arXiv:2602.03705v1 [math-ph] 3 Feb 2026

格点有质量 QED_2的非微扰重整化：紫外问题

Simone Fabbri[1], Vieri Mastropietro[2], 和 Bruno Renzi[1]

[1]SISSA，Via Bonomea 265，34136 的里雅斯特，意大利[2]罗马萨皮恩扎大学，P.le Aldo Moro 2，00185 罗马，意大利

2026年2月4日

摘要

我们研究一种保留沃德恒等式（WI）并含有 Wilson项的有质量 QED_2, 格点正则化。该理论描述质量为 m、电荷为 e 的费米子与质量为 M的矢量场相互作用；在 $m \ll M \ll a^{-1}$ （a 为格距）的参数范围内，这种正则化适合模拟现实的四维有质量规范理论，例如电弱扇区。格点和质量 m 的存在破坏了任何可解性。本文证明，积分掉紫外自由度后得到的有效作用量可表示为级数展开；当耦合$|e| \le e_0$, 取满足 e_0 与 a 及 m无关的值时，该展开收敛，且裸参数与截断无关。结合此前论文对红外部分的分析，我们得以完整构建该模型，并证明了若干性质；预计这些性质在四维情形下也成立。分析通过积分掉玻色子并化为费米子理论来完成；然而，与动量正则化的情形（它会破坏沃德恒等式等重要特征）不同，所得的有效费米子作用量形式并不简单，因此需要发展新方法来获得所需的界。

目录

1 引言与主要结果 2

1.1 有质量 QED 的先前结果$_2$ .4 1.2 格点有质量量子电动力学$_2$ .5 1.3 玻色子场积分 .7 1.4 Ward 恒等式与 ξ- 无关性 .9 1.5 紫外积分 .11 1.6 证明概要 .13 1.7 红外问题与格点有质量量子电动力学的构造$_2$. 14

2 费子多尺度 **16**

2.1 多尺度分解 .16 2.2 树展开 .18 2.3 树展开的界 .20

3 相关项与边缘项的界 22

3.1 电子自能 .23 3.2 最低次数顶点函数.31

3.3 最低阶极化泡 .333.4 有效四次相互作用.383.5 高次边缘核 .39

4 完整生成泛函 42
4.1 手征源和费米子源 .434.2 矢量源.47

5 定理 1.4 的证明。 505.1 核的界 .505.2 关联函数 .51**A 局域相位不变性的推论 55B 有效势的恒等式 57**B.1 预备恒等式 .58B.2 核的恒等式 .62**C 非相互作用气泡 64**C.1 非相互作用气泡的有限性 .64C.2 命题 5.1 的证明 .69**D 树展开 71E 对称性 74F 连续极限概述**

1 引言与主要结果

有质量量子电动力学 (QED)描述狄拉克费米子与 a$U(1)$ 矢量玻色子场的相互作用。其在维度 $d \geq 2$ 下的形式欧几里得作用量为:

$$\int_{\mathbb{R}^d} d^d x \left(\frac{1}{4} \sum_{\mu,\nu=0}^{d-1} F_{\mu,\nu} F_{\mu,\nu} + \frac{M^2}{2} \sum_{\mu=0}^{d-1} A_\mu^2 + \sum_{\mu=0}^{d-1} \bar{\psi} \gamma_\mu \Big(\partial_\mu + i\mathsf{e} A_\mu \Big) \psi + m \bar{\psi} \psi \right), \tag{1.1}$$

¯其中: A_μ 是质量为 M 的玻色子（实）场，且 $F_{\mu,\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$; ψ, ψ 是质量为 m、电荷为 e 的费米子（反对易）场; $\{\gamma_\mu\}_{\mu=0}^{d-1}$ 是欧几里得 $d-$ 维克利福德代数的一个表示。该模型预期在 $d = 4$ 中只能作为一种有效理论得到良好定义，并具有有限的紫外截断，该截断代表理论有效的最高能量标度；该理论确实可重整化，但并非渐近自由。该截断必须满足以下物理要求:

a) 必须验证沃德恒等式（WI），以确保与 A_μ耦合的流守恒有效; b) 玻色子传播子中的纵向非衰减项（见方程式后的注释）不得对物理可观测量产生贡献; c) 对于远大于截断尺度倒数的长度尺度，关联函数在形式上必须还原为连续统中的关联函数，至多存在次领先修正;(1.4))

d) 截断必须至少在逆耦合上呈指数级高；对于较小的 **e**，这可确保在实验的能量标度下无法探测到截断的影响。

一种自然的截断选择是格点截断：用步长为 a 、有限长度为 L的离散格点取代连续欧氏时空，并用离散导数∂_μ 取代方程式（1.1）中出现的导数[1]；但这会违反条件 **c)**，因为格点狄拉克算子会产生多余的零模，这一问题称为费米子加倍。通过在作用量中添加 Wilson项，可以满足条件 **c)**。为满足条件**a)**，玻色子与费米子之间的相互作用必须以非线性方式定义，即通过 A_μ的指数函数来定义。作为性质 **a)**的结果，性质 **b)** 也随之成立，这对于确保理论的可重整性以及性质 **d)**的有效性至关重要。请注意，引入 Wilson项会破坏手征对称性；当电子质量 m 为零时，这种手征对称性在形式上本应存在，而这一事实会导致手征反常。

采用 Wilson项并满足 Ward 恒等式的 QED 正则化称为格点有质量量子电动力学。还可以采用其他格点定义，但只要上述要求成立，预计它们都是等价的。

有质量 QED 并未在自然界中以基本粒子理论的形式实现。然而，它与标准模型密切相关。标准模型描述了除引力以外的所有基本粒子和力，尤其与中性弱相互作用扇区有关；在该扇区中，力由 $U(1)$ 有质量玻色子，即 Z^0 粒子传递。事实上，这两种理论都被认为只能作为有效理论存在；此外，Adler-Bardeen性质 [1]以及由于传播子的纵向部分的贡献相互抵消而导致的发散度降低，都被认为成立。因此，格点有质量量子电动力学是一个理想的研究环境，可在更简单的模型中检验若干基于微扰论证、即基于不收敛级数而被认为成立的特征。由于玻色子质量与电子质量之比为 $\sim 10^6$，且加速器中的能量约为玻色子质量的 100 倍，格点有质量量子电动力学的关注范围是

$$m \ll M \ll a^{-1}. \tag{1.2}$$

此外，电荷的数值很小；在无量纲单位下，其物理值为 $\mathrm{e}^2 \sim \frac{1}{137}$ （将波函数正则化固定为 1）。

应当指出，标准模型的其他一些特殊性在有质量 QED 中却并不存在，例如，在标准模型中，相互作用具有手征性质。这一事实带来了一些困难，尤其是：即使在微扰层面，只有当手征反常相互抵消，并且粒子电荷满足某些条件时，沃德恒等式才能得到验证，而这需要Adler-Bardeen性质。

尽管四维格点有质量量子电动力学比标准模型简单得多，但在方程式（1.2）所描述的区域内，仍缺乏严格结果，相关分析要么局限于区域 $m \sim 1/a$ 以及任意 $M \geq 0$ [2]，要么采用满足 $M \sim 1/a$ 以及任意$m \geq 0$ [3]的动量正则化。另一方面，二维有质量 QED 更易于处理，同时，四维中成立的许多特征的类似形式在二维中也同样成立。

本文构造了格点有质量量子电动力学$_2$ 在方程式 (1.2) 所述区域内的理论，并证明了若干预期在四维或标准模型中成立的性质。特别是，我们着重研究该理论的紫外性质，所得结果与 [4, 5, 6, 7], 中的红外分析相结合后，将构成该模型，并在非微扰层次验证若干预期在更现实的四维模型中成立的性质。

[1]等价地， k_μ 其中 $\frac{1}{a}\sin(ak_\mu)$ 位于动量空间。

1.1 关于有质量 QED_2的先前结果

有质量 QED_2 过去已得到广泛研究，参见例如 [8]，其中有一篇附有更多参考文献的综述；下面我们简要概述一些主要结果。

微扰结果。在连续统中，在经典层面，QED_2 的形式作用量在变量替换 $\psi_x \to e^{i\alpha}\psi_x$ 下保持不变；根据诺特定理，这意味着流 $\sum_\mu \partial_\mu \jmath_\mu = 0$守恒，其中 $\jmath_\mu = \mathrm{e}\psi_x\gamma_\mu\psi_x$；同样地，若电子质量为零，即 $m = 0$，则在 $\psi_x \to e^{i\alpha\gamma_5}\psi_x$ 下具有不变性，这意味着轴流 $\sum_\mu \partial_\mu \jmath^5_\mu = 0$ 守恒，其中 $\jmath^5_{\mu,\ x} = \mathrm{e}\bar{\psi}_x\gamma_\mu\gamma_5\psi_x$。

在量子层面，利用费曼图展开和维数正规化，可以得到以下沃德恒等式（WI）；应将其理解为耦合的形式（不收敛）幂级数之间逐阶成立的恒等式：

$$\sum_{\mu=0,1} p_\mu \langle \hat{\jmath}_{\mu,p}; \hat{\jmath}_{\nu,-p}\rangle = 0, \qquad \sum_{\nu=0,1} p_\nu \langle \hat{\jmath}_{\mu,p}; \hat{\jmath}^5_{\nu,-p}\rangle = \frac{i\mathrm{e}^2}{\pi} \sum_{\nu=0,1} \varepsilon_{\mu,\nu} p_\nu, \tag{1.3}$$

其中 $\varepsilon_{\mu,\nu}$ 为反对称张量（即 $\varepsilon_{0,1} = -\varepsilon_{1,0} = 1, \varepsilon_{0,0} = \varepsilon_{1,1} = 0$）。第一个方程对应于流守恒；第二个方程在 $m = 0$情形下成立，表明轴流在量子层面并不守恒。右端的系数 $\frac{1}{\pi}$ 称为手征反常。该系数通常是耦合的级数，但上述结论表明只有最低阶项有贡献；这就是二维中的阿德勒–巴丁非重整化定理 [9]。玻色子传播子的形式为

$$\frac{1}{|k|^2 + M^2}\left(\delta_{\mu,\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{|k|^2 + M^2}\right). \tag{1.4}$$

项 $k_\mu k_\nu/(|k|^2 + M^2)$称为纵向项，在 $|k| \gg M$时不会衰减，朴素的发散度为 $D = 2 - n_\psi/2 - n^A$（n_ψ 和 n_A 分别是 ψ 场和 A场的数目），对应于一个可重整化理论；然而，与流守恒相对应的 Ward 恒等式意味着纵向项的贡献为零，因此实际发散度为 $D = 2 - n - n_\psi/2$；若 n 为微扰阶数，则对应于一个超可重整化理论。类似的发散度降低，也是四维规范理论微扰可重整化性的基础；事实上，在四维中，发散度从 $D = 4+n-3n_\psi/2-2n_A$ 降至 $D = 4-3n_\psi/2-n^A$，即理论行为从不可重整化转变为可重整化。

精确解。连续统中有质量 QED_2 在 $m = 0$ 情形下存在精确解，这些解常被用作微扰分析的基准。特别是，[10, 11, 12]中给出了一种解；$M = 0$ 情形，即所谓的 Schwinger模型，则在[13]中得到了解析。这些解或者基于薛温格-戴森方程与反常维德恒等式的结合，通过一种自洽论证得到；这种论证此前曾在 [14] 中用于 Thirring模型；或者基于玻色化。还有一些精确解是通过泛函积分方法得到的 [15, 16]；相关的有趣应用另见 [17]。

这些解依赖于对发散表达式进行形式操作，结果似乎取决于正则化引入的参数。主要性质如下：

1) 波函数重整化 $Z = 0^\eta$ 为零，且 $\eta > 0$，参见例如 [11, 方程式 (4.35)]；

2) 手征反常的值为

$$\sum_{\nu=0,1} p_\nu \langle \hat{\jmath}_{\mu,p}; \hat{\jmath}^5_{\nu,-p}\rangle = \zeta\frac{i\mathrm{e}^2}{\pi} \sum_{\nu=0,1} \varepsilon_{\mu,\nu} p_\nu, \tag{1.5}$$

其中 ζ 是一个取决于正则化的参数；研究发现 $\zeta = 1/2$ 在 [10]$\zeta = 1$ 中 [11] 以及任何 ζ 在 [12]中。研究发现流不守恒。此外，玻色子的重整化质量为 $M^2 + \zeta \mathsf{e}_\pi^2$。

请注意，精确解得到的结果与微扰理论得到的结果略有不同，这是由于采用了不同的正则化；具体而言，流守恒遭到破坏，发散度也没有降低，这一点可由奇异的 Z 看出；此外，反常的值也不同。

当 $m \neq 0$ 时，或采用格点正则化时，尚无已知的解。格点正则化的问题尤其重要，因为连续统中会出现反常，但在四维的非微扰构造中，需要格点截断。近年来，人们投入了大量精力研究格点的作用，主要是在 Schwinger模型的背景下，参见例如 [18, 19, 20, 21, 22, 23]。

采用动量正则化的重整化群。在连续统中采用动量正则化，开展了非微扰重整化群（RG）分析。在 [24, 7] 中，研究了连续统中的一个有质量 QED_2 模型，该模型从方程式（1.1）中的形式作用量出发构造，忽略传播子的纵向项（因此幂次计数属于超可重整化理论），并采用动量费米子截断 $\chi_N(k)$，由一个在 $|k| \geq 2^N$ 处消失的光滑函数给出（玻色子可以采用或不采用截断 [25]）；该模型也被称为参考模型，并被用于推导若干系统的普适性关系，参见例如 [26, 27]。分析通过积分掉玻色子场，得到费米子之间的四次相互作用；紫外部分的分析利用了玻色子传播子的非局域性，另见 [28], ；而红外尺度的积分则通过在重整化群的每一步实施 Ward 恒等式带来的抵消来完成，同时控制由截断引起的修正，参见 [5], ，并证明其收敛到一条固定点线。在这个连续统有质量 QED_2 模型中，可以取紫外极限 $N \to \infty$，同时也可以取无限体积极限和零费米子质量极限，WI 的形式为：

$$\sum_{\mu=0,1} p_\mu \langle \hat{j}_{\mu,p}; \hat{j}_{\nu,-p} \rangle = \mathsf{e} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left(\not{k} \frac{1-\chi_N(k)}{\chi_N(k)} - (\not{k}+\not{p}) \frac{1-\chi_N(k+p)}{\chi_N(k+p)} \right) \langle \hat{\bar{\psi}}_{k+p} \hat{\psi}_k; \hat{j}_{\nu,-p} \rangle, \quad (1.6)$$

