arXiv:2602.03694v1 [math.OA] 3 Feb 2026

中间算子子代数之间的角 S

VED PRAKASH GUPTA 和 DEEPIKA SHARMA

ABSTRACT. 受 [2] 和 [5]，的启发，本文引入了具有有限概率指数的正规条件期望下， W^*代数包含中的一对相容中间 W^*-子代数之间的内角和外角的概念。随后，本文有效地利用这一概念，定义了具有有限 Watatani 指数的条件期望下，非含幺 C^*代数包含中的一对相容中间C^*-子代数之间的内角。本文还证明，内角在含幺 C^*代数的最小张量积下保持稳定。

1. 引言

多年来，基于在不同范畴中（例如群、冯·诺依曼代数和 C^*代数范畴）的一些重要观察，数学中一种广泛采用的策略是：研究给定数学对象的子对象，有助于深入理解其所在整体对象的结构及各种性质。事实上，基于这一方法，人们已在群、冯·诺依曼代数和 C^*代数范畴中取得了一些值得关注的分类结果。

算子代数领域有各种工具和技术，可用于研究算子代数的子代数。最近，以下概念也加入了这一行列：

(1) Bakshi 等人在 [2]中提出了有限 Jones 指数的任意 II_1-因子包含中的中间子因子之间的内角和外角概念。（在 II_1-因子上唯一迹的存在，以及琼斯提出的“基本构造”概念，在这些概念的发展和应用中发挥了根本作用。）（2）Bakshi 和第一作者在 [5] 中提出了有限 Watatani 指数的任意含幺 C^*-代数包含中的中间 C^*-子代数之间的内角和外角概念。（Watatani 关于有限指标条件期望和约化 C^*-基本构造的理论（基于 Hilbert C^*-模理论），为这些角概念提供了重要基础。）

作为应用，这些角的概念被有效地用于估计上述 [2] 和 [5]本身中（单）算子代数的不可约有限指数包含的中间子代数格的基数。这些估计改进了 Longo 先前已知的估计（[23]），从而回答了他提出的一个问题；此外，还给出了 III 型因子的有限指数不可约包含的中间子因子基数的一个上界。（ [3]中还取得了一些进一步的改进。）

因此，自然会有人提出这样的问题：能否将这些角的概念推广到更一般的（有限指数） W^*-代数包含中的中间子代数，以及非含幺 C^*-代数中的中间子代数？本文主要探讨这些问题。有趣的是，结果表明

2020 *Mathematics Subject Classification.* 47L40, 46L06, 47L65 .*Key words and phrases.* 算子代数的包含、中间子代数、有限指标条件期望、基本构造、内角、交叉积、张量积。

Paschke 提出的希尔伯特 W^*-代数语言，在有效回答这两个问题时发挥了关键作用。

以下简要概述本文的行文脉络。

鉴于这是我们首次深入接触希尔伯特 W^*-模理论，我们在第 2 节中用相对较长的篇幅介绍与希尔伯特 W^*-模相关的事实和概念。第 2 节的另一个主要内容是简要回顾在含幺及非含幺 C^*-代数中具有有限 Watatani 指数的条件期望这一概念。该概念最初由 Watatani（[31]）针对含幺 C^*-代数提出，后来由 Izumi（[16]）推广至非含幺 C^*-代数。（我们希望第 2 节中所作的探索性综述能使本文更加自成一体，并对一些尚未接触过这一领域的读者有所裨益。）随后，我们遵循 [31] ，并在很大程度上依赖于 [25] 和 [1], ，在第 3 节回顾冯·诺伊曼代数包含的一些基本方面：该包含配有一个具有有限概率指数的正规条件期望，并涉及约化 W^*-基本构造。在此过程中，还引入（并简要讨论）了 W^*-代数中条件期望的广义准基这一概念。

此后，受 [2] 与 [5], 的启发，第4节引入了带有有限概率指数的正规条件期望的 W^*-代数包含中，一对相容的中间 W^*-子代数之间的内角与外角概念。同一节还讨论了一些预期的一般性结果。最后，在第5节中，运用第4节所定义的中间 W^*-代数之间的内角概念，并遵循 Izumi（[16]）处理非含幺C^*-代数的包络 W^*-代数的策略，引入了带有有限 Watatani 指数的条件期望的（非含幺） C^*-代数包含中，相容的中间 C^*-子代数之间的内角概念。文章最后指出，内角在含幺 C^*-代数的最小张量积下是稳定的。

2. Preliminaries

2.1. 希尔伯特 C^*- 和 W^*-模。 本节仅回顾一些与本文相关的事实。关于希尔伯特 C^*- 模和 W^*- 模的更多内容，请参阅例如 [9, 20, 22, 25, 28]。（本文中考虑的所有模均为右模。）

我们先固定交织算子空间以及前希尔伯特 C^*-模之间的可伴随映射空间的记号：

对于任意两个定义在 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 上的前希尔伯特 C^*-模 $\mathcal{X}$和 $\mathcal{Y}$，令 $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 表示从 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{Y}$的有界线性映射空间，令

$$\mathcal{B}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) := \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) : T \text{ is } \mathcal{A}\text{-linear}\},$$

并且，令 $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 表示从 $\mathcal{X}$到 $\mathcal{Y}$的可伴随映射空间，即，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \;:=\; \{&T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y} : T \text{ is linear and there exists a linear map } T^* : \mathcal{Y} \to \mathcal{X} \\ &\text{such that } \langle T(x), y\rangle_{\mathcal{A}} = \langle x, T^*(y)\rangle_{\mathcal{A}} \text{ for all } x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}\}.\end{aligned}$$

若 $\mathcal{X}$和 $\mathcal{Y}$是定义在 $\mathcal{A}$ 上的希尔伯特 C^*-模，则 $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 是 Banach空间 $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 的闭子空间（赋予算子范数）——例如参见 [22, 9]。容易看出，对于每个 $T \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$，都有$T^* \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$。此外，为简洁起见，令 $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}) := \mathcal{B}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X},\mathcal{X})$，并令 $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}) := \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X},\mathcal{X})$。（Paschke 在 [25] 第447页给出了一个例子：存在定义在 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 上的希尔伯特 C^*-模 $\mathcal{X}$，使得 $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}) \subsetneq \mathcal{B}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X})$ 。）

以下事实是初等的——例如，参见 [9, §8.1.7]——它提供了一个合适的算子代数，Watatani 据此在 [31]中发展了有限指数含幺 C^*-代数包含的基本构造理论。

命题 2.1. 设 $\mathcal{X}$ 是定义在含幺 C^*-代数 $\mathcal{A}$上的希尔伯特 C^*-模。那么， $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X})$ 是一个含幺 C^*-代数。

注记 2.2。 对于任意定义在 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 上的希尔伯特 C^*-模 $\mathcal{X}$，在 $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X})$ 中，由 $\mathcal{X}$ 自身给出了一些有用的所谓“有限秩”元素。

对于 $x, y \in \mathcal{X}$，考虑由 $\theta_{x,y}(z) = x\langle y, z\rangle_{\mathcal{A}}, z \in \mathcal{X}$ 给出的（所谓的“一秩”）算子 $\theta_{x,y}: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$。显然，对于所有 $x, y, w, z \in \mathcal{X}$，有 $\theta_{x,y} \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X})$, $\theta_{x,y} \circ \theta_{w,z} = \theta_{x\langle y,w\rangle_{\mathcal{A}},z}$ 以及 $(\theta_{x,y})^* = \theta_{y,x}$。此外，对于任意 $T \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X})$ 以及任意一对 $x, y \in \mathcal{X}$, $\theta_{x,y} \circ T = \theta_{x,T^*(y)}$ 和 $T \circ \theta_{x,y} = \theta_{T(x),y}$，亦然。因此，$\mathrm{span}\{\theta_{x,y}: x, y \in \mathcal{X}\}$ 是 $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X})$ 中的一个双边理想，而其闭包 $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}) := \mathrm{span}\{\theta_{x,y}: x, y \in \mathcal{X}\}$ 被称为希尔伯特 C^*-模 $\mathcal{X}$ 上的“紧算子”理想。

对任意集合 I，令 $\mathcal{F}(I)$ 表示 I 的有限子集所成之集。显然， $\mathcal{F}(I)$ 关于集合包含是一个有向集。下述有用的观察间接出现在 [25, 第 457–458] 页。我们后面将需要它。

引理 2.3. [25] 设 $\mathcal{X}$ 是 W^*-代数 $\mathcal{M}$ 上的预 *Hilbert* C^*-模，且 $\{x_i: i \in I\}$ 与 $\{y_i: i \in I\}$ 是 $\mathcal{X}$ 中的两个族。若网 $\{\sum_{i\in F}\langle x_i, y_i\rangle_{\mathcal{M}}: F \in \mathcal{F}(I)\}$ 在 $\mathcal{M}$ 中范数有界，则 $\sum_i \langle x_i, y_i\rangle_{\mathcal{M}}$ 在 $\mathcal{M}$ 中按 σ-弱拓扑收敛。

2.1.1. 自对偶模。 注意，对 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 上的任意预 Hilbert C^*-模 $\mathcal{X}$，对每个 $z \in \mathcal{X}$，由 $\hat{z}(x) = \langle z, x\rangle_{\mathcal{A}}, x \in \mathcal{X}$ 给出的映射 $\hat{z}: \mathcal{X} \to \mathcal{A}$ 是一个有界 $\mathcal{A}$-模映射。

定义 2.4. [25]

(1) 若对每个有界 $\mathcal{A}$-模映射 $T: \mathcal{X} \to \mathcal{A}$，都存在一个 $z \in \mathcal{X}$ 使得 $T = \hat{z}$，则称 C^*-代数 $\mathcal{A}$上的预希尔伯特 C^*-模 $\mathcal{X}$ 是自对偶的。（事实证明，每个自对偶预希尔伯特 C^*-模都是希尔伯特 C^*-模——参见（[25, §3]）。）*(2)* 若 W^*-代数 $\mathcal{M}$ 上的希尔伯特 C^*-模 $\mathcal{X}$是自对偶的，则称其为希尔伯特 W^*-模（在$\mathcal{M}$上）。

定理 2.5. [25, 9] 设 W^*-代数 $\mathcal{M}$上的 W^*是希尔伯特模。那么，以下结论成立：

(1) $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}(\mathcal{X}) = \mathcal{B}_{\mathcal{M}}(\mathcal{X})$。（[25, 推论 *3.*5]） *(2)* $\mathcal{X}$ 是对偶空间。（[25,命题 *3.*8]） *(3)* $\mathcal{X}$ 中的有界网 $\{x_\alpha\}$ 在$\mathcal{X}$上由第 *(2)* 项所述对偶诱导的 w^*-拓扑下收敛到某个 $x \in \mathcal{X}$，当且仅当对所有 $\varphi \in \mathcal{M}_*$ 和 $y \in \mathcal{X}$， $\varphi(\langle x_\alpha, y\rangle_{\mathcal{M}}) \to \varphi(\langle x, y\rangle_{\mathcal{M}})$。（[25, 注 *3.*9]） *(4)* $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}(\mathcal{X})$ 是一个 W^*-代数。（[25, 命题 *3.*10]） *(5)* $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}(\mathcal{X})$中的有界网 $\{T_\lambda\}$ 按 σ-弱拓扑收敛到 $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}(\mathcal{X})$中的元素 T，当且仅当对每个 $x \in \mathcal{X}$，在 $\mathcal{X}$中有 $T_\lambda(x) \xrightarrow{w^*} T(x)$。（[9, 推论 *8.5.*5]）

以下定义已为专家们广泛接受——例如参见 [9, 第 357] 页或[28,第 78] 页。

定义 2.6. 设 X 是代数 $\mathcal{M}$ 上的一个预希尔伯特 C^*-模。一种 X 的自对偶完备化，是一个自对偶希尔伯特 C^*-模 $\mathcal{X}$，它定义在 $\mathcal{M}$上并包含 X，且 X 是其 w^*-稠密预希尔伯特 C^*-子模（其中， $\mathcal{X}$ 上的 w^*-拓扑来自定理 *2.5* 中提到的（*Paschke* 的）对偶性）。

定理 2.7. *(*[25, 定理 3.2],[28, 命题 6.10]*)* 每个W^*-代数上的预希尔伯特 C^*-模 $\mathcal{M}$ 都具有唯一的自对偶完备化。

Hilbert W^*-模中的正交性。

定义 2.8. [9, §8.5.21] 设 $\mathcal{X}$ 是 W^*-代数 $\mathcal{M}$ 上的希尔伯特 W^*-模。

(1) 若元素 $u \in \mathcal{X}$ 满足 $p := \langle u, u\rangle_{\mathcal{M}}$ 是 $\mathcal{M}$ 中的投影，则称其为部分等距算子；投影 p 称为 u 的初始投影。*(2)* 若两个部分等距算子 u 和 v 在 $\mathcal{X}$ 中满足 $\langle u, v\rangle_{\mathcal{M}} = 0$，则称它们正交。

注意，对于任意部分等距算子 u，秩一交织算子 $\theta_{u,u}$ 是 W^*-代数 $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}(\mathcal{X})$ 中的投影。此外，对于 $\mathcal{X}$ 中的两个正交部分等距算子 u 和 v，秩一投影 $\theta_{u,u}$ 和 $\theta_{v,v}$ 在 $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}(\mathcal{X})$ 中正交。

