arXiv:2602.03691v1 [eess.SY] 3 Feb 2026

输入到状态安全反步法：具有非匹配不确定性的鲁棒安全关键控制

Max H. Cohen[1],Pio Ong[2],和 Aaron D. Ames[2]

摘要——**在存在非匹配扰动（即无法通过控制输入直接消除的不确定性）时保证安全性，仍是非线性控制领域的一项关键挑战。本文提出了一种针对存在非匹配扰动的非线性系统进行安全关键控制的构造性方法。我们首先利用近期提出的最优衰减控制障碍函数概念，将输入到状态安全（ISSf）框架推广至存在此类不确定性的系统。该概念为满足相关的安全性李雅普诺夫型条件提供了更大的灵活性。随后，我们概述了为两类存在非匹配不确定性的相关系统构造输入到状态安全控制屏障函数（ISSf-CBFs）的步骤：i）严格反馈系统；ii）双相对阶系统，这类系统与微分平坦系统相似。我们通过倒立摆和平面四旋翼的数值仿真展示了理论结果。**

I. 引言

控制障碍函数（CBFs） [1] 已被证明是控制安全关键自主系统的实用工具。鉴于部署于现实世界的自主系统不可避免地会在各种形式的不确定性下运行，关于不确定系统的安全关键控制已有大量研究。特别是，由不完美模型或外生扰动引起的动态不确定性已在安全关键控制框架中得到考虑，方法是引入各类控制障碍函数，例如鲁棒控制障碍函数 [2], 、自适应控制障碍函数 [3], 以及输入到状态安全（ISSf）控制障碍函数 [4], [5]。在关于所考虑不确定性类别的各种假设下，这些控制障碍函数有助于设计能够在此类不确定性存在时保证安全性的控制器。虽然定义能够在特定类别不确定性存在时确保安全性的新型控制障碍函数通常较为直接，但构造满足这些定义的控制障碍函数通常更具挑战性。

目前已有多种技术，例如高阶控制障碍函数[6], [7], ，可用于为无不确定性的系统构造控制障碍函数；然而，能否将此类控制障碍函数直接用于不确定系统，在很大程度上取决于不确定性的结构。当不确定性是匹配的——也就是说，若已知这些不确定性，就能通过控制输入直接抵消——时，为无不确定性系统设计的任意控制障碍函数通常都可作为含不确定性系统的鲁棒／自适应／输入到状态安全控制障碍函数。另一方面，当不确定性是非匹配的时，控制障碍函数的综合设计则更具挑战性。尽管存在这些挑战，近期研究已成功提出多种基于控制障碍函数的控制策略，以补偿不同类别的非匹配不确定性 [8]–[13]。

在稳定化领域，反步法 [14], [15]传统上用于设计鲁棒和自适应控制器，以有效补偿非匹配不确定性。近年来，反步法已扩展到结合控制障碍函数（CBF）的安全关键控制 [16], [17],，从而能够针对各类系统系统性地构造控制障碍函数。尽管已有工作采用反步法处理非匹配不确定性 [14], [15], ，但现有文献中关于存在非匹配不确定性时控制障碍函数反步法的结果仍十分少见，例外是 [10]。不过需要指出的是， [10]采用的反步过程不同于 [16],中的方法，而我们当前的方法正是基于后者（比较见 [18]）。

本文结合输入到状态安全 [4]与控制障碍函数反步法 [16]中的工具，提出一个针对存在非匹配不确定性的非线性系统进行鲁棒安全关键控制的通用框架。为此，我们首先回顾输入到状态安全的概念，并讨论匹配条件如何有助于验证输入到状态安全性控制障碍函数条件。接下来，我们阐释近期提出的最优衰减 控制障碍函数（OD-CBF）这一概念；该术语最初由 [19] 提出，并在 [20], 中得到更系统的研究。它放宽了传统的控制障碍函数验证条件，因此在验证鲁棒控制障碍函数时尤为有用。当这类条件难以直接验证时，我们提出一种基于控制障碍函数反步法 [16], [17] 的构造性流程，可系统地为某些类别的系统综合控制障碍函数，即使存在非匹配不确定性也不例外。我们考虑的两类系统是：1）严格反馈系统，这类系统传统上在反步法研究中受到关注 [14]；2）双相对阶系统，近期研究见 [21], 。这类系统具有与微分平坦系统相似的性质 [22], ，例如独轮车和四旋翼飞行器。总体而言，该流程能够针对存在非匹配不确定性的实际相关系统类别实现鲁棒安全关键控制；我们通过对四旋翼飞行器和摆进行数值仿真，展示所提出理论的应用。

总之，本文的主要贡献包括：i) 通过 OD-CBFs 推广输入到状态安全框架，并提出更广泛的扰动输入模型，从而为补偿扰动提供更大的灵活性；ii) 提出一种构造性的反步法，用于在非匹配扰动下综合输入到状态安全控制屏障函数，并对严格反馈系统和“双重相对阶”系统进行了全面的技术论述。

[1]作者就职于北卡罗来纳州立大学电气与计算机工程系，罗利，北卡罗来纳州{mhcohen2}@ncsu.edu。[2]作者们就职于加州理工学院机械与土木工程系，帕萨迪纳，加利福尼亚州{pioong,ames}@caltech.edu。

©2026年 IEEE。允许将本材料用于个人用途。所有其他用途均须获得 IEEE 的许可，包括在任何现有或未来媒体中重印或再版本材料以用于广告或宣传目的、创作新的合集、转售或重新分发至服务器或列表，或在其他作品中重复使用本作品中受版权保护的任何部分。

II. 背景

控制障碍函数：考虑如下非线性控制仿射系统：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \tag{1}$$

其中$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态，$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ 为控制输入，且$\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 和$\mathbf{g}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ 均为光滑函数。给定一个光滑反馈控制器$\mathbf{k}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，令$\mathbf{u} = \mathbf{k}(\mathbf{x})$，可得到闭环系统：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_{\mathrm{cl}}(\mathbf{x}) \coloneqq \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{k}(\mathbf{x}). \tag{2}$$

对于每个初始条件，(2) 都存在一个定义在最大存在区间上的解。为便于阐述，假设该区间为正实数轴。若集合$\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ 是安全的，即 $\mathcal{S}$ 对于闭环系统是正向不变的，则称其为安全集。本文聚焦于以下形式的候选安全集：

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid h(\mathbf{x}) \geq 0\}, \tag{3a}$$
$$\partial\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid h(\mathbf{x}) = 0\}, \tag{3b}$$

其中 $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 连续可微。给定如 (3) 所示的候选安全集，定义 $b \coloneqq -\inf_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} h(\mathbf{x})$、$c \coloneqq \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} h(\mathbf{x})$，以及开集：

$$\mathcal{D} \coloneqq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid h(\mathbf{x}) + b > 0\}. \tag{4}$$

控制障碍函数这一概念使我们能够设计出可保证安全性的控制器。

定义1 ([1])。连续可微函数$h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 定义了一个集合 $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ （如式(3)所示），若存在一个扩展类 $\mathcal{K}$ 函数[1] $\alpha: (-b, c) \to \mathbb{R}$，使得对于所有 $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$：则称其为集合 $\mathcal{D} \supset \mathcal{S}$（见式(4)）上系统(1)的控制障碍函数（CBF）。

$$\sup_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^m} \{L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})\mathbf{u}\} > -\alpha(h(\mathbf{x})). \tag{5}$$

条件(5)确保在边界处（$h(\mathbf{x}) = 0$）总是存在一个纠正输入，以增大 h，并防止轨迹离开安全集。此外，控制障碍函数还确保以下基于优化的控制器（CBF-QP）的适定性和正则性：

$$\mathbf{k}(\mathbf{x}) = \underset{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^m}{\arg\min} \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{k}_{\mathrm{d}}(\mathbf{x})\|^2 \tag{6}$$
$$\text{s.t.} \quad L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})\mathbf{u} \geq -\alpha(h(\mathbf{x})),$$

该控制器使 $\mathcal{S}$ 对于(2)是安全的。[3] 该控制器的有效性取决于 h是否为控制障碍函数——以下引理提供了一种便捷的方法，用于检验 h 是否为控制障碍函数：

引理1 ([2])。连续可微函数 $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$是集合 $\mathcal{D} \supset \mathcal{S}$ 上系统 (1) 的控制障碍函数，当且仅当存在一个扩展类 $\mathcal{K}$ 函数 $\alpha: (-b, c) \to \mathbb{R}$，使得：

$$L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \implies L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) > -\alpha(h(\mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}. \tag{7}$$

