。再次注意，在共形因子极大的区域，计算会变得不够准确，并且需要更细的时间步长。

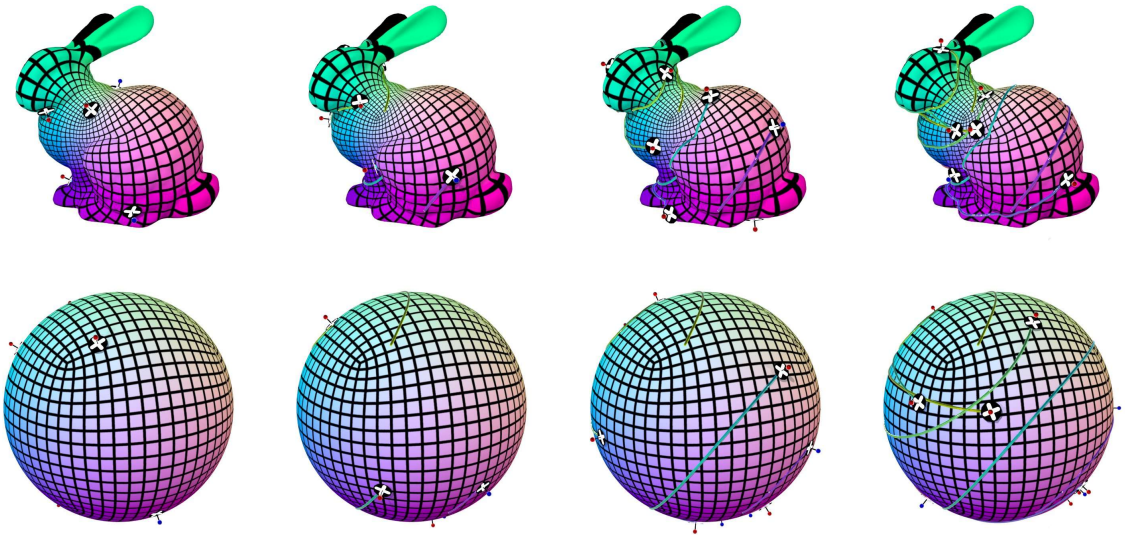


图 7.5：M 上的许多涡旋。（从左到右）

最后，让我们来看看泰勒涡；这次我们再次将点涡的可视化简化为单个点。还记得我们希望总涡量为零吗 $\sum^n{}_{i=1}\omega_i = 0$？ 不过，泰勒涡实验需要大量大小相等的点涡

$\sum^{n}{}_{i=1}\omega_i > 0$，因此我们在相反的一侧添加一个单独的反向点涡，以抵消这种不平衡 $\omega_{n+1} = -\sum^{n}{}_{i=1}\omega_i$。如图 7.6 和 7.7 所示，这一添加似乎并未在视觉上造成偏斜。