当 $\not{k} \equiv \sum_{\mu=0,\ 1} \gamma_\mu k_\mu$。方程式 (1.6) 的右端并不小，即使在 N较大时也是如此；并且可以证明，见 [24, 7], ，流和轴流均不守恒。极限的形式似乎对所采用的正则化方式高度敏感。

1.2 格点有质量量子电动力学$_2$

本文研究一种满足$_2$ 方程式（**1.1**）下方几行所列全部物理**约束的**大质量 QED的正则化)。实际上，我们考虑方程式（1.1）某个广义版本的格点正则化，该版本通过添加额外项 $\frac{\xi}{2} \int d^2x \big(\sum_{\mu=0,\ 1} \partial_\mu A_{\mu,\ x} \big)^2$（称为规范固定项）得到，其中 $\xi \in [0,1]$ 称为规范固定参数；令 $\xi = 0$即可恢复原理论。[2] 该模型定义在格点 $\Lambda := a\mathbb{Z}^2 \cap \big(-\frac{L}{2},\ \frac{L}{2}\big]^2$格距为 $a \equiv 2^{-N} \in 2^{\mathbb{Z}}$。我们施加周期边界条件，因此 $\Lambda = (a\mathbb{Z}^2)/(L\mathbb{Z}^2)$，并配备环面度量 $|x-y|_L := \min_{n\in\mathbb{Z}^2} \sqrt{\sum_{\mu=0,\ 1} (x_\mu - y_\mu + Ln_\mu)^2}$。生成

[2] 只要考虑规范不变观测量，加入规范固定项就不会改变模型，见引理 1.3 及其后的评论。

关联函数的泛函为

$$\mathcal{W}_\xi(\varphi;J;B) := -\log \frac{\int \mathcal{D}\psi \int \mathbb{P}_\xi(\mathcal{D}A) e^{-I(A+J,\psi)-(\varphi,\psi)-i(B,j^5(\psi))}}{\int \mathcal{D}\psi e^{-I(0,\psi)}}, \tag{1.7}$$

其中：

1. ψ 是费米子场，可视为由以下元素生成的格拉斯曼代数：$\{\psi^\pm_{x,s}\}_{x\in\Lambda,\ s\in\{1,2\}}$其中，按照狄拉克记号，令 $\psi^\pm_x$为行/列向量（$\psi^\pm_{x,1}$，$\psi^\pm_{x,2}$），我们规定 $\psi^-_x \equiv \psi_x$ 和 $\psi^+_x \equiv \bar\psi_x$。符号 $\mathcal{D}\psi$ 表示在该格拉斯曼代数上的格拉斯曼-贝雷津积分（即投影到最高次单项式上的投影算子，参见 [29, 第 4 节。1]）。

2. A 是矢量玻色子场，将其视为 $\{A_{\mu,x}\}_{x\in\Lambda,\ \mu\in\{0,1\}} \in \mathbb{R}^{\Lambda\times\{0,1\}}$，而$\mathbb{P}_\xi(\mathcal{D}A)$ 是传播子为以下形式的实高斯积分

$$g^{A,\xi}_{\mu,\nu}(x-y) \equiv \mathbb{E}_\xi\big(A_{\mu,x}A_{\nu,y}\big) = \int_{\Lambda^*} dk \frac{e^{-ik\cdot(x-y)}}{|\sigma(k)|^2+M^2}\left(\delta_{\mu,\nu} + (1-\xi)\frac{\sigma_\mu(k)\sigma^*_\nu(k)}{\xi|\sigma(k)|^2+M^2}\right), \tag{1.8}$$

其中：$\Lambda^* := \frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}^2 \cap \big(-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\big]^2$ 以及

$$\int_{\Lambda^*} dk\, \cdot \equiv \frac{1}{L^2}\sum_{k\in\Lambda^*} \cdot; \tag{1.9}$$

$\sigma_\mu(k) \equiv i2^N\left(e^{-i2^{-N}k_\mu}-1\right)$　　$\sigma^*_\mu(k)$　　$|\sigma(k)|^2 \equiv \sigma()\,\sigma()$，而 $\sigma()$ 表示其复共轭，且 $\sigma(),\ ();$ 为裸玻色子质量；为规范固定参数。$\sum_{\mu=0,1}|\sigma_\mu(k)|^2\ M>0$　　$\xi\in[0,1]$

3. $J \equiv \{J_{\mu,x}\}_{x\in\Lambda,\ \mu\in\{0,1\}} \in \mathbb{R}^{\Lambda\times\{0,1\}}$ 是一个实外场，并且

$$\begin{aligned} I(A,\psi) = {}& \frac{1}{2}2^N \sum_{\mu=0,1}\int_\Lambda dx\, \psi^+_x(\gamma_\mu - r)e^{i2^{-N}\mathsf{e}A_{\mu,x}}\psi^-_{x+2^{-N}\hat e_\mu} + \\ & - \frac{1}{2}2^N \sum_{\mu=0,1}\int_\Lambda dx\, \psi^+_{x+2^{-N}\hat e_\mu}(\gamma_\mu + r)e^{-i2^{-N}\mathsf{e}A_{\mu,x}}\psi^-_x + (m_N + 2r2^N)\int_\Lambda dx\psi^+_x\psi^-_x, \end{aligned} \tag{1.10}$$

其中：

$$\int_\Lambda dx\, \cdot \equiv a^2\sum_{x\in\Lambda} \cdot; \tag{1.11}$$

$\hat e_0 = (1,0)$ 和 $\hat e_1 = (0,1)$；$\mathsf{e}\in\mathbb{R}$ 是电荷；$r>0$ 是威尔逊质量，将一次性确定（以下我们假设 $r=1$）；$m_N\in\mathbb{R}$ 是裸电子质量；γ_0，γ_1 是欧几里得二维克利福德代数的一个表示，即它们满足$\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu,\nu}$；我们选取它们为

$$\gamma_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_1 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

4. $\varphi \equiv \{\varphi^\pm_{x,s}\}_{x\in\Lambda,\ s\in\{1,2\}}$ 是一个外部格拉斯曼场，且：$(\varphi,\ \psi) \equiv \int_\Lambda dx\big(\varphi^+_x\psi^-_x + \psi^+_x\varphi^-_x\big)$。

5. $B \equiv \{B_{\mu,x}\}_{x\in\Lambda,\mu\in\{0,1\}}$ 是与手征流耦合的外部实场，即 $(B, j^5(\psi)) \equiv \int_\Lambda dx B_{\mu,x}j^5_{\mu,x}(\psi)$，其中 $j^5_{\mu,x}(\psi) := \mathsf{e}Z^5_N\psi^+_x\gamma_\mu\gamma_5\psi^-_x$，且 $\gamma_5 := i\gamma_0\gamma_1$，而 Z^5_N 是关于 e 的适当连续函数，使得 $Z^5_N\big|_{\mathsf{e}=0} = 1$，例如 $|Z^5_N - 1| \le \frac{1}{2}$。

注 1.1。 玻色子测度 $\mathbb{P}_\xi$ 的高斯权重是显式的，其表达式为以下内容的指数：

$$\frac{1}{4}\sum_{\mu,\nu=0,1}\int_\Lambda dx\Big(\nabla_\mu A_{\nu,x}-\nabla_\nu A_{\mu,x}\Big)^2+\frac{M^2}{2}\sum_{\mu=0,1}\int_\Lambda dx A_{\mu,x}^2+\frac{\xi}{2}\int_\Lambda dx\Big(\sum_{\mu=0,1}\nabla_\mu^T A_{\mu,x}\Big)^2 \tag{1.12}$$

带负号，其中 $\nabla_\mu A_{\nu,\ x}\equiv a^{-1}\big(A_{\nu,\ x+a\hat{e}_\mu}-A_{\nu,\ x}\big)$ 以及 $\nabla_\mu^T A_{\nu,\ x}\equiv a^{-1}\big(A_{\nu,\ x-a\hat{e}_\mu}-A_{\nu,\ x}\big)$。方程式（1.12）不过是方程式（1.1）中自由玻色子作用量的格点对应物，加上规范固定项。

物理性质可以通过关联函数获得，例如：

$$\hat{\Sigma}^\xi_{\mu,\nu}(p):=\int_\Lambda dx\ e^{-ip\cdot x}\frac{\delta^2\mathcal{W}_\xi}{\delta J_{\mu,x}\delta J_{\nu,0}}(0;0;0), \tag{1.13}$$

$$\hat{\Sigma}^\xi_{5;\mu,\nu}(p):=\int_\Lambda dx\ e^{-ip\cdot x}\frac{\delta^2\mathcal{W}_\xi}{\delta J_{\mu,x}\delta B_{\nu,0}}(0;0;0), \tag{1.14}$$

$$\hat{\Gamma}^\xi_\mu(p;k)_{s,s'}:=\int_{\Lambda^2} dxdy\ e^{i(-p\cdot x+k\cdot y)}\frac{\delta^3\mathcal{W}_\xi}{\delta J_{\mu,x}\delta\varphi^-_{0,s'}\delta\varphi^+_{y,s}}(0;0;0), \tag{1.15}$$

$$\hat{S}^\xi(k)_{s,s'}:=\int_\Lambda dx\ e^{ik\cdot x}\frac{\delta^2\mathcal{W}_\xi}{\delta\varphi^+_{x,s}\delta\varphi^-_{0,s'}}(0;0;0), \tag{1.16}$$

其中 $\frac{\delta}{\delta J_{\mu,\ x}}:=2^{2N}\frac{\partial}{\partial J_{\mu,\ x}}$ 其他泛函导数也类似，其中默认对 φ 求导是指反对易导数。

注 1.2。 引入与 r 成正比的项，即 Wilson项，是为了避免费米子倍增问题。质量 m_N 和 Z_N^5 是裸参数，需要对其进行固定，以确保满足重整化条件。Wilson项及其导致的手征对称性破缺会产生这样的影响：在无质量情形下，$m=0$，需要非零的 m_N，并且 Z_N^5 不等于 1。与其他相关的二维量子场论不同，我们在此模型中不引入裸波函数重整化 Z_N；在若干情况下，例如 Thirring模型，该重整化在移除截断的极限下是奇异的。我们的目标确实是证明，通过选择 N，可以使可观测量在 $Z_N=1$下保持有限。若 L，a，M，m_N有限，则方程式（1.7）定义良好（即使玻色子场无界），只要e 足够小，正如下一小节所讨论的。

1.3 玻色子场积分

构建该理论的第一步是对玻色子场进行积分，从而得到一种有效费米子相互作用。我们考虑作用量的相互作用部分：

$$\begin{aligned}V(A+J,\psi)&:=I(A+J,\psi)-I(0,\psi)\\&=\frac{1}{2}\sum_{\mu=0,1}\int dx\psi^+_x(\gamma_\mu-r)\psi^-_{x+2^{-N}\hat{e}_\mu}G_{x,\mu,+}(A+J)+\\&\quad-\frac{1}{2}\sum_{\mu=0,1}\int dx\psi^+_{x+2^{-N}\hat{e}_\mu}(\gamma_\mu+r)\psi^-_x G_{x,\mu,-}(A+J),\end{aligned} \tag{1.17}$$

其中 $G_{x,\mu,\pm}(A):=2^N\left(e^{\pm i2^{-N}\mathsf{e}A_{\mu,x}}-1\right)$。我们采用以下约定。

1. 玻色子标签：$b\equiv(x,\mu,\epsilon)\in\Lambda_B\equiv\Lambda\times\{0,1\}\times\{\pm\}$。此外，$\int_{\Lambda_B}db\equiv\sum_{\mu\in\{0,1\}}\sum_{\epsilon\in\{\pm\}}\int_\Lambda dx$。

2. 费米子标签：$\eta \equiv (x,s) \in \Lambda_F \equiv \Lambda \times \{1,2\}$。此外，$\int_{\Lambda_F} d\eta \equiv \sum_{s\in\{1,2\}} \int_\Lambda dx$。

3. 如果 $b \equiv (b_1, \ldots\ldots, b_p)$，我们记作 $\int_{\Lambda_B^p} db := \int_{\Lambda_B} db_1 \cdots \int_{\Lambda_B} db_p$，费米子标签也同样如此。只要 p 的值以及标签的性质（玻色子或费米子）能从上下文中明确看出，我们就只写 $\int db$ 等。

据此，我们可以将作用量改写为

$$\begin{aligned} &V(A+J,\psi) + (\varphi,\psi) + i(B,j^5) = \\ &\int_{\Lambda_B} db\, O_b(\psi) G_b(A+J) + \int_{\Lambda_F} d\eta(\varphi_\eta^+ \psi_\eta^- + \psi_\eta^+ \varphi_\eta^-) + \underbrace{\int_{\Lambda_B} db B_b O_{5;b}(\psi)}_{=:(B,O_5)}, \end{aligned} \tag{1.18}$$

其中 $O_b(\psi) = \int d\eta d\eta' \psi_\eta^+ c_b(\eta,\eta')\psi_{\eta'}^-$，并且，若 $b=(y,\mu,\epsilon)$ $\eta=(x,s)$ $\eta'=(x',s')$：

$$c_b(\eta,\eta') = \begin{cases} \frac{1}{2}\delta(x-y)\delta(x'-y-2^{-N}\hat{e}_\mu)(\gamma_\mu - r)_{s,s'} & \epsilon = + \\ -\frac{1}{2}\delta(x'-y)\delta(x-y-2^{-N}\hat{e}_\mu)(\gamma_\mu + r)_{s,s'} & \epsilon = -, \end{cases} \tag{1.19}$$