[1]函数 $\alpha: (-b, c) \to \mathbb{R}$，其中 $b, c > 0$，属于扩展$\mathcal{K}$ 类，若其连续、严格递增，且 $\alpha(0) = 0$。

[2]连续可微函数 $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 沿向量场 $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的李导数记为 $L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) = \nabla h(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})$。

[3]关于式 (5) 和 (6) 中严格与非严格不等式的说明，请参见 [17, 备注 1] 。

前述引理表明，验证控制障碍函数只需检查在$L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$处是否满足式 (5)。对于鲁棒控制障碍函数（例如输入到状态安全控制屏障函数 [4], [5],），当系统中引入匹配扰动[4]时，这一要求仍然不变。**输入到状态安全控制屏障函数：**现在考虑受扰动 $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ 影响的系统：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{d}. \tag{8}$$

给定光滑反馈控制器$\mathbf{u} = \mathbf{k}(\mathbf{x})$以及分段连续扰动信号 $t \mapsto \mathbf{d}(t)$，可得受扰闭环系统：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{k}(\mathbf{x}) + \mathbf{d}(t), \tag{9}$$

该系统同样容许定义在最大存在区间上的唯一解。在存在扰动时，可以预期安全性质可能丧失。输入到状态安全（输入到状态安全）这一概念刻画了安全性如何在扰动存在时退化。

定义2 ([4]). 形如(3)的集合 $\mathcal{S}$ 被称为闭环系统(9)的输入到状态安全 （输入到状态安全），如果存在一个 $\mathcal{K}$ 类函数 $\gamma: [0, a) \to \mathbb{R}$, $a > 0$，满足 $\lim_{r\to a} \gamma(r) = b$，以及常数 $\delta \in [0, a)$，使得对任意满足 $\|\mathbf{d}(t)\|_\infty \leq \delta$ 的扰动信号 $t \mapsto \mathbf{d}(t)$，集合：

$$\mathcal{S}_\delta \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid h(\mathbf{x}) + \gamma(\delta) \geq 0\}, \tag{10}$$

是正向不变的，因此是安全的。

在输入到状态安全框架中，被认证为安全的集合并非原始候选安全集 $\mathcal{S}$，而是 $\mathcal{S}$的膨胀，记为 $\mathcal{S}_\delta$，其大小与扰动的幅值成正比，从而量化安全性退化。输入到状态安全框架的一个优势是，能够利用输入到状态安全控制屏障函数系统地构造满足输入到状态安全性的控制器。

定义3 ([23])**：**若连续可微函数$h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 定义了如式（3）所示的集合 $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$，则称其为式（8）的输入到状态安全控制屏障函数（ISSf-CBF），当且仅当存在扩展类 $\mathcal{K}$ 函数 $\alpha: (-b, c) \to \mathbb{R}$ 以及正常数 $\varepsilon > 0$，使得对所有$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\sup_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^m} \{L_{\mathbf{f}}h(x) + L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})\mathbf{u}\} > -\alpha(h(\mathbf{x})) + \tfrac{1}{\varepsilon}\|\nabla h(\mathbf{x})\|^2. \tag{11}$$

与标准控制障碍函数类似，将类似于式（6）的控制屏障函数二次规划修改为满足输入到状态安全控制屏障函数条件（11）后，可确保 $\mathcal{S}$ 满足输入到状态安全性[4], [23]。与控制障碍函数类似，判断一个函数是否为输入到状态安全控制屏障函数，需要研究其在 $L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ 时的行为。

引理2 ([23])。连续可微函数 $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是系统 (13) 在 $\mathcal{D} \supset \mathcal{S}$ 上的输入到状态安全控制障碍函数，当且仅当存在一个扩展类 $\mathcal{K}$ 函数 $\alpha: (-b, c) \to \mathbb{R}$，使得对每个 $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$:

$$L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \implies L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) > -\alpha(h(\mathbf{x})) + \tfrac{1}{\varepsilon}\|\nabla h(\mathbf{x})\|^2. \tag{12}$$

[4]注意，当允许控制输入集合为 $\mathbb{R}^m$ 时，(7) 与 (5) 等价。如果存在输入约束，即 $\mathbf{u} \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$，那么 (7) 仍是 h 成为控制障碍函数的必要条件，但不是充分条件。

与标准控制障碍函数相比，输入到状态安全控制屏障函数的验证条件在 (12) 中包含额外的鲁棒项 $\frac{1}{\varepsilon}\|\nabla h(\mathbf{x})\|^2$，这使验证过程更加严格。这促使我们开发能够放宽验证条件的方法，下一节将对此进行讨论。

III. 最优衰减输入到状态安全控制障碍函数

利用输入到状态安全框架实现鲁棒安全关键控制的一项关键挑战，在于验证相关控制障碍函数条件在存在扰动时是否成立。如（12）所示，在控制权消失的状态下，系统的自然动力学必须满足更严格的要求，而这一要求通常未必成立。

本节通过两种推广来应对这一问题。首先，我们考虑一种广义扰动模型：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{w}(\mathbf{x})\mathbf{d}, \tag{13}$$

其中$\mathbf{w}$ ： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times p}$ 是扰动输入矩阵，用于表征扰动进入动力学的方向。如果这些方向未知，可以令$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{I}$ ，以恢复（8）。其次，我们采用 [19] 中引入并在 [20] 中作了更形式化刻画的最优衰减控制障碍函数（OD-CBF）概念。现在，我们将这一概念扩展到输入到状态安全场景，如下所示。

定义 4。若连续可微函数 h :$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 定义了如（3）中的集合 $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ ，则称其为（13）在由（4）给出的集合 $\mathcal{D} \supset \mathcal{S}$ 上的最优衰减输入到状态安全控制障碍函数（ OD-ISSf-CBF），前提是存在一个扩展类 $\mathcal{K}$ 函数α : $(-b, c) \to \mathbb{R}$ 以及正常数 $\theta_{\mathrm{d}} > 0$ 和 $\varepsilon > 0$，使得对所有$\mathbf{x} \in \mathcal{D}$:

$$\sup_{\substack{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^m \\ \omega\geq\theta_{\mathrm{d}}}} \{L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})\mathbf{u} + \omega\alpha(h(\mathbf{x}))\} > \tfrac{1}{\varepsilon}\|L_{\mathbf{w}}h(\mathbf{x})\|^2. \tag{14}$$

与传统控制障碍函数相比，最优衰减控制障碍函数引入了一个额外的决策变量，在 (14) 中记为 ω ，它作为扩展类 $\mathcal{K}$ 函数 α的缩放因子。这个缩放因子可视为额外的控制输入，为满足相关障碍条件提供了更大的灵活性。与 [20], 中的定义相比（其中最优衰减控制障碍函数仅定义在 $\mathcal{S}$ 上，且 $\omega \geq 0$），此处我们要求 $\omega \geq \theta_{\mathrm{d}} > 0$ ，以便将这些思路扩展到包含 $\mathcal{S}$ 的集合 $\mathcal{D}$。最优衰减控制障碍函数的一个优点是，与控制障碍函数相比，只需在较小的区域内验证其有效性。

引理3. 连续可微函数 h： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是集合 $\mathcal{D} \supset \mathcal{S}$ 上针对 (13) 的 *OD-ISSf-CBF*，当且仅当存在一个扩展类 $\mathcal{K}$ 函数 α : $(-b, c) \to \mathbb{R}$，使得对于每个 $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$:

$$h(\mathbf{x}) \leq 0 \ \wedge \ L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \implies L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) + \theta_{\mathrm{d}}\alpha(h(\mathbf{x})) > \frac{1}{\varepsilon}\|L_{\mathbf{w}}h(\mathbf{x})\|^2. \tag{15}$$

证明。 该证明与 [20, 引理 3]类似。定义：

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \omega) =& L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ &+ \omega\alpha(h(\mathbf{x})) - \frac{1}{\varepsilon}\|L_{\mathbf{w}}h(\mathbf{x})\|^2.\end{aligned} \tag{16}$$

若 h（$\mathbf{x}$）> 0 或 $L_{\mathbf{g}}h$（$\mathbf{x}$）$\neq \mathbf{0}$，则有：

$$\sup_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^m,\ \omega\geq\theta_{\mathrm{d}}} \rho(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \omega) = \infty,$$

这意味着 (14) 成立。接下来还需检查$\mathcal{D}$ 中 $h(\mathbf{x}) \leq 0$ 且 $L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$的点。在这些点处：

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \omega) = L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) + \omega\alpha(h(\mathbf{x})) - \tfrac{1}{\varepsilon}\|L_{\mathbf{w}}h(\mathbf{x})\|^2.$$