定义 2.9。*(Paschke)* 设 $\mathcal{M}$ 为一个 W^*-代数，$\mathcal{X}$ 为 $\mathcal{M}$ 上的 *Hilbert* W^*-模。$\mathcal{X}$ 的标准正交基是一个集合 $\{x_i : i \in I\} \subset \mathcal{X}$，由两两正交的非零部分等距算子组成，并且对所有 $x \in \mathcal{X}$，均有 $x = \sum_i^{w^*} x_i\langle x_i, x\rangle_{\mathcal{M}}$；其中 $\mathcal{X}$ 上的 w^*- 拓扑来自定理 *2.5(2)* 中提到的（*Paschke* 的）对偶。

定理 2.10。 [25, 定理 3。12] 设 $\mathcal{M}$ 是一个 W^*-代数，$\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{M}$ 上的 *Hilbert* W^*-模。那么，$\mathcal{X}$ 存在一个标准正交基。

特别地，$\sum_i^{\sigma\text{-}weak} \theta_{x_i,\, x_i} = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}$ 属于 $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}(\mathcal{X})$；因此，双边理想 张成$\{\theta_{x,y} : x, y \in \mathcal{X}\}$ 在 $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}(\mathcal{X})$ 中是 σ-弱稠密的。

（前述事实的一个更明确的证明见 [9, 引理 8.5。23]。）

2.2. **具有有限概率指数和有限 cp-指标的条件期望**。回顾（参见 [1, 12, 16]）条件期望的以下广为研究的指标概念。

定义 2.11。设 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ 是 C^*-代数的一个包含，且 $E : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是一个条件期望。

(1) 若 E 存在一个标量 $\gamma \geq 1$ 使得 $\gamma E - \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ 为正的，则称其具有有限概率指数；此时，这样的 E 的概率指数定义为

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{p}}(E) = \inf\{\gamma \geq 1 : \gamma E - \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \textit{ is positive}\}.$$

(2) 若 E 存在一个标量 $\gamma \geq 1$ 使得 $\gamma E - \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ 是完全正的；此时，这样的 E 的 cp-指标定义为

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{cp}}(E) = \inf\{\gamma \geq 1 : \gamma E - \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \textit{ is completely positive}\}.$$

为方便起见，记号 $\mathrm{Ind_P}(E) < \infty$（分别地，$\mathrm{Ind_{CP}}(E) < \infty$）表示条件期望 E 具有有限概率指数（分别地，有限 cp-指标）。下面列出一些与这些指标相关的有用事实。

注 2.12. 设 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ 是 C^*-代数的一个包含，且 $E : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是一个条件期望。

(1) 若 $\mathrm{Ind_P}(E) < \infty$，则 E 忠实。*(2)* $\mathrm{Ind_P}(E) < \infty$ 当且仅当 $\mathrm{Ind_{CP}}(E) < \infty$。（[12, 定理 1]）*(3)* 若 $\mathrm{Ind_{CP}}(E) < \infty$，则 $1 \leq \mathrm{Ind_P}(E) \leq \mathrm{Ind_{CP}}(E)$。*(4)* 若 $\mathcal{B}$ 没有非零有限维表示，则 $\mathrm{Ind_P}(E) = \mathrm{Ind_{CP}}(E)$。（[16,引理 2.2]）

有关具有有限概率指数和有限 *cp*-指标的条件期望理论，详见 [1, 12, 16]。

注 2.13. 有趣的是，在某些情况下，正规条件期望的概率指数有限这一性质并非该条件期望所独有。当 $\mathcal{N}$ 是因子时，它是包含$\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$的一种内在性质。更确切地说，从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{N}$ 的正规条件期望要么都具有有限概率指数（等价地，有限 *cp*-指标），要么都不具有——参见 [1,推论 3。20]。

2.3. **具有有限 Watatani 指数的条件期望**。本文主题的核心将涉及第三种指数概念，该概念由 Watatani ([31]) 提出，最初定义于含幺 C^*–代数上的条件期望，后来 Izumi ([16]) 将其推广到一般的 C^*–代数。我们简要回顾这一概念。为此，首先需要回顾 Watatani 的 C^*–基本构造理论以及 Haagerup 的算子值权理论。

2.3.1. 关于 C^*–代数包含的基本构造的 *Watatani* 理论。设 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ 是 C^*–代数的一个包含，且 $E : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是一个忠实条件期望。则 $\mathcal{A}$ 关于自然的右作用（通过右乘）以及 $\mathcal{B}$–值内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}}$ 成为一个在 $\mathcal{B}$ 上的（右）前 Hilbert C^*–模，其中内积定义为

$$\langle x, y \rangle_{\mathcal{B}} := E(x^* y), x, y \in \mathcal{A}.$$

令 $\mathfrak{A}$ 表示 $\mathcal{A}$ 的 Hilbert C^*-模完备化（关于 $\mathcal{B}$）；$\eta : \mathcal{A} \to \mathfrak{A}$ 表示自然包含映射（因此，$\langle \eta(x)\ \eta(y) \rangle_{\mathcal{B}} = \eta(E(x^* y))$ 且 $\|\eta(x)\| := \|E(x^* x)^{1/2}\|$ 对所有 $x,\ y \in \mathcal{A}$ 均成立），而 $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(\mathfrak{A})$ 表示 $\mathfrak{A}$ 上可伴随映射的空间。

如第 2.1 节所述，$\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(\mathfrak{A})$ 是 Banach空间 $\mathcal{B}_{\mathcal{B}}(\mathfrak{A})$ 的闭子空间，由 $\mathcal{B}$-模映射组成，这些映射作用于 $\mathfrak{A}$。事实上，根据定理 2.1，$\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(\mathfrak{A})$ 是一个含幺C^*-代数（赋予通常的算子范数）；并且很容易看出，存在一个自然的C^*-嵌入 $\lambda : \mathcal{A} \to \mathcal{L}_{\mathcal{B}}(\mathfrak{A})$，满足 $\lambda(a)(\eta(x)) = \eta(ax)$，对所有 a、$x \in \mathcal{A}$ 均成立。此外，存在一个投影 $e_E \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}}(\mathfrak{A})$（称为与 E 相关联的琼斯 投影），满足$e_E(\eta(a)) = \eta(E(a))$，并且 $e_E \lambda(a) e_E = \lambda(E(a)) e_E$ 对所有 $a \in \mathcal{A}$ 均成立——参见 [31, 引理 2.1.1(1)]。（注意，在文献中，e_E 更常记作 $e_{\mathcal{B}}$ 或 e_1。）因此，闭子空间

$$C_r^*\langle \mathcal{A}, e_E \rangle := \overline{\operatorname{span}}\{\lambda(x) e_E \lambda(y) : x, y \in \mathcal{A}\}$$

结果是 $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(\mathfrak{A})$ 的一个 C^*-子代数，称为相对于条件期望 E 的包含 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ 的（Watatani 的约化）C^*-基本构造。注意，$C_r^*\langle \mathcal{A},\ e_E \rangle = \mathcal{K}_{\mathcal{B}}(\mathfrak{A})$ 是 $\mathfrak{A}$ 上的紧算子理想（见定理 2.2），因为$\lambda(x) e_E \lambda(y^*) = \theta_{\eta(x),\ \eta(y)}$ 对所有 $x,\ y \in \mathcal{A}$ 都成立。原则上，e_E 不一定属于 $C_r^*\langle \mathcal{A},\ e_E \rangle$；不过，当 $\mathcal{A}$ 含幺时，便有 $e_E = \theta_{\eta(1),\ \eta(1)} \in C_r^*\langle \mathcal{A},\ e_E \rangle$。（注意：若同时出现多个条件期望，为避免可能的混淆，η（分别地，λ）将记作 η_E（分别地，λ_E）。）

非含幺 C^*-代数包含的一些一般性结论。

Pimsner-Popa 将条件期望的基这一概念加以推广，Watatani（[31]）在含幺 C^*-代数中提出了有限指标条件期望的“代数”概念（见定理 2.16）。后来，Izumi 指出，将 Watatani 关于“有限指标”条件期望的概念推广到非含幺 C^*-代数的正确方法，是借助它们的包络 von Neumann 代数，而不是它们的乘子代数。下面简要概述他的方法。

考虑一个带有条件期望 $E : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 的 C^*-代数包含 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$。众所周知（参见 [26, Cor. 3.7.9]），包络冯·诺伊曼代数 $\mathcal{B}^{**}$ 可实现为 $\mathcal{A}^{**}$ 中一个 w^*-闭的 $*$-子代数（然而，$1_{\mathcal{A}^{**}}$ 不一定属于 $\mathcal{B}^{**}$）；并且相对于这一包含，E 可延拓为正规条件期望 $E^{**} : \mathcal{A}^{**} \to \mathcal{B}^{**}$——参见 [8, III.5.2.10]。此外，$E^{**}(1_{\mathcal{A}^{**}}) = 1_{\mathcal{B}^{**}}$（例如，依据 [29] 第 118 页上的一个命题）；并且，E^{**} 忠实当且仅当 E 也忠实。

依照 [16, 26], , 将乘子代数 $M(\mathcal{A})$ 和 $M(\mathcal{B})$ 分别实现为 $\mathcal{A}^{**}$ 和 $\mathcal{B}^{**}$ 中的含幺 C^*-子代数将很有用。

定理 2.14. [16] 设 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ 为 C^*-代数的包含，且 $E: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 为具有 $\mathrm{Ind_P}(E) < \infty$ 的条件期望。则下列结论成立：

(1) $\mathrm{Ind_P}(E^{**}) = \mathrm{Ind_P}(E)$，且 $\mathrm{Ind_{CP}}(E^{**}) = \mathrm{Ind_{CP}}(E)$。*(2)* $M(\mathcal{B})$ 可等同于 $M(\mathcal{A})$ 的一个含幺 C^*-子代数。特别地，$\mathcal{B}^{**} \subset \mathcal{A}^{**}$是一个含幺包含。*(*[16, 引理 *2.6(1)])* *(3)* E^{**} 在 $M(\mathcal{A})$ 上的限制是从 $M(\mathcal{A})$ 到 $M(\mathcal{B})$ 上的条件期望。*(*[16,引理 *2.6(2)])*

下列初等观察将是必不可少的，而它们关于含幺 C^*-代数的包含、相对于具有（有限）拟基的条件期望的类似结果（见定理 2.16）已在 [31] 中得到证明。

命题 2.15. 设 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ 是 C^*-代数的包含，且 $E: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是一个条件期望，其中 $\mathrm{Ind_P(E)} < \infty$。则以下结论成立：

(1) $\eta : \mathcal{A} \to \mathfrak{A}$ 是一个线性压缩。*(2)* $\mathcal{A}$ 本身是一个以 $\mathcal{B}$为底的希尔伯特 C^*-模，即 $\mathfrak{A} = \eta(\mathcal{A})$。*(3)* $\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{B}$。特别地，$\mathcal{B}$ 的每个近似单位也是 $\mathcal{A}$ 的近似单位。*(*[16,引理 *2.6])* *(4)* $\{e_E\}' \cap \lambda(\mathcal{A}) = \lambda(\mathcal{B})$（在 $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$中）。*(5)* $\lambda(A)e_E \cup e_E\lambda(\mathcal{A}) \subseteq C_r^*\langle \mathcal{A}, e_E\rangle$。*(6)* 映射 $\psi: \mathcal{B} \to C_r^*\langle \mathcal{A}, e_E\rangle$ 由 $\psi(b) = \lambda(b)e_E$, $b \in \mathcal{B}$给出，是一个单射 $*$-同态。

证明。(1)：考虑定理 2.14 前一段中所述的正规条件期望 $E^{**}: \mathcal{A}^{**} \to \mathcal{B}^{**}$。那么，对于每个 $a \in \mathcal{A}$,

$$\|\eta(a)\|^2 := \|E(a^*a)\| = \|E^{**}(a^*a)\| \leq \|E^{**}(\|a\|^2 \cdot 1_{\mathcal{A}^{**}})\| = \|a\|^2.$$

(2) 按照 [31, 命题 2.15]中的论证，由 (1) 得出。

(3) 由 [16,引理 26]得出。

(4)：由定义可立即得出，对于所有 $b \in \mathcal{B}$, $e_E\lambda(b) = \lambda(b)e_E$。因此，$\lambda(\mathcal{B}) \subseteq \{e_E\}' \cap \lambda(\mathcal{A})$。

反过来，假设对于某个 $a \in \mathcal{A}$, $e_E\lambda(a) = \lambda(a)e_E$。 $\mathcal{B}$。鉴于条目（3），取 $\mathcal{B}$中包含的 $\mathcal{A}$ 的一个近似单位 $\{u_\gamma\}$。

由第（1）项， η 是连续的；因此，

$$\eta(a) = \eta(\lim_\gamma au_\gamma) = \lim_\gamma \lambda(a)e_E(\eta(u_\gamma)) = \lim_\gamma e_E\lambda(a)(\eta(u_\gamma)) = \eta(E(\lim_\gamma au_\gamma)) = \eta(E(a)).$$