以下统一记作 $\delta(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}^2} 2^{2N}\delta_{x_0,\, n_0 L}\delta_{x_1,\, n_1 L}$。[3] 更明确地说：

$$\begin{cases} O_{x,\mu,+}(\psi) &= \frac{1}{2}\psi_x^+(\gamma_\mu - r)\psi^-_{x+2^{-N}\hat{e}_\mu} \\ O_{x,\mu,-}(\psi) &= -\frac{1}{2}\psi^+_{x+2^{-N}\hat{e}_\mu}(\gamma_\mu + r)\psi_x^-. \end{cases}$$

此外，在方程式（1.18）的右端，为了使与手征流和矢量流的耦合具有相似的标准形式（同时也与模型的对称性相容，参见附录 E），我们设定 $B_{x,\mu,\epsilon} := i\epsilon \mathrm{e} B_{\mu,x}$ and $O_{5;x,\mu,\epsilon}(\psi) := \int d\eta d\eta' \psi_\eta^+ c^5_{x,\mu,\epsilon}(\eta,\eta')\psi_{\eta'}^-$，其中

$$c^5_{y,\mu,\epsilon}\big((x,s),(x',s')\big) := \tfrac{1}{2}\epsilon Z_N^5 \delta(x-y)\delta(x'-y)(\gamma_\mu\gamma_5)_{s,s'}. \tag{1.20}$$

以下恒等式成立：

$$\int \mathbb{P}_\xi(\mathcal{D}A) e^{-V(A+J,\psi)} = e^{-\mathcal{V}(\psi;G(J))},$$

其中 $\mathcal{V}$ 是一个关于 $\{\psi_\eta^\pm\}_{\eta\in\Lambda_F}$ 和 $\{G_b(J)\}_{b\in\Lambda_B}$ 的多项式[4]，定义为

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\psi;G(J)) = 2^N(\mu_{N,\lambda}-1)\int db O_b(\psi) + \mu_{N,\lambda}\int_{\Lambda_B} db O_b(\psi) G_b(J) + \\ + \sum_{n\geq 2}\sum_{0\leq m\leq n} 2^{N(2-n-m)} \int_{\Lambda_B^n} d\underline{b} \int_{\Lambda_B^m} d\underline{b}' w_{n,m}(\underline{b};\underline{b}') O^n_{\underline{b}}(\psi) G^m_{\underline{b}'}(J)\,, \end{aligned} \tag{1.21}$$

其中 $\mu_{N,\,\lambda} \equiv e^{-\frac{\lambda}{2}2^{-2N} g^A_{\,,\,\mu\,\mu,\,\xi}(0)}$，$\lambda \equiv \mathrm{e}^2$；给定 $b=(b_1,\ldots,b_n)$，我们令 $O_b^n(\psi) := \prod_{j=1}^n O_{b_j}(\psi)$，类似地 $G^m_{b'}(J) := \prod_{i=1}^m G_{b'_i}(J)$。完全仿照 [3, 第 2], 作为直接

[3] 对于 Λ_F 中的 $\eta=(x,s)$ 和 $\eta'=(x',s')$，我们还令 $\delta(\eta-\eta') \equiv \delta_{s,s'}\delta(x-x')$；而对于 Λ_B 中的 $b=(y,\mu,\epsilon) \in \Lambda_B$ 和 $b'=(y',\mu',\epsilon')$，则令 $\delta(b-b') \equiv \delta_{\mu,\mu'}\delta_{\epsilon,\epsilon'}\delta(x-y)$。[4] 由于费米子格拉斯曼代数的有限性，对于任意固定的 $L,N>0$，方程式（1.21）右端的求和都只有有限项。

作为 Battle-Brydges-Federbush 公式 [30, 定理 3.1], 这些核$w_{n,\ m}$ 可通过以下公式表示:

$$w_{n,0}(\underline{b}) = \frac{1}{n!} \sum_{T \in \mathfrak{T}(\{1,\dots,n\})} \prod_{\{i,j\} \in T} \lambda g^{A,\xi}_{b_i,b_j} \times \int dP_T(s) e^{-U(\underline{b};s)} \tag{1.22}$$

$$w_{n,m}(\underline{b};\underline{b}') = \frac{1}{m!} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_m \in \{1,\dots,n\} \\ \text{distinct}}} \prod_{j=1}^{m} \delta(b'_j - b_{i_j}) \times w_{n,0}(\underline{b}), \quad m \geq 1, \tag{1.23}$$

其中:

- $\mathfrak{T}(\{1,\dots,n\})$ 是集合 $\{1,\dots,n\}$ 上所有生成树的集合，其中给定 $X \subset \mathbb{N}$， X 上的生成树是一个集合 $T \subset X^2$，使得图 $\mathcal{G} = (X,\ T)$ 是一棵树（连通且无环）。如果 $|X| = 1$，那么 $\mathfrak{T}(X) = \emptyset$，在这种情况下 $w_{1,\ 0} = \mu_{N,\ \lambda}$;
- $dP_T(s)$ 是一个支撑在 $[0,1]^{\mathcal{P}\ (\{1,\dots,n\})}$ 上的概率测度， $\mathcal{P}(\{1,\dots,n\})$ 是 $\{1,\dots,n\}$ 上的点对集合;
- $U(b;\ s) \equiv \frac{1}{2}\lambda 2^{-2N}(\sum_{j=1}^{n} g^{A,\ \xi}_{b_j,\ b_j} + 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} s_{\{i,j\}} g^{A,\ \xi}_{b_i,\ b_j})$，且当 $\lambda \geq 0$ 时，它在 P_T 的支撑上非负。

由以下两者的有限性可立即得出 $\|g^{A,\ \mu\ \xi,\ \nu}\|_1 := \int_\Lambda dx |g^{A,\ \mu\ \xi,\ \nu}(x)|$ 以及 $\|g^{A,\ \mu\ \xi,\ \nu}\|_\infty := \sup_{x \in \Lambda} |g^{A,\ \mu\ \xi,\ \nu}(x)|$ 以及费米子期望的行列式界，方程式（1.7）右端的有限性对任意 $\xi \in [0,1]$ 和 $\mathsf{e} \in \mathbb{R}$均成立。

所得的费米子理论包含一种相互作用，其中涉及所有可能次数的格拉斯曼单项式，并乘以适当的非局域核；对于方程式（ T 1.22）右端的任意一棵固定树$b = (b_1,\ \dots,\ b_n)$，以及给定的

$$2^{N(2-n)} O^n_{\underline{b}}(\psi) \prod_{\{i,j\} \in T} \lambda g^A_{b_i,b_j}$$

出现在 $\mathcal{V}(\psi;\ 0)$ 的表达式中，如图 1.(i) 所示；图中的节点表示点 $\{1,\dots,n\}$：我们为每个点指定一个坐标 $b_j \in \Lambda_B$和一个维数因子$2^{N(1-d_j)}$，其中 d_j 是树中与该节点相连的线的数量。与节点 j 相连的一对半实线表示费米子双线性项 $O_{b_j}(\psi)$；任意一条波浪线都是树的一条边 T，如图 3.(ii) 所示。

1.4 Ward 恒等式与 ξ-无关性

沃德恒等 式成立，由以下关系（称为局域相位不变性）导出 :

$$\mathcal{W}_\xi(\varphi;J;B) = \mathcal{W}_\xi(e^{i\mathsf{e}\alpha}\varphi;J + \nabla\alpha;B), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^\Lambda, \tag{1.24}$$

这里应理解为$(e^{i\mathsf{e}\alpha}\varphi)^{\pm}_{x,\ s} \equiv e^{\pm i\mathsf{e}\alpha(x)}\varphi^{\pm}_{x,\ s}$，$(A + \nabla\alpha)_{\mu,\ x} \equiv A_{\mu,\ x} + \nabla_\mu\alpha(x)$，以及 ∇_μ方程式(1.12)之后的离散导数算子。注意， $\mathcal{W}_\xi$ 对于有限的截断值以及任意 $\xi \in [0,1]$均有良好定义。方程式(1.24)蕴含以下 *Ward* 恒等式:

$$\sum_{\mu=0,1} \sigma_\mu(p) \hat{\Sigma}^\xi_{\mu,\nu}(p) = \sum_{\mu=0,1} \sigma_\mu(p) \hat{\Sigma}^\xi_{5;\mu,\nu}(p) = 0, \qquad \forall\ p \in \Lambda^*, \tag{1.25}$$

$$\sum_{\mu=0,1} \sigma_\mu(p) \hat{\Gamma}^\xi_\mu(p;k) = \mathsf{e}\big(\hat{S}^\xi(k) - \hat{S}^\xi(k-p)\big), \qquad \forall p,k \in \Lambda^*, \tag{1.26}$$

其中 $\hat{\Sigma}^\xi_{\mu,\ \nu}$、$\hat{\Sigma}^\xi_{5;\ \mu,\ \nu}$、$\hat{\Gamma}^\xi_\mu(p;\ k)$ 以及 $\hat{S}^\xi(k)$ 如方程式 (1.13)-(1.16) 所示。由此可见，参见附录 A，生成泛函与 ξ无关。

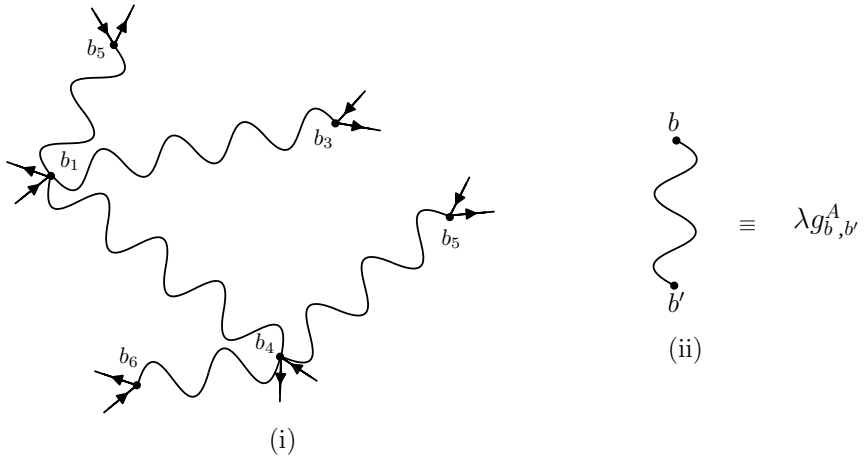


图1： (i) 费子相互作用中项 $\mathcal{O}(\psi^{12})$ 的贡献的图形表示，该贡献通过在 $w_{6,\,0}$ 中选取具有键 $\{1,2\},\ \{1,3\},\ \{1,4\},\ \{4,5\},\ \{4,6\}$ 的树得到；(ii) 玻色子传播子的图形表示。

引理 1.3 (ξ–无关性)。 $W_\xi(0;\ J;\ B)$ 关于 $\xi \in [0,1]$为常数。

请注意， ξ 无关性仅对 $\varphi = 0$ 成立；更一般地说，它仅对规范不变可观测量的关联函数成立，即满足以下条件的量 $F(A,\ \psi)$：对每个 $\alpha \in \mathbb{R}^\Lambda$，均有 $F(A+\nabla\alpha,\ e^{ie\alpha}\psi) = F(A,\ \psi)$。特别要注意， $V(A,\ \psi) + i(B,\ j^5)$ 是规范不变的。

引理 1.3 使我们可以取 $\xi = 1$，因此玻色子传播子的纵向项没有贡献。与具有 $\xi = 0$ 的原模型的恒等关系仅对流的关联函数成立（若费子关联函数满足上述不变性，也可以将其纳入）。从现在起，我们将 ξ 视为始终固定为 $\xi = 1$，并将玻色子传播子 $g^{A,\,1}$ 简记为 g^A。后者满足以下界：

$$|g^A_{\mu,\nu}(x-y)| \le \delta_{\mu,\nu} \frac{K_p}{(N-h^*_M) + \left(2^{h^*_M}|x-y|_L\right)^{\frac{1}{p}}} \exp\left\{ -\kappa_1 \sqrt{2^{h^*_M}|x-y|_L} \right\} \tag{1.27}$$

对每个 $1 \le p < \infty$，取合适的常数 K_p， κ_1，有 $h^*_M := \lfloor \log_2 M \rfloor$；因此

$$\|g^A_{\mu,\nu}\|_1 = \mathcal{O}(2^{-2h^*_M}), \qquad \|g^A_{\mu,\nu}\|_\infty = \mathcal{O}(N-h^*_M), \tag{1.28}$$

这与 $\xi = 0$ 情形下的界形成对比， $\|g^{A,\,\mu\,0,\,\nu}\|_1 = \mathcal{O}\left(2^{-2h^*_M}(N-h^*_M)\right)$ 和 $\|g^{A,\,\mu\,0,\,\nu}\|_\infty = \mathcal{O}(2^{2N-2h^*_M})$。 L^1 范数的有界性将在下面的分析中发挥关键作用。

还要注意，将$w_{n,\,0}$ 改写为主导项与余项之和是很方便的，后者在 N中具有维数改进。为此，在方程式（1.23）中，我们将 $e^{-U(b;s)} = e^{-U(b;0)} + \left(e^{-U(b;s)} - e^{-U(b;0)}\right)$改写为，这引出了如下分解

$$w_{n,0}(\underline{b}) = v_n(\underline{b}) + 2^{2h^*_M - 2N}\tilde{v}_n(\underline{b}), \qquad v_n(\underline{b}) := \frac{\mu^n_{N,\lambda}}{n!} \sum_{T(\{1,\dots,n\})} \prod_{\{i,j\}\in T} \lambda g^A_{b_i,b_j}, \tag{1.29}$$

and 利用方程式（1.27），很容易证明，存在一个常数 $C > 0$ 使得

$$\|v_n\|^w_1 \le C^n \left(2^{-2h^*_M}\lambda\right)^{n-1}, \quad \|\tilde{v}_n\|^w_1 \le C^n \left(2^{-2h^*_M}\lambda\right)^n, \tag{1.30}$$