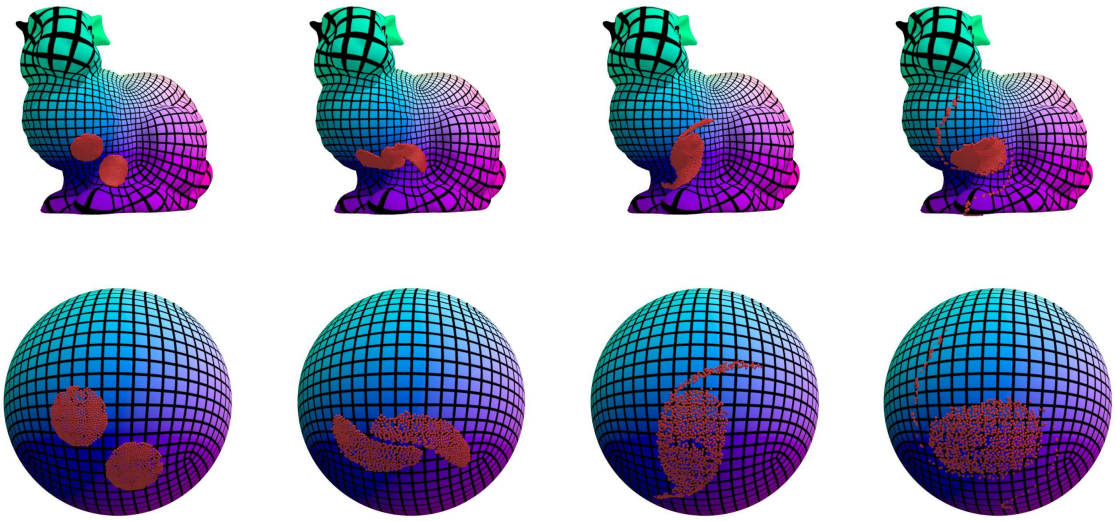


图7.6：兔子上的泰勒涡M 以及再次出现在球面上的泰勒涡。（从左到右）

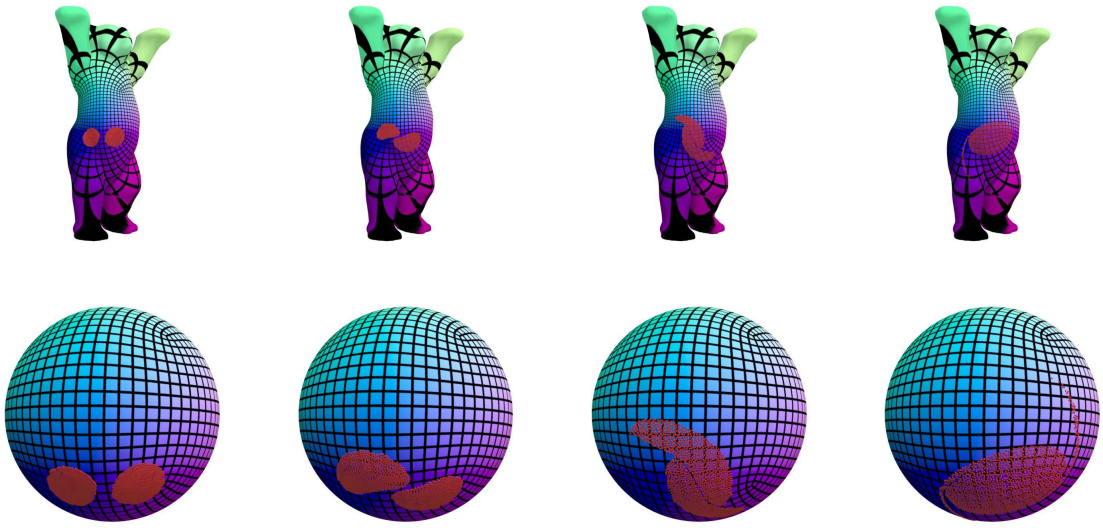


图7.7：柏林标志上的泰勒涡M 以及球面上的泰勒涡。（从左到右）

CHAPTER 8

实现

到目前为止，我们只关注点涡运动的光滑理论，也就是说，我们始终假设平面、球面和闭曲面都是具有无限细节的光滑对象。下一章将以迄今建立的所有理论为基础，对其进行离散化，从而避开若干极其棘手且令人望而生畏的陷阱。我们首先会介绍实现所用的软件及其使用方法，然后着手实现平面和球面情形。对于最后一种情形——闭曲面上的涡旋运动——在实现之前，我们还需要进一步介绍曲面到球面的映射。

所有几何情形都有相似之处。每种情形都会以两种方式运用第 5、6 和 7 章中的主要定理：

1. 利用点涡的运动方程。
2. 确定各点以外区域的速度场。

这两个目标在求解每个时间步长上的微分方程时，都会用到四阶龙格-库塔法。

8.1 关于使用补充材料

如果你以前从未使用过 Houdini，也不必担心。本章所述的实现与软件无关。此外，你无需了解 Houdini，也能通过文档中提供的补充材料在自己的计算机上运行这些结果。

我们使用的动画软件主要用于制作游戏和电影所需的三维设计与动画。它配备了许多用于测试我们算法的实用工具。截至目前，下载该软件时需要注册电子邮箱，网址为

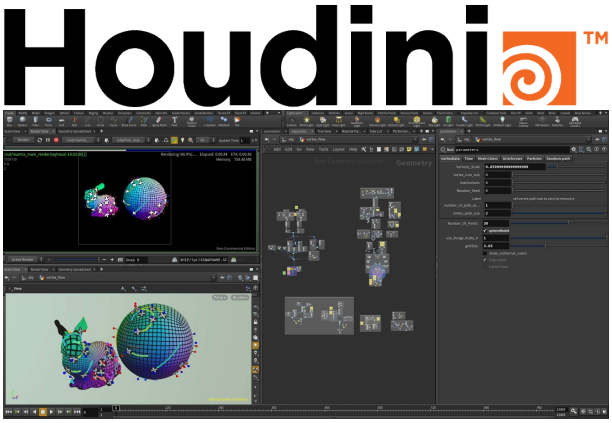


图8.1：Houdini 官方标志及工作区图像。

https://www.sidefx.com/products/houdini-apprentice/。

免费版本不会妨碍本文所展示内容的创建或执行。如果安装了 Houdini，只需用它打开我们的补充文件，并按照项目中附带的文档操作即可。点击屏幕底部的播放按钮应当会执行默认模拟。网上有一份关于数学家使用 Houdini 的详尽教程，网址为wordpress.discretization.de/houdini/。补充材料只需使用 Houdini 和 SciPy；在 Linux 和 Mac 上使用非常简单，但在 Windows 上则需要一份额外的 Windows 设置指南，该指南可在教程网站上找到。

对于本文使用的所有微分方程，我们都对所有点涡同时采用四阶龙格-库塔法，也就是说，我们将所有点的坐标汇总到一个大型向量中，并对它们一起进行平流。平流和龙格-库塔步骤都在并行线程中运行。由于 Houdini 并非通常意义上的渲染软件，其计算时间会有所偏差，因此此处不予展示。我们注意到，所有采用 $\mathcal{O}(n^2)$ 计算的涡动力学公式中，$n \in \mathbb{N}$ 为点涡的数量。

当然，计算效率方面也存在一些问题。在每个时间步长中，每个点涡都需要与其他每个点涡相互作用，因此计算量会随着点的数量$n \in \mathbb{N}$呈平方增长，即 $\mathcal{O}(n^2)$。当然，也可以在动力学求和计算中采用并行化，而且通常可以将相距较远的涡旋簇视为一个整体。对单个点涡贡献最大的通常是距离最近的涡旋。

8.2 平面点涡动力学实现

这种情况相当简单。点涡动力学与平面的网格分辨率无关，因此我们只需生成一些点，并使用

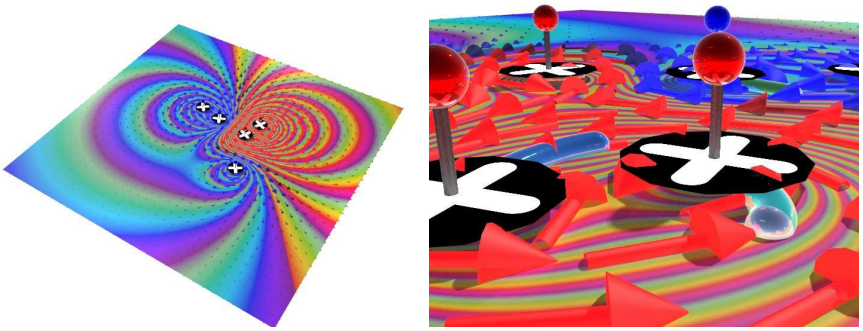


图 8.2：从另一个视角观察实现的设置。

第 5.1 节命题 45 中得到的微分方程来移动它们。参见图 8.2，以便更好地理解这一设置。

请注意，平面示例中使用的配色方案是通过 HSV 色轮生成的，用于表示以下流函数的等值线：

$$\psi = -\frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \omega_i \ln(|x-y|) \tag{8.1}$$

We 为每个点涡添加了小型几何形状和彩色路径，以便更好地识别它们 .