由于 α 是扩展类 $\mathcal{K}$ 函数，且 $h(\mathbf{x}) \leq 0$，复合函数 $\alpha(h(\mathbf{x})) \leq 0$，因此取上确界可得：

$$\sup_{\substack{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^m \\ \omega\geq\theta_{\mathrm{d}}}} \rho(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \omega) = L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) + \theta_{\mathrm{d}}\alpha(h(\mathbf{x})) - \tfrac{1}{\varepsilon}\|L_{\mathbf{w}}h(\mathbf{x})\|^2.$$

因此，询问（14）是否对所有 $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ 成立，等价于询问（15）是否成立，证毕。 □

本文提出的两种推广都放宽了从（12）到（15）的验证过程。首先，由于引入了最优衰减变量，只需检查h 在边界及 $\mathcal{S}$之外的有效性。在 $\mathcal{S}$的内部，（14）会自动满足。因此，只要 $L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ 在 $\mathcal{D} \setminus \mathrm{Int}(\mathcal{S})$上成立， h 就是 OD-ISSf-CBF。

命题 1。 连续可微函数 h :$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是集合 $\mathcal{D} \supset \mathcal{S}$ 上系统（*13*）的 *OD-ISSf-CBF*，当且仅当：

$$L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D} \setminus \mathrm{Int}(\mathcal{S}). \tag{17}$$

（15）中的第二种放宽源自扰动输入矩阵 $\mathbf{w}(\mathbf{x})$。鲁棒性项现在取决于$L_{\mathbf{w}}h(\mathbf{x})$，它是 $\nabla h(\mathbf{x})$在 $\mathbf{w}(\mathbf{x})$所指定方向上的投影，而不是完整梯度。这降低了保守性，因为只要求函数 h沿扰动影响该函数的方向具备鲁棒性。

这一观察与匹配扰动的概念有关，该概念在输入到状态安全控制屏障函数的发展中发挥了核心作用。具体而言，早期的表述 [4] 使用$\|L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})\|^2$ 作为鲁棒性项，对应于通过与控制输入相同的通道进入系统的扰动。我们采用以下正式定义。

定义 5 ([24])。 若系统 (13) 的扰动输入$\mathbf{d} \in \mathbb{R}^p$ 满足$\mathbf{w}(\mathbf{x})\mathbf{d}$ ∈属于 (g(x))的张成空间，则称其为匹配的。否则，称 $\mathbf{d}$ 为不匹配的。

匹配条件意味着$\mathbf{w}$ 可以表示为$\mathbf{g}$ 各列的线性组合，即存在函数 $\boldsymbol{\phi}$： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m\times p}$ 使得$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x})\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})$，参见 [24]。匹配条件的主要优点是：

$$L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \implies L_{\mathbf{w}}h(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

因此，(15) 可简化为标准 OD-CBF 验证。因此，若$\mathbf{d}$ 是匹配的，则无需考虑扰动即可构造控制障碍函数，随后可将其自动用于 ISSf 控制器，以增强系统应对扰动的鲁棒性。

当 h 是 OD-ISSf-CBF 时，我们可以使用基于CBF的二次规划框架构造反馈控制器：

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\mathbf{k}(\mathbf{x})\\ \theta(\mathbf{x})\end{bmatrix} = \underset{\substack{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^m\\ \omega\in\mathbb{R}}}{\arg\min} \quad & \tfrac{1}{2}\|\mathbf{u}-\mathbf{k}_{\mathrm{d}}(\mathbf{x})\|^2+\tfrac{1}{2}p(\omega-\theta_{\mathrm{d}})^2\\ \text{s.t.} \quad & L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})+L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})\mathbf{u}\geq-\omega\alpha(h(\mathbf{x}))+\tfrac{1}{\varepsilon}\|L_{\mathbf{w}}h(\mathbf{x})\|^2\\ & \omega\geq\theta_{\mathrm{d}}\end{aligned} \tag{18}$$

其中 $p>0$。如 [19], [20], 中所述，OD范式的核心在于联合优化控制输入$\mathbf{u}$和缩放因子 ω。最终，上述控制器$\mathbf{k}$确保：

$$L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})+L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})\mathbf{k}(\mathbf{x})\geq-\theta(\mathbf{x})\alpha(h(\mathbf{x}))+\tfrac{1}{\varepsilon}\|L_{\mathbf{w}}h(\mathbf{x})\|^2 \tag{19}$$

具有状态相关缩放因子 $\theta:\ \mathcal{D}\to\mathbb{R}_{>0}$ 对于α，其满足 $\theta(\mathbf{x})\geq\theta_{\mathrm{d}},\ \forall\mathbf{x}\in\mathcal{D}$，对应于期望值$\theta_{\mathrm{d}}>0$。采用与 [20, 引理4], 类似的方法，可以证明(18)在 $\mathcal{D}$ 上局部Lipschitz连续，并可表示为如下闭式：

$$\begin{aligned}\mathbf{k}(\mathbf{x}) =&\mathbf{k}_{\mathrm{d}}(\mathbf{x})+\lambda(\upsilon(\mathbf{x}),\xi(\mathbf{x}),\zeta(\mathbf{x}))L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})^{\top}\\ \upsilon(\mathbf{x}) =&L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})+L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})\mathbf{k}_{\mathrm{d}}(\mathbf{x})+\theta_{\mathrm{d}}\alpha(h(\mathbf{x}))-\tfrac{\|L_{\mathbf{w}}h(\mathbf{x})\|^2}{\varepsilon}\\ \xi(\mathbf{x}) =&\|L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})\|,\qquad\qquad \zeta(\mathbf{x})=(1/p)\alpha(h(\mathbf{x})),\end{aligned} \tag{20}$$

其中，$\mathrm{ReLU}(\cdot)=\max(0,\cdot)$:

$$\lambda(\upsilon,\xi,\zeta)=\begin{cases}0 & \text{if } \xi=0\wedge\zeta\leq0,\\ \frac{\mathrm{ReLU}(-\upsilon)}{\xi^2+p\mathrm{ReLU}(\zeta)^2} & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{21}$$

此外，α 上的状态相关缩放因子为：

$$\begin{aligned}\theta(\mathbf{x}) =&\theta_{\mathrm{d}}+\psi(\upsilon(\mathbf{x}),\xi(\mathbf{x}),\zeta(\mathbf{x})),\\ \psi(\upsilon,\xi,\zeta)=&\begin{cases}0 & \text{if } \xi=0\wedge\zeta\leq0,\\ \frac{\mathrm{ReLU}(-\upsilon)\mathrm{ReLU}(\zeta)}{\xi^2+pc^2} & \text{otherwise.}\end{cases}\end{aligned} \tag{22}$$

在陈述该控制器的安全性质之前，我们需要如下引理，以便于利用Nagumo定理 [25,第 4]章来证明集合不变性。

引理4. 若 h 是(13) 在集合 $\mathcal{D}\supset\mathcal{S}$上的一个*OD-ISSf-CBF*，如(4)所示，则任意 $\kappa\in(-b,0]$ 都是 h的正则值。

证明。要使 κ 成为 h 的正则值，我们要求对于所有满足 $h(\mathbf{x})=\kappa$ 的情况，都有 $\nabla h(\mathbf{x})\neq\mathbf{0}$。为导出矛盾，假设存在 $\kappa\in(-b,0]$，使得 κ 不是 h 的正则值。因此，当 $h(\mathbf{x})=\kappa\leq0$ 时，我们有 $\nabla h(\mathbf{x})=\mathbf{0}$（这意味着 $L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})=0, L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})=\mathbf{0}$），结合 h 是 OD-ISSf-CBF (14) 这一假设，可推出：

$$\sup_{\substack{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^m\\ \omega\geq\theta_{\mathrm{d}}}}\omega\alpha(h(\mathbf{x}))=\sup_{\omega\geq\theta_{\mathrm{d}}}\omega\alpha(h(\mathbf{x}))=\sup_{\omega\geq\theta_{\mathrm{d}}}\omega\alpha(\kappa)>0.$$

对于任意 $\kappa\in(-b,0]$，我们可以得到矛盾：

$$\sup_{\omega\geq\theta_{\mathrm{d}}}\omega\underbrace{\alpha(\kappa)}_{\leq0}=\underbrace{\theta_d}_{>0}\underbrace{\alpha(\kappa)}_{\leq0}>0,$$