其中，对于定义在 $\Lambda_F^{2q} \times \Lambda_B^m$ 和 $p > 0$ 上的任意函数 W（下文称为核），我们令

$$\|W\|_p^w := \left(\frac{1}{L^2} \int_{\Lambda_F^{2q}} d\underline{\eta} \int_{\Lambda_B^m} d\underline{b} \, \exp\left(\tfrac{p}{2} \kappa \sqrt{2^{h_M^*} \delta^D(\underline{\eta}, \underline{b})} \right) |W(\underline{\eta}; \underline{b})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.31}$$

其中：$\delta^D(\eta, b)$ 是 $2q+m$ 空间坐标η_1、……、η_{2q}、b_1、……、b_m；κ：＝最小 $\{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3\}$，其中 κ_1，κ_2，κ_3 是分别在方程（1.27）、（2.4）、（C.2）中引入的适当常数。

1.5 紫外积分

令 $P^{(\leq N)}(\mathcal{D}\psi)$ 表示传播子为下式的 Grassmann 高斯积分：

$$g_{s,s'}^{(\leq N)}(x-y) \equiv \mathcal{E}_{(\leq N)}(\psi_{x,s}^- \psi_{y,s'}^+) = \int_{\Lambda^*} dk \, e^{-ik\cdot(x-y)} \Big(-i\not{s}(k) + m_N + M_N(k) \Big)_{s,s'}^{-1}, \tag{1.32}$$

其中 $\not{s}(k) := \sum_{\mu=0,\ldots,1} \gamma_\mu s_\mu(k)$，其中 $s_\mu(k) := 2^N \sin(2^{-N} k_\mu)$，且 $M_N(k) := 2r \sum_{\mu=0,\ldots,1} 2^N \sin^2(2^{-N-1} k_\mu)$。

我们考虑 $|m_N| \leq M \leq 2^N$，并回想起 $h_M^* = \lfloor \log_2 M \rfloor$，将费米子传播子分解为 $g^{(\leq N)}(x-y) = g^{(\leq h_M^*)}(x-y) + g^{(h_M^*, N]}(x-y)$，其中

$$\hat{g}^{(\leq h_M^*)}(k) := \frac{\chi(2^{-h_M^*}|k|)}{-i\not{s}(k) + m_N + M_N(k)}, \qquad \hat{g}^{(h_M^*, N]}(k) := \frac{1 - \chi(2^{-h_M^*}|k|)}{-i\not{s}(k) + m_N + M_N(k)}, \tag{1.33}$$

其中 χ 是一个非负、非递减的 Gevrey-2 函数[5]，满足 $\chi \equiv 1$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上，并且$\chi \equiv 0$ 在 $[1, \infty$上）。根据高斯积分的加法原理 [29, 公式 (4.21)]，我们可以将其改写为：

$$\mathcal{W}(\varphi, J, B) = -\log \int P^{(\leq h_M^*)}(\mathcal{D}\psi) e^{-\mathcal{W}^{(u.v.)}(\psi;\varphi;J;B)} \tag{1.34}$$

with

$$\mathcal{W}^{(u.v.)}(\psi;\varphi;J;B) := -\log \int P^{(h_M^*, N]}(\mathcal{D}\zeta) \int \mathbb{P}(\mathcal{D}A) e^{-V(A+J, \zeta+\psi) - (\varphi, \zeta+\psi) - i(B, j^5(\zeta+\psi))}. \tag{1.35}$$

根据上述定义可立即得出，$\mathcal{W}^{(u.v.)}(\psi;\ \varphi;\ J;\ B)$ 可以写成以下形式：

$$\begin{aligned} & L^2 \mathcal{F}^{(u.v.)} + \sum_{\substack{q,q',\tilde{q},\tilde{q}',p,p' \geq 0 \\ q+q'+\tilde{q}+\tilde{q}'+p+p' \geq 1 \\ q+\tilde{q}=q'+\tilde{q}'}} \int_{\Lambda_F^q} d\underline{\eta} \int_{\Lambda_F^{q'}} d\underline{\eta}' \int_{\Lambda_F^{\tilde{q}}} d\underline{\tilde{\eta}} \int_{\Lambda_F^{\tilde{q}'}} d\underline{\tilde{\eta}}' \int_{\Lambda_B^p} d\underline{b} \int_{\Lambda_B^{p'}} d\underline{b}' \times \\ & \times W_{q,q';\tilde{q},\tilde{q}';p;p'}^{(u.v.)}(\underline{\eta}, \underline{\eta}'; \underline{\tilde{\eta}}, \underline{\tilde{\eta}}'; \underline{b}; \underline{b}') \prod_{k=1}^{q} \psi_{\eta_k}^+ \prod_{k=1}^{q'} \psi_{\eta_k'}^- \prod_{k=1}^{\tilde{q}} \varphi_{\tilde{\eta}_k}^+ \prod_{k=1}^{\tilde{q}'} \varphi_{\tilde{\eta}_k'}^- \prod_{k=1}^{p} G_{b_k}(J) \prod_{k=1}^{p'} B_{b_k'}, \end{aligned} \tag{1.36}$$

对于适当的复核 $W_{q\,q'\,\tilde{q}}^{(u.v.)}$，；，$\tilde{q}'$；$p$；$p'$。我们的主要结果如下。

[5] 如果对于每个 $n \geq 0$ 以及某个 C_1，$C_2 > 0$，都有 $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$，则称其为 Gevrey-$s$ 类函数，其中 $\|f^{(n)}\|_{L^\infty} \leq C_1 C_2^n n!^s$。

定理 1.4。 存在 $\lambda_\star$、 $C_\star$、 $N_\star > 0$，使得对于任意 $0 \le |m_N| < 2^{h_M^*}$、 $N \ge h_M^* + N_\star$、$L \ge 2^{-h_M^*}$、$\xi = 1$ 和 $0 \le \lambda \le \lambda_\star 2^{2h_M^*}$，以下结论成立。

1. $\mathcal{W}^{(u.v.)}$ 在方程式 (1.36) 中的核满足以下界。若 $q + q' + \tilde{q} + \tilde{q}' > 0$ 或$p + p' > 2$,

$$\left\| W^{(u.v.)}_{q,q';\tilde{q},\tilde{q}';p;p'} \right\|_1^w \le 2^{h_M^* D_{sc}} \times \begin{cases} C_\star \left(2^{-2h_M^*}\lambda\right)^{\max\{1,\frac{2}{5}q\}}, & \tilde{q},\tilde{q}',p,p' = 0 \\ C_\star^{1+p+p'+\tilde{q}+\tilde{q}'} \left(2^{-2h_M^*}\lambda\right)^{\frac{1}{8}\max\{q+q'+\tilde{q}+\tilde{q}'-2,0\}}, & otherwise, \end{cases} \tag{1.37}$$

其中 $D_{sc} \equiv D_{sc}(q, q';\ \tilde{q}, \tilde{q}';\ p;\ p') = 2 - \frac{1}{2}(q + q') - \frac{3}{2}(\tilde{q} + \tilde{q}') - p - p'$。此外：

$$|\mathcal{F}^{(u.v.)}| \le C_\star 2^{-2h_M^*}\lambda 2^{2N}; \qquad W^{(u.v.)}_{0,0;0,0;0;1} = 0; \qquad \left\| W^{(u.v.)}_{0,0;0,0;0;1;0} \right\|_1^w \le C_\star 2^N; \tag{1.38}$$

$$\left\| g^A * W^{(u.v.)}_{0,0;0,0;0;2;0} \right\|_1^w, \left\| g^A * W^{(u.v.)}_{0,0;0,0;0;1;1} \right\|_1^w \le C_\star 2^{-2h_M^*}; \quad \left\| W^{(u.v.)}_{0,0;0,0;0;0;2} \right\|_1^w \le C_\star (N - h_M^*). \tag{1.39}$$

2. 令 $\hat{\Sigma}^{(u.v.)}_{\mu\ \nu}$、 $\hat{\Sigma}^{(u.v.)}_{5\quad\nu}$；$\mu$、以及 $\hat{S}^{(u.v.)}$ 分别定义为方程式 (1.13)、(1.14) 和 (1.16) 右端，其中将右端中的 $\mathcal{W}_\xi$ 替换为 $\mathcal{W}^{(u.v.)}$，则有以下关系：

$$\left| \hat{S}^{(u.v.)}_{s,s'}(k) - \hat{g}^{(h_M^*,N]}_{s,s'}(k) \right| \le \frac{C_\star 2^{-h_M^*}\lambda}{2^{2h_M^*} + |k|^2}, \tag{1.40}$$

$$\left| \hat{\Sigma}^{(u.v.)}_{\mu,\nu}(p) - \lambda \hat{\mathfrak{B}}^{(u.v.)}_{\mu,\nu}(p) \right|, \left| \hat{\Sigma}^{(u.v.)}_{5;\mu,\nu}(p) - \lambda \hat{\mathfrak{B}}^{(u.v.)}_{5;\mu,\nu}(p) \right| \le C_\star 2^{-h_M^*}\lambda^{\frac{3}{2}}, \tag{1.41}$$

对于满足 $|p| \le 2^{h_M^*}$ 的每个 p、 $k \in \Lambda^*$，其中 $\hat{\mathfrak{B}}^{(u.v.)}_{\mu\ \nu}$，和 $\hat{\mathfrak{B}}^{(u.v.)}_{5\quad\nu}$；$\mu$，是在 Λ^* 上的适当函数，使得对于 $p \ne 0$

$$\lim_{M\to 0^+} \lim_{m_N \to 0} \lim_{L\to\infty} \hat{\mathfrak{B}}^{(u.v.)}_{\mu,\nu}(p) = \frac{1}{\pi}\left(\delta_{\mu,\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{|p|^2}\right) + R_{\mu,\nu}(p), \tag{1.42}$$

$$\lim_{M\to 0^+} \lim_{m_N \to 0} \lim_{L\to\infty} \hat{\mathfrak{B}}^{(u.v.)}_{5;\mu,\nu}(p) = \frac{i}{\pi}\left(\varepsilon_{\nu,\mu} - \sum_{\alpha=0,1} \varepsilon_{\nu,\alpha}\frac{p_\mu p_\alpha}{|p|^2}\right) + R_{5;\mu,\nu}(p), \tag{1.43}$$

与$|R_{\mu,\ \nu}(p)|$，$|R_{5;\mu,\ \nu}(p)| \le C_\star (2^{-N}|p|)^{\frac{1}{2}}$。

注 1.5。

1）紫外积分后得到的核的有限性，是在波函数重整化独立于格点截断的情况下确立的（参见注1.2）。这是由于我们的格点正则化所蕴含的 ξ独立性，而其他正则化则不具备这一性质。

2）紫外部分积分的结果是一个有效相互作用，它由单项式表示，这些单项式受正确维数因子 $2^{h_M^* D_{sc}}$ 与独立于 N的常数的乘积所界定，见方程式（1.38）。我们的方法也可用于证明核的傅里叶变换的极限 $N \to \infty$ 存在（见附录F）。

3）两点施温格函数 $\hat{S}^{(u.v.)}(k)$ 在大动量下的行为与无相互作用情形相同，至多相差次领先修正；这与 Thirring模型有所不同，在相同区域内，其行为不同于无相互作用情形，并受到反常临界指数的修正。

对于小动量，则发现了 $\hat{S}^{(u.v.)}(k)$ 的一个临界指数，见定理1.6。

4) 流和轴流关联函数 $\hat{\Sigma}^{(u.v.)}_{\mu\ \nu}$和 $\hat{\Sigma}^{(u.v.)}_{5\ \ \nu;\mu,}$分别接近其无相互作用对应项，仅存在修正。请注意，格点正则化确保得到的表达式与维数正规化时相同；若采用动量正则化，则会得到不同的值。例如，无相互作用的流关联函数将由 $\frac{1}{2\pi}\left(\delta_{\mu,\nu}-2\frac{p_\mu p_\nu}{|p|^2}\right)$ 给出，从而违反流守恒。

— ——

1.6 证明思路

将玻色子积分掉后，幂次计数与二维费米子理论相同，其标度指数为 D_{sc}，如定理1.4所示。在由此得到的有效费米子理论方程式（1.21）中，存在边缘项（即 $D_{sc}=0$），它们要么关于 ψ 是四次的，要么关于 ψ 是二次的且关于$G(J)$是线性的；若关于 ψ是二次的，则这些项是相关的（即 $D_{sc}>0$）；其余项均为无关项，也就是说 $D_{sc}<0$。

通过以多尺度方式分解费米子积分（参见方程式（1.35））， 我们得到一个展开，其核仅由相关项和边缘项构成。只要相关核和边缘核满足关于 N的一致适当界，该展开便是收敛的: 这就是命题2.1的内容。主要问题在于证明相关核和边缘核确实有界（定理3.1）。为此，我们的思路是在每个尺度下，对费米子期望进行若干操作，以提取若干费米子或玻色子内部线（即传播子）；这样做是为了利用玻色子传播子的非局域性。玻色子传播子$g^A(k)\sim|k|^{-2}$的衰减速度比费米子传播子$g^{(\leq N)}(k)\ \sim|k|^{-1}$更快，当 k较大时尤其如此。进行这些操作时，必须谨慎，避免损害费米子行列式良好的组合性质。这些操作导出了关于相关核和边缘核的核恒等式；通过对广义作用量关于新的辅助源求导，便可得到这些恒等式。

然而，与动量正则化的情形不同，后者只引入一个与流 [28, 7, 25], 耦合的源；在当前情形中，格点相互作用会产生复杂的核（参见方程式（1.21）和图1），因此不得不如下面的方程式（1.44）所示，通过引入数量不受限的辅助变量，为与新的复杂费子项耦合的源项；这些项几乎与标准可观测量毫无相似之处。