8.3 球面点涡动力学实现

这种情形的实现方式与平面情形几乎同样直接，因为第 6.1 节的命题 48 也为点涡提供了明确的微分方程。构建球面的网格分辨率也不会产生影响。

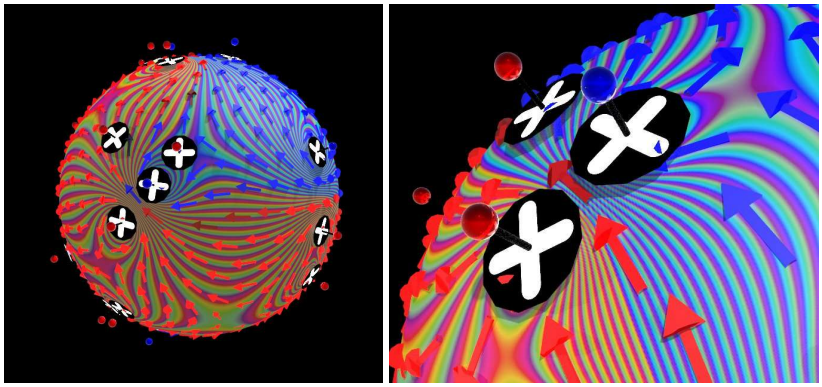


图 8.3：从另一个视角观察 $\mathbb{S}^2$ 的实现设置。

然而，我们必须确保平流点涡始终位于球面上。为此，我们对龙格-库塔方法进行修改，将单位球面的曲率考虑在内。我们不再让点涡沿直线移动，而是利用速度向量计算点涡沿曲线路径移动相同距离后会到达的位置。

实际上，我们旋转点涡，而不是让它们沿直线移动。图 8.4 展示了球面一段弧线上的这一过程。请注意，曲线向量和直线向量的长度相同。我们这样做是为了避免在归一化（投影回球面）过程中损失运动量，而在经典数值方法中就会发生这种情况。

若要理解图 8.3 中的着色，请参阅平面情形的实现，但使用以下流函数：

$$\psi = -\frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \omega_i \ln\left(\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{acos}(x\cdot y)\right)\right) \tag{8.2}$$

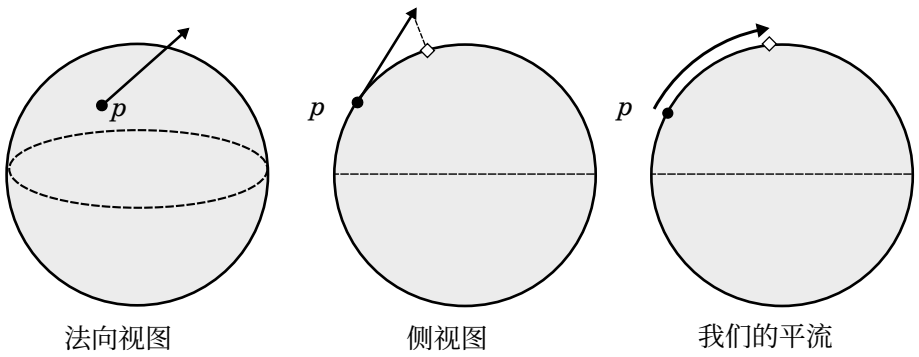


图 8.4：在 $\mathbb{S}^2$ 中，我们看到一个切向量（左）。带归一化的平流步（中）。球面运动上的平流步（右）。

8.4 闭曲面点涡动力学实现

现在精彩的部分来了。接下来，我们将介绍成功实现闭曲面（亏格 0）点涡动力学所需的关键步骤。

我们假设无法找到闭曲面M 的光滑参数化，而我们希望计算该曲面的格林函数。与平面和球面情形不同，现在我们受限于给定曲面网格的分辨率，只能使用有限的信息。实现闭曲面点涡动力学的关键，是实现从网格三角网格曲面到球面的离散共形映射、共形因子及传输，以便使用第 7.1 节定理 50 的结果。另请注意，我们只处理三角剖分网格（见图 8.5 ）。

8.4.1 离散共形映射

最具挑战性的任务是获取一个离散共形映射。这个词的定义并非不言自明；一般而言，利用保角映射的不同性质来离散化保角性的概念，有多种方法 [CW17]。理解离散保角映射的一种好方法是：我们希望将网格上的每个点映射到球面上的一个点，使连接这些点的三角形畸变最小。各个三角形的尺度会发生变化，我们将用共形因子来描述这种变化（图8.6）。

我们使用离散微分几何和离散外微分来计算离散共形映射；这些方法在 [PP93], [SSP08], [CWW13], [KCPS13], [AWO+14], [WPS14], [CKP+16] 等研究中取得了实用成果。其中一项离散外微分研究成果出自 Michael Kazhdan 等人发表的论文 *Can Mean-Curvature Flow Be Modified to Be Non-singular?*2012 [KSBC12]，它提供了一种通过修正平均曲率流创建所需共形映射的方法。其本质是一种迭代方法，会反复求解