由于 E 是忠实的， η 是单射；因此， $E(a) = a$，即 $a \in \mathcal{B}$。

(5)：只需证明 $\lambda(\mathcal{A})e_E \subseteq C_r^*\langle \mathcal{A}, e_E\rangle$。如上所述，取 $\mathcal{A}$ 的一个近似单位 $\{u_\gamma\}$，使其包含于 $\mathcal{B}$中。于是，对每个 $a \in \mathcal{A}$，我们有

$$\lambda(a)e_E = \lim_\gamma \lambda(au_\gamma)e_E = \lim_\gamma \lambda(a)e_E\lambda(u_\gamma) \in \overline{\lambda(\mathcal{A})e_E\lambda(\mathcal{B})} \subseteq C_r^*\langle \mathcal{A}, e_E\rangle.$$

(6)： ψ 是一个 $*$-同态，这可由 $\lambda(\mathcal{B}) = \{e_E\}' \cap \lambda(\mathcal{A})$ 这一事实推出——如条目（4）所示。

为证明 ψ 的单射性，取 $\mathcal{B}$ 的一个近似单位 $\{u_\gamma\}$。若 $\psi(b) = 0$，则$\lambda(b)e_E = 0$；并且由于 η 连续，我们得到

$$\eta(b) = \lim_\gamma \eta(bu_\gamma) = \lim_\gamma \lambda(b)e_E\eta(u_\gamma) = 0.$$

因此，由于 η 是单射， $b=0$。 □

2.3.2. 拟基、算子值权重以及具有有限 *Watatani* 指数的条件期望。

定义 2.16. [31] 设 $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$ 是 C^*代数的一个包含，且 $E:\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是一个条件期望。若有限集 $\{u_i:\ 1\le i\le n\}$ 包含于 $\mathcal{A}$，并且对所有 $x\in\mathcal{A}$. 都有 E 的一个（右）拟基，满足 $x=\sum_i u_iE(u_i^*x)$ (等价地， $x=\sum_i E(xu_i)u_i^*$)

注 2.17. *(1)* 与具有有限概率指数的条件期望这一性质（见定理 *2.13*）类似，*Watatani* 注意到，存在有限拟基这一性质也是包含 $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$ （含幺 C^*代数）的内在性质。更确切地说，当 $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ （或 $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$，等价地， $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$）是有限维时，要么不存在从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 具有有限拟基的条件期望，要么从 $\mathcal{A}$到 $\mathcal{B}$ 的每个条件期望都有有限拟基——见 [31,命题 2.10。2]。*(2)* 若 $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$ 是 C^*代数的一个包含，且 $\mathcal{A}$ 含幺，并且 $E:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是具有有限拟基的条件期望，则 $\mathcal{B}$ 含幺，$\mathrm{Ind_P}(E)<\infty$，且 E 忠实——见 [31]。

下面这些众所周知的观察将会用到:

命题 2.18. [31, 16] 设 $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$ 是 C^*代数的一个包含， $E:\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是一个条件期望，且 $\{u_i:\ 1\le i\le n\}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个有限集。

(1) 若 $\{u_i:\ 1\le i\le n\}$ 是 E 的一个拟基，则它也是条件期望 $E^{**}:\mathcal{A}^{**}\to\mathcal{B}^{**}$ 的一个拟基。特别地，$\mathrm{Ind_P}(E)=\mathrm{Ind_P}(E^{**})<\infty$ （且 E 忠实）。*(2)* 若 E 忠实，则 $\{u_i:\ 1\le i\le n\}$ 是 E 的一个拟基，当且仅当

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda(u_i)e_E\lambda(u_i)^*=\mathrm{id}_{\mathfrak{A}}.$$

特别地，若 E 有一个有限拟基，则 E 忠实，且

$$C_r^*\langle\mathcal{A},e_E\rangle=\mathrm{span}\{\lambda(x)e_E\lambda(y):x,y\in\mathcal{A}\}=\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(\mathfrak{A}).$$

Prop命题 2.19. [31, 命题 2.1.5 与引理 2.1。6] 设 $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$ 是 C^*代数的一个包含 *ras* 与$\mathcal{A}$ 已 $\mathcal{B}$ 是一个条件期望。考虑以下陈述:

(1) E 具有拟基。*(2)* $\mathrm{Ind_P}(E)<\infty$ 且 $\mathrm{id}_{\mathfrak{A}}\in C_r^*\langle\mathcal{A},e_E\rangle$。*(3)* $\mathrm{Ind_P}(E)<\infty$ 且 $\lambda(\mathcal{A})\subseteq C_r^*\langle\mathcal{A},e_E\rangle$。

于是，*(1)* 与 *(2)* 等价，且其中每一个都蕴含 *(3)*。此外，若 $\mathcal{A}$（从而$\mathcal{B}$）是含幺的，则这三个陈述全都等价。

注记 2.20. *Watatani* 将具有有限拟基的条件期望称为有限指数型。事实上，若条件期望 $E:\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 具有有限拟基，则 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 必为含幺且具有公共单位元——参见 [16, 注记 2.4 (5)] （或下文的定理 *2.30*）。

定理 2.19 的等价陈述是对非含幺 C^* 代数中有限指标条件期望的 Watatani 概念进行推广的自然前奏；Izumi 借助 Haagerup 的算子值权理论，在 [16] 中发展了这一推广。（为此需要一些来自不同参考文献的理论背景，为求完整起见，我们在此简要介绍。）

算子值权重：

回顾（参见 [14, 29]），对于任意 W^* 代数 $\mathcal{M}$，$\mathcal{M}_+$ 表示满足以下条件的下半连续映射集合 $m : \mathcal{M}_*^+ \to [0,\infty]$

$$m(\lambda\varphi) = \lambda m(\varphi) \text{ and } m(\varphi+\psi) = m(\varphi) + m(\psi)$$

对所有 φ，$\psi \in \mathcal{M}_*^+$ 和 $\lambda \geq 0$，其中 $\mathcal{M}_*^+$ 表示 $\mathcal{M}$ 上的 w^*-连续正的线性泛函集合。显然，$\mathcal{M}_+$ 可视为 $\mathcal{M}_+$ 的子集（通过求值）。

对于 W^* 代数 $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ 的任意包含，从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{N}$ 的一个算子值权重是一个满足以下条件的映射 $T : \mathcal{M}_+ \to \widehat{\mathcal{N}}_+$：

(1) $T(cx) = cT(x)$; (2) $T(x+y) = T(x) + T(y)$; 以及 (3) $T(a^*xa) = a^*T(x)a$,

对所有 x，$y \in \mathcal{M}_+$、$a \in \mathcal{N}$以及标量 $c \geq 0$，其中 $(a^*T(x)a)(\varphi) := T(x)(\varphi(a^* \cdot a))$ 对于 $\varphi \in \mathcal{N}_*^+$成立。

如果算子值权重 T 满足 $T(\mathcal{M}_+) \subset \mathcal{N}_+$，则称其为有界的；如果对于 $\mathcal{M}_+$ 中的任意递增极限 $x_i \nearrow x$，$T(x_i) \nearrow T(x)$（逐点）在 $\widehat{\mathcal{N}}_+$ 中成立，则称其为正规的。

注记 2.21。任意（正规）条件期望 $E : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 限制到$\mathcal{M}_+$ 上，都是一个将 $1_{\mathcal{M}}$ 映射到 $1_{\mathcal{N}}$的（正规）有界算子值权重；反之，每个将 $1_{\mathcal{M}}$ 映射到 $1_{\mathcal{N}}$ 的（正规）有界算子值权重 $T : \mathcal{M}_+ \to \widehat{\mathcal{N}}_+$ 都可自然延拓为从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{N}$ 的（正规）条件期望——参见 [14, 29]。

定理 2.22。[1] 设 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ 是 C^*-代数的一个包含，且 $E : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是一个条件期望，满足 $\mathrm{Ind}_{\mathrm{P}}(E) < \infty$。则有以下结论：

(1) 关于由忠实正规条件期望 $E^{**} : \mathcal{A}^{**} \to \mathcal{B}^{**}$诱导的典范 $\mathcal{B}^{**}$-值内积，$\mathcal{A}^{**}$ 是一个以 $\mathcal{B}^{**}$ 为基的希尔伯特 W^*-模。*(2)* 将 $\mathcal{A}^{**}$ 与 $\lambda_{E^{**}}(\mathcal{A}^{**})$ 在 $\mathcal{L}_{\mathcal{B}^{**}}(\mathcal{A}^{**})$中的像 $W^*\Big(\mathcal{A}^{**} \cup \{e_{E^{**}}\}\Big) = \mathcal{L}_{\mathcal{B}^{**}}(\mathcal{A}^{**})$等同，其中$e_{E^{**}}$ 表示与 E^{**}相关联的琼斯投影。*(3)* 存在一个从 $\mathcal{L}_{\mathcal{B}^{**}}(\mathcal{A}^{**})$ 到 $\mathcal{A}^{**}$的有界正规算子值权 E^{**}，使得，且 $E^{**}(\mathrm{id}_{\mathcal{A}^{**}}) \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}^{**})$。 *([1, Prop. 3.3])*

$$\widehat{E^{**}}\big(xe_{\widehat{E^{**}}}x^*\big) = xx^* \text{ for all } x \in \mathcal{A}^{**},$$

([1, Thm. 3.5])

一般而言，具有有限概率指数的条件期望 $E : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 未必具有有限 Watatani 指数——例如参见 [12，第 89-90] 页。Izumi 的以下深刻观察，为将 Watatani 的有限指数型概念推广到非含幺 C^*-代数包含的条件期望铺平了道路。

定理2.23. [16, 定理 2.8] 设 $\mathcal{B}, \mathcal{A}$ 和 E 如定理 *2.22* 中所述。将 $\mathcal{A}$（分别地，$\mathcal{A}^{**}$）与 $\lambda_E(\mathcal{A})$（分别地，$\lambda_{E^{**}}(\mathcal{A}^{**})$ 视为同一对象后，下列陈述等价：

(1) $A \subseteq C_r^*\langle \mathcal{A}, e_E\rangle$. *(2)* E^{**}(恒等$_{\mathcal{A}^{**}}$) $\in \mathcal{Z}(M(\mathcal{A}))$.

定义2.24。[16] 设 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ 是 C^*-代数的一个包含。若条件期望$E : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 具有有限 *Watatani* 指数，即$\mathrm{Ind}_{\mathrm{P}}(E) < \infty$，并且满足定理*2.23*中的任一等价陈述，则称其具有有限 *Watatani* 指数。此外，此类条件期望的 *Watatani* 指数定义为

$$\mathrm{Ind}_W(E) = \widehat{E^{**}}(\mathrm{id}_{\mathcal{A}^{**}}) \in \mathcal{Z}(M(\mathcal{A})).$$

Izumi 给出的上述定义确实推广了 Watatani 的定义：

命题 2.25. [1, 16, 31] 沿用定理 *2.22* 中的记号，若 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{A}$ 均为含幺的，则以下结论成立：

(1) E 具有有限 *Watatani* 指数，当且仅当它在 $\mathcal{A}$中有有限拟基。*(2)* 若 $\{u_i : 1 \leq i \leq n\} \subset \mathcal{A}$ 是 E的有限拟基，则

$$\mathrm{Ind}_W(E) = \sum_{i=1}^{n} u_i u_i^*,$$

它是 $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ 中的正可逆元，且与拟基的选取无关。（事实上，*Watatani*（在 [31] 中）最初正是以这种方式定义有限指数型条件期望的指数。）*(3)* 若 E 具有有限 *Watatani* 指数，则 E^{**} 也具有有限 *Watatani* 指数，而且 $\mathrm{Ind}_W(E^{**}) = \mathrm{Ind}_W(E)$。（特别地，$1_{\mathcal{B}^{**}} = 1_{\mathcal{A}^{**}}$。）

注 2.26. [16] 设 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ 是非含幺 C^*代数的一个包含，且 $E : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是具有有限 *Watatani* 指数的条件期望。那么，$E^{**} : \mathcal{A}^{**} \to \mathcal{B}^{**}$ 未必具有有限 *Watatani* 指数。

事实上，在 [16, 例 2.15]，中，*Izumi* 给出了一个非含幺 C^*代数的包含 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ 及其条件期望 $E : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，满足 $\mathrm{Ind}_W(E) = 2$，并证明其扩张 $E^{**} : \mathcal{A}^{**} \to \mathcal{B}^{**}$ 不允许存在拟基。特别地，根据定理 *2.25*，E^{**} 不具有有限 *Watatani* 指数。

一般而言，具有有限概率指数的条件期望未必具有有限 Watatani 指数。然而，在某些特定情形下，Izumi 作出了以下重要观察：

定理 2.27. [16]设 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ 是 C^* 代数的一个包含，且 $E : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是一个条件期望，并且 $\mathrm{Ind_P}(E) < \infty$。

(1) 若 $\mathcal{A}$ 是单的，则 $\mathrm{Ind}_W(E) < \infty$，且它是一个标量。 *(*[16,定理 3.2]*)*

(2) 若 $\mathcal{B}$ 是单的，则 $\mathrm{Ind}_W(E) < \infty$。 *(*[16,推论 3.4]*)*

此外，若 $\mathcal{A}$ 含幺，则在这两种情况下，E 在 $\mathcal{A}$ 中都有一个有限拟基。

例 2.28。 [16]