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{V}(\psi;G;\dot{G};\ddot{G}):=\\
&2^N\left(\mu_{N,\lambda}-1\right)\int_{\Lambda_B}db\,O_b(\psi)+\sum_{n\geq2}2^{N(2-n)}\int_{\Lambda_B^n}d\underline{b}\,w_{n,0}(\underline{b})O^n_{\underline{b}}(\psi)\\
&+\sum_{n\geq1}n^3 2^{N(1-n)}\int_{\Lambda_B^n}d\underline{b}\,v_n(\underline{b})G^{(n)}_{b_1}O^n_{\underline{b}}(\psi)+\sum_{n\geq2}n^3 2^{N(2-n)}\int_{\Lambda_B^n}d\underline{b}\,v_n(\underline{b})\dot{G}^{(n)}_{b_1}O^{n-1}_{\underline{b}_*}(\psi)\\
&+\sum_{n\geq2}n2^{N(1-n)}\int_{\Lambda_B^n}d\underline{b}\,\tilde{v}_n(\underline{b})\ddot{G}^{(n)}_{b_1}O^{n-1}_{\underline{b}_*}(\psi),
\end{aligned}
\tag{1.44}
$$

其中 $G\equiv\{G^{(n)}\}_{n\geq1}$、 $\dot{G}\equiv\{\dot{G}^{(n)}\}_{n\geq2}$ 和 $\ddot{G}\equiv\{\ddot{G}^{(n)}\}_{n\geq2}$ （n 称为次数指标）是前述辅助复场[6]; 此外，给定 $b=(b_1,\dots,b_n)$，令 $b_*:=(b_2,\dots,b_n)$、 $O^n_b:=\prod_{j=1}^n O_{b_j}$ 和 $O^{n-1}_{b_*}:=\prod_{j=2}^n O_{b_j}$。为说明这一定义的动机（详情见下文注 3.3），我们注意到，从核 v_n 中选取一条费米子线（见图2），会出现两种不同情形：被抽出的费米子线的顶点是树的叶节点，或不是叶节点。第一种情形（图2.(a)）中，核其余部分的贡献可写为式（1.44）右端单项式的期望值

[6] $G\equiv\{G^{(n)}\}_{n\geq1}$ 不应与方程式 $G(J)$ 中的函数1.21相混淆。

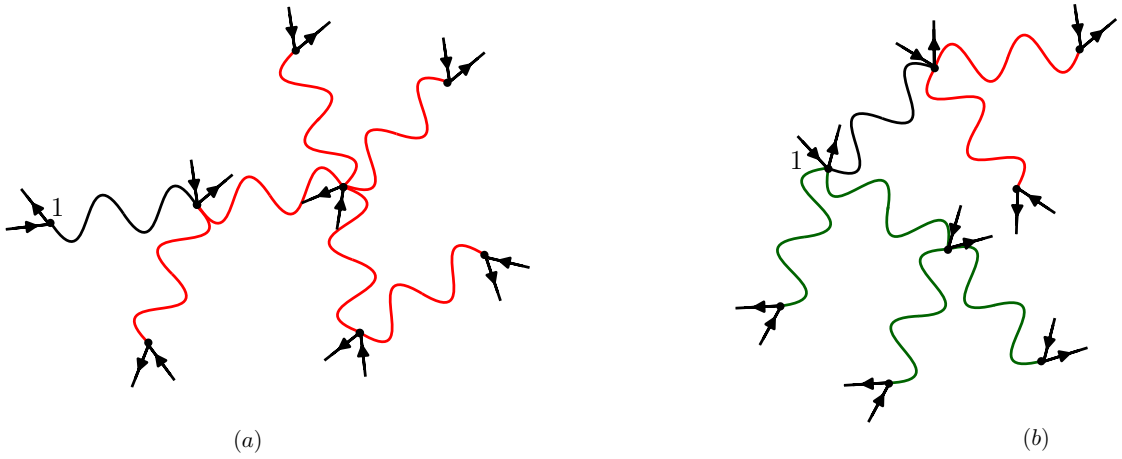


图2：提取一条费子线（连接到顶点“1”的黑色实线）时出现的两种可能性，取决于与其相连的顶点“1”是否为生成树的叶节点：(a) 是叶节点，(b) 不是叶节点。红色子树对应于类型为$G^{(n)}$的源项（(a) 对应 $n=7$，(b) 对应 $n=3$），绿色子树则对应于类型为 $\dot{G}^{(n)}$的源项（对应 $n=5$）。

乘以 $G^{(n-1)}$；第二种情形（图2.(b)）中，则是两个单项式的期望值：一个单项式乘以 $G^{(n_1)}$，另一个乘以 $G^{(n_2)}$，其中带有 $n_1+n_2=n$。所有这些新的源场 $G^{(n)}$ 和 $\dot{G}^{(n)}$（其中 $n\geq 2$）的标度维数均为 $+1$。[7] 事实上，式（1.44）右端的量纲因子 $2^{N(1-n)}$、$2^{N(2-n)}$、$2^{N(1-n)}$ 应视为 $2^{ND_{sc}}$，其中单项式 $(\psi)^{2q}(G)^{p}(\dot{G})^{\dot{p}}(\ddot{G})^{\ddot{p}}$ 的标度维数 D_{sc} 定义为 $D_{sc}(2q;p;\dot{p};\ddot{p}):=2-q-p-\dot{p}-2\ddot{p}$。源项前的无量纲因子 n^3 和 n 出于技术上的便利而引入，它们是我们证明归纳结构的一部分（见第3.5小节，特别是方程式（3.35）之后的说明）。

因此，必须在多尺度展开中加入数量如此之多且无界的新源项，并以自洽的方式证明所有按维数计的边缘和相关项，即具有 $D_{sc}=0$ 和 $D_{sc}>0$ 的项，分别在多尺度积分的所有步骤中保持一致有界。主要挑战在于证明，这些新增项仍可通过同一种基于玻色子传播子的非局域性的机制加以控制。这正是定理3.1的主要内容。

1.7 红外问题与格点有质量 QED_2 的构造

完成紫外积分并得到 $\mathcal{W}^{(u.v.)}(\psi;\varphi;J;B)$ 方程式（1.36中的结果后，如定理1.4所示，要完整构造该模型，还需要进行红外积分，见方程式（1.34）。分析通过多尺度积分完成；除了一些简单调整外，这一过程与 Thirring模型中的多尺度积分基本相同，参见 [6, 小节 2]。在该模型中，起始项是四次费米子相互作用，但积分掉第一个尺度后，会得到类似于方程式（1.36）的表达式，其中的核满足方程式（1.37）中的界；因此，[6, 小节 2] 中的分析基本上可以原样适用。需要指出的是，红外尺度的积分与紫外积分完全不同；由于相互作用的非局域性，不存在维数改进，正如小节1.6中简要说明的那样，因此必须引入一个重整化的

[7] .....的维数 $G^{(n)}$ 和 $\dot{G}^{(n)}$ 与方程式（1.44）最后一行中的维数相同，费子双线性项的数量为 $n-1$。

展开，并以一组流耦合常数表示，这些常数对应相关项与边缘项。流耦合常数分别对应：四次相互作用、波函数重整化、电子质量以及流的振幅，见 [6, 第 2 节。1]只要流耦合常数足够小，关于它们的展开就是收敛的；但还需证明四次流耦合常数始终保持较小，这可由定理 [5, 31]中证明的 β函数渐近趋零得出。在多尺度分析中，有效四次耦合保持接近其初始值，而波函数重整化则按幂律增长，其临界指数是四次耦合的一个非平凡解析函数。必须确定方程式（Z_N^5 和 m_N ）右端的参数，以确保满足自然的物理要求，见 [4]。结果可概括为以下定理。

定理1.6. 在与定理 *1.4* 相同的条件下，极限 $L \to \infty$ 的二点函数以及流关联函数和轴流关联函数存在。在无质量情形下，对于$|k| \leq M$，两点施温格函数的行为如下：

$$\hat{S}^1_{s,s'}(k) = \mathcal{O}(|k|^{-1+\eta}), \tag{1.45}$$

其中 $\eta = \alpha\lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda^3)$，对适当的 $\alpha > 0$，且手征流关联函数满足：

$$\sum_{\nu=0,1} p_\nu \hat{\Sigma}^{\xi}_{5;\mu,\nu}(p) = \sum_{\nu=0,1} \frac{i\lambda}{\pi} \varepsilon_{\nu,\mu} p_\nu + \mathcal{O}\Big(\frac{\lambda|p|^{1+\theta}}{M^\theta}\Big), \tag{1.46}$$

对某个 $\theta \in (0,1)$。

两点施温格函数的反常散度由 [6, 定理1]得出。相反，紫外大动量行为中并不出现反常指数，正如方程式（1.40）中定理 1.4 所述，这是有质量 QED_2 [17] 的一个关键预期性质。

$L \to \infty$ 极限存在性的细节可见于例如 [31, 附录 D]。最后，方程式 (1.46) 的证明在 [4, 第 VI 节]中完成（假定此处所证的定理 1.4 成立）。对紫外自由度的积分导出分解 $\hat{\Sigma}^{\xi}_{5;\mu,\nu} = \hat{\Sigma}^{(u.v.)}_{5;\mu,\nu} + \hat{\Sigma}^{(i.r.)}_{5;\mu,\nu}$, , , 其中 $\hat{\Sigma}^{(u.v.)}_{5;\mu,\nu}$, 如定理 1.4 中那样，满足 $\hat{\Sigma}^{(u.v.)}_{5;\mu,\nu}(p) - \hat{\Sigma}^{(u.v.)}_{5;\mu,\nu}(0) = \mathcal{O}\big(|p|/M\big)$。对 $\hat{\Sigma}^{(i.r.)}_{5;\mu,\nu}$, 的分析基于 [5, 6, 第 2] 节及其中的参考文献。如 [4, 第 VI 节], 所述，引入一个适当调节的参考模型（另见 [5, 第 1.2]节），使其~红外不动点与原始模型的红外不动点重合。这意味着，令 $\Sigma_{5;\mu,\nu}$为参考模型的关联函数，则 $\hat{\Sigma}_{5;\mu,\nu}(p) = Z_N^5 \tilde{\Sigma}_{5;\mu,\nu}(p) + \mathcal{R}_{\mu,\nu}(p)$ [4, 方程式 44]，, 其中 $\mathcal{R}_{\mu,\nu}$连续（特别地，$\mathcal{R}_{\mu,\nu}(p) - \mathcal{R}_{\mu,\nu}(0) = \mathcal{O}\big((|p|/M)^\theta\big)$），由此我们还可以重新吸收贡献 $\hat{\Sigma}^{(u.v)}_{5;\mu,\nu}$, 。这样，$\hat{\Sigma}^{\xi}_{5;\mu,\nu}(p) = Z_N^5 \tilde{\Sigma}_{5;\mu,\nu}(p) + \mathcal{R}_{\mu,\nu}(0) + \mathcal{O}\big((|p|/M)^\theta\big)$。来自 $\Sigma_{5;\mu,\nu}$ 的~对反常的贡献是显式的 [4, 方程式 (46)], , 而来自 $\mathcal{R}_{\mu,\nu}(0)$ 的贡献则通过方程式 (1.25) 中的 Ward 恒等式 [4, 方程式 50] 确定。将二者结合，即得所需结果，即方程式 (1.46)。

定理 1.6 确立了 Adler-Bardeen 定理在格点 QED 中的非微扰有效性$_2$；请注意，方程式 (1.45) 确保反常不重整化的有效性，其系数与微扰理论中的方程式 (1.3) 一致（与之相反，精确解或动量正则化也能得到类似结果，但系数不同）。这证明，满足第 $_2$, 1.1 小节中物理约束 a)-d) 且处于方程式 (1.2) 所述范围内的 QED 格点正则化，在非微扰层次上验证了多项性质，例如，由于玻色子传播子的纵向部分没有贡献，发散度降低；流守恒；以及反常的正确取值

（即 Adler-Bardeen 非重整化定理），这些性质的类似形式是现实四维量子场论模型自洽性的关键要素。

一个有趣的开放问题是，能否在不积分掉玻色子的情况下，通过同时对玻色子和费米子进行分解，得到类似的结果；这在四维中似乎是必要的。此外，研究二维手征模型也会很有意思。在该模型中，要找到一种保持 Ward 恒等式的正则化方法，需要消除反常。

论文结构。本文安排如下。第 2 节中，我们在没有外部源 φ, J, B 的情况下建立费米子多尺度分析。我们采用 Gallavotti- Nicol`o 树展开（附录 D 对此作了回顾），并在假设相关项与边缘项有界的条件下，证明多尺度展开是适定的。第 3 节的重点正是这一性质；其证明依赖于有效势核的一些精确恒等式，这些恒等式在附录 B 中得到证明。第4节中，我们重新引入外部源 φ, J, B，从而恢复完整的生成泛函，方程式 (1.35)。第 5 节中，我们汇总前述各节的所有信息，从而证明定理 1.4 的结论。附录 A 致力于证明局域相位不变性的两个主要推论（参见方程式 (1.24)），即 ξ-无关性性质（引理 1.3）以及沃德恒等式，方程式 (1.25)-(1.26)。附录 C 汇集了一些关于非相互作用泡图的技术性结果，这些结果对于第 2–5 节的分析至关重要。最后，附录 E 讨论格点理论的对称性，附录 F 则概述了证明去除截断极限存在性的过程。