这意味着 κ 必须是 h 的正则值，证毕。 □

借助前述引理，我们现在可以陈述关于OD-ISSf-CBF安全性质的主要结果。

定理1. 设 h 是(13) 在集合$\mathcal{D}\supset\mathcal{S}$ 上的一个*OD-ISSf-CBF*，该集合如(4) 所给，并考虑(18)中的*CBF-QP*控制器。若：

$$\|\mathbf{d}\|_\infty^2<-\frac{2\theta_{\mathrm{d}}\alpha(-b)}{\varepsilon}, \tag{23}$$

那么，式 (3) 中的集合 $\mathcal{S}$ 是闭环系统的输入到状态安全。特别地，按照 (10) 定义的集合 $\mathcal{S}_\delta$ 对闭环系统是正向不变的，其中：

$$\gamma(\delta)=-\alpha^{-1}\left(-\frac{\varepsilon\delta^2}{2\theta_d}\right). \tag{24}$$

此外，如果 下确界$_{\mathbf{x}\in\partial\mathcal{S}}\|L_{\mathbf{w}}h(\mathbf{x})\|>\varepsilon\|\mathbf{d}\|_\infty$，则原集合 $\mathcal{S}$ 是正向不变的。

证明。沿闭环受扰系统(13)的解对 h 求导，可得：

$$\begin{aligned}\dot{h} =&L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})+L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})\mathbf{k}(\mathbf{x})+L_{\mathbf{w}}h(\mathbf{x})\mathbf{d}\\ \geq&-\theta(\mathbf{x})\alpha(h(\mathbf{x}))+\frac{1}{\varepsilon}\|L_{\mathbf{w}}h(\mathbf{x})\|^2+L_{\mathbf{w}}h(\mathbf{x})\mathbf{d}\\ \geq&-\theta(\mathbf{x})\alpha(h(\mathbf{x}))+\frac{1}{\varepsilon}\|L_{\mathbf{w}}h(\mathbf{x})\|^2-\|L_{\mathbf{w}}h(\mathbf{x})\|\|\mathbf{d}\|\\ \geq&-\theta(\mathbf{x})\alpha(h(\mathbf{x}))+\frac{1}{\varepsilon}\|L_{\mathbf{w}}h(\mathbf{x})\|^2-\|L_{\mathbf{w}}h(\mathbf{x})\|\|\mathbf{d}\|_\infty\\ \geq&-\theta(\mathbf{x})\alpha(h(\mathbf{x}))+\frac{1}{2\varepsilon}\|L_{\mathbf{w}}h(\mathbf{x})\|^2-\frac{\varepsilon}{2}\|\mathbf{d}\|_\infty^2\end{aligned} \tag{25}$$

其中，第一个不等式由(19)得到，第二个由取范数界得到，第三个由 $\|\mathbf{d}\|\leq\|\mathbf{d}\|_\infty$得到，第四个由对最后一项应用杨氏不等式得到。基于(22)，每当 $h(\mathbf{x})\leq0$时，我们有 $\theta(\mathbf{x})=\theta_{\mathrm{d}}>0$。因此，对所有$\mathbf{x}\in\mathcal{D}\setminus\mathrm{Int}(\mathcal{S})$，我们有：

$$\dot{h}\geq-\theta_d\alpha(h(\mathbf{x}))-\frac{\varepsilon}{2}\|\mathbf{d}\|_\infty^2. \tag{26}$$

对 $\gamma\in\mathcal{K}$，令 $h_\delta(\mathbf{x})=h(\mathbf{x})+\gamma(\|\mathbf{d}\|_\infty)$。则：

$$\dot{h}_\delta=\dot{h}\geq-\theta_d\alpha(h_\delta(\mathbf{x})-\gamma(\|\mathbf{d}\|_\infty))-\frac{\varepsilon}{2}\|\mathbf{d}\|_\infty^2. \tag{27}$$

若按(24)选取 γ，则有：

$$h_\delta(\mathbf{x})=0\implies\dot{h}_\delta(\mathbf{x},\mathbf{k}(\mathbf{x}),\mathbf{d})\geq0. \tag{28}$$

现在注意到，(23)保证了 $\gamma(\|\mathbf{d}\|_\infty)<b$。基于(4)，这保证了 $\mathcal{S}_\delta\subset\mathcal{D}$。此外，由于对任意 $\kappa\in(-b,0]$，κ 是 h 的正则值，由引理4以及$\gamma(\|\mathbf{d}\|_\infty)<b$ 可知，$-\gamma(\|\mathbf{d}\|_\infty)$是 h 的正则值，这意味着零是 h_δ的正则值。由于(28)成立且零是 h_δ的正则值，由Nagumo定理 [25,第 4]章可知，$\mathcal{S}_\delta$ 对闭环系统是正向不变的。因此，$\mathcal{S}$ 是输入到状态安全的，如所断言。此外，若$\inf_{\mathbf{x}\in\partial\mathcal{S}}\|L_{\mathbf{w}}h(\mathbf{x})\|>\varepsilon\|\mathbf{d}\|_\infty$ 成立，则(25)中 h 的表达式在 $\partial\mathcal{S}$ 上大于零，并且 $\mathcal{S}$ 的正向不变性由 [20]中的最优衰减控制屏障函数结果得出。 □

OD-ISSf-CBF 框架通过两种方式放宽了输入到状态安全控制屏障函数的验证过程。首先，只需在 $\mathcal{S}$ 的边界及其外部检查控制障碍函数条件。其次，仅需沿 $L_{\mathbf{w}}h(\mathbf{x})$ 的方向满足鲁棒性要求。具体而言，如果 $L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})\neq\mathbf{0}$ 对所有 $\mathbf{x}\in\mathcal{D}\setminus\mathrm{Int}(\mathcal{S})$ 均成立，

那么 h 自动成为 OD-ISSf-CBF；否则，必须验证式 (15) 成立。选择更小的 ε 和更大的 θ_{d} 可以提高鲁棒性，因为能够补偿更大的扰动，参见式 (23)，同时 $\mathcal{S}$ 的膨胀也会减小，参见式 (24)。不过，必须注意确保所选参数与 OD-ISSf-CBF 相容，即满足式 (15)。

IV. 输入到状态安全反步法

在本节中，我们将进一步完善鲁棒安全框架，不再假设系统对函数 h 具有直接控制权，也不再假设扰动是匹配的。相反，我们将说明，在许多情况下，可以利用系统结构，通过反步法 [16],[17] 构造出能够提供 ISSf 保证的控制障碍函数。

A. 严格反馈系统

我们考虑的第一类情形是：系统对安全函数没有直接控制权，但仍可通过高阶动力学影响与该安全函数相关的状态。这类系统的一种典型表示形式为严格反馈形式：

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}_1\\ \dot{\mathbf{x}}_2\end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1)+\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1)\mathbf{x}_2\\ \mathbf{f}_2(\mathbf{x})\end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{g}_2(\mathbf{x})\end{bmatrix}}_{\mathbf{g}(\mathbf{x})}\mathbf{u} + \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{w}_1(\mathbf{x}_1)\\ \mathbf{w}_2(\mathbf{x})\end{bmatrix}}_{\mathbf{w}(\mathbf{x})}\mathbf{d}, \tag{29}$$

其中 $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2} = \mathbb{R}^n$ 是系统状态。我们的目标是设计一个反馈控制器，确保系统轨迹始终保持在集合内：

$$\mathcal{S}_1 = \{\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^{n_1} \mid h_1(\mathbf{x}_1) \geq 0\}, \tag{30}$$

在所有时刻均成立。反步法将第二个状态 $\mathbf{x}_2$ 视为第一个状态动力学的“虚拟”输入：

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1)\mathbf{x}_2 + \mathbf{w}_1(\mathbf{x}_1)\mathbf{d}, \tag{31}$$

并假设 h_1 在集合 $\mathcal{D}_1 \supset \mathcal{S}_1$ 上是系统 (31) 的 OD-ISSf-CBF，具体而言：

$$\begin{aligned}&\sup_{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^{n_2},\ \omega\geq\theta_{\mathrm{d}}} \rho_1(\mathbf{x}_1,\mathbf{v},\omega) > 0, \qquad (32)\\ &\rho_1(\mathbf{x}_1,\mathbf{v},\omega) := L_{\mathbf{f}_1}h_1(\mathbf{x}_1) + L_{\mathbf{g}_1}h_1(\mathbf{x}_1)\mathbf{v}\\ &\qquad + \omega\alpha(h_1(\mathbf{x}_1)) - \frac{1}{\varepsilon}\|L_{\mathbf{w}_1}h_1(\mathbf{x}_1)\|^2,\end{aligned}$$