(1) 设 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ 是含幺 C^*-代数的一个包含，并且条件期望$E : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$具有有限 *Watatani* 指数。考虑非含幺 C^*-代数的典范包含 $\mathcal{B} \otimes^{\min} \mathcal{K}(\ell^2) \subset \mathcal{A} \otimes^{\min} \mathcal{K}(\ell^2)$，其中 $\mathcal{K}(\ell^2)$ 表示作用在 ℓ^2 上的非含幺 C^*-紧算子代数。则，条件期望 $E \otimes^{\min} id_{\mathcal{K}(\ell^2)}$: $\mathcal{A} \otimes^{\min} \mathcal{K}(\ell^2) \to \mathcal{B} \otimes^{\min} \mathcal{K}(\ell^2)$ 具有有限 *Watatani* 指数，并且 $Ind_W(E \otimes^{\min} id_{\mathcal{K}(\ell^2)}) = Ind_W(E) \otimes 1$。（[16, 引理 2.11]）*(2)* 若有限群 G 作用于单 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 上，则典范的（取平均）条件期望 $E : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^G$ 具有有限 *Watatani* 指数。此外，若该作用是外作用，则 $Ind_W(E) = |G|$。（[16, 推论 3.12]）

2.3.3. 对偶条件期望。 回顾一下 [31]，若 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ 是含幺 C^*代数的一个包含，则对于任何具有拟基的条件期望 $E : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，都存在一个具有拟基的对偶条件期望 $E_1 : C_r^*\langle \mathcal{A}, e_E \rangle \to \mathcal{A}$（陈述见定理 2.30）。

更一般地，对于任意条件期望 $E : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，若 $\mathrm{Ind_P}(E) < \infty$，则$\widehat{\ }$有界正规算子值权重 E^{**}（如定理 2.22 所述）给出一个正规条件期望 $\mathrm{Ind}_W(E)^{-1}\widehat{E^{**}} : \mathcal{L}_{\mathcal{B}^{**}}(\mathcal{A}^{**}) \to \mathcal{A}^{**}$。接着，通过对

诱导表示以及两个表示之间拟等价的概念作出精妙运用，Izumi（见 [16, §2]）将约化的 C^*-基本构造 $C_r^*\langle\mathcal{A},\ e_E\rangle$ 与 σ-弱稠密的 C^*-子代数识别起来，该子代数属于 W^*-代数 $\mathcal{L}_{\mathcal{B}^{**}}(\mathcal{A}^{**})$；并且，当 $\mathrm{Ind}_W(E) < \infty$ 时，映射 $E_1 := \mathrm{Ind}_W(E)^{-1}\left(\widehat{E^{**}}\right)_{\restriction_{C_r^*\langle\mathcal{A},\ e_E\rangle}}$ 是一个从 $C_r^*\langle\mathcal{A},\ e_E\rangle$ 到 $\mathcal{A}$ 的条件期望，称为 E 的对偶条件期望。

定理 2.29。 [16, 定理 2.8] 设 $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$ 是 C^*代数的一个包含，且 $E:\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是一个具有有限 *Watatani* 指数的条件期望。那么，将 $\mathcal{A}$与 $\lambda_E(\mathcal{A})$等同后，存在一个条件期望 $E_1:\ C_r^*\langle\mathcal{A}, e_E\rangle\to\mathcal{A}$，它具有有限 *Watatani* 指数，并满足

$$E_1(xe_Ey) = \mathrm{Ind}_W(E)^{-1}xy \text{ for all } x, y\in\mathcal{A}.$$

由此可推出以下众所周知的事实（见定理 2.20）。

推论 2.30。 设 $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$ 是 C^*代数的一个包含，且 $E:\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是一个条件期望。如果 E 有有限拟基，那么存在一个对偶条件期望$E_1:\ C_r^*\langle\mathcal{A}, e_E\rangle\to\mathcal{A}$，且它有有限拟基。

特别地， $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 都是含幺的，且有公共单位元。

证明。 由于 E 具有拟基，由定理 2.19 可知，它具有有限 Watatani 指数，并且 $\mathrm{id}_{\mathfrak{A}}\in C_r^*\langle\mathcal{A}, e_E\rangle$；因此， $C_r^*\langle\mathcal{A}, e_E\rangle$ 是一个含幺 C^*-代数。此外，由前述定理，存在一个具有有限 Watatani 指数的（对偶）条件期望 $E_1:\ C_r^*\langle\mathcal{A}, e_E\rangle\to\mathcal{A}$。于是，由 [29]第 118 页上的命题可知， $\mathcal{A}$是含幺的（事实上， $1_{\mathcal{A}} := E_1(\mathrm{id}_{\mathfrak{A}})$ 可作为 $\mathcal{A}$的单位元）。由于 E_1 具有有限 Watatani 指数，由定理 2.25 可知，它具有拟基。□

注 2.31。 沿用定理 *2.29* 中的记号，迭代 C^*-基本构造过程并取对偶条件期望（如上所述），便可得到一个 C^*-代数塔

$$\mathcal{B}\subset\mathcal{A}\subset\mathcal{A}_1\subset\mathcal{A}_2\subset\cdots\subset\mathcal{A}_k\subset\cdots,$$

其中，对于 $k\geq 0$、 $\mathcal{A}_{k+1} := C^*\langle\mathcal{A}_k,\ e_{k+1}\rangle$ 与 $e_{k+1}\in\mathcal{L}_{\mathcal{A}_{k-1}}(\mathcal{A}_k)$ 是对应于有限指标（对偶）条件期望 $E_k:\ \mathcal{A}_k\to\mathcal{A}_{k-1}$的 *Jones* 投影，其中 $\mathcal{A}_{-1} := \mathcal{B}$， $\mathcal{A}_0 := \mathcal{A}$， $E_0 := E$ 以及 $e_1 := e_E$。

3. Reduced W^*-basic construction

在本节中， $\mathcal{N}\subset\mathcal{M}$ 将表示 W^*-代数的一个具有公共单位元的固定包含，并且 $E:\ \mathcal{M}\to\mathcal{N}$ 为一个（固定的）忠实正规条件期望。因此，如同第 2.3.1 节中那样， $\mathcal{M}$ 关于由 E 诱导的自然$\mathcal{N}$-值内积成为一个 $\mathcal{N}$ 上的（右）准 Hilbert C^*-模。设 $\mathfrak{M}$ 表示 $\mathcal{M}$ 的自对偶完备化（见定理 2.7），并且 $\eta_E:\ \mathcal{M}\to\mathfrak{M}$表示典范嵌入。于是， $\mathfrak{M}$是 $\mathcal{N}$上的一个（右）Hilbert W^*-模；并且由定理 2.5， $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}(\mathfrak{M})$是一个 W^*-代数。下列基本事实将对我们后续的讨论至关重要:

定理 3.1 ([1,命题 2.8 和定理 3.2])。

(1) 存在一个单射（正规） $*$-同态 $\lambda_E:\ \mathcal{M}\to\mathcal{L}_{\mathcal{N}}(\mathfrak{M})$，满足$\lambda_E(x)(\eta_E(z)) = \eta_E(xz)$，对所有 $x, z\in\mathcal{M}$ 均成立。（因此， λ_E将 $\mathcal{M}$ 映射到 $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}(\mathfrak{M})$ 的一个 W^*-子代数上。）

(2) 存在一个投影 $e_E\in\mathcal{L}_{\mathcal{N}}(\mathfrak{M})$，满足 $e_E(\eta_E(x)) = \eta_E(E(x))$，对所有 $x\in\mathcal{M}$ 均成立。

(3) e_E 在 $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}(\mathfrak{M})$ 中的中心支撑为 *1*。*(4)* $\lambda_E(\mathcal{N}) = \{e_E\}'\cap\lambda_E(\mathcal{M})$ 于 $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}(\mathfrak{M})$ 中。

鉴于前述事实，以下琼斯关于基本构造的概念（来自 [18]）的类似形式十分自然——另见 [21, 1, 31, 27]。

定义 3.2. 包含 $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ （相对于条件期望 $E\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$）的约化 W^*-基本构造，定义为由 $\lambda(\mathcal{M})e_E\lambda(\mathcal{M})$ 生成的 $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}(\mathfrak{M})$ 的 W^*-子代数，记为 $W_r^*\langle \mathcal{M}, e_E\rangle$，即

$$W_r^*\langle \mathcal{M}, e_E\rangle := \overline{\operatorname{span}\{\lambda(x)e_E\lambda(y) : x, y \in \mathcal{M}\}}^{\sigma\text{-weak}} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{N}}(\mathfrak{M}).$$

注 3.3. 当 $\operatorname{Ind_P}(E) < \infty$ 时，*Popa* 在 [27, §1.1.3] 中考虑了 $\mathcal{M}$ 的标准表示 $\mathcal{M} \subseteq B(\mathcal{H})$，其投影 $e \in B(\mathcal{H})$ 满足 $exe = E(x)e$ （对所有 $x \in \mathcal{M}$ 均成立），且 $\operatorname{span}(\mathcal{M}e\mathcal{H}) = \mathcal{H}$；随后，他将包含 $\mathcal{N} \overset{E}{\subset} \mathcal{M}$ 的基本构造定义为冯·诺伊曼代数 $\{\mathcal{M} \cup \{e\}\}''$，它位于 $B(\mathcal{H})$ 中。

事实上，人们也研究包含的更一般的基本构造概念$\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$，无需存在从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{N}$ 的正规条件期望——参见 [7, §2.2]。

不过，考虑到我们的要求以及使用希尔伯特 W^*-模显而易见的便利性，我们更倾向于采用希尔伯特模方法；该方法已在 [1] 和 [31]中得到相当令人满意的应用。

Rem注 3.4. 由定理 *2.2* 可知， $W_r^*\langle \mathcal{M}, e_E\rangle$ 是一个 σ-弱闭的双边理想，属于 $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}(\mathfrak{M})$。

定理 3.5 ([25, 1, 12])**.** 以下陈述等价：

(1) $\operatorname{Ind_P}(E) < \infty$. *(2)* $\operatorname{Ind_{CP}}(E) < \infty$. *(*[12] —参见上文定理 *2.12) (3)* $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{N}$ 上的自对偶希尔伯特 C^*-模（因此， $\mathfrak{M} = \eta_E(\mathcal{M})$）。（[1, 命题 *3*.3]） *(4)* 存在一个族 $\{m_j\}$，其中的元素属于 $\mathcal{M}$，使得 $\{\eta_E(m_j)\}$ 是希尔伯特 W^*-模 $\mathfrak{M}$ （在 $\mathcal{N}$ 上）的标准正交基，并且族 $\{m_j m_j^*\}$ 在 $\mathcal{M}$ 中是 σ-弱无条件可和的。（[25, 定理 *3*.12],[1,定理 *3*.5])

特别地，若 $\operatorname{Ind_P}(E) < \infty$，则 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{N}$ 上的希尔伯特 W^*-模，且 $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}(\mathcal{M})$ 是一个W^*-代数。

（请注意，条目（4）与 [27, 定理 1.1.6] 相当。）

注记 3.6。 *(1)* 显然， η_E 是线性压缩。并且， η_E ： $\mathcal{M} \to \eta_E(\mathcal{M})$ 关于范数双连续，当且仅当$\operatorname{Ind_P}(E) < \infty$ ——见 [1, 命题 3。3]。*(2)* 若$\operatorname{Ind_P}(E) < \infty$，则 η ： $\mathcal{M} \to \eta_E(\mathcal{M})$ 也是 *(*σ- 弱， w^**)*- 连续的，其中， $\eta_E(\mathcal{M})$ 上的 w^*- 拓扑由定理 *2.5* 中提到的对偶诱导 —— 见[9,推论 8.5。8]。

先验来看，并不清楚 $W_r^*\langle \mathcal{M},\ e_E\rangle$ 是否总是等于 $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}(\mathfrak{M})$。不过，当 $\operatorname{Ind_P}(E) < \infty$ 时，已知（根据 [1]）等式成立。

定理 3.7。 [1] 若$\operatorname{Ind_P}(E) < \infty$，则将 $\mathcal{M}$ 与 $\lambda_E(\mathcal{M})$认同后，以下结论成立：

(1) 存在一个有界正规算子值权重 E，从 $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}(\mathcal{M})$ 到 $\mathcal{M}$，满足$\widehat{E}(xe_Ex^*) = xx^*$，对所有 $x \in \mathcal{M}$ 均成立。*(*[1, 定理 *3*.5]*)* *(2)* 对于 $\mathcal{M}$ 中任意一族 $\{m_j\}$，若 $\{\eta_E(m_j)\}$ 是 *Hilbert* W^*-模 $\eta_E(\mathcal{M})$ 关于 $\mathcal{M}$ 的标准正交基，则 *(a)* $\sum_j m_j e_E m_j^* = 1$ *(*σ-弱*)* 收敛于 $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}(\mathcal{M})$；并且，*(*[1, 注 *3.4(iii)*]*)* *(b)* $\sum_j m_j m_j^* = E$*(1) (*σ-弱*)* 收敛于 $\mathcal{M}$，因此该和与所选标准正交基无关，并且是 $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ 中的一个正可逆元。*(*[1,定理 *3*.5]*)*。

特别地， $W_r^*\langle \mathcal{M}, e_E\rangle = \mathcal{L}_{\mathcal{N}}(\mathcal{M})$ 并且存在一个对偶正规条件期望$E_1\colon \mathcal{L}_{\mathcal{N}}(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}$，其 $\mathrm{Ind}_{\mathrm{P}}(E_1) < \infty$，且满足 $E_1(xe_Ey) = \widehat{E}(1)^{-1}xy$，对所有 $x, y \in \mathcal{M}$ 均成立。([1, §3.10])