$$(\mathrm{Id} - \delta\Delta_0) f_{k+1} = f_k \tag{8.3}$$

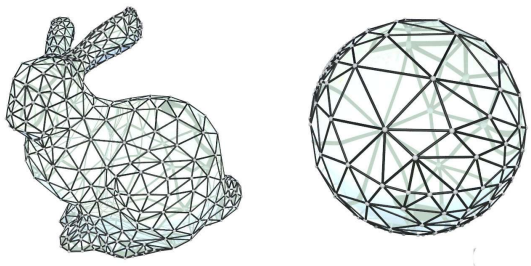


图 8.5：此处仅用低分辨率网格展示整体结构。后续我们会使用更高的分辨率。

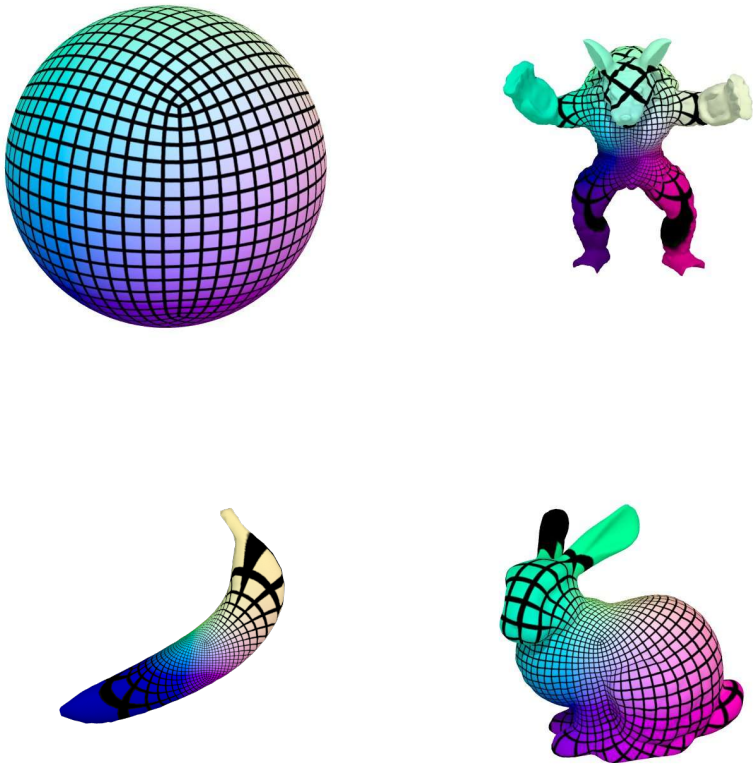


图8.6：离散共形映射示例。球面被映射到不同的零亏格闭曲面，因此每个曲面都可以共形映射到任意其他曲面。

其中， Δ_0 表示初始曲面网格M的离散外微分拉普拉斯算子， $\delta \in \mathbb{R}$ 表示时间步长，$f_0 \in \mathbb{R}^{3N}$ 表示网格中所有$N \in \mathbb{N}$ 个点的坐标，而$k \in \mathbb{N}$ 表示迭代计数器。该迭代方案中拉普拉斯算子的具体构造方法可在论文中查阅。多次应用此后向欧拉法，并在每一步进行尺度归一化后，会得到一个新曲面，其上的每个点都位于 $\mathbb{S}^2$ ，且三角形中的畸变最小。

球面网格为我们提供了所需的共形映射。方程 (8.3) 的迭代过程将原始网格 M 重塑为球面网格 $\mathbb{S}^2$后，我们现在可以直接将 M 上的每个初始点与 $\mathbb{S}^2$上的一个点对应起来。请参见图 8.7，了解这一过程。

请注意，这种离散保角映射表示的是光滑曲面之间的共形映射，而且是双射的！显然，这是因为该映射是通过对原始网格进行畸变而构造出来的。

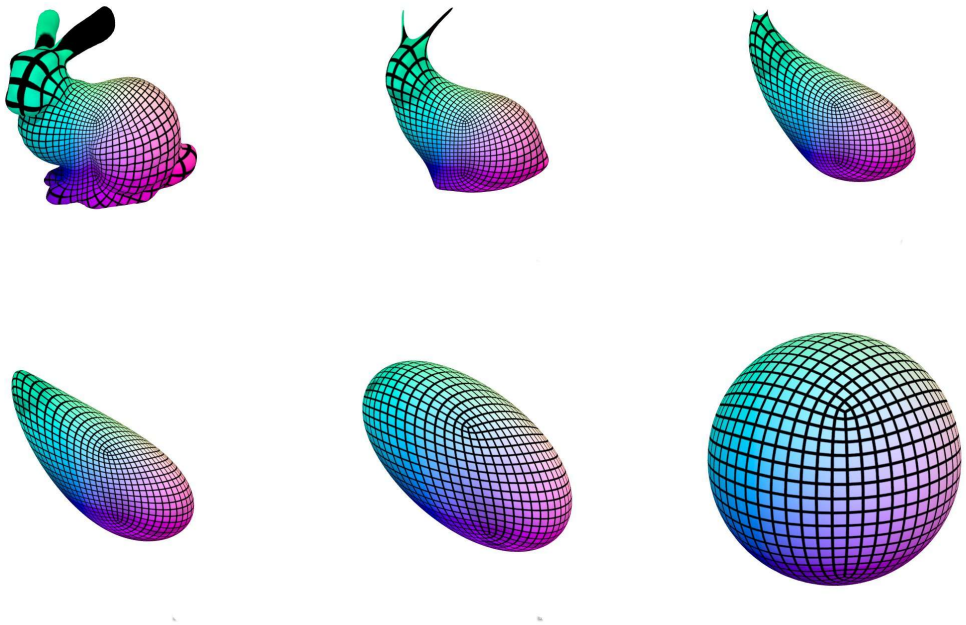


图 8.7：Kazhdan 等人用于创建共形映射的算法的多个迭代步骤。将纹理应用于最终球面，然后投影回前面的步骤。

8.4.2 离散共形因子

离散共形映射保留了每个三角形的角度，但不保留三角形的尺度。共形因子可以直观地理解为边和三角形的缩放因子，但在我们的研究中，我们想知道每个点对应的缩放因子。为了定义点上的共形因子，我们采用 Springborn 等人提出的离散微分几何（DDG）风格的定义。 [SSP08]简而言之，它通过该点周围的缩放比例来计算每个点的共形因子。图 8.8 展示了三角形之间的映射。