对所有 $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{D}_1$。CBF 反步法的一个关键要素是存在一个光滑反馈控制器 $\mathbf{k}_1 : \mathcal{D}_1 \to \mathbb{R}^{n_2}$，满足相应的障碍条件：

$$\begin{aligned}&L_{\mathbf{f}_1}h_1(\mathbf{x}_1) + L_{\mathbf{g}_1}h_1(\mathbf{x}_1)\mathbf{k}_1(\mathbf{x}_1)\\ &\qquad > -\theta_d\alpha(h_1(\mathbf{x}_1)) + \tfrac{1}{\varepsilon}\|L_{\mathbf{w}_1}h_1(\mathbf{x}_1)\|^2, \qquad (33)\end{aligned}$$

对所有 $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{D}_1$。这里需要注意的是，我们已将依赖于状态的 θ 替换为值 θ_{d}，这将有助于构造光滑的基于控制障碍函数的控制器。关于基于控制障碍函数的控制器光滑性的通用结果见 [26], ，可直接用于设计满足（33）的光滑控制器，参见 [17], [21]。

采用光滑控制器后，我们可以将屏障条件从顶层子系统扩展到完整系统。具体做法是，对虚拟输入 $\mathbf{x}_2$ 与期望的安全保障控制器 $\mathbf{k}_1(\mathbf{x}_1)$ 之间的偏差进行惩罚：

$$h(\mathbf{x}) = h_1(\mathbf{x}_1) - \tfrac{1}{2\mu}\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{k}_1(\mathbf{x})\|^2, \tag{34}$$

以参数 $\mu > 0$ 作为候选 OD-ISSf-CBF，其定义在集合 $\mathcal{D} \supset \mathcal{S}$ 上，如式 (4) 所定义。在对 $\mathbf{g}_2$, 满足秩条件的情况下，该候选函数确实是一个 OD-ISSf-CBF。

定理 2。 考虑严格反馈系统 (29) 以及如 (30) 所示的约束集 $\mathcal{S}_1$。假设存在一个光滑控制器 $\mathbf{k}_1 : \mathcal{D}_1 \to \mathbb{R}^{n_2}$，满足 (33)，并按照 (34) 构造 h，其中集合 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_1 \times \mathbb{R}^{n_2}$ 定义于 (4)。若 $\mathbf{g}_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_2\times m}$ 对所有 $\mathbf{x} \in \mathcal{D}\setminus\mathrm{Int}(\mathcal{S})$ 均满行秩，则 h 是 (29) 的 ***OD-ISSf-CBF***。

证明。 为证明(34)是一个OD-ISSf-CBF，我们必须证明(15)成立。计算 h的梯度可得：

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial h_1}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{x}) - \frac{1}{\mu}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{k}_1(\mathbf{x}_1))^\top \frac{\partial \mathbf{k}_1}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_1)\\ \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}_2}(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{\mu}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{k}_1(\mathbf{x}_1))^\top,\end{aligned} \tag{35}$$

这意味着：

$$\begin{aligned}L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix}\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}_2}(\mathbf{x})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{g}_2(\mathbf{x})\end{bmatrix}\\ &= -\frac{1}{\mu}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{k}_1(\mathbf{x}_1))^\top\mathbf{g}_2(\mathbf{x}).\end{aligned} \tag{36}$$

如果$\mathbf{g}_2$ 在 $\mathcal{D}\setminus\mathrm{Int}(\mathcal{S})$上具有满行秩，则：

$$L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \iff \mathbf{x}_2 = \mathbf{k}_1(\mathbf{x}_1), \tag{37}$$

对所有$\mathbf{x} \in \mathcal{D}\setminus\mathrm{Int}(\mathcal{S})$成立。因此，在任意满足 $L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ 且 $h(\mathbf{x}) \leq 0$的点处，我们有 $h(\mathbf{x}) = h_1(\mathbf{x}_1)$以及：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix}\frac{\partial h_1}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{x}) & \mathbf{0}\end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow\\ &L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}_1}h_1(\mathbf{x}_1) + L_{\mathbf{g}_1}h_1(\mathbf{x}_1)\mathbf{k}_1(\mathbf{x}),\\ &L_{\mathbf{w}}h(\mathbf{x}) = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})\mathbf{w}(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{w}_1}h_1(\mathbf{x}_1).\end{aligned} \tag{38}$$

因此，在任意满足 $L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ 且 $h(\mathbf{x}) \leq 0$的点处，我们有：

$$\begin{aligned}L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) &= L_{\mathbf{f}_1}h_1(\mathbf{x}_1) + L_{\mathbf{g}_1}h_1(\mathbf{x}_1)\mathbf{k}_1(\mathbf{x}_1)\\ &> -\theta_{\mathrm{d}}\alpha(h(\mathbf{x})) + \frac{1}{\varepsilon}\|L_{\mathbf{w}}h(\mathbf{x})\|^2,\end{aligned} \tag{39}$$

其中不等式由(33)和(38)得出。根据引理3，这表明(34)是(29)的OD-ISSf-CBF。 □

尽管这里的结果已应用于具有两层的系统，但同样的过程也可以递归地应用于具有任意层数的系统：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1)\mathbf{x}_2 + \mathbf{w}_1(\mathbf{x}_1)\mathbf{d}\\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) + \mathbf{g}_2(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\mathbf{x}_3 + \mathbf{w}_2(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\mathbf{d}\\ &\vdots\\ \dot{\mathbf{x}}_N &= \mathbf{f}_N(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_N(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{w}_N(\mathbf{x})\mathbf{d}.\end{aligned}$$

我们强调，在严格反馈设置中，扰动通常与控制输入$\mathbf{u}$不匹配。反步法无需要求$\mathbf{w}$ 位于$[\mathbf{0},\cdots\mathbf{0},\mathbf{g}_N]^\top$的张成空间内，而是通过将$\mathbf{x}_i$ 视为虚拟控制输入，借助$\mathbf{g}_i$ 创建额外的方向。

B. 双相对阶系统

本节将我们的反步法方法扩展到另一类系统，这类系统在 [21] 中进行了研究，并称为双相对阶（*DRD*）系统。这里，我们考虑这类系统的受扰版本，其动力学为：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} =&\mathbf{f}_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})+\mathbf{g}_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{u}_{\mathbf{z}}+\mathbf{w}_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})\mathbf{d},\\ \dot{\boldsymbol{\eta}} =&\mathbf{f}_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta})+\mathbf{g}_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}}+\mathbf{w}_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{d},\end{aligned} \tag{40}$$

其中，$\mathbf{z}\in\mathbb{R}^{n_1}$ 和$\mathbf{u}_{\mathbf{z}}\in\mathbb{R}^{m_1}$ 分别表示顶层的状态和输入，而 $\boldsymbol{\eta}\in\mathbb{R}^{n_2}$ 和$\mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}}\in\mathbb{R}^{m_2}$ 分别表示底层的状态和输入。除控制方向受 $\boldsymbol{\eta}$ 通过函数 $\boldsymbol{\psi}:\mathbb{R}^{n_2}\to\mathbb{R}^{r\times m_1}$影响外，顶层的动力学与底层几乎解耦。这类系统让人联想到微分平坦系统，例如四旋翼飞行器 [22]。

例1. 平面四旋翼的动力学为：

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{\theta}\\ \ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{\theta}\end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}}=\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{\theta}\\ 0\\ -g\\ 0\end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{x})}+\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ -\frac{1}{m}\sin(\theta) & 0\\ \frac{1}{m}\cos(\theta) & 0\\ 0 & \frac{1}{J}\end{bmatrix}}_{\mathbf{g}(\mathbf{x})}\underbrace{\begin{bmatrix}T\\ M\end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}, \tag{41}$$

其中，状态$\mathbf{x}\in\mathbb{R}^6$ 由四旋翼的位置（x，y）和姿态 θ 及其变化率组成，控制输入为螺旋桨产生的总推力 T 和力矩 M。这里，m、g和 J 分别表示质量、重力加速度和转动惯量。该系统具有式（40）的形式，其中$\mathbf{z}=(x,\ y,\ \dot{x},\ \dot{y})\in\mathbb{R}^4$，$\boldsymbol{\eta}=(\theta,\ \dot{\theta})\in\mathbb{R}^2$，$\mathbf{u}_{\mathbf{z}}=T\in\mathbb{R}$，$\mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}}=M\in\mathbb{R}$。

与第 IV-A 节类似，我们考虑一个针对式 (40) 的顶层状态$\mathbf{z}$ 定义的安全约束：

$$\mathcal{S}_{\mathbf{z}}=\{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^{n_1}\mid h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})\geq 0\}. \tag{42}$$