定义 3.8. [1, 定义 3.6] 设 $\mathrm{Ind}_{\mathrm{P}}(E) < \infty$。

(1) E 的 *BDH* 指数定义为 $\widehat{\mathrm{Ind}_0(E)} = E(1)$，它是 $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$中的正可逆元。(2) 若存在一个有限正交基，使希尔伯特 W^*-模 $\eta(\mathcal{M})$ 具有有限正交基，则称 E 具有强有限指数。

(注：我们所称的 E 的 BDH 指数，在 [1]中简称为 E 的指数。)

注 3.9。 若 $\mathrm{Ind}_{\mathrm{P}}(E) < \infty$，则 $W_r^*\langle \mathcal{M}, e_E\rangle = \{\lambda(\mathcal{M}) \cup \{e_E\}\}'' = \mathcal{L}_{\mathcal{N}}(\mathcal{M})$ 并且，如 [1, § 3。10], 所述，包含 $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ 的约化 W^*-基本构造可以迭代，从而得到一列 W^*-代数

$$\mathcal{N} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{M}_k \subset \cdots,$$

配备（对偶）条件期望 $E_k\colon \mathcal{M}_k \to \mathcal{M}_{k-1}$, $k \geq 1$，满足 $\mathrm{Ind}_{\mathrm{P}}(E_k) < \infty$ 且 $E_k(xe_{E_{k-1}}y) = \mathrm{Ind}_0(E_{k-1})^{-1}xy$，对所有 $x, y \in \mathcal{M}_{k-1}$ 均成立，其中 $\mathcal{M}_{-1} := \mathcal{N}$, $\mathcal{M}_0 := \mathcal{M}$, $E_0 := E$，且 $\mathcal{M}_{k+1} := \mathcal{L}_{\mathcal{M}_{k-1}}(\mathcal{M}_k) = \{\lambda(\mathcal{M}_k) \cup \{e_{E_k}\}\}''$ 是相对于条件期望$E_k\colon \mathcal{M}_k \to \mathcal{M}_{k-1}$而言的，对所有 $k \geq 0$ 均成立。

注 3.10. 如果 E 有有限拟基，那么 $\mathrm{Ind}_{\mathrm{P}}(E) < \infty$，并且

$$W_r^*\langle \mathcal{M}, e_E\rangle = \mathrm{span}\{\lambda(x)e_E\lambda(y) : x, y \in \mathcal{M}\} = \mathcal{L}_{\mathcal{N}}(\mathcal{M}) = C_r^*\langle \mathcal{M}, e_E\rangle,$$

根据定理 *2.18*。

3.1. **广义拟基**。 回顾一下，在 [27, § 1.1.4], 中，Popa 讨论了正规条件期望的正交归一基，其中他使用 Bures 拓扑来处理定义中所涉及级数的收敛。Popa 这一概念一个众所周知且颇具优势的特点是，对于交叉积冯·诺依曼代数 $\mathcal{M} \rtimes G$（相对于无限离散群 G 在 $\mathcal{M}$上的作用），有 $x = \sum_{g\in G} gE(g^*x)$ 在 Bures 拓扑下成立（而非在 σ-弱拓扑下）——参见 [24]。

不过，我们注意到，在当前语境下，关于σ-弱拓扑的一种类似概念（不一定正交）更为合适。受 Watatani 启发，鉴于其效用，我们称之为“广义拟基”。

定义 3.11. 若族 $\{m_j\}$ 属于 $\mathcal{M}$，则称其为 E的广义（右）拟基，若

$$x = \sum_j^{\sigma\text{-weak}} m_jE(m_j^*x) \text{ for all } x \in \mathcal{M}.$$

这一事实为专家所熟知——例如参见 [17, 第 223] 页。（它也与 [27, 第 4] 页的条目（3）相当。）不过，我们未能在文献中找到对此事实的明确证明。因此，为求完整起见，我们给出一个证明，该证明依赖于 [1], [25] 和 [10]中的一些有用观察。

命题 3.12. [17] 若 $\mathrm{Ind}_{\mathrm{P}}(E) < \infty$，则对于任意一组满足$\{\eta(m_j)\}$ 是 $\eta(\mathcal{M})$ 在 $\mathcal{N}$上的标准正交基的 $\{m_j\}$，$\{m_j\}$ 是 E的广义准基。特别地，E 存在广义准基。

证明. 我们固定 $\eta(\mathcal{M})$的一组这样的标准正交基，记作 $\{\eta(m_j)\colon\ j\in J\}$（其存在性见定理 3.5）。

令 $x\in\mathcal{M}$。考虑 $\mathcal{M}$，它相对于自然的$\mathcal{M}$值内积 $\langle x,y\rangle_{\mathcal{M}}:=x^*y$, $x,y\in\mathcal{M}$，是一个以 $\mathcal{M}$ 为底的希尔伯特 C^*-模。令 $\mathcal{F}(J)$ 表示由 J 的所有有限子集构成的（有向）集合。于是，网 $\Big\{\sum_{j\in S}\langle m_j^*,m_j^*\rangle_{\mathcal{M}}\colon\ S\in\mathcal{F}(J)\Big\}$ 和 $\Big\{\sum_{j\in S}\langle E(m_j^*x)\ E(m_j^*x)\rangle_{\mathcal{M}}\colon\ S\in\mathcal{F}(J)\Big\}$ 在 $\mathcal{M}$ 中均范数有界，因为

$$\sum_{j\in S}\langle m_j^*,m_j^*\rangle_{\mathcal{M}}=\sum_{j\in S}m_jm_j^*\le\sum_j^{\sigma\text{-weak}}m_jm_j^*=\hat{E}(1);\ \text{and,}$$

$$\sum_{j\in S}\langle E(m_j^*x),E(m_j^*x)\rangle_{\mathcal{M}}=\sum_{j\in S}E(m_j^*x)^*E(m_j^*x)\le\sum_{j\in S}E\left((m_j^*x)^*(m_j^*x)\right)\le E(x^*\hat{E}(1)x)$$

对所有 $S\in\mathcal{F}(J)$ 都成立，其中倒数第二个不等式源于每个条件期望都是施瓦茨映射这一事实——参见 [29, §9.2]。

因此，容易得出网 $\Big\{\sum_{j\in S}\langle m_j^*,E(m_j^*x)\rangle_{\mathcal{M}}\colon\ S\in\mathcal{F}(J)\Big\}$ 在 $\mathcal{M}$ 中是范数有界的（并且在 σ-弱拓扑中收敛）——参见[25] 第 458 页的讨论（另见 [9, §8.5.26]）。我们断言它 σ-弱收敛于 x。

注意到 $\eta(x)=\sum_j^w\eta(m_j)\langle\eta(m_j)\ \eta(x)\rangle_{\mathcal{N}}$，其中 w^*-拓扑来自定理 2.5 中所述的（Paschke 的）对偶。此外，我们有

$$\Big\|\sum_{j\in S}\eta(m_j)\langle\eta(m_j),\eta(x)\rangle_{\mathcal{N}}\Big\|\le\Big\|\sum_{j\in S}m_jE(m_j^*x)\Big\|$$

对所有 $S\in\mathcal{F}(J)$；因此，网 $\big\{\sum_{j\in S}\eta(m_j)\langle\eta(m_j)\ \eta(x)\rangle_{\mathcal{N}}\big\}$ 在 $\eta(\mathcal{M})$ 中是范数有界的；所以，再次由定理 2.5，

$$\varphi\Big(\Big\langle\eta\big(\sum_{j\in S}m_jE(m_j^*x)\big),\eta(y)\Big\rangle_{\mathcal{N}}\Big)\to\varphi(\langle\eta(x),\eta(y)\rangle_{\mathcal{N}})$$

对于所有的 $\varphi\in\mathcal{N}_*$ 和 $y\in\mathcal{M}$，这等价于说

$$\varphi\Big(E\big(\sum_{j\in S}E(x^*m_j)m_j^*y-x^*y\big)\Big)\to0\tag{3.1}$$

对于所有的 $\varphi\in\mathcal{N}_*$ 和 $y\in\mathcal{M}$。

对于每个 $\varphi\in\mathcal{N}_*$ 和 $y\in\mathcal{M}$，设 $\varphi_y\colon\ \mathcal{M}\to\mathbb{C}$ 由 $\varphi_y(z)=\varphi\big(E(zy)\big)$, $z\in\mathcal{M}$给出。于是，$\varphi_y\in\mathcal{M}_*$，并且已知集合 $L:=$ 张成的 $\{\varphi_y\colon\ y\in\mathcal{M},\ \varphi\in\mathcal{N}_*\}$ 在 $\mathcal{M}_*$ 中范数稠密——参见 [10,引理 3.2]。因此，(3.1) 告诉我们

$$\psi\Big(\sum_{j\in S}E(x^*m_j)m_j^*-x^*\Big)\to0\text{ for all }\psi\in L.\tag{3.2}$$

对每个 $S\in\mathcal{F}(J)$，令 $x_S:=\sum_{j\in S}E(x^*m_j)m_j^*\big(=\sum_{j\in S}\langle m_j^*,E(m_j^*x)\rangle_{\mathcal{M}}^*\big)$。由上文可知，网 $\{x_S\}$ 在 $\mathcal{M}$中是范数有界的。因此，由 L 在 $\mathcal{M}_*$中的稠密性，从(3.2)可得 $\theta(x_S-x^*)\to0$ 对所有 $\theta\in\mathcal{M}_*$成立。于是，$x_S\to x^*$（σ-弱）于 $\mathcal{M}$中，从而$\sum_j^{\sigma\text{-weak}}m_jE(m_j^*x)=x$。□

4. Angle between compatible intermediate W^*-subalgebras

在理解了 W^*-代数之包含的 W^*-基本构造理论的若干基本方面之后，类比于（在 [5]中引入的）带有限指标条件期望的含幺 C^*-代数包含中相容的中间 C^*-子代数之间的内角概念，我们针对带有适当条件期望的 W^*-代数包含中相容的中间W^*-子代数引入类似概念。

在本节中， $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ 将表示 W^*-代数的一个包含（具有公共单位元），而 E : $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 将表示一个（忠实的）正规条件期望，且 $\mathrm{Ind}_P(E) < \infty$。

4.1. 相容的中间 W^*-子代数。依照 [15], ，我们作如下定义:

定义4.1。包含 $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ 的一个中间 W^*-子代数 $\mathcal{P}$ 称为 E-相容的，若存在一个正规条件期望 F: $\mathcal{M} \to \mathcal{P}$，使得 $E_{\restriction_{\mathcal{P}}} \circ F = E$。

此外，IMS($\mathcal{N}$、 $\mathcal{M}$、 E) 表示包含 $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$中所有 E-相容的中间 W^*-子代数的集合。

注4.2。 设 $\mathcal{P} \in \mathrm{IMS}(\mathcal{N}, \mathcal{M}, E)$ 相对于条件期望 F: $\mathcal{M} \to \mathcal{P}$。

(1) 由于 $\mathrm{Ind}_P(E) < \infty$，由 [1, 命题 3。14] 可知，$\mathrm{Ind}_P(F) < \infty$ 也成立。*(2)* 由于具有有限概率指数的条件期望是忠实的，因此很容易得出（如 [15]第*471*页所示），若 $\mathcal{P} \in \mathrm{IMS}(\mathcal{N}, \mathcal{M}, E)$ 相对于两个条件期望 F 和 G成立，则 $F = G$。

命题4.3。 设 $\mathcal{P} \in \mathrm{IMS}(\mathcal{N}, \mathcal{M}, E)$ 相对于条件期望 F:$\mathcal{M} \to \mathcal{P}$ 和 $G := E_{\restriction_{\mathcal{P}}}$成立。则有以下结论:

(1) 存在一个自然的含幺嵌入 $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{N}}(\mathcal{M})$，通过该嵌入，对所有 $x \in \mathcal{M}$， $\lambda_F(x)$ 映射为 $\lambda_E(x)$。特别地， $e_F \in \mathcal{L}_{\mathcal{N}}(\mathcal{M})$，且通过此嵌入，对所有 $x \in \mathcal{M}$，$e_F(\eta_E(x)) = \eta_E(F(x))$。*(2)* $e_F e_E = e_E = e_E e_F$属于 $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}(\mathcal{M})$。*(3)* 对于 *Hilbert* W^*-模 $\eta_G(\mathcal{P})$ 在 $\mathcal{N}$ 上的一组任意标准正交基 $\{\eta_G(w_l)\}$ （如定理 *3.5* 中所述），

$$\sum_{l}^{\sigma\text{-weak}} \lambda_E(w_l) e_E \lambda_E(w_l)^* = e_F \ (in\ \mathcal{L}_{\mathcal{N}}(\mathcal{M})).$$

(4) $E_1(e_F) = Ind_0(E)^{-1} Ind_0(E_{\restriction_{\mathcal{P}}})$，其中 E_1: $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}$ 是 E 的对偶条件期望（如定理 *3.7* 所述）。*(5)* 若 E 具有强有限指数，则 *Hilbert*W^*-模 $\eta_E(\mathcal{M})$（在 $\mathcal{N}$ 上）的每一个有限正交归一基都是条件期望 E 的拟基。*(6)* 若 $E_{\restriction_{\mathcal{P}}}$ 具有一个有限拟基，例如 $\{\mu_j\}$，则 $\sum_j \lambda_E(\mu_j) e_E \lambda_E(\mu_j)^* = e_F$ （在 $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}(\mathcal{M})$ 中）。