2 费米子多尺度

不失一般性，只需证明定理 1.4 在 $M \in [1,2)$ 的情形，即 $h_M^* = 0$ （参见下方方程式（1.27））。事实上，很容易验证，重标度

$$\begin{cases} \Lambda \ni x \mapsto y \in \Lambda^{(R)} := 2^{h_M^*}\Lambda;\ \ \psi_x \mapsto \psi_y^{(R)} := 2^{-\frac{1}{2}h_M^*}\psi_{2^{-h_M^*}y};\ \ \varphi_x \mapsto \varphi_y^{(R)} := 2^{-\frac{3}{2}h_M^*}\varphi_{2^{-h_M^*}y}; \\ A_{\mu,x} \mapsto A_{\mu,y}^{(R)} := A_{\mu,2^{-h_M^*}y};\quad J_{\mu,x} \mapsto J_{\mu,y}^{(R)} := J_{\mu,2^{-h_M^*}y};\quad B_{\mu,x} \mapsto B_{\mu,y}^{(R)} := 2^{-h_M^*}B_{\mu,2^{-h_M^*}y} \end{cases} \tag{2.1}$$

将原理论映射为另一个具有以下参数的理论：$M \mapsto M^{(R)} := 2^{-h_M^*}M$；$m_N \mapsto m_N^{(R)} := 2^{-h_M^*}m_N$；$\mathsf{e} \mapsto \mathsf{e}^{(R)} := 2^{-h_M^*}\mathsf{e}$。特别地，$M^{(R)} \in [1,2)$。因此，如果重标度后的理论满足定理 1.4，那么原理论也同样满足该定理。

2.1 多尺度分解

作为证明定理 1.4的第一步，我们将范围限制在外部源为零的情形，即分析 $\mathcal{W}^{(u.v.)}(\psi; 0; 0; 0)$，其可表示为

$$\mathcal{W}^{(u.v.)}(\psi;0;0;0) = -\log \int P^{(0,N]}(\mathcal{D}\zeta) e^{-\mathcal{V}(\psi+\zeta;0;0;0)}, \tag{2.2}$$

其中 $\mathcal{V}(\psi;\ G;\ \dot{G};\ \ddot{G})$ 是方程式 (1.44) 中定义的广义势。[8] 外场 φ、J和 B 将在第4小节中重新引入。我们首先将费米子传播子拆分为

$$g^{(0,N]}(x-y) \equiv g^{[1,N]}(x-y) = \sum_{h=1}^{N} g^{(h)}(x-y),$$

[8]注意，对于任意 N，$L < \infty$，由于格拉斯曼代数的有限性，方程式（1.44右端的所有求和实际上都截断于 $n_* \equiv 2\,(2^N L)^{\,2} + 1$，并且 $\mathcal{V}$ 仅取决于满足 *degree* n 小于或等于 n_*的辅助场变量。

其中：

$$g^{(N)}(x-y) := \int_{\Lambda^*} dk\, e^{-ik\cdot(x-y)} \frac{1-\chi_{N-1}(|k|)}{-i\not{k}(k)+M_N(k)+m_N},$$
$$g^{(h)}(x-y) := \int_{\Lambda^*} dk\, e^{-ik\cdot(x-y)} \frac{\chi_h(|k|)-\chi_{h-1}(|k|)}{-i\not{k}(k)+M_N(k)+m_N}, \qquad 1\le h\le N-1$$

与 $\chi_h(|k|)\equiv\chi(2^{-h}|k|)$，以及 χ 定义见方程式 (1.33)；另回顾方程式 (1.32)。可以验证，由于威尔逊质量 $M_N(k)$ 的存在，

$$\left|\left(-i\not{k}(k)+M_N(k)+m_N\right)^{-1}_{s,s'}\right| \le \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{|k|^2+m_N^2}}, \qquad \forall k\in\Lambda^*, \tag{2.3}$$

只要 $|m_N|\le 1$ 且 $N\ge 2$ 对数$_2\,\pi+3$。此外，由 χ_h的性质，即紧支撑和 Gevrey-2 正则性，可推出 [32,附录 A]

$$\max_{s,s'\in\{1,2\}} |g^{(h)}_{s,s'}(x-y)| \le K2^h e^{-\kappa_2\sqrt{2^h|x-y|}}, \quad \forall\, 0\le h\le N, \tag{2.4}$$

对于适当的 $K,\kappa_2>0$，关于 $m_N\in[-1,1]$一致。注意，按构造有 $\mathcal{W}^{(u.v.)}(\psi;0;0;0)$ $=\mathcal{V}^{(0)}(\psi;0;0;0)$，其中，对于任意 $0\le h\le N-1$，

$$\mathcal{V}^{(h)}(\psi;G;\dot{G};\ddot{G}) := -\log\int P^{(h,N]}(\mathcal{D}\zeta)e^{-\mathcal{V}(\psi+\zeta;G;\dot{G};\ddot{G})} \tag{2.5}$$

且 $P^{(h,N]}$是传播子为 $g^{(h,N]}(x-y)\equiv\sum_{k=h+1}^{N} g^{(k)}(x-y)$ 的格拉斯曼积分。再令 $P^{(h)}$ 表示传播子为 $g^{(h)}(x-y)$ 的积分，根据高斯加法原理 [29, 公式 (4.21)], ，我们有

$$\mathcal{V}^{(h)}(\psi;G;\dot{G};\ddot{G}) = -\log\int P^{(h+1)}(\mathcal{D}\zeta)e^{-\mathcal{V}^{(h+1)}(\psi+\zeta;G;\dot{G};\ddot{G})}. \tag{2.6}$$

作为一个标准结论，[29, 方程式（4.19）], 有效势 $\mathcal{V}^{(h)}$ 可通过以下公式形式化地计算：

$$\mathcal{V}^{(h)}(\psi;G;\dot{G};\ddot{G}) = \sum_{s\ge 1}\frac{(-1)^{s+1}}{s!}\mathcal{E}^T_{(h+1)}\Big(\mathcal{V}^{(h+1)}(\psi+\cdot;G;\dot{G};\ddot{G});^s\Big), \tag{2.7}$$

其中，对于格拉斯曼单项式 $X_1(\psi,\zeta)\ldots,X_s(\psi,\zeta)$，截断期望 $\mathcal{E}^T$递归定义如下：

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^T_{(h+1)}\big(X_1(\psi,\cdot),\ldots,X_s(\psi,\cdot)\big) &:= \mathcal{E}_{(h+1)}\big(X_1(\psi,\cdot),\ldots,X_s(\psi,\cdot)\big)+\\ &-\mathbb{1}_{(s\ge 2)}\sum_{\Pi\in\,\mathrm{Part}(\{1,\ldots,s\})}\sigma_\Pi\prod_{j=1}^{|\Pi|}\mathcal{E}^T_{(h+1)}\big(X_{\pi_{j,1}}(\psi,\cdot),\ldots,X_{\pi_{j,p(j)}}(\psi,\cdot)\big),\end{aligned} \tag{2.8}$$

按照如下理解。$\mathcal{E}_{(h+1)}(\cdot)\equiv\int P^{(h+1)}(\mathcal{D}\zeta)\,\cdot$ 是简单期望值；Π 遍历 $\{1,\ldots,n\}$ 的所有划分，这些划分被分成由 $j=1,\ldots,|\Pi|$索引的分量 $\{\pi_{j,1},\ldots,\pi_{j,p(j)}\}$，且满足 $p(1)+\cdots+p(|\Pi|)=s$；方程式 (2.8) 右端的排序使得对每一个 $j=1,\ldots,|\Pi|-1$ 以及 $k=1,\ldots,p(j)-1$，均有$\pi_{j,1}<\pi_{j+1,1}$ 和$\pi_{j,k}<\pi_{j,k+1}$；σ_Π是将格拉斯曼单项式按其在方程式 (2.8) 右端中出现的顺序进行排列所需的符号，该排列从

与等式左边中的排序相同。最后，在方程式 (2.7) 中，$\mathcal{E}^T_{(h+1)}(X(\psi,\cdot);^s) := \mathcal{E}^T_{(h+1)}\big(X(\psi,\cdot)\ldots,X(\psi,\cdot)\big)$当 $X_1,\ldots,X_s = X$。方程式 (2.7) 自然地为 $\mathcal{V}^{(h)}$给出积分表示：

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^{(h)}(\psi;G;\dot G;\ddot G) = \sum_{q\geq 0}\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^{\times}_{\geq 1}}\sum_{\underline{\dot n}\in\mathbb{N}^{\times}_{\geq 2}}\sum_{\underline{\ddot n}\in\mathbb{N}^{\times}_{\geq 2}}\int_{\Lambda_F} d\underline{\eta}\,d\underline{\eta}'\int_{\Lambda_B} d\underline{b}\,d\underline{\dot b}\,d\underline{\ddot b}\,\times\\ \times W^{(h)|q,q}_{\underline{n};\underline{\dot n};\underline{\ddot n}}(\underline{\eta};\underline{\eta}';\underline{b};\underline{\dot b};\underline{\ddot b})\prod_{k=1}^{q}\psi^{+}_{\eta_k}\prod_{k=1}^{q}\psi^{-}_{\eta'_k}\prod_{k=1}^{\dim \underline{n}}G^{(n_k)}_{b_k}\prod_{k=1}^{\dim \underline{\dot n}}\dot G^{(\dot n)}_{\dot b_k}\prod_{k=1}^{\dim \underline{\ddot n}}\ddot G^{(\ddot n)}_{\ddot b_k},\end{aligned} \tag{2.9}$$

其中，记号含义如下：

- $\mathbb{N}^{\times}_{\geq p} \equiv \emptyset \sqcup \mathbb{N}_{\geq p} \sqcup (\mathbb{N}_{\geq p})^2 \sqcup (\mathbb{N}_{\geq p})^3 \sqcup \ldots$ 以及 $\mathbb{N}_{\geq p} = \{n \in \mathbb{N} : \ n \geq p\}$；
- 若 $\underline{n} = (n_1, \ldots\ldots, n_p)$，则 $|\underline{n}| \equiv n_1 + \cdots + n_p$ 且 $\dim \underline{n} \equiv p$；
- $d\underline{b} \equiv \prod_{\text{维数}\,\underline{b}=1}^{n} db_{\underline{k}}$，$d\underline{\dot b} \equiv \prod_{\text{维数}\,\underline{\dot b}=1}^{\dot n} d\dot b_{\underline{k}}$ 以及 $d\underline{\ddot b} \equiv \prod_{\text{维数}\,\underline{\ddot b}=1}^{\ddot n} d\ddot b_{\underline{k}}$，且这些变量均取值于 Λ_B；类似地，$d\underline{\eta} \equiv d\eta_1 \ldots d\eta_q$ 且每个变量取值于 Λ_F；
- 方程式（2.9）右端的求和项，其中 $q = 0$ 和 $n = \dot n = \ddot n = \emptyset$ 应理解为 $\underline{W}^{(h)|0\,0)}_{\emptyset\,\emptyset}(\,;\,;\,;\emptyset) \in \mathbb{C}$，其 L^p范数按定义为 $\big\|W^{(h|0\,0)}_{\emptyset\,\emptyset}(\,;\,;\,;\emptyset)\big\|^{w}_{p} := L^{-2}\big|W^{(h|0\,0)}_{\emptyset\,\emptyset\,\emptyset}(\,;\,;\,;\emptyset\,\emptyset)\big|$（与方程式（1.31）比较）。

假设核 $W^{(h)|q,n\,\dot n\,\ddot n}(\,;\,;(\underline{\eta};\underline{\eta}';\underline{b};\underline{\dot b};\underline{\ddot b})$ 在交换任意一对 ψ^+ 或 ψ^- 标签时是反对称的，并且分别在交换 G、$\dot G$ 和 $\ddot G$ 标签时是对称的。始终可以施加这些对称性，并由此得到核 $W^{(h)}$ 表示为 $\mathcal{V}^{(h)}$的泛函导数：令 $p = \dim n$、$\dot p = \dim \dot n$、$\ddot p = \dim \ddot n$，若 $q + p + \dot p + \ddot p > 0$，公式 (2.9) 意味着

$$\begin{aligned}W^{(h)|q,q}_{\underline{n};\underline{\dot n};\underline{\ddot n}}(\underline{\eta},\underline{\eta}';\underline{b};\underline{\dot b};\underline{\ddot b}) = \frac{(-1)^q}{q!^2 p!\dot p!\ddot p!}\times\\ \times\left(\frac{\delta^{2q}}{\delta\psi^{+}_{\eta_1}\ldots\delta\psi^{+}_{\eta_q}\delta\psi^{-}_{\eta'_1}\ldots\delta\psi^{-}_{\eta'_q}}\frac{\delta^{p}}{\delta G^{(n_1)}_{b_1}\ldots\delta G^{(n_p)}_{b_p}}\frac{\delta^{\dot p}}{\delta\dot G^{(\dot n_1)}_{\dot b_1}\ldots\delta\dot G^{(\dot n_p)}_{\dot b_{\dot p}}}\frac{\delta^{\ddot p}}{\delta\ddot G^{(\ddot n_1)}_{\ddot b_1}\ldots\delta\ddot G^{(\ddot n_{\ddot p})}_{\ddot b_{\ddot p}}}\mathcal{V}^{(h)}\right)(\mathbf{0}),\end{aligned} \tag{2.10}$$

其中 $\mathbf{0} \equiv (0;0;0;0)$；此外，对于复场 $G^{(n)}_b = \mathrm{Re}G^{(n)}_b + i\mathrm{Im}G^{(n)}_b$ 和 Grassmann 单项式，泛函导数的作用分别为

$$\frac{\delta}{\delta G^{(n)}_b} := 2^{2N}\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{Re}G^{(n)}_b} - i\frac{\partial}{\partial \mathrm{Im}G^{(n)}_b}\right), \quad \frac{\delta}{\delta\psi^{\varepsilon}_{\eta}}\prod_{j=1}^{n}\psi^{\varepsilon_j}_{\eta_j} := \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\delta(\eta-\eta_k)\prod_{j\neq k}\psi^{\varepsilon_j}_{\eta_j}, \tag{2.11}$$