与严格反馈系统不同，在严格反馈系统中，$\boldsymbol{\eta}$ 会被视为顶层的虚拟控制输入；我们将$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{u}_{\mathbf{z}}=\mathbf{v}\in\mathbb{R}^r$ 视为顶层的虚拟输入。利用该虚拟输入，我们为顶层设计一个光滑反馈控制器$\mathbf{k}_{\mathbf{v}}$：$\mathcal{D}_{\mathbf{z}}\to\mathbb{R}^r$，其中 $\mathcal{D}_{\mathbf{z}}\supset\mathcal{S}_{\mathbf{z}}$，使其满足：

$$\begin{aligned}&L_{\mathbf{f}_{\mathbf{z}}}h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})+L_{\mathbf{g}_{\mathbf{z}}}h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})\mathbf{k}_{\mathbf{v}}(\mathbf{z})\\ &\qquad>-\theta_d\alpha(h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}))+\tfrac{1}{\varepsilon}\|L_{\mathbf{w}_{\mathbf{z}}}h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})\|^2.\end{aligned} \tag{43}$$

该控制器可采用第 IV-A 节中提到的技术构造。为使$\mathbf{u}_{\mathbf{z}}$与虚拟输入一致，假设 $\boldsymbol{\psi}$ 对于所有 $\boldsymbol{\eta}$ 均具有满列秩，并定义：

$$\mathbf{k}_{\mathbf{z}}(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta})\coloneqq\underset{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^{m_1}}{\arg\min}\|\mathbf{k}_{\mathbf{v}}(\mathbf{z})-\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{u}\|^2=\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\eta})^\dagger\mathbf{k}_{\mathbf{v}}(\mathbf{z}), \tag{44}$$

其中，$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\eta})^\dagger$ 表示左伪逆。令$\mathbf{u}_{\mathbf{z}}=\mathbf{k}_{\mathbf{z}}(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta})$，可得部分闭环动力学：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} =&\mathbf{f}_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})+\mathbf{g}_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{k}_{\mathbf{z}}(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta})+\mathbf{w}_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})\mathbf{d},\\ \dot{\boldsymbol{\eta}} =&\mathbf{f}_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta})+\mathbf{g}_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}}+\mathbf{w}_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{d},\end{aligned} \tag{45}$$

并确保：

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{u}_z=\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{k}_{\mathbf{z}}(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta})=\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\eta})^\dagger\mathbf{k}_{\mathbf{v}}(\mathbf{z}). \tag{46}$$

接下来，我们需要以下假设。

假设1. 给定满足式 (43) 的光滑反馈控制器$\mathbf{k}_{\mathbf{v}}:\mathbb{R}^{n_1}\to\mathbb{R}^r$，存在一个光滑函数$\boldsymbol{\eta}_d:\ \mathbb{R}^r\to\mathbb{R}^{n_2}$，使得对所有$\mathbf{z}\in\mathcal{D}_{\mathbf{z}}$：

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{d}}(\mathbf{k}_{\mathbf{v}}(\mathbf{z})))\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\eta}_d(\mathbf{k}_{\mathbf{v}}(\mathbf{z})))^\dagger\mathbf{k}_{\mathbf{v}}(\mathbf{z})=\mathbf{k}_{\mathbf{v}}(\mathbf{z}). \tag{47}$$

上述假设表明，对于由式 (43) 生成的任意虚拟输入$\mathbf{v}=\mathbf{k}_{\mathbf{v}}(\mathbf{z})$，都存在一个底层状态 $\boldsymbol{\eta}_d$，使顶层 $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\eta}_d)$的控制方向与该虚拟输入一致，即：

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\eta}_d)\mathbf{k}_{\mathbf{z}}(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}_d)=\mathbf{k}_{\mathbf{v}}(\mathbf{z}). \tag{48}$$

此函数必须针对每个系统分别构造；然而，对于某些系统，其存在性与 $\boldsymbol{\eta}_d$ 微分平坦性紧密相关。例如，对于四旋翼 (41)，此函数为：

$$\boldsymbol{\eta}_d(\mathbf{v})=\begin{bmatrix}\operatorname{atan}\left(\frac{-v_1}{v_2}\right) & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{atan}\left(\frac{-v_1}{v_2}\right)\end{bmatrix}^\top, \tag{49}$$

它将用$\mathbf{v}=\mathbf{k}_{\mathbf{v}}(\mathbf{z})$表示的期望加速度指令转换为四旋翼的期望姿态和角速度，参见 [22]。若 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}_d$，则 $h_{\mathbf{z}}$ 沿顶层动力学的导数满足：

$$\begin{aligned}\dot{h}_{\mathbf{z}} =&L_{\mathbf{f}_{\mathbf{z}}}h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})+L_{\mathbf{g}_{\mathbf{z}}}h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\eta}_d)\mathbf{k}_{\mathbf{z}}(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}_d)+L_{\mathbf{w}_{\mathbf{z}}}h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})\mathbf{d}\\ =&L_{\mathbf{f}_{\mathbf{z}}}h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})+L_{\mathbf{g}_{\mathbf{z}}}h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})\mathbf{k}_{\mathbf{v}}(\mathbf{z})+L_{\mathbf{w}_{\mathbf{z}}}h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})\mathbf{d}\\ >&-\theta_d\alpha(h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}))+\tfrac{1}{\varepsilon}\|L_{\mathbf{w}_{\mathbf{z}}}h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})\|^2-\|L_{\mathbf{w}_{\mathbf{z}}}h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})\|\|\mathbf{d}\|_\infty\\ >&-\theta_d\alpha(h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}))-\frac{\varepsilon}{2}\|\mathbf{d}\|_\infty^2,\end{aligned}$$

从而如定理1的证明所示，保证 $\mathcal{S}_{\mathbf{z}}$ 的输入到状态安全。因此，若 $\boldsymbol{\eta}\to\boldsymbol{\eta}_d$，则有望为整个系统 (40) 建立某种形式的安全性保证。为使这一想法形式化，考虑如下类李雅普诺夫函数：

$$V(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta})=\tfrac{1}{2\mu}\|\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}_d(\mathbf{k}_{\mathbf{v}}(\mathbf{z}))\|^2, \tag{50}$$

据此，我们提出控制障碍函数候选：

$$h(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta})=h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})-V(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}), \tag{51}$$

对于 (40)。以下定理给出了使 (51) 成为 (51) 的 OD-ISSf-CBF 的条件。

定理3。考虑系统(40) 和约束集 $\mathcal{S}_{\mathbf{z}}$，如(42)所示。假设存在一个光滑控制器$\mathbf{k}_{\mathbf{v}}$：$\mathcal{D}_{\mathbf{z}}\to\mathbb{R}^r$，满足(43)，以及一个光滑函数 $\boldsymbol{\eta}_d$：$\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}^{n_2}$，满足假设*1*，并按照(51) 构造 h，其中集合 $\mathcal{D}\subseteq\mathcal{D}_{\mathbf{z}}\times\mathbb{R}^{n_2}$ 如(4)所示。若对所有$\boldsymbol{\eta}\in\mathbb{R}^{n_2}$，$\mathbf{g}^{\boldsymbol{\eta}}:\ \mathbb{R}^{n_2}\to\mathbb{R}^{n_2\times m_2}$ 均为满行秩，且 $\boldsymbol{\psi}:\ \mathbb{R}^{n_2}\to\mathbb{R}^{r\times m_1}$ 均为满列秩，则 h 是系统(40)的*OD-ISSf-CBF*。

证明。 我们首先计算 h 的梯度:

$$\frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}) = -\frac{1}{\mu}(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}_d(\mathbf{k_v}(\mathbf{z})))^\top$$
$$\frac{\partial h}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}) = \frac{\partial h_{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}) + \frac{1}{\mu}(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}_d(\mathbf{k_v}(\mathbf{z})))^\top \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_d}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{k_v}(\mathbf{z}))\frac{\partial \mathbf{k_z}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}).$$

按照式 (44) 设定$\mathbf{u_z} = \mathbf{k_z}(\mathbf{z}\ \boldsymbol{\eta})$。当 ψ 满列秩时，该项存在，并由此得到式 (45) 所示的部分闭环系统。计算 h 沿式 (45) 的控制方向的李导数，记为$\mathbf{g}_p$，可得:

$$L_{\mathbf{g}_p}h(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix}\frac{\partial h}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}) & \frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{g}_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta})\end{bmatrix} = -\frac{1}{\mu}(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}_d(\mathbf{k_v}(\mathbf{z})))^\top \mathbf{g}_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta}).$$