证明。 (1) 与 (2) 是显然的（见 [13,命题 2.7]）。

(3): 如假设所述，固定 $\eta_G(\mathcal{P})$ 的一组标准正交基 $\{\eta_G(w_l)\}$。于是，

$$x = \sum_{l}^{\sigma\text{-weak}} w_l E_{\restriction_{\mathcal{P}}}(w_l^* x)$$

根据定理 3.12，对于所有 $x \in \mathcal{P}$，均有此结论。此外，对于每个 $a \in \mathcal{M}$ 以及 $\{w_l\}$ 的指标集中任意有限集 S，我们有

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{l\in S}\lambda_E(w_l)e_E\lambda_E(w_l)^*\Big)(\eta_E(a)) &= \eta_E\Big(\sum_{l\in S}w_lE(w_l^*a)\Big)\\ &= \eta_E\Big(\sum_{l\in S}w_l(E_{\restriction\mathcal{P}}\circ F)(w_l^*a)\Big)\\ &= \eta_E\Big(\sum_{l\in S}w_lE_{\restriction\mathcal{P}}(w_l^*F(a))\Big).\end{aligned}$$

由于 η 是 (σ-弱，w^*)-连续的（见定理 3.6(2)），因此

$$\Big(\sum_{l\in S}\lambda_E(w_l)e_E\lambda_E(w_l)^*\Big)(\eta_E(a)) \overset{w^*}{\to} \eta_E(F(a)) = e_F(\eta_E(a))$$

在 $\eta_E(\mathcal{M})$ 中，对所有 $a \in \mathcal{M}$ 均成立。此外，有限和的网 $\{\sum_{l\in S}\lambda_E(w_l)e_E\lambda_E(w_l)^*\}$ 在 $\mathcal{M}$ 中范数有界，这是因为

$$\sum_{l\in S}\lambda_E(w_l)e_E\lambda_E(w_l)^* \le \sum_{l\in S}\lambda_E(w_l)\lambda_E(w_l)^* = \lambda_E\Big(\sum_{l\in S}w_lw_l^*\Big) \le \lambda_E(\hat{G}(1))$$

对于每个有限指标集 S 都成立。因此，再次利用定理 2.5，

$$\sum_{l}^{\sigma\text{-weak}} \lambda_E(w_l)e_E\lambda_E(w_l)^* = e_F \text{ in } \mathcal{L}_{\mathcal{N}}(\mathcal{M}).$$

(4) 由 (3) 得出。(5) 由定理 3.12 得出。(6) 可按照 (3) 的方法得出。 □

4.2. **内角与外角**。 为方便起见，我们将一些记号简化如下：

(1) 沿用 Jones 和 Watatani 的记号，我们将 $\mathcal{M}_1$ 写作约化的 W^*-基本构造$W_r^*\langle\mathcal{M}, e_E\rangle$($= \mathcal{L}_{\mathcal{N}}(\mathcal{M})$)。根据定理 4.3，回顾可知，对于 $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in$ IMS($\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$, E)，有$\mathcal{P}_1$, $\mathcal{Q}_1 \subset \mathcal{M}_1$，其中（略微滥用记号） $\mathcal{P}_1 := \mathcal{L}_{\mathcal{P}}(\mathcal{M})$ 且 $\mathcal{Q}_1 := \mathcal{L}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M})$，这里所涉及的是使它们相容的唯一条件期望。

(2) 由于使 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$相容的条件期望是唯一的，我们分别将 $e_{\mathcal{P}}$ 和 $e_{\mathcal{Q}}$ 记作 $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{Q}_1$中的相应 Jones 投影。同样地，我们将 $e_{\mathcal{N}}$ 记作 e_E。此外，对于任意 Hilbert C^*-模 $\mathcal{X}$（其系数代数为 C^*-代数 $\mathcal{A}$）以及 $x \in \mathcal{X}$，$\|x\|_{\mathcal{X}}$ 表示 x 在 $\mathcal{X}$ 中的范数（由 $\mathcal{A}$-值内积诱导）。

据此，我们现在可以给出内角与外角的定义。

考虑对偶正规条件期望 E_1： $\mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}$，如定理 4.3 所述。然后，关于自然的 $\mathcal{M}$值内积（定义在 $\mathcal{M}_1$ 上，由 E_1诱导）， $\mathcal{M}_1$ 成为一个 Hilbert W^*-模（在 $\mathcal{M}$ 上），此由定理 3.5 得到，并且由 Hilbert C^*- 模的柯西 - 施瓦茨不等式 —— 见 [25, 命题 2.3]，我们有

$$\|\langle e_{\mathcal{P}} - e_{\mathcal{N}}, e_{\mathcal{Q}} - e_{\mathcal{N}}\rangle_{\mathcal{M}}\| \le \|e_{\mathcal{P}} - e_{\mathcal{N}}\|_{\mathcal{M}_1}\|e_{\mathcal{Q}} - e_{\mathcal{N}}\|_{\mathcal{M}_1}$$

对所有 $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in$ IMS($\mathcal{N}, \mathcal{M}, E$)。（如上所述， $\|\cdot\|_{\mathcal{M}_1}$ 表示 $\mathcal{M}_1$上的Hilbert C^*-模范数。）因此，循着 [2] 与 [5], 的思路，自然可作如下定义。

定义4.4. 一对 $\mathcal{P}$、 $\mathcal{Q} \in \mathrm{IMS}(\mathcal{N}, \mathcal{M}, E)$之间的 W^*-内角，记为$\alpha_{W^*}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$，由下列表达式定义

$$\cos(\alpha_{W^*}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})) = \frac{\|\langle e_{\mathcal{P}} - e_{\mathcal{N}}, e_{\mathcal{Q}} - e_{\mathcal{N}}\rangle_{\mathcal{M}}\|}{\|e_{\mathcal{P}} - e_{\mathcal{N}}\|_{\mathcal{M}_1}\|e_{\mathcal{Q}} - e_{\mathcal{N}}\|_{\mathcal{M}_1}}, \tag{4.1}$$

其值属于区间$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$。

此外，对于 $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathrm{IMS}(\mathcal{N}, \mathcal{M}, E) \setminus \{\mathcal{N}\}$，其中 $\mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_1 \in \mathrm{IMS}(\mathcal{M}, \mathcal{L}_{\mathcal{N}}(\mathcal{M})\ E_1)$，$W^*$-外角（介于 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 之间）定义为

$$\beta_{W^*}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \alpha_{W^*}(\mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_1). \tag{4.2}$$

（当需要跟踪初始包含 $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ 时，我们将使用记号$\alpha_{\mathcal{N}}^{\mathcal{M}}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ 来表示 $\alpha_{W^*}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ 。）

注记 4.5. 前面给出的内角定义与文献 [2] 中定义的不可约有限指标子因子 $N \subset M$ 的中间子因子之间的内角一致。这可由文献 [2, 命题 2.14] 中给出的内角表达式以及下文推导的定理 *4.8* 得出。

类似于 [5, 命题 5.10(2)], ，利用定理 4.3 可立即得到以下内角表达式。

命题 4.6。设 $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathrm{IMS}(\mathcal{N}, \mathcal{M}, E)$。那么，

$$\cos(\alpha_{W^*}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})) = \frac{\|E_1(e_{\mathcal{P}} e_{\mathcal{Q}} - e_{\mathcal{N}})\|}{\|\mathrm{Ind}_0(E)^{-1}(\mathrm{Ind}_0(E_{\restriction_{\mathcal{P}}}) - 1)\|^{1/2}\,\|\mathrm{Ind}_0(E)^{-1}(\mathrm{Ind}_0(E_{\restriction_{\mathcal{Q}}}) - 1)\|^{1/2}}. \tag{4.3}$$

特别地， $\alpha(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \frac{\pi}{2}$如果四元组$(\mathcal{N}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{M})$是一个交换方块（即，$e_{\mathcal{P}} e_{\mathcal{Q}} = e_{\mathcal{N}}$）。

注记 4.7。 在 [2], 中，对于由 II_1-因子构成的四元组，前一命题中关于该四元组为交换方块的断言，其类比结论既是必要条件也是充分条件。在那里，基本构造 II_1-因子上唯一迹态的迹性质，对于证明逆向结论起着关键作用。

利用定理 4.3(6)，以下观察显而易见（并且类似于[13, 命题 3.3]和 [5, 命题 2.14]）。

命题 4.8。 设 E 有有限拟基；设 $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathrm{IMS}(\mathcal{M}, \mathcal{N}, E)$ 具有相容的条件期望 $F\colon\ \mathcal{M} \to \mathcal{P}$ 和 $G\colon\ \mathcal{M} \to \mathcal{Q}$。那么， F 和 G 都有有限拟基，分别记为 $\{\mu_j\}$ 和 $\{\delta_k\}$；并且，

$$\cos\left(\alpha_{W^*}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})\right) = \frac{\|\mathrm{Ind}_W(E)^{-1}\left(\sum_{j,k}\mu_j E(\mu_j^*\delta_k)\delta_k^* - 1\right)\|}{\|\mathrm{Ind}_W(E)^{-1}\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{W}}(E_{\restriction_{\mathcal{P}}}) - 1\right)\|^{1/2}\,\|\mathrm{Ind}_W(E)^{-1}\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{W}}(E_{\restriction_{\mathcal{Q}}}) - 1\right)\|^{1/2}}. \tag{4.4}$$

特别地，当 $\mathrm{Ind}_W(E)$ 是一个标量时，有

$$\cos\left(\alpha_{W^*}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})\right) = \frac{\|\sum_{j,k}\mu_j E(\mu_j^*\delta_k)\delta_k^* - 1\|}{\|\mathrm{Ind}_{\mathrm{W}}(E_{\restriction_{\mathcal{P}}}) - 1\|^{1/2}\,\|\mathrm{Ind}_{\mathrm{W}}(E_{\restriction_{\mathcal{Q}}}) - 1\|^{1/2}}. \tag{4.5}$$

证明。 由 [20, 命题 3.5]可知， F 和 G 具有有限准基。其余部分完全按照 [5, 命题 2.14] 和 [13, 命题 3.3]的证明进行。□

注记 4.9. 正如预期，对于含幺 C^*-代数的有限指数包含中相容的中间C^*-子代数之间的 C^* 内角（定义见 [5, 定义 5.1]），与上述定义的它们相应双对偶之间的 W^* 内角一致——见定理 *5.2*。

例 4.10. 设 G 可数离散群作用于冯·诺伊曼代数 $\mathcal{M}$，H 为 G 的子群。于是，存在从 $\mathcal{M}\rtimes H$ 到 $\mathcal{M}\rtimes G$ 的自然嵌入，并且存在唯一的忠实正规条件期望 $E\colon\ \mathcal{M}\rtimes G\to\mathcal{M}\rtimes H$，满足

$$E(\sum_{g\in G}x_g g)=\sum_{h\in H}x_h h$$

对于 $\sum_{g\in G}x_g g$，在 $\mathcal{M}\rtimes G$ 中的 σ-弱稠密 $*$-子代数 $\left\{\sum_{g\in G}x_g g\colon\ x_g\in\mathcal{M},g\in G\right\}$（其中各项求和均为有限和）。此外，若 $[G\colon\ H]<\infty$，则 E 有有限拟基$\{g_i\colon\ 1\le i\le[G\colon\ H]\}$ 对于 H 在 G 中的任意一组陪集代表元 $\{g_i\colon\ 1\le i\le[G\colon\ H]\}$。特别地，$\mathrm{Ind}_W(E)=[G\colon\ H]$。

因此，若 $[G\colon\ H]<\infty$，且 K 和 L 是包含 $H\subset G$ 的两个中间子群，则 $\mathcal{M}\rtimes K,\mathcal{M}\rtimes L\in\mathrm{IMS}(\mathcal{M}\rtimes G,\mathcal{M}\rtimes H,E)$ 关于（上文提及的）典范条件期望成立；根据等式 (4.5)，模仿 [13,命题 5.2] 的推导，我们得到

$$\cos(\alpha_{W^*}(\mathcal{M}\rtimes K,\mathcal{M}\rtimes L))=\frac{[K\cap L:H]-1}{\sqrt{[K:H]-1}\sqrt{[L:H]-1}}.$$

这推广了 [4,命题 2。7]中得到的中间交叉积子因子之间内角的表达式。

5. Angle between compatible intermediate subalagebras of inclusions of non-unital C^*-algebras

现在，我们将应用前面定义的相容中间W^*-子代数之间的角的概念，来定义非含幺 C^*-代数的“有限指数”包含中相容中间 C^*-子代数之间内角的概念

在本节中，$\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$ 表示一个固定的 C^*-代数包含，带有一个条件期望 $E\colon\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}$，其 Watatani 指数有限（定理 2.24）。该包含 $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$ 的 E-相容中间 C^*-子代数集合记为 $\mathrm{IMS}_W(\mathcal{B},\ \mathcal{A},\ E)$，即，

$$\mathrm{IMS}_W(\mathcal{B},\ \mathcal{A},\ E):=\Big\{\mathcal{C}\colon\ \mathcal{C}\text{是 }\mathcal{B}\subset\mathcal{A}\text{的一个中间 }C^*\text{-子代数，并且存在条件期望 }F\colon\ \mathcal{A}\to\mathcal{C}\text{使得 }\mathrm{Ind}_W(F)<\infty\text{且 }E_{\restriction\mathcal{C}}\circ F=E\Big\}.$$

s a

与定理 4.2 中一样，若 $\mathcal{C}\in\mathrm{IMS}_W(\mathcal{B},\ \mathcal{A},\ E)$ 关于两个条件期望$F,\ G\colon\ \mathcal{A}\to\mathcal{C}$成立，则 $F=G$。