每个点p_i 处的离散共形因子，将作为标量值h_i存储，共有$N \in \mathbb{N}$ 个点。通常用以下公式表示两个度量g、 $\tilde{g}$ 之间的共形因子： $\tilde{g} = h^2 g = e^u g$。离散微分几何理论提出，点上的$u$ 离散值必须满足以下方程：

$$\tilde{l}_{ij} = e^{(u_i+u_j)/2} l_{ij} \tag{8.4}$$

其中， $\tilde{l}_{ij}$、l_{ij} 分别是M 中两点之间以及 $\mathbb{S}^2$ 之间的边长。因此，我们可以通过以下方式求出各个u_i 值：

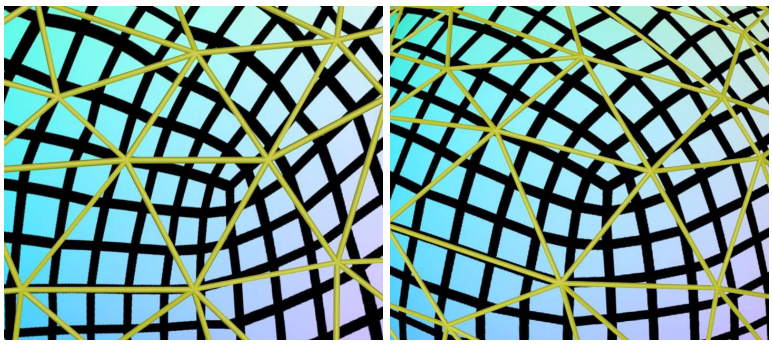


图 8.8：近距离观察共形映射的效果。兔子上的三角形（左）。球面上对应的三角形（右）。这些三角形看起来相似，共形因子表示这些三角形的缩放比例。

$$e^{u_i} = \frac{\tilde{l}_{ij}\,\tilde{l}_{ki}\,l_{jk}}{l_{ij}\,\tilde{l}_{ki}\,\tilde{l}_{jk}} \tag{8.5}$$

使用三角形ijk，然后设定$h_i := \sqrt{e^{u_i}}$。为了捕捉每个三角形内的共形因子，我们再次采用三角形顶点之间数值的线性插值（后文第 8.4.3 节将对此作进一步说明）。图 8.9 展示了曲面上着色的共形因子示例。请注意，在许多示例中，共形因子的取值范围从接近零到数千不等，具体取决于曲面。

到此为止提到的所有步骤，都是为了顺利运行闭曲面涡动力学而进行的预处理步骤。接下来，我们将解释在实现中如何使用保角映射。

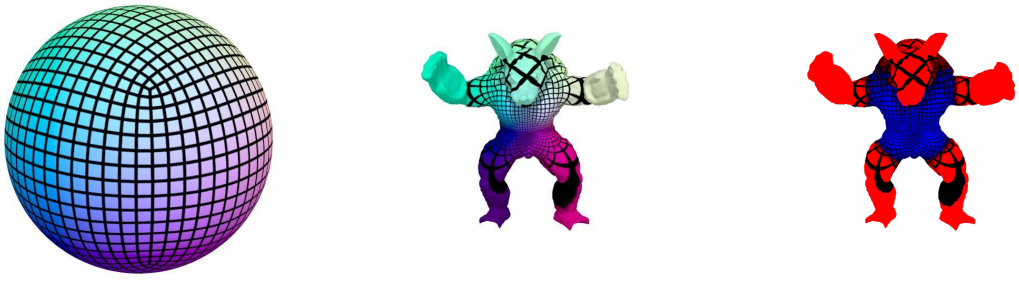


图 8.9：从球面（左）到狄徐（中）的共形映射，并突出显示共形因子的值（右）。红色表示共形因子较高，因此纹理拉伸程度较大。

8.4.3 使用共形映射

我们的点涡可以位于网格上的任意位置，包括顶点、边和面，但目前我们的离散保角映射及其因子都是点到点映射。现在，我们简要说明如何将网格M 中的每个三角形映射到网格 $\mathbb{S}^2$中对应的三角形，从而得到曲面到曲面的映射。

实现这一点的一种方法是使用每个三角形的重心坐标。这是受到纹理映射成功的启发，因为纹理上的角度看起来确实保持不变。与此类似的术语是从一个三角形到另一个三角形的 分片线性映射。

对任意网格上的点 $p \in M$ 执行这种映射的方法，是先确定它所在的三角形（如果 p 落在边或顶点上，则对应的三角形不唯一），以及 p 在该三角形内、相对于顶点 p_1, p_2, p_3 的重心坐标（s、t）。通过该三角形的顶点，我们可以利用点到点映射 f，找到 $\mathbb{S}^2$ 上相应的三角形，其顶点为 $f(p_1)$、$f(p_2)$、$f(p_3)$。最后，我们再次使用相同的重心坐标（s、t）来定义 $f(p)$。

此方案适用于光滑曲面上表示双射映射的点到点映射 $f: A \rightarrow B$，如图 8.10 所示。简而言之，我们对 $p \in A$执行以下 3 个步骤:

1. 找出p 所属的三角形，并收集其顶点 p_1, p_2, p_3

2. 求出 (s, t)，使得 $p = p_1 + s(p_2 - p_1) + t(p_3 - p_1)$

3. 定义 $f(p) := f(p_1) + s(f(p_2) - f(p_1)) + t(f(p_3) - f(p_1))$

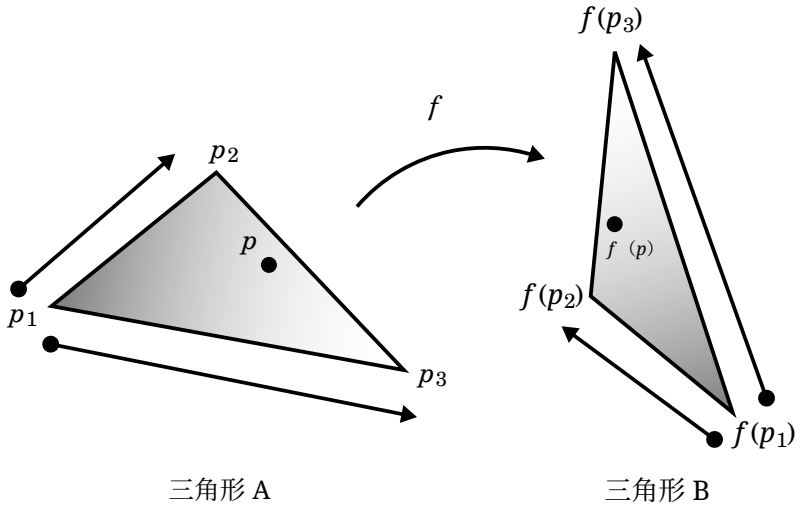


图 8.10：使用重心坐标将两个三角形相互映射的示例。

请注意，现在每个三角形都会被映射到两个闭曲面之间的另一个三角形上。这意味着我们的映射是双射的，并且我们可以自动得到一个逆映射，它也是使用完全相同的方法构造的共形映射。

请注意，我们不仅对共形映射f使用这一方案，也对共形因子h使用这一方案。当然，正是在这一部分，对分辨率的依赖开始显现。顶点越多，我们就能越准确地构造共形映射，从而使这些映射更加精确。

8.4.4 点采样

使用新度量的后果，在观察从曲面M和$\mathbb{S}^2$经共形双射映射f映射之后的点采样时，变得非常明显。

在我们的实现中，我们大部分时间都在$\mathbb{S}^2$上工作。如果我们只是在$\mathbb{S}^2$上均匀采样点，再通过f^{-1}将它们映射回M，最终会得到非常不均衡的点分布。这主要是因为M中那些被f以较高共形因子h映射的面积会落到小得多的区域，因而在均匀采样时代表性不足。

我们可以通过在采样时使用共形因子，或者在直接于$\mathbb{S}^2$上采样时按M中三角形的面积对采样过程加权，来规避这一问题。于是，点$p \in \mathbb{S}^2$出现在球面的三角形ijk中的概率现在将按如下方式计算

$$P(\, p \in \text{triangle}_{\subset \mathbb{S}^2}(ijk)\,) = \frac{A(\text{triangel}_M(ijk)}{A(M)}$$

图8.11展示了这所造成的差异。显然，它展示了共形映射下的面积膨胀与收缩。

8.4.5 离散梯度

对于离散梯度，我们采用第8.4.3节中介绍的三角网格上点集标量函数的分片线性定义。标量函数h在

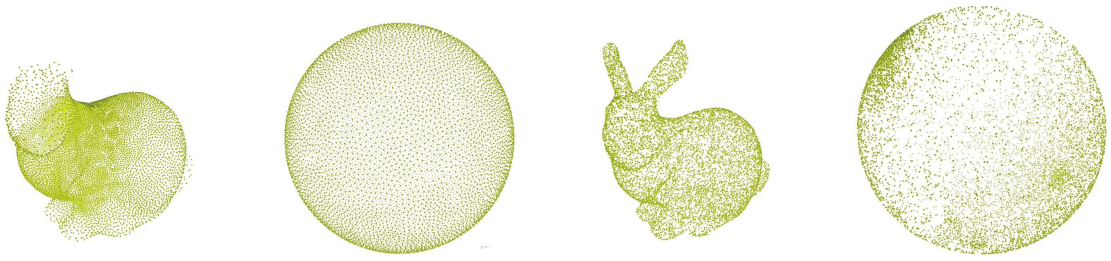


图8.11：均匀采样于$\mathbb{S}^2$上的兔子和球面（左侧一对），以及使用权重采样的兔子和球面（右侧一对）。

这些点上的梯度因此在每个三角形上都是常数。给定三角形集合 $\boldsymbol{F}$，其中每个三角形由三个点的索引 ijk 表示，我们将梯度定义为

$$\nabla_{ijk}h = \frac{1}{2A}\left((p_3 - p_2)h(p_1) + (p_1 - p_3)h(p_2) + (p_2 - p_1)h(p_3) \right) \tag{8.6}$$

其中 A 是三角形面积。图 8.12 展示了该公式。此定义对于使用共形因子的梯度非常重要。

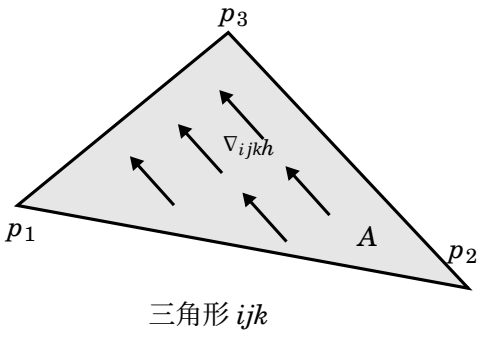


图 8.12：三角形上的常梯度。

8.4.6 《涡动力学》

最初，我们将涡旋任意放置在曲面网格 M 上，这意味着它们可以位于任意三角形中的任意位置。利用离散共形映射 $f: M \to \mathbb{S}^2$，随后我们将点涡投影到 $\mathbb{S}^2$ 上。从此以后，我们只对 $\mathbb{S}^2$ 上的涡旋应用闭曲面涡动力学，而 M 上的对应涡旋则仅仅成为木偶，完全依赖于 $\mathbb{S}^2$ 上涡旋的动力学，并通过逆保角映射 $f^{-1}: S \to M$ 受到控制。图 8.13 阐释了这种关系。