如果$\mathbf{g}_{\boldsymbol{\eta}}$ 满行秩,$\boldsymbol{\eta}$那么当 $L_{\mathbf{g}_p}h(\mathbf{z}\ \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{0}$时，必有$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_d(\mathbf{k_v}(\mathbf{z}))$。

在这些点上，$\frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{z})$ 和$\frac{\partial h}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}\ \boldsymbol{\eta}) = \frac{\partial h_{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z})$，这意味着式 (45) 的漂移动力学方向上的李导数记为$\mathbf{f}_p$，为:

$$\begin{aligned}L_{\mathbf{f}_p}h(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}) &= L_{\mathbf{f_z}}h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) + L_{\mathbf{g_z}}h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})\psi(\boldsymbol{\eta})\mathbf{k_z}(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta})\\ &= L_{\mathbf{f_z}}h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) + L_{\mathbf{g_z}}h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})\psi(\boldsymbol{\eta}_d)\mathbf{k_z}(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}_d)\\ &= L_{\mathbf{f_z}}h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) + L_{\mathbf{g_z}}h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})\mathbf{k_v}(\mathbf{z})\\ &> -\theta_d\alpha(h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})) + \tfrac{1}{\varepsilon}\|L_{\mathbf{w_z}}h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})\|^2,\end{aligned} \tag{52}$$

其中，第二行由 $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_d(\mathbf{k_v}(\mathbf{z}))$ 得出，第三行由假设1得出，第四行由式 (43) 得出。注意到，当 $L_{\mathbf{g}_p}h(\mathbf{z}\ \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{0}$ 时，必有 $h(\mathbf{z}\ \boldsymbol{\eta}) = h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$ 且 $L_{\mathbf{w}_p}h(\mathbf{z}\ \boldsymbol{\eta}) = L_{\mathbf{w_z}}h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$，因此可将式 (52) 表示为:

$$L_{\mathbf{f}_p}h(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}) > -\theta_d\alpha(h(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta})) + \tfrac{1}{\varepsilon}\|L_{\mathbf{w}_p}h(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta})\|^2. \tag{53}$$

根据引理3，上述内容恰好表明，h 如式 (51) 所示，是部分闭环系统 (45) 的 OD-ISSf-CBF。因此，存在一个局部利普希茨反馈控制器 $\mathbf{k}_{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{z}\ \boldsymbol{\eta})$，使系统 (45) 满足 OD-ISSf-CBF 条件。由于该部分闭环系统是通过选取特定输入 $\mathbf{u_z} = \mathbf{k_z}(\mathbf{z}\ \boldsymbol{\eta})$ 得到的，这也意味着原始 DRD系统 (40) 存在满足相应 OD-ISSf-CBF 条件的输入 h。因此，h 是系统 (40) 的 OD-ISSf-CBF。

□

注 1. 严格反馈系统与 DRD 系统可以结合并扩展，从而形成一类更丰富且适用于反步法的系统。例如，尽管例 1 中的四旋翼属于 DRD 系统，但它不满足定理 3 所要求的满行秩条件。然而，将其视为严格反馈与 DRD 的多层混合系统时，它满足该条件，因此可以应用反步法。为简洁起见，此处略去兼容这两种结构多个层级的统一框架，其具体构建将在其他工作中给出。•

V. 示例

倒立摆: 为说明所提出的技术，我们考虑一个存在扰动的倒立摆:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix}\dot{q}\\ \frac{g}{l}\sin(q) - \beta\dot{q}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{ml^2}\end{bmatrix}\mathbf{u} + \begin{bmatrix}\nu\\ \frac{1}{ml^2}\end{bmatrix}\mathbf{d}, \tag{54}$$

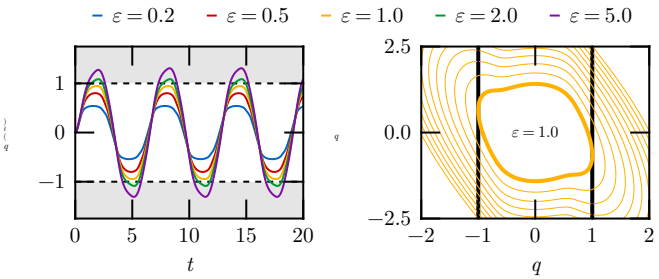


图 1。**左**：在 ISSf安全滤波器作用下摆的位置变化，其中黑色虚线表示约束边界。**右**：使用带有 $\varepsilon = 1$的虚拟控制器扩展摆的安全集。此处，粗黄色曲线对应于 $\mathcal{S}$ 的边界，而较细的曲线对应于不同 δ取值下 $\mathcal{S}_\delta$ 的边界。

其中，$\mathbf{x} = (q,\dot{q}) \in \mathbb{R}^2$ 由摆的角度和角速度组成，$\mathbf{u} \in \mathbb{R}$ 是控制力矩，$\mathbf{d} \in \mathbb{R}$ 是扰动输入，而 g, l, m, β, ν是物理参数。我们的主要目标是设计一个反馈控制器，确保q 满足 $|q| \le 1$，尽管存在扰动。扰动 $\mathbf{d}$ 是非匹配的，但式 (54) 中的动力学具有严格反馈形式，因此可以利用反步法构造控制障碍函数。在顶层动力学中，扰动 $\mathbf{d}$ 是匹配的，因为 $\mathbf{w}_1(q) = \nu$ $\mathbf{g}_1(q) = \nu$。函数 $h_1(q) = 1 - q^2$对期望的安全约束进行编码，并定义一个集合 $\mathcal{S}_1$，如式 (30) 所示。该函数满足 $L_{\mathbf{g}_1}h_1(\mathbf{x}_1) = -2q$，且仅在 $\mathcal{S}_1$内取零值，这意味着根据命题1，h_1 是一个 OD-ISSf-CBF。这使得我们可以设计一个满足式 (33) 的光滑控制器；我们使用 [26], 中的“半-Sontag”公式来实现这一点，并由此得到式 (34) 中的 OD-ISSf-CBF。图1（右）展示了由此得到的安全集，以及不同 δ取值下扩展后的安全集。对于不同的 ε取值，使用该 OD-ISSf-CBF 按式 (18) 构造基于二次规划的控制器，得到图1（左）中的结果；该控制器对名义跟踪控制器进行滤波，且系统受到扰动信号 $\mathbf{d}(t) = \sin(t)$ 的影响。当 ε取值较大时，该扰动会使轨迹离开安全集，但轨迹仍保持在该集合的有界邻域内，这与定理1一致；而较小的 ε则能使系统对非匹配不确定性具有鲁棒性，并使系统状态保持在 $\mathcal{S}$中。

平面四旋翼：为说明我们针对 DRD 系统的结果，考虑例 1 中平面四旋翼的一个受扰版本，其中 $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^2$ 表示作用于四旋翼质心的未知阵风。这代表一种非匹配不确定性，因为只有当推力向量 $\psi(\theta) = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$ 与 $\mathbf{d}$ 对齐时，才能直接抵消此类扰动。遵循定理 3 的思路，我们采用简化的四旋翼模型，直接将角速度 $\theta = \omega$ 视为控制输入，得到 (40) 中的 $\boldsymbol{\eta} = \theta$、$\mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}} = \omega$、$\mathbf{f}_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta}) = 0$和 $\mathbf{g}_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta}) = 1$，其满行秩[5]。$\mathbf{z}$ 子系统的动力学与例 1 相同，其中 $\mathbf{f_z}(\mathbf{z}) = (\dot{x}, \dot{z}, 0, -g) \in \mathbb{R}^4$、$\mathbf{g_z}(\mathbf{z}) = [\mathbf{0};\ \frac{1}{m}\mathbf{I}] \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ 和 $\mathbf{w_z} = \mathbf{g_z}$。我们的目标是设计一个控制器，确保该系统满足 $x_{\max} \ge x$，

—

[5]如注 1所述，随后可以从 ω 进行反步，得到式（41）中的输入 M，但出于篇幅考虑，此处省略这一 प्रस्तुत现。

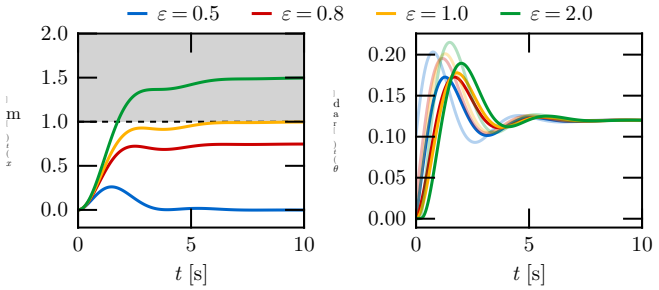


图 2. **左**：在不同的 ε 值以及扰动输入 $\mathbf{d} = (1, 0)$ 下，基于双重相对阶控制障碍函数的控制器作用时无人机 x 位置的变化，其中灰色区域表示不安全状态。**右**：在不同的 ε 值下，基于双重相对阶控制障碍函数的控制器作用时无人机姿态的变化，其中透明线表示 $\boldsymbol{\eta}_d$ 的取值。