其中第二种方法可通过线性性推广到一般的 Grassmann 多项式。

2.2 树展开

根据方程式（2.7），方程式（2.9）可写成关于核 $W^{(h)}$ 的递归关系，其形式依赖于 $W^{(h+1)}$。核 $W^{(h+1)}$ 可以保持隐式，也可以进一步用$W^{(h+2)}$展开。按照重整化群语境中的惯例，我们只展开无关核，也就是满足 $D_{sc} < 0$的核；对于一个类型为 $(\psi)^{2q}(G)^p(\dot G)^{\dot p}(\ddot G)^{\ddot p}$的一般核，

$$D_{sc}(2q;p;\dot p;\ddot p) := 2 - q - p - \dot p - 2\ddot p. \tag{2.12}$$

通过迭代这一过程，我们可以得到核 $W^{(h)}$ 的表示，它由尺度 N 上的所有核，以及尺度 $h' > h$上的相关核和边缘核表示。这一展开的结果可以方便地表示为关于树的无穷和，其中包含单尺度贡献 $\widetilde{W}_{(h)|q,n\,\dot{n}\,\ddot{n}}^{\;\;q}:= W_{(h)|q,n\,\dot{n}}^{\;\;\;\;q}-W_{(h+1)|q,n\,\dot{n}\,\ddot{n}}^{\;\;\;\;q}$:

$$\widetilde{W}^{(h)|q,q}_{\underline{n};\underline{\dot{n}};\underline{\ddot{n}}} = \mathscr{S}\sum_{\tau\in\mathfrak{T}_{h,N}}^{*}\sum_{\mathbf{P}\in\mathcal{P}_\tau}^{**}\widetilde{W}[\tau,\mathbf{P}], \tag{2.13}$$

其含义如下。

1. $\mathfrak{T}_{h,N}$ 是尺度 h 与 N之间的 Gallavotti-Nicol`o 树集合。一棵树 $\tau\in\mathfrak{T}_{h,N}$ 满足：根不是分支点，且节点从根到端点按偏序排列（若 w 在树上位于 v 之后，我们记作 $v\prec w$ ）。除根以外的节点 v 称为顶点，其集合记为 $V(\tau)$；每个顶点 v都带有一个尺度标签 h_v，这是介于 $h+1$与 $N+1$之间的整数；根据定义，根的尺度标签等于 h 。对 $\mathfrak{T}_{h,N}$ 求和时的 $*$ 条件是：沿根向下必须始终有且仅有一个非端点顶点 v_0，其尺度标签为 $h_{v_0}=h+1$ （见图 3）。

2. $\mathcal{P}_\tau$是树 τ的一组装饰，每个装饰$\mathbf{P}\equiv\{P_v,Q_v\}_{v\in V(\tau)}$ 称为一组场标签。任意 $f\in\mathbf{P}$ 都带有一个符号 ε_f和一个变量 $\eta_f\in\Lambda_F$，因此可以为任意 f关联一个 Grassmann 变量 $\psi^{\varepsilon_f}_{\eta_f}$。

在每个顶点 $v\in V(\tau)$ 处， Q_v 是内部场的集合，即对应于在截断期望$\mathcal{E}^T_{(h_v)}$作用下被积分的 Grassmann 变量的那些场；反之， P_v 则标识该顶点处的外场 v，即在 $\mathcal{E}^T_{(h_v)}$作用下未被积分的 Grassmann 变量。场标签须满足以下约束。

2.1. 如果 v_0 是紧随根之后的顶点，那么 P_{v_0} 标识由核 $W_{(h)|q,n\,\dot{n}\,\ddot{n}}^{\;\;\;\;q}$ 在方程式 (2.13) 的等式左边中由标签 q、$\underline{n}$、$\underline{\dot{n}}$、$\underline{\ddot{n}}$ 确定的场集合。2.2. 如果 $v\in V(\tau)$ 不是端点（我们将记作 $v\in V_0(\tau)$），那么 $|Q_v|\geq 2$，即始终至少有两个场被积分。2.3. 如果 v_1、.....、v_s 是沿 τ紧随 v之后的顶点，那么 $P_v\dot{\cup}Q_v=\dot{\cup}_{j=1}^{s}P_{v_j}$。2.4. 如果 $v\in V(\tau)$ 是端点（我们将记作 $v\in V_e(\tau)$），那么 $Q_v=\emptyset$；此外，如果$h_v<N+1$， P_v 标识一组场（至多四个，其中至少有两个 ψ 变量），对应于一个非无关核（即满足 $D_{sc}\equiv D_{sc}(P_v)\geq 0$，见方程式 (2.12)）， $W^{(h_v-1)}{}_{P_v}$。反之，如果 $h_v=N+1$， P_v 可以标识一个无关核或非无关核（即分别满足 $D_{sc}(P_v)<0$ 或 ≥ 0 ）， $W^{(N)}_{P_v}$ ，与裸势 $\mathcal{V}$、方程式 (1.44) 相关。2.5. 如果 $v\in V_e(\tau)$ 具有对应于非无关核的 P_v ，那么位于 v 之前的顶点 v' 具有尺度标签 $h_{v'}=h_v-1$ （这反映了上述规定：不将相关核和边缘核按更高尺度上的核展开）。

求和 $\sum^{**}_{\mathbf{P}\in\mathcal{P}_\tau}$ 就是对所有符合上述约束的场标签选择进行求和。

3. $W[\tau,\mathbf{P}]$ 具有以下解析表达式：

$$\widetilde{W}[\tau,\mathbf{P}](\underline{\eta};\underline{b};\underline{\dot{b}};\underline{\ddot{b}}) = \frac{\sigma_{\mathbf{P}}}{s_{v_0}!}\int_{\Lambda_F} d\underline{\eta}_{Q_{v_0}}\,\mathcal{E}^T_{(h_{v_0})}\big(\psi_{\tilde{P}_{w_1}},\dots,\psi_{\tilde{P}_{w_{s_{v_0}}}}\big)\prod_{j=1}^{s_{v_0}}\widetilde{W}[\tau_{w_j},\mathbf{P}_{w_j}]\big((\underline{\eta};\underline{b};\underline{\dot{b}};\underline{\ddot{b}})_{P_{w_j}}\big), \tag{2.14}$$

其中：

3.1. $\sigma_{\mathbf{P}}$ 是一个符号；3.2. 对于 $v\in V_0(\tau)$，w_1、…、w_{s_v} 是沿着 τ 和 $\mathbf{P}_{w_j}\equiv\bigcup_{v\succeq w_j}P_v$ 位于 v 之后的顶点；3.3. $\tilde{P}_v := P_v\cap Q_{v'}$，其中 v' 是沿着 τ 位于 v 之前的顶点，而 $\psi_{\tilde{P}_v}\equiv\prod_{f\in\tilde{P}_v}\psi^{\varepsilon_f}_{\eta_f}$ 表示按适当且预先规定的顺序进行乘积运算；3.4. 如果 $v\in V_0(\tau)$，那么 τ_v 是包含 $v_0=v$ 和 $\widetilde{W}[\tau_v,\mathbf{P}_v]\big((\eta;\,b;\,\dot{b};\,\ddot{b})_{P_v}\big)$ 的子树，其通过方程式 (2.14) 递归定义；如果 $v\in V_e(\tau)$，那么 $\widetilde{W}[\tau_v,\mathbf{P}_v]\big((\eta;\,b;\,\dot{b};\,\ddot{b})_{P_v}\big)$ 是与由装饰 P_v 确定的端点 v 相关联的核，记作 $W^{(h_v-1)}{}_{P_v}\big((\eta;\,b;\,\dot{b};\,\ddot{b})_{P_v}\big)$。

4. $\mathscr{S}$ 是对称化算子，它作用于每个核，对相同的 Grassmann 场和复场的所有标签排列取带符号平均，因此整体核满足方程式（2.10）。

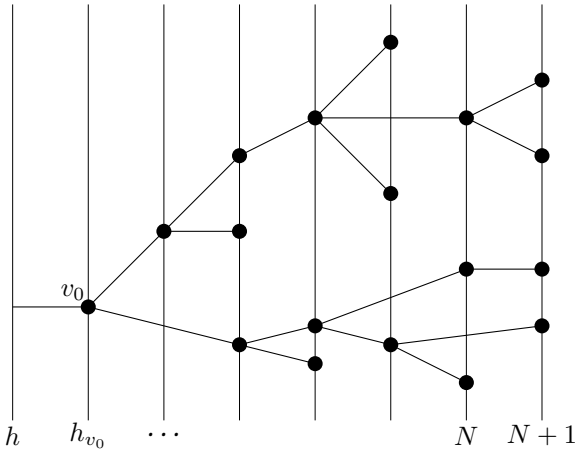


图 3： *Gallavotti-Nicol`o* 树的示例 $\tau\in\mathcal{T}_{h,\,N}$，其中顶点 $v\in V(\tau)$ 以黑点标出。

2.3 树展开的界

注意到 $\widetilde{W}[\tau,\mathbf{P}]$ 可视为与端点相关的核 $\big\{W^{(h_v-1)}{}_{P_v}\big\}_{v\in V_e(\tau)}$ 中的一个泛函。事实上，迭代应用方程式 (2.14) 可得：

$$\widetilde{W}_{\underline{n};\underline{\dot{n}};\underline{\ddot{n}}}[\tau,\mathbf{P}](\underline{\eta};\underline{b};\underline{\dot{b}};\underline{\ddot{b}}) = \tilde{\sigma}_{\mathbf{P}}\prod_{v\in V_0(\tau)}\Big\{\frac{1}{s_v!}\int_{\Lambda_F} d\underline{\eta}_{Q_v}\,\mathcal{E}^T_{(h_v)}\big(\psi_{\tilde{P}_{w_1}},\dots,\psi_{\tilde{P}_{w_{s_v}}}\big)\Big\}\prod_{v\in V_e(\tau)}W^{(h_v-1)}_{P_v}\big((\underline{\eta};\underline{b};\underline{\dot{b}};\underline{\ddot{b}})_{P_v}\big) \tag{2.15}$$

其中 $\tilde{\sigma}_{\mathbf{P}} \equiv \prod_{v\in V_0(\tau)} \sigma_{\mathbf{P}_v} \in \{\pm\}$。树展开是控制核 $\widetilde{W}^{(h)}$ 大小的便捷工具，如方程式 (2.13) 所示。事实上，引入

$$\Pi^{(h,N]}(b_1,b_2) := \frac{1}{2}\int d\eta_1 d\eta_1' d\eta_2 d\eta_2' c_{b_1}(\eta_1,\eta_1') c_{b_2}(\eta_2,\eta_2') g^{(h,N]}_{\eta_1',\eta_2} g^{(h,N]}_{\eta_2',\eta_1}, \tag{2.16}$$

$$Q^{(N)}(\eta_1,\eta_2,\eta_1',\eta_2') := -\frac{1}{4}\int dbdb'\lambda g^A_{b,b'}\Big(c_b(\eta_1,\eta_1')c_{b'}(\eta_2,\eta_2') - c_b(\eta_2,\eta_1')c_{b'}(\eta_1,\eta_2')\Big), \tag{2.17}$$

分别是核 $W_{(h)|0,0\,(1,1);\emptyset;\emptyset}$ 和 $W^{(h)|2}{}^{2}_{,\emptyset\,\emptyset\,\emptyset\,;;}$的最低阶贡献，我们可以证明以下命题。

命题 2.1。 对于任意固定的 $\vartheta,\theta\in(0,1)$，存在一个常数 $C_0\geq 1$，使得对于任意 $R\geq 1$ 和 $0\leq h\leq N$，以下结论成立。假设在每个尺度 $h<k\leq N$ 上，非无关核都满足以下界：

$$\big\|W^{(k)|1,1}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset}\big\|^w_1 \leq R\lambda 2^{-\vartheta k};\quad \big\|(W^{(k)|2,2}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset} - Q^{(N)})\big\|^w_1 \leq R\lambda^{\frac{5}{4}}; \tag{2.18}$$

$$\big\|W^{(k)|1,1}_{1;\emptyset;\emptyset} - c\big\|^w_1 \leq R\lambda;\ \big\|W^{(k)|1,1}_{n;\emptyset;\emptyset}\big\|^w_1, \big\|W^{(k)|1,1}_{\emptyset;n;\emptyset}\big\|^w_1 \leq \lambda^{\frac{n-1}{2}}\ \textit{for } n\geq 2; \tag{2.19}$$

$$\big\|g^A * (W_{(k)|0,0\,(1,1);\emptyset;\emptyset} - \Pi_{(k,N]})\big\|^w_1 \leq R\lambda; \tag{2.20}$$

$$\big\|W^{(k)|0,0}_{(n_1,n_2);\emptyset;\emptyset}\big\|^w_1, \big\|W^{(k)|0,0}_{\emptyset;(n_1,n_2);\emptyset}\big\|^w_1, \big\|W^{(k)|0,0}_{n_1,n_2;\emptyset}\big\|^w_1 \leq \lambda^{\frac{n_1+n_2-2}{2}}\ \textit{for } n_1+n_2\geq 3. \tag{2.21}$$

那么在尺度 h 上，对于 $\lambda \leq (C_0R^4)^{-1}$，以下界成立：

$$\big\|W^{(h)|0;0}_{n;\emptyset;\emptyset}\big\|^w_1, \big\|W^{(h)|0;0}_{\emptyset;n;\emptyset}\big\|^w_1 \leq C_0 2^N\lambda^{\frac{n-1}{2}};\ \big\|W^{(h)|0;0}_{\emptyset;\emptyset;n}\big\|^w_1 \leq C_0\lambda^{\frac{5}{8}n}; \tag{2.22}$$

$$\big\|g^A * W^{(h)|0;0}_{(1,1);\emptyset;\emptyset}\big\|^w_1 \leq C_0;\ \big\|W^{(h)|1,1}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset}\big\|^w_1 \leq RC_0\lambda 2^h \tag{2.23}$$

对于所有其他核：

$$\big\|W^{(h)|q,q}_{\underline{n};\underline{\dot{n}};\underline{\ddot{n}}}\big\|^w_1 \leq C_0^{1+\dim\underline{n}+\dim\underline{\dot{n}}+\dim\underline{\ddot{n}}}\lambda^d 2^{hD_{sc}} \times \begin{cases} 2^{\theta(h-N)} & \dim\underline{\ddot{n}}>0 \\ 1 & \textit{otherwise}, \end{cases} \tag{2.24}$$