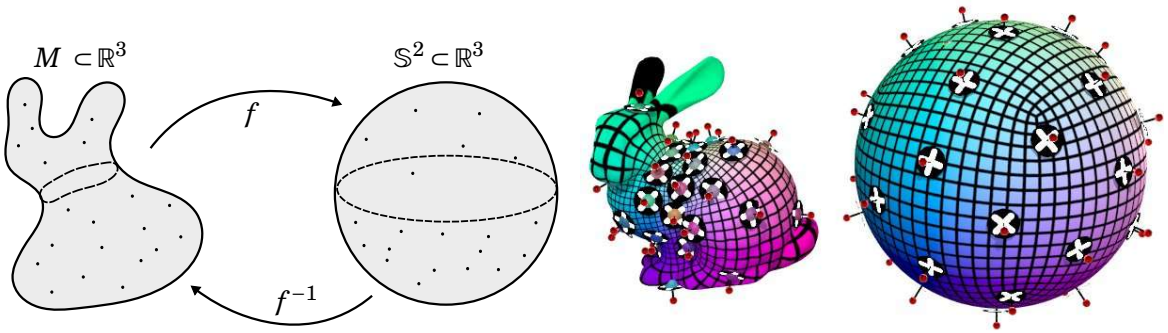


图 8.13：将曲面 M 共形映射到球面 $\mathbb{S}^2$（上图）。在 M 与 $\mathbb{S}^2$ 之间映射涡旋（下图）。

最后，我们终于可以专注于点涡本身的运动。现在，共形映射及其因子都已实现并准备就绪，我们将仅通过定理 50 的结果，直接对球面 $\mathbb{S}^2$ 上的点涡应用闭曲面涡动力学。

$$\vec{u}(p_j) = \frac{1}{4\pi h(p_j)^2}\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\left(\omega_i \frac{p_j \times p_i}{1 - p_j \cdot p_i}\right) - \frac{1}{h(p_j)}\omega_j p_j \times \nabla_{p_j} h(p_j)\right)$$

与球面情形类似，我们以曲线方式平流点涡，而不是按照第8.3节所述沿原始直线路径移动。

在 $\mathbb{S}^2$ 上完成动力学计算后，我们当然还必须使用共形映射的逆映射，将结果传输回$\boldsymbol{M}$ 上。该过程总结于算法8.4.6中，概览见图 8.14。

算法 1 闭曲面上的点涡动力学

给定： 零亏格三角剖分闭曲面网格$\boldsymbol{M}$ $n \in \mathbb{N}$ 个点涡$q_i \in \boldsymbol{M}$，其涡量为 $\omega_i \in \mathbb{R}$ $\sum \omega_i = 0$ **初始化：** 创建双射保角映射$f: \boldsymbol{M} \longrightarrow \mathbb{S}^2$ 创建点$p_i := f(q_i) \in \mathbb{S}^2$ 为每个点赋予共形因子$f: \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ **循环：** 使用定理 50 计算所有 $\vec{u}(p_i)$ 通过在 $\mathbb{S}^2$上的平流更新所有p_i 更新所有$q_i \mapsto f^{-1}(q_i)$

就是这样。

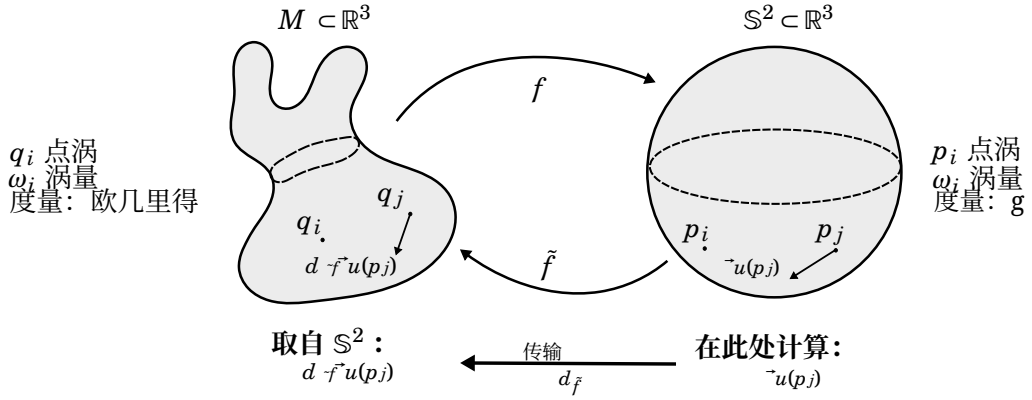


图 8.14：我们的算法概览。$\mathbb{S}^2$ 负责动力学，而 $\boldsymbol{M}$ 负责可视化。保角映射 f、$\tilde{f} = f^{-1}$ 提供了连接。

CHAPTER 9

结论

在本学位论文中，我们呈现了一份完整指南，内容涵盖点涡的理论基础及其全部论证，直至在零亏格闭曲面上的实现。我们从关于流体动力学的十分一般的论述出发，提供了处理曲面上涡量所必需的全部数学工具。随后，我们在完全一般的框架下严谨地阐释了点涡及其研究动机，并在此基础上将其应用于不同的曲面。这也使我们能够总结此前关于平面和球面上点涡的研究成果。

此外，我们以通俗易懂的方式应用了 Boatto 和 Koiller[BK15] 提出的点涡理论成果，并结合 Kazhdan、Solomon、Ben-Chen 和 Mirela [KSBC12] 提出的共形映射构造算法，同时阐述了整个项目中的关键实现步骤。