由定理 4.3，我们在 C^*-代数的背景下得到以下有用的观察结果。

命题 5.1. 设 $(E^{**})_1\colon\ \mathcal{L}_{\mathcal{B}^{**}}(\mathcal{A}^{**})\to\mathcal{A}^{**}$ 表示正规条件期望 $E^{**}\colon\ \mathcal{A}^{**}\to\mathcal{B}^{**}$ 的对偶（如定理 *3.7* 中所述），且 $\mathcal{C}\in\mathrm{IMS}_W(\mathcal{B},\mathcal{A},E)$ 关于有限 *Watatani* 指数的条件期望 $F\colon\ \mathcal{A}\to C$ 成立。则有以下结论：

(1) 关于条件期望 F^{**} 的 $\mathcal{C}^{**}\in IMS(\mathcal{B}^{**},\mathcal{A}^{**},E^{**})\colon\ \mathcal{A}^{**}\to\mathcal{C}^{**}$。*(2)* $\mathcal{L}_{C^{**}}(A^{**})\subseteq\mathcal{L}_{\mathcal{B}^{**}}(A^{**})$。*(3)* $e_{\mathcal{C}^{**}}e_{\mathcal{B}^{**}}=e_{\mathcal{B}^{**}}=e_{\mathcal{B}^{**}}e_{\mathcal{C}^{**}}$。*(4)* 存在一个族 $\{w_l\}$，属于 $\mathcal{C}^{**}$，使得 $e_{\mathcal{C}^{**}}=\sum_l^{\sigma\text{-weak}}w_l e_{\mathcal{B}^{**}}w_l^*$ 属于 $\mathcal{L}_{\mathcal{B}^{**}}(A^{**})$。*(5)* $(E^{**})_1(e_{\mathcal{B}^{**}})=Ind_0(E^{**})^{-1}\in\mathcal{Z}(A^{**})$。*(6)* $(E^{**})_1(e_{\mathcal{C}^{**}})=Ind_0(E^{**})^{-1}Ind_0(E^{**}_{\restriction\mathcal{C}})$。*(7)* 如果 $E_{\restriction\mathcal{C}}$ 有有限拟基，例如 $\{\mu_j\}$，那么 $e_{\mathcal{C}^{**}}=\sum_j^{\sigma\text{-weak}}\mu_j e_{\mathcal{B}^{**}}\mu_j^*$ 属于 $\mathcal{L}_{\mathcal{B}^{**}}(A^{**})$。

证明。(1) 注意到 $\mathcal{B}^{**} \subseteq \mathcal{C}^{**} \subseteq \mathcal{A}^{**}$ 具有公共单位元（见定理 2.14）。此外，$(E^{**})_{\restriction C^{**}} = (E_{\restriction C})^{**}$ 且 $(E^{**})_{\restriction C} \circ F^{**} = E^{**}$，即 $\mathcal{C}^{**} \in \mathrm{IMS}(\mathcal{B}^{**}, \mathcal{A}^{**}, E^{**})$。

其余结论可由定理 4.3 直接推出。 □

不出所料，对于含幺 C^*-代数的有限指数包含中相容的中间 C^*-子代数，[5, Defn. 5.1] 中定义的 C^*-内角，与其对应的包络冯·诺伊曼代数之间的 W^*-内角一致。

命题 5.2. 设 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ 是含幺 C^*-代数的包含，且有条件期望 $E\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，其具有有限 *Watatani* 指数，并设 $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathrm{IMS}_W(\mathcal{A}, \mathcal{B}, E)$。则，

$$\alpha_{W^*}(\mathcal{C}^{**}, \mathcal{D}^{**}) = \alpha_{C^*}(\mathcal{C}, \mathcal{D}),$$

其中 α_{C^*} 表示 [5,Defn. 5.1] 中定义的 C^*-内角。

证明。注意，$\mathrm{Ind_{CP}}(E^{**}) = \mathrm{Ind_{CP}}(E) < \infty$，$\mathrm{Ind}_0(E^{**}) = \mathrm{Ind}_W(E^{**}) = \mathrm{Ind}_W(E)$，且 $(E^{**})_1(e_{\mathcal{B}^{**}}) = \mathrm{Ind}_0(E^{**})^{-1}$，其中 $(E^{**})_1 : \mathcal{L}_{\mathcal{B}^{**}}(\mathcal{A}^{**}) \to \mathcal{A}^{**}$ 是正规条件期望 $E^{**} : \mathcal{A}^{**} \to \mathcal{B}^{**}$ 的对偶——参见定理 4.3。

令 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ 和 $G\colon \mathcal{A} \to \mathcal{D}$ 为具有有限 Watatani 指数的相容条件期望。由定理 2.25，$\mathcal{A}$ 中的 E、F 和 G 均有有限准基。此外，$E_{\restriction \mathcal{C}}$ 和 $E_{\restriction \mathcal{D}}$ 也有有限准基，分别记为 $\{\mu_j\}$ 和 $\{\delta_k\}$——参见 [31] 或 [13, 命题 2.7]。因此，由 [13, 命题 3.3], , $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 之间的 C^*-内角为

$$\cos(\alpha_{C^*}(\mathcal{C}, \mathcal{D})) = \frac{\|\mathrm{Ind_W}(E)^{-1}\left(\sum_{j,k} \mu_j E(\mu_j^* \delta_k)\delta_k^* - 1\right)\|}{\|\mathrm{Ind}_W(E)^{-1}\left(\mathrm{Ind}_W(E_{\restriction C}) - 1\right)\|^{1/2}\|\mathrm{Ind}_W(E)^{-1}\left(\mathrm{Ind}_W(E_{\restriction D}) - 1\right)\|^{1/2}}.$$

接下来注意到，$\{\mu_j\}$ 和 $\{\delta_k\}$ 分别也是 $(E^{**})_{\restriction \mathcal{C}^{**}} (= (E_{\restriction \mathcal{C}})^{**})$ 和 $(E^{**})_{\restriction \mathcal{D}^{**}} (= (E_{\restriction \mathcal{D}})^{**})$ 的拟基。因此，由定理 4.8 可得

$$\begin{aligned}
&\cos(\alpha_{W^*}(\mathcal{C}^{**}, \mathcal{D}^{**})) \\
&= \frac{\|\mathrm{Ind}_W(E^{**})^{-1}\left(\sum_{j,k} \mu_j E^{**}(\mu_j^* \delta_k)\delta_k^* - 1\right)\|}{\|\mathrm{Ind}_W(E^{**})^{-1}\left(\mathrm{Ind}_W\left((E^{**})_{\restriction C^{**}}\right) - 1\right)\|^{1/2}\|\mathrm{Ind}_W(E^{**})^{-1}\left(\mathrm{Ind}_W\left((E^{**})_{\restriction D^{**}}\right) - 1\right)\|^{1/2}} \\
&= \frac{\|\mathrm{Ind_W}(E)^{-1}\left(\sum_{j,k} \mu_j E(\mu_j^* \delta_k)\delta_k^* - 1\right)\|}{\|\mathrm{Ind}_W(E)^{-1}\left(\mathrm{Ind}_W(E_{\restriction C}) - 1\right)\|^{1/2}\|\mathrm{Ind}_W(E)^{-1}\left(\mathrm{Ind}_W(E_{\restriction D}) - 1\right)\|^{1/2}},
\end{aligned}$$

这样就完成了。 □

鉴于定理 5.2，下面的定义是很自然的。

定义 5.3. 设 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ 是 C^*-代数的一个包含，且具有条件期望 $E : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，其 *Watatani* 指数有限。则任意两个 $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathrm{IMS}_W(\mathcal{A}, \mathcal{B}, E)$ 之间的 C^*-内角定义为

$$\alpha_{C^*}(\mathcal{C}, \mathcal{D})) = \alpha_{W^*}(\mathcal{C}^{**}, \mathcal{D}^{**}). \tag{5.1}$$

注记 5.4. 在前述定义之前，*Bakshi* 等人（[3]）给出了 σ-含幺单 C^*-代数的不可约包含中中间 C^*-子代数之间内角的定义。鉴于 [16, 定理 2.8]，之前的一个观察，其中 *Izumi* 说明 *Jones* 投影 $e_{\mathcal{B}^{**}}$ 可与 $e_{\mathcal{B}}$等同，在 [3,定义 2.4]的假设下，这两个定义是一致的。

5.1. 内角在最小张量积下的稳定性。 回顾：对任意 C^*-代数 $\mathcal{P}$ 以及任意 C^*-代数的包含 $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$，存在 $\mathcal{B}\otimes^{\min}\mathcal{P}$ 到 $\mathcal{A}\otimes^{\min}\mathcal{P}$ 的自然 C^*-嵌入；并且若 $E:\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是条件期望，则 $E\otimes^{\min}\mathrm{id}_{\mathcal{P}}:\ \mathcal{A}\otimes^{\min}\mathcal{P}\to\mathcal{B}\otimes^{\min}\mathcal{P}$ 也是条件期望。

在 [3], 中已证明，对于任意不可约包含 $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$，若其中的简单含幺 C^*-代数配有有限 Watatani 指数的条件期望 $E:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$，

$$\alpha(\mathcal{C}\otimes^{\min}\mathcal{K}(\ell^2),\mathcal{D}\otimes^{\min}\mathcal{K}(\ell^2))=\alpha(\mathcal{C},\mathcal{D})$$

则该包含 $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$中任意一对中间 C^*-子代数 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 都满足此结论。有趣的是，对于含幺 C^*-代数，还存在一个更一般的稳定性结果，而且证明要简单得多。

命题 5.5。 设 $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$ 是含幺 C^*-代数的一个包含，并配有有限 *Watatani* 指数的条件期望 $E:\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}$，且 $\mathcal{P}$ 是一个固定的含幺 C^*-代数。那么，以下结论成立：

(1) 条件期望 $E\otimes^{\min}id_{\mathcal{P}}:\ \mathcal{A}\otimes^{\min}\mathcal{P}\to\mathcal{B}\otimes^{\min}\mathcal{P}$ 具有有限 *Watatani* 指数，且 $Ind_W(E\otimes^{\min}id_{\mathcal{P}})=Ind_W(E)\otimes 1$。*(2)* 若 $\mathcal{C}\in IMS_W(\mathcal{B},\mathcal{A},E)$，则 $\mathcal{C}\otimes^{\min}\mathcal{P}\in IMS_W(\mathcal{B}\otimes^{\min}\mathcal{P},\mathcal{A}\otimes^{\min}\mathcal{P},E\otimes^{\min}id_{\mathcal{P}})$。*(3)* 若 $\mathcal{C},\mathcal{D}\in IMS_W(\mathcal{B},\mathcal{A},E)$，则

$$\alpha_{C^*}(\mathcal{C}\otimes^{\min}\mathcal{P},\mathcal{D}\otimes^{\min}\mathcal{P})=\alpha_{C^*}(\mathcal{C},\mathcal{D}).$$

证明。 (1) 和 (2) 立即由定义得到。

(3)：令 $(E\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{P}})_1:\ (\mathcal{A}\otimes^{\min}\mathcal{P})_1\to\mathcal{A}\otimes^{\min}\mathcal{P}$ 表示条件期望$E\otimes^{\min}\mathcal{P}$的对偶。那么，$(E\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{P}})_1(e_{\mathcal{B}\otimes^{\min}\mathcal{P}})=\mathrm{Ind}_W(E\otimes^{\min}1)^{-1}=\mathrm{Ind}_W(E)^{-1}\otimes 1$。