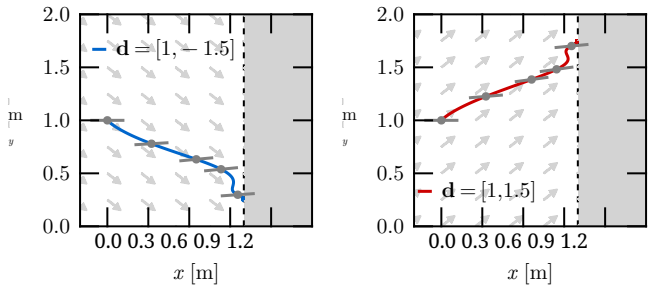


图 3. 在不同扰动下无人机 (x, y) 位置的变化，其中灰色箭头表示扰动的方向。

表示位于 $x = x_{\max}$的墙。我们使用高阶控制障碍函数 [6], [7] 将该约束转换为相对阶为一的函数，从而得到函数 $h_{\mathbf{z}}$，它按照 (42) 定义 $\mathcal{S}_{\mathbf{z}}$。利用上一小节中的半Sontag公式，我们据此设计一个满足 (43) 的光滑虚拟控制器$\mathbf{k_v}$。我们按照 (44) 构造$\mathbf{k_z}$，并将 $\boldsymbol{\eta}_d$作为 (49) 的第一个分量。综合以上结果，得到控制障碍函数 (51)，其满足定理 3 的条件。

仿真采用 $\mathbf{u_z} = \mathbf{k_z}$ 和 $\mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{k}_{\boldsymbol{\eta}}$ 作为控制器，以满足部分闭环系统 (45) 的控制障碍函数条件；该系统的安全性质已在定理 3 中得到证明。图 2 展示了在不同 ε 值以及扰动$\mathbf{d} = (1, 0)$ 直接 推动系统朝向不安全状态时，系统的变化。较高的 ε 值会导致安全性遭到破坏，而较低的值则能增强系统抵御扰动的能力并确保安全性。当无人机接近安全集边界时，它会调整自身姿态（图 2 右图），使推力指向远离约束边界的方向，从而抵消可能迫使其离开安全集的扰动。图 3 还展示了采用 $\varepsilon = 1$ 时，在不同扰动输入下的进一步仿真结果；该方法可确保系统安全。

VI. 结论

我们提出了一个用于具有非匹配扰动系统的鲁棒安全关键控制的构造性框架。通过利用最优衰减控制障碍函数扩展输入到状态安全，并引入基于反步法的综合设计流程，我们放宽了验证要求，并为广泛的系统类别实现了输入到状态安全保证。未来的工作将包括对结合严格反馈与双重相对阶结构的系统进行完整刻画。

参考文献

[1] A. D. Ames、X. Xu、J. W. Grizzle 和 P. Tabuada，《基于控制障碍函数的安全关键系统二次规划》，IEEE《自动控制汇刊》，第 62 卷，第 8 期，第 3861–3876 页，2017 年。[2] M. Jankovic，《用于非线性系统约束稳定化的鲁棒控制障碍函数》，Automatica，第 96 卷，第 367 页，2018 年 359pp. – 。[3] B. T. Lopez、J. J. Slotine 和 J. P. How，《鲁棒自适应控制障碍函数：一种面向安全性的自适应与数据驱动方法》，IEEE《控制系统快报》，第 5 卷，第 3 期，第 1031–1036 页，2021 年。[4] S. Kolathaya 和 A. D. Ames，《利用控制障碍函数实现输入到状态安全》，IEEE《控制系统快报》，第 3 卷，113，2019 年 1，108no. pp. – 。[5] A. Alan、A. J. Taylor、C. R. He、G. Orosz 和 A. D. Ames，《利用可调输入到状态安全控制障碍函数进行安全控制器综合设计》，IEEE《控制系统快报》，第 6 卷，第 908–913 页，2022 年。[6] W. Xiao 和 C. Belta，《高阶控制障碍函数》，IEEE《自动控制汇刊》，第 67 卷，第 7 期，第 3655–3662 页，2022 年。[7] X. Tan、W. S. Cortez 和 D. V. Dimarogonas，《高阶障碍函数：鲁棒性、安全性与性能关键控制》，IEEE《自动控制汇刊》，第 67 卷，第 6 期，第 3021–3028 页，2022 年。[8] B. T. Lopez 和 J. J. Slotine，《非匹配控制障碍函数：确定性等价自适应安全》，载于《美国控制会议论文集》，第 3662–3668 页，2023 年。[9] E. Das 和 J. W. Burdick，《利用不确定性估计的鲁棒控制障碍函数及其在移动机器人中的应用》，IEEE《自动控制汇刊》，第 70 卷，第 7 期，第 4766–4773 页，2025 年。[10] K. H. Kim、M. Diagne 和 M. Krstic，《高相对阶系统的鲁棒控制障碍函数设计：在未知移动障碍物避碰中的应用》，载于《美国控制会议论文集》，第 355–360 页，2025 年。[11] X. Wang、J. Yang、C. Liu、Y. Yan 和 S. Li，《具有非匹配扰动的非线性系统安全关键扰动抑制控制》，IEEE《自动控制汇刊》，第 70 卷，第 4 期，第 2722–2729 页，2025 年。[12] Y. Wang 和 X. Xu，《基于扰动观测器的鲁棒控制障碍函数》，载于《美国控制会议论文集》，第 3681–3687 页，2023 年。[13] X. Wang、W. Xiao 和 H. Zhang，《一类统一扰动抑制控制障碍函数》，arXiv 预印本 arXiv:2508 01601，2025 年。[14] M. Krsti´c、I. Kanellakopoulus 和 P. Kokotovi´c，《非线性与自适应控制设计》。Wiley，1995 年。[15] M. Krstic 和 H. Deng，《非线性不确定系统的稳定化》。Springer，1998 年。[16] A. J. Taylor、P. Ong、T. G. Molnar 和 A. D. Ames，《利用控制障碍函数进行安全反步法设计》，载于《决策与控制会议论文集》，第 5775–5782 页，2022 年。[17] M. H. Cohen、T. G. Molnar 和 A. D. Ames，《自主系统的安全关键控制：通过降阶模型实现控制障碍函数》，《控制年度评论》，第 57 卷，第 100947 页，2024 年。[18] K. H. Kim、M. Diagne 和 M. Krsti´c，《用于平行边界之间安全性的常和高阶障碍函数》，IEEE《控制系统快报》，第 9 卷，第 1447–1452 页，2025 年。[19] J. Zeng、B. Zhang、Z. Li 和 K. Sreenath，《利用具有保证逐点可行性的最优衰减控制障碍函数实现安全关键控制》，载于《美国控制会议论文集》，第 3856–3863 页，2021 年。[20] P. Ong、M. H. Cohen、T. G. Molnar 和 A. D. Ames，《关于最优衰减控制障碍函数的性质》，载于《决策与控制会议论文集》，第 7375–7382 页，2025 年。[21] G. Bahati、R. K. Cosner、M. H. Cohen、R. M. Bena 和 A. D. Ames，《具有双重相对阶的非线性系统控制障碍函数综合设计》，载于《决策与控制会议论文集》，第 8208–8215 页，2025 年。[22] D. Mellinger 和 V. Kumar，《四旋翼飞行器的最小快拍轨迹生成与控制》，载于《国际机器人与自动化会议论文集》，第 2520–2525 页，2011 年。[23] A. J. Taylor，《鲁棒安全关键控制：李雅普诺夫与障碍函数方法》。博士论文，加州理工学院，2023 年。[24] B. T. Lopez 和 J. J. E. Slotine，《基于收缩度量的自适应非线性控制》，IEEE《控制系统快报》，第 5 卷，第 1 期，2021 年。[25] R. Abraham、J. E. Marsden 和 T. Ratiu，《流形、张量分析及其应用》。Addison-Wesley，1983 年。[26] M. H. Cohen、P. Ong、G. Bahati 和 A. D. Ames，《利用隐函数定理刻画光滑安全滤波器》，IEEE《控制系统快报》，第 7 卷，第 3890–3895 页，2023 年。