主要目标是为点涡理论奠定全面的基础。

致谢：我感谢 Ulrich Pinkall 教授兼博士导师在本硕士学位论文中的指导，也感谢 Felix Knöppel 博士和 Albert Chern 博士在讨论过程中所作的贡献。

[作者07] Hassan Aref。《点涡动力学：经典数学的试验场》。数学物理学杂志，48(6):065401，2007年。[AWO+14] Omri Azencot、Steffen Weißmann、Maks Ovsjanikov、Max Wardetzky 和 Mirela Ben-Chen。《曲面上的功能流体》。计算机图形学论坛，33(5):237–246，2014年8月。[BK08] Stefanella Boatto 和 Jair Koiller。《闭曲面上的涡》，2008年。[BK15] Stefanella Boatto 和 Jair Koiller。《闭曲面上的涡》，第185–237页。Springer New York，纽约州纽约市，2015年。[BM06] K. Bajer 和 H.K. Moffatt。《流体动力学中的管、片与奇点：*2001*年*9*月*2*日至*7*日在波兰扎科帕内举行的北约高级研究研讨会论文集，由国际理论与应用力学联合会作为*IUTAM* 研讨会赞助。《流体力学及其应用》。Springer Netherlands，2006年。[Bri15] R. Bridson。《计算机图形学流体模拟（第二版）》。CRC出版社，2015年。[CKP+16] Albert Chern、Felix Knöppel、Ulrich Pinkall、Peter Schröder 和 Steffen Weißmann。《薛定谔之烟》。*ACM*图形学汇刊，35(4):77:1–77:13，2016年7月。[Coh10] Harvey Cohn。《黎曼曲面上的保角映射（多佛数学丛书）》。Dover Publications，多佛版，1980年版，2010年。

[CW17] Keenan Crane 和 Max Wardetzky。《离散微分几何概览》。美国数学学会会刊，64(10):1153–1159，2017年11月。[CWW13] Keenan Crane、Clarisse Weischedel 和 Max Wardetzky。《热中的测地线：一种基于热流计算距离的新方法》。*ACM*图形学汇刊，32，2013年。[DKT06] Mathieu Desbrun、Eva Kanso 和 Yiying Tong。《用于计算建模的离散微分形式》。载于*ACM SIGGRAPH 2006* 课程，SIGGRAPH '06，第39–54页，美国纽约州纽约市，2006年。ACM。[Dri15] S. Dritschel，D. G.；Boatto。《闭曲面上的点涡运动》。《数学、物理与工程科学汇刊》，471，2015年2月。[ETK+07] S. Elcott、Y. Tong、E. Kanso、P. Schröder 和 M. Desbrun。《稳定的、保持环量的单纯流体》。*ACM* 图形学汇刊，26，2007年。[Eul57] 莱昂哈德·欧拉。《流体运动的一般原理》。1757年。[KCPS13] Felix Knöppel、Keenan Crane、Ulrich Pinkall 和 Peter Schröder。《全局最优方向场》。*ACM*图形学汇刊，*http://www.cs.columbia.edu/ keenan/*，32(4)，2013年。[KHP91] G. Kirchhoff、K. Hensel 和 M. Planck。《数学物理学讲义》。《数学物理学讲义》第2卷。Teubner，1891年。[Kim99] Yoshifumi Kimura。《常曲率曲面上的涡旋运动》。《伦敦皇家学会会刊 *A* 辑：数学、物理与工程科学》，455(1981):245–259，1999年。[KSBC12] Michael Kazhdan、Jake Solomon 和 Mirela Ben-Chen。《能否修改平均曲率流使其非奇异？》《计算机图形学论坛》，31(5):1745–1754，2012年8月。[Lim97] T. T. Lim。

关于低雷诺数下两个同轴涡环之间 leapfrogging 现象的注记 rs.

《流体物理学》，9(1):239–241, 1997.[LMW02] Hans Petter Langtangen、Kent-Andre Mardal 和 Ragnar Winther。不可压黏性流的数值方法。《水资源进展》，25(8):1125–1146, 2002.[McC12] P. McCormack。《物理流体动力学》。爱思唯尔科技，2012.[MCP+09] Patrick Mullen、KeenanCrane、Dmitry Pavlov、Yiying Tong 和 Mathieu Desbru

n.

流体动画的保能积分器。*ACM*图形学汇刊，28，2009年7月。[Poz11] C. Pozrikidis。理论与计算流体动力学导论。牛津大学出版社，2011年。[PP93] Ulrich Pinkall 和 Konrad Polthier。离散极小曲面及其共轭面的计算。《实验数学》，2(1):15–36，1993年。[Reg11] A. Regis。《三轴椭球面上的点涡动力学》。伯南布哥联邦大学数学系，2011年。[Saf92] P.G. Saffman。《涡动力学》。《剑桥力学专著》。剑桥大学出版社，1992年。[Sch16] S. Boatto；D.G. Dritschel；R.G. Schaefer。闭曲面上的N体动力学：力学公理。数学、物理与工程科学学报，472，2016年8月。[SRF05] Andrew Selle、Nick Rasmussen 和 Ronald Fedkiw。用于烟雾、水和爆炸的涡粒子法。*ACM*图形学汇刊，24(3):910–914，2005年7月。[SSP08] Boris Springborn、Peter Schröder 和 Ulrich Pinkall。三角网格的共形等价。*ACM*图形学汇刊，27(3):77:1–77:11，2008年8月。

[VIA89] K. Vogtmann V. I. Arnold，A. Weinstein。经典力学的数学方法。《数学研究生教材》。Springer，第2版，1989年。[Wei03] Eric W Weisstein。*CRC*简明数学百科全书。Chapman and Hall/CRC，第2版，2003年。[WPS14] Steffen Weißmann、Ulrich Pinkall 和 Peter Schröder。烟雾形成的烟圈。*ACM*图形学汇刊，33(4):140:1–140:8，2014年7月。