设 $\{\mu_j\}$ 和 $\{\delta_k\}$ 分别是 $E_{\restriction\mathcal{C}}$ 和 $E_{\restriction\mathcal{D}}$的有限准基。由于 $(E\otimes^{\min}\mathrm{id}_{\mathcal{P}})_{\restriction\mathcal{C}\otimes^{\min}\mathcal{P}}=(E_{\restriction\mathcal{C}}\otimes^{\min}\mathrm{id}_{\mathcal{P}})$，可知 $\{\mu_j\otimes 1\}$ 是 $(E\otimes^{\min}\mathrm{id}_{\mathcal{P}})_{\restriction\mathcal{C}\otimes^{\min}\mathcal{P}}$的一个（有限）拟基。同样，$\{\delta_k\otimes 1\}$ 是 $(E\otimes^{\min}\mathrm{id}_{\mathcal{P}})_{\restriction\mathcal{D}\otimes^{\min}\mathcal{P}}$的一个（有限）拟基。因此，由 [13,命题 2.7] 可得

$$e_{\mathcal{C}\otimes^{\min}\mathcal{P}}=\sum_j(\mu_j\otimes 1)e_{\mathcal{B}\otimes^{\min}\mathcal{P}}(\mu_j^*\otimes 1)\text{ and }e_{\mathcal{D}\otimes^{\min}\mathcal{P}}=\sum_k(\delta_k\otimes 1)e_{\mathcal{B}\otimes^{\min}\mathcal{P}}(\delta_k^*\otimes 1);\text{ so,}$$

$$\begin{aligned}
&(E\otimes^{\min}\mathrm{id}_{\mathcal{P}})_1(e_{\mathcal{C}\otimes^{\min}\mathcal{P}}e_{\mathcal{D}\otimes^{\min}\mathcal{P}})\\
&=\ (E\otimes^{\min}\mathrm{id}_{\mathcal{P}})_1\left(\sum_{j,k}(\mu_j\otimes 1)e_{\mathcal{B}\otimes^{\min}\mathcal{P}}(\mu_j^*\delta_k\otimes 1)e_{\mathcal{B}\otimes^{\min}\mathcal{P}}(\delta_k^*\otimes 1)\right)\\
&=\ (E\otimes^{\min}\mathrm{id}_{\mathcal{P}})_1\left(\sum_{j,k}(\mu_j\otimes 1)(E\otimes^{\min}\mathrm{id}_{\mathcal{P}})(\mu_j^*\delta_k\otimes 1)e_{\mathcal{B}\otimes^{\min}\mathcal{P}}(\delta_k^*\otimes 1)\right)\\
&=\ (E\otimes^{\min}\mathrm{id}_{\mathcal{P}})_1\left(\sum_{j,k}(\mu_j\otimes 1)\left(E(\mu_j^*\delta_k)\otimes 1\right)e_{\mathcal{B}\otimes^{\min}\mathcal{P}}(\delta_k^*\otimes 1)\right)\\
&=\ \mathrm{Ind}_W(E\otimes^{\min}\mathrm{id}_{\mathcal{P}})^{-1}\left(\sum_{j,k}(\mu_j\otimes 1)\left(E(\mu_j^*\delta_k)\otimes 1\right)(\delta_k^*\otimes 1)\right)\\
&=\ \left(\mathrm{Ind}_W(E)^{-1}\otimes 1\right)\left(\sum_{j,k}\mu_jE(\mu_j^*\delta_k)\delta_k^*\otimes 1\right),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\|e_{\mathcal{C}\otimes^{\min}\mathcal{P}} - e_{\mathcal{B}\otimes^{\min}\mathcal{P}}\|_{(\mathcal{A}\otimes^{\min}\mathcal{P})_1}\\
&= \big\|(E\otimes^{\min}\mathrm{id}_{\mathcal{P}})_1\big((e_{\mathcal{C}\otimes^{\min}\mathcal{P}} - e_{\mathcal{B}\otimes^{\min}\mathcal{P}})^*(e_{\mathcal{C}\otimes^{\min}\mathcal{P}} - e_{\mathcal{B}\otimes^{\min}\mathcal{P}})\big)\big\|^{1/2}\\
&= \big\|(E\otimes^{\min}\mathrm{id}_{\mathcal{P}})_1(e_{\mathcal{C}\otimes^{\min}\mathcal{P}} - e_{\mathcal{B}\otimes^{\min}\mathcal{P}})\big\|^{1/2}\\
&= \Big\|\big(E\otimes^{\min}\mathrm{id}_{\mathcal{P}}\big)_1\Big(\sum_j(\mu_j\otimes 1)e_{\mathcal{B}\otimes^{\min}\mathcal{P}}(\mu_j^*\otimes 1) - e_{\mathcal{B}\otimes^{\min}\mathcal{P}}\Big)\Big\|^{1/2}\\
&= \Big\|\sum_j(\mu_j\otimes 1)(E\otimes^{\min}\mathrm{id}_{\mathcal{P}})_1(e_{\mathcal{B}\otimes^{\min}\mathcal{P}})(\mu_j^*\otimes 1) - (E\otimes^{\min}\mathrm{id}_{\mathcal{P}})_1(e_{\mathcal{B}\otimes^{\min}\mathcal{P}})\Big\|^{1/2}\\
&= \Big\|\sum_j(\mu_j\otimes 1)(\mu_j^*\otimes 1)\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{W}}(E)^{-1}\otimes 1\big) - \mathrm{Ind}_{\mathrm{W}}(E)^{-1}\otimes 1\Big\|^{1/2}\\
&= \Big\|\Big(\sum_j\mu_j\mu_j^*\otimes 1 - 1\otimes 1\Big)\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{W}}(E)^{-1}\otimes 1\big)\|^{1/2}\\
&= \|\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{W}}(E)^{-1}(\mathrm{Ind}_{\mathrm{W}}(\mathrm{E}_{\restriction_{\mathcal{C}}}) - 1)\right)\otimes 1\|^{1/2};
\end{aligned}
$$

并且，同样地，

$$\|e_{\mathcal{D}\otimes^{\min}\mathcal{P}} - e_{\mathcal{B}\otimes^{\min}\mathcal{P}}\|_{(\mathcal{A}\otimes^{\min}\mathcal{P})_1} = \|\mathrm{Ind}_{\mathrm{W}}(E)^{-1}\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{W}}(\mathrm{E}_{\restriction_{\mathcal{D}}}) - 1\right)\otimes 1\|^{1/2}.$$

因此，

$$
\begin{aligned}
&\cos(\alpha_{C^*}(\mathcal{C}\otimes^{\min}\mathcal{P}, \mathcal{D}\otimes^{\min}\mathcal{P}))\\
&= \frac{\|\langle e_{\mathcal{C}\otimes^{\min}\mathcal{P}} - e_{\mathcal{B}\otimes^{\min}\mathcal{P}}, e_{\mathcal{D}\otimes^{\min}\mathcal{P}} - e_{\mathcal{B}\otimes^{\min}\mathcal{P}}\rangle_{\mathcal{A}\otimes^{\min}\mathcal{P}}\|}{\|e_{\mathcal{C}\otimes^{\min}\mathcal{P}} - e_{\mathcal{B}\otimes^{\min}\mathcal{P}}\|_{\mathcal{A}_1\otimes^{\min}\mathcal{P}}\ \|e_{\mathcal{D}\otimes^{\min}\mathcal{P}} - e_{\mathcal{B}\otimes P}\|_{\mathcal{A}_1\otimes^{\min}\mathcal{P}}}\\
&= \frac{\|(E\otimes^{\min}\mathrm{id}_{\mathcal{P}})_1(e_{\mathcal{C}\otimes^{\min}\mathcal{P}}e_{\mathcal{D}\otimes^{\min}\mathcal{P}}) - (E\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{P}})_1(e_{\mathcal{B}\otimes^{\min}\mathcal{P}})\|}{\|e_{\mathcal{C}\otimes^{\min}\mathcal{P}} - e_{\mathcal{B}\otimes^{\min}\mathcal{P}}\|_{\mathcal{A}_1\otimes^{\min}\mathcal{P}}\ \|e_{\mathcal{D}\otimes^{\min}\mathcal{P}} - e_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{P}}\|_{\mathcal{A}_1\otimes^{\min}\mathcal{P}}}\\
&= \frac{\|(\mathrm{Ind}_{\mathrm{W}}(E)^{-1}\sum_{j,k}\mu_j E(\mu_j^*\delta_k)\delta_k^*)\otimes 1 - \mathrm{Ind}_{\mathrm{W}}(E)^{-1}\otimes 1\|}{\|\mathrm{Ind}_{\mathrm{W}}(E)^{-1}\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{W}}(\mathrm{E}_{\restriction_{\mathcal{C}}}) - 1\right)\otimes 1\|^{1/2}\|\mathrm{Ind}_{\mathrm{W}}(E)^{-1}\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{W}}(\mathrm{E}_{\restriction_{\mathcal{D}}}) - 1\right)\otimes 1\|^{1/2}\|}\\
&= \frac{\|(\mathrm{Ind}_W(E)^{-1})(\sum_{j,k}\mu_j E(\mu_j^*\delta_k)\delta_k^* - 1)\|}{\|(\mathrm{Ind}_W(E)^{-1})(\mathrm{Ind}_W(E_{\restriction_{\mathcal{C}}}) - 1)\|^{1/2}\|(\mathrm{Ind}_W(E)^{-1})(\mathrm{Ind}_W(E_{\restriction_{\mathcal{D}}}) - 1)\|^{1/2}}\\
&= \cos(\alpha_{C^*}(\mathcal{C},\mathcal{D})),
\end{aligned}
$$

其中最后一个等式由 [13, 命题 3.3]得出。 □

问题： 对于一般的非含幺 C^*-代数，内角在最小张量积下是否也具有类似的稳定性，这将是一个值得探讨的问题。

致谢： 第一作者谨向 Keshab Chandra Bakshi 和 Biplab P 表示感谢，感谢他们围绕 [16] 进行的富有见地的讨论。

References

[1] M. Baillet, Y. Denizeau 和 J-F. Havet，条件期望的指数， *Compositio Math.* **66** (1988)，第 2 期，199–236。[2] K. C. Bakshi, S. Das, Z. Lieu 和 Y. Ren，中间子因子之间的角及其刚性，*Trans. Amer. Math. Soc.* **371** (2019)，第 8 期，5973-5991。[3] K. C. Bakshi, S. Guin 和 D. Jana，关于包含的 C^*代数中间子代数的几点评论， *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **28** (2025)，第 4 期，2550006。[4] K. C. Bakshi 和 V. P. Gupta， *Internat. J. Math.* **30** (2019)，第 12 期，1950061。[5] K. C. Bakshi 和 V. P. Gupta，中间子代数格， *J. London Math. Soc.* **104** (2021)，第 5 期，2082-2127。

[6] K. C. Bakshi 和 V. P. Gupta，单含幺 C^*代数的正则包含， *Münster J. of Math.* **18** (2025)，181-200。[7] J. Bannon, A. Marrakchi 和 N. Ozawa，满因子与共顺从包含， *Comm. Math. Phys.* **378** (2020)，1107-1121。[8] B. Blackadar， *Operator algebras: Theory of C^*-algebras and von Neumann algebras*，Springer-Verlag Berlin Heidelberg，2006。[9] D. P. Blecher 和 C. Le Merdy，*Operator algebras and their modules: An operator space approach*，伦敦数学会专著丛书，第 30 卷。[10] J. Cameron 和 R. R. Smith，冯·诺依曼代数交叉积中的双模， *Adv. Math.* **274** (2015)，539-561。[11] J. Cameron 和 R. R. Smith，离散群对简单 C^*代数作用所得约化交叉积的伽罗瓦对应， *Canad. J. Math.* **71** (2019)，第 5 期，1103-1125。[12] M. Frank 和 E. Kirchberg，有限指数条件期望， *J. Operator Theory* **40** (1998)，87–111。[13] V. P. Gupta 和 D. Sharma，关于中间子代数之间内角的可能取值，*J. Aust. Math. Soc.* **117** (2024)，第 1 期，44-66。[14] U. Haagerup，冯 · 诺依曼代数中的算子值权重， *J. Funct. Anal.* **32** (1979)，175 - 206。[15] S. Ino 和 Y. Watatani，单

C^* C^* *Bull.* 子代

London Math. Soc. **46** 2014 469 480
数的扰动，( )，- 。[16] M. Izumi，单 C^*代数的包含， *J. Reine Angew Math.* **547** (2002)，97-138。[17] P. Jolissant，条件期望的指数与有限冯·诺依曼代数， *Math. Scand.* **68** (1991)，221 - 246。[18] V. F. R. Jones，子因子的指数， *Invent. Math.* **72** (1983)，1-25。[19] T. Kajiwara, C. Pinzari 和 Y. Watatani，Hilbert C^*-双模的琼斯指数理论及其与共轭理论的等价性， *J. Funct. Anal.* **215** (2004)，1–49。[20] M. Khoshkam，Hilbert

C^* *J. Aust. Math. Soc.* -模与

(Series A) **61** 1996 106 118
交叉积上的条件期望，( )，- 。[21] H. Kosaki，将琼斯指数理论推广至任意因子， *J. Funct. Anal.* **66** (1986) 123-140。[22] E. C. Lance， *Hilbert C^*-modules: a toolkit for operator algebraists*，LMS LNS 210，剑桥大学出版社，1995。[23] R. Longo，共形子网与中间子因子， *Commun. Math. Phys.* **237** (2003)，7-30。[24] R. Mercer，冯·诺依曼代数离散交叉积中的傅里叶级数收敛性，

Proc. ( )，-

Amer. Math. Soc. **94** 1985 254 258
。[25] W. L. Paschke， B^*代数上的内积模， *Trans. Amer. Math. Soc.* **182** (1973)，443–468。[26] G. K. Pedersen， *C^*-algebras and their automorphism groups*，Academic Press，1979。[27] S. Popa，子因子及其自同态的分类，

CBMS Regional Conference series in

Mathematics **86** 1995 ，

Americal Mathematical Society，。[28] M. A. Rieffel， C^*代数与 W^*代数的Morita等价，*J. Pure Appl. Algebra* **5** (1974)，51-96。[29] S.. Str˘atil˘a， *Modular theory in operator algebras*，Editura Academiei Bucure,sti and Abacus Press Tun- bridge Wells，1981。[30] M. Takesaki，*Theory of Operator Algebras I*，Springer-Verlag，1979。[31] Y. Watatani， C^*子代数的指数，*Mem. Amer. Math. Soc.* **83**，1990。

School of Physical Sciences, Jawaharlal Nehru University, New Delhi, INDIA
Email address: vedgupta@jnu.ac.in*Email address*: sharmadeepikaq@gmail.com