满足 $D_{sc}\equiv D_{sc}(2q;$ 维数$n;$ 维数 $\dot{n};$ 维数 $\ddot{n})$，见方程式 (2.12)，以及

$$d\equiv d(2q;\underline{n};\underline{\dot{n}};\underline{\ddot{n}}) := \begin{cases} \max\{1,\frac{2}{5}q\}, & \dim\underline{n},\dim\underline{\dot{n}},\dim\underline{\ddot{n}}=0 \\ \frac{1}{4}\max\{q-1,0\}+\frac{1}{2}(|\underline{n}|+|\underline{\dot{n}}|-\dim\underline{n}-\dim\underline{\dot{n}})+\frac{5}{8}|\underline{\ddot{n}}|, & \textit{otherwise}. \end{cases} \tag{2.25}$$

注意，方程式 (2.18)-(2.21)对于非无关核，比方程式 (2.22)-(2.23)（$h=k$）更强。因此，方程式 (2.22)-(2.23)将称为标准维数界，而方程式 (2.18)-(2.21)则称为改进界。命题 2.1 通过将更高尺度上的标准维数界作为输入，确立了改进界的有效性。后者的证明见第3节。

证明。 命题 2.1 实际上可直接由以下核的界推出 $\widetilde{W}^{(h)}$（参见方程式 (2.13)）：

$$\big\|\widetilde{W}^{(h)|q,q}_{\underline{n};\underline{\dot{n}};\underline{\ddot{n}}}\big\|^w_1 \leq \big(1-2^{\theta-1}\big)C_0^{1+\dim\underline{n}+\dim\underline{\dot{n}}+\dim\underline{\ddot{n}}}2^{hD_{sc}}\lambda^d \times \begin{cases} R & |\underline{n}|,|\underline{\dot{n}}|,|\underline{\ddot{n}}|=0,\ q=1 \\ 2^{\theta(h-N)} & |\underline{\ddot{n}}|\geq 1 \\ 1 & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{2.26}$$

在命题2.1的相同假设下，方程式（2.26）在附录D中得证。

对于任意含有 $|\dot{n}| \geq 1$ 的无关核，根据构造，我们有：

$$W^{(h)|q,q}_{\underline{n};\dot{n};\ddot{n}} = \sum_{k=h}^{N-1} \widetilde{W}^{(k)|q,q}_{\underline{n};\dot{n};\ddot{n}} + W^{(N)|q,q}_{\underline{n};\dot{n};\ddot{n}},$$

因此，将方程式 (2.26) 与尺度 N下各核的界结合起来，我们得到：

$$\begin{aligned} \|W^{(h)|q,q}_{\underline{n};\dot{n};\ddot{n}}\|^w_1 \leq & \sum_{k=h}^{N-1} 2^{kD_{sc}} \|\widetilde{W}^{(k)|q,q}_{\underline{n};\dot{n};\ddot{n}}\|_{(k)} + \|W^{(N)|q,q}_{\underline{n};\dot{n};\ddot{n}}\|^w_1 \\ \leq & \sum_{k=h}^{N} 2^{kD_{sc}} \big(1 - 2^{\theta-1}\big) C_0^{1+\dim \underline{n}+\dim \dot{n}+\dim \ddot{n}} \lambda^d 2^{\theta(k-N)} \\ \leq & C_0^{1+\dim \underline{n}+\dim \dot{n}+\dim \ddot{n}} \lambda^d 2^{hD_{sc}} 2^{\theta(h-N)}, \end{aligned} \tag{2.27}$$

这里我们用到 $\|W^{(N)|q}_{\ddot{n}}\|^w_1 \leq 2^{ND_{sc}}\big(1-2^{\theta-1}\big) C_0^{1+\dim n+\dim \dot{n}+\dim \ddot{n}} \lambda^d$ 同样成立，并且对于无关核，$D_{sc} \leq -1$。对于 $W^{(h)|0}_{\emptyset;\emptyset;n}$，以及满足 $|\ddot{n}| = 0$ 的无关核，其估计与方程式 (2.27) 中的推导相同，但没有短记忆因子 $2^{\theta(h-\bar{N})}$。按照方程式 (2.27) 中的相同步骤，我们还得到方程式（2.22）中相关核 $W^{(h)|0}_{\underline{n};\emptyset;\emptyset}$ 和 $W^{(h)|0}_{\underline{n};\emptyset;\emptyset}$ 的估计；然而，它们在 N 中无界，因为$D_{sc} = +1$。事实上，对于其他非无关核，我们无法像方程式 (2.27) 那样处理。举例来说，考虑相关核 ψ^2。写作 $W^{(h)|1}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset} = \widetilde{W}^{(h)|1,1}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset} + W^{(h+1)|1,1}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset}$ 后，我们用方程式 (2.26) 估计第一项，而对第二项则利用方程式（2.18）中的第一个界：

$$\|W^{(h)|1,1}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset}\|^w_1 \leq \|\widetilde{W}^{(h)|1,1}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset}\|^w_1 + \|W^{(h+1)|1,1}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset}\|^w_1 \leq \big(1-2^{\theta-1}\big) C_0 R\lambda 2^h + R\lambda 2^{-\vartheta(h+1)} \leq C_0 R\lambda 2^h,$$

如果 $C_0 \geq 2^{-2\theta+1}$。其他非无关核的估计在定性上也遵循完全相同的思路，因此为简洁起见将其省略。总之，可以得到方程式（2.22）-（2.23）中的界，其中 C_0 （在命题 2.1 和方程式（2.26）中相同）与 R无关，并且 λ小于（$C_0 R^4$）$^{-1}$，从而证明了命题2.1的结论。 □

命题 2.1表明，只要相关核和边缘核（即满足 $D_{sc} \leq -1$并依据方程式（2.24）定义的核）在所有更高尺度上满足适当的界，多尺度展开就是适定且行为良好的。这一性质的证明实际上是本文工作的关键点，将在下一小节中讨论；一般而言，它也是每一项重整化群分析的关键点。

3 相关项与边缘项的界

在本研究中，与 [7, 24] 类似， [28], 控制非无关项的核心思路是利用玻色子传播子的非局域性（参见方程式 (1.27) 及其后文）。

定理 3.1。 对于每个 ϑ，$\theta \in (0,\ 1)$ 固定的情形，存在 $N_0 \geq 1$，$R \geq 1$ 以及 $\lambda_0 > 0$，使得对于任意 $N \geq N_0$ 和 $\lambda \leq \lambda_0$，方程式 (2.18)-(2.21) 以及方程式 (2.22)-(2.24) 中关于 $k = h$的界在每个尺度 $0 \leq h \leq N$上均成立。

关于定理 3.1 对主定理中出现的核的界的推论1.4，请参见第5.1小节。

定理 *3.1* 的证明。 证明通过对核的尺度指标 h 进行归纳来完成：我们将把 R 视为归纳假设中界的自由参数，并试图证明，只要 $\lambda \le \lambda_0$ 满足 λ_0 相对于 R足够小，且 R 足够大但固定，就可以完成归纳步骤。事实证明， R 和 λ_0 的一种可行取值为

$$R \ge \mathfrak{C} := \max_{j=0}^{4} \mathfrak{c}_j C_0^8, \qquad \lambda_0 = \min\left\{ (C_0 R^4)^{-1}, \min_{j=0}^{7} (\mathfrak{c}'_j C_0^{12} R)^{-1} \right\}, \tag{3.1}$$

其中 $C_0 \ge 1$ 与命题 2.1 中的相同，而 $\mathfrak{c}_j$ 和 $\mathfrak{c}'_j$ 是与C_0无关的常数， R 它们将在本小节的证明过程中出现。

为了解方程式 (3.1) 的由来，我们先注意到，对于归纳基，即在尺度 $h = N$上，由于势在方程式 (1.44) 中有显式表达式，因此可以找到常数 $\mathfrak{c}_0$， $\mathfrak{c}'_0 \ge 1$ 使得方程式 (2.22)-(2.24)、(2.18)-(2.21) 中的界对 $\lambda \le (\mathfrak{c}'_0)^{-1}$以及 $R \ge \mathfrak{c}_0$均成立。

对于归纳步骤，我们假设该断言在尺度 $h+1$ 及之前均成立，并证明它在尺度 h 上也成立。首先，我们可以应用命题 2.1，由此可知方程式 (2.22)-(2.24) 中的界在尺度 h 上对 $\lambda \le \lambda_0$ 成立，其中 R, λ_0 如上所述（注意，根据构造，$\lambda_0 \le (C_0 R^4)^{-1}$）。现在非平凡之处在于证明方程式 (2.18)-(2.21) 中的界在尺度 h 上成立，同时假定方程式 (2.22)-(2.24) 在同一尺度上成立。本小节余下部分将用于证明这一事实。为清楚起见，为避免与常数混淆，本小节中我们将 R 和 C_0 视为大于 1 的一般参数，它们出现在方程式 (2.22)-(2.24) 的界中，因此我们将在接下来的估计中明确追踪它们的依赖关系。反过来，我们将用符号 $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}', \mathfrak{c}'', \ldots$ 表示与 R 和 C_0无关的量。

3.1 电子自能

我们首先证明与核 $W^{(h)|1}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset}{}^{1}{}_{;;}$相关的界，该核对应于 Grassmann 单项式 ψ^2，也称为电子自能。本小节的目标是证明：

$$\left\| W^{(h)|1,1}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset} \right\|_1^w \le \mathfrak{c}_1 C_0^5 \lambda 2^{-\vartheta h}, \tag{3.2}$$

其中 C_0 如命题 2.1, $\lambda \le (\mathfrak{c}'_1 C_0^2 R)^{-1}$，且常数 $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}'_1 \ge 1$ 与 C_0, R无关。起点是为该核推导一种方便的表示形式。

引理 3.2。 下面的恒等式成立：

$$W^{(h)|1,1}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset}(\eta_1, \eta_2) = \sum_{j=1}^{4} \mathcal{A}_j(\eta_1, \eta_2) \tag{3.3}$$

其中，回顾一下，$\mu_{N,\lambda} = e^{-\frac{1}{2}\lambda 2^{-2N} g^A_{\mu,\mu}(0)}$ $\mathcal{A}_j(\eta_1, \eta_2)$ 由下式给出

$$\mathcal{A}_1(\eta_1, \eta_2) = 2^N (\mu_{N,\lambda} - 1) \int db \left(c_b(\eta_1, \eta_2) - \int d\eta d\eta' c_b(\eta_1, \eta) g^{(h,N]}_{\eta,\eta'} W^{(h)|1,1}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset}(\eta', \eta_2) \right), \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2(\eta_1, \eta_2) = \sum_{n \ge 1} \frac{\mu_{N,\lambda}}{n^2} \int db_1 db\, \lambda g^A_{b_1,b} \Big\{ & c_{b_1}(\eta_1, \eta_2) W^{(h)|0,0}_{n;\emptyset;\emptyset}(b) + \int d\eta d\eta' c_{b_1}(\eta_1, \eta) g^{(h,N]}_{\eta,\eta'} \times \\ & \times \left[W^{(h)|1,1}_{n;\emptyset;\emptyset}(\eta', \eta_2; b) - W^{(h)|1,1}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset}(\eta', \eta_2) W^{(h)|0,0}_{n;\emptyset;\emptyset}(b) \right] \Big\}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A}_3(\eta_1,\eta_2)= \\
&=2^{-N}\sum_{n_1\geq 1,n_2\geq 2}\frac{\mathcal{N}_{n_1,n_2}}{(n_1+n_2)^2}\int db_1 dbdb'\lambda g^A_{b_1,b}\delta(b_1-b')\times \\
&\times\Big\{c_{b_1}(\eta_1,\eta_2)\Big[-W^{(h)|0,0}_{n_1;n_2;\emptyset}(b;b')+W^{(h)|0,0}_{n_1;\emptyset;\emptyset}(b)W^{(h)|0,0}_{\emptyset;n_2;\emptyset}(b')\Big]+\int d\eta d\eta' c_{b_1}(\eta_1,\eta)g^{(h,N]}_{\eta,\eta'}\times \\
&\times\Big[-W^{(h)|1,1}_{n_1;n_2;\emptyset}(\eta',\eta_2;b;b')+W^{(h)|1,1}_{n_1;\emptyset;\emptyset}(\eta',\eta_2;b)W^{(h)|0,0}_{\emptyset;n_2;\emptyset}(b')+W^{(h)|0,0}_{n_1;\emptyset;\emptyset}(b)W^{(h)|1,1}_{\emptyset;n_2;\emptyset}(\eta',\eta_2;b')\Big] \\
&-\int d\eta d\eta' c_{b_1}(\eta_1,\eta)g^{(h,N]}_{\eta,\eta'}W^{(h)|1,1}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset}(\eta',\eta_2)\Big[-W^{(h)|0,0}_{n_1;n_2;\emptyset}(b;b')+W^{(h)|0,0}_{n_1;\emptyset;\emptyset}(b)W^{(h)|0,0}_{\emptyset;n_2;\emptyset}(b')\Big]\Big\},
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_4(\eta_1,\eta_2)=\sum_{n\geq 2}2^{-N}\int db_1 db\delta(b_1-b)\Big\{&c_{b_1}(\eta_1,\eta_2)W^{(h)|0,0}_{\emptyset;\emptyset;n}(b)+\int d\eta d\eta' c_{b_1}(\eta_1,\eta)\times \\
&\times g^{(h,N]}_{\eta,\eta'}\Big[W^{(h)|1,1}_{\emptyset;\emptyset;n}(\eta',\eta_2;b)-W^{(h)|1,1}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset}(\eta',\eta_2)W^{(h)|0,0}_{\emptyset;\emptyset;n}(b)\Big]\Big\},
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

其中 $\mathcal{N}_{n_1,n_2}$ 是适当的正系数，使得 $\mathcal{N}_{n_1,n_2}\leq (n_1+n_2)_{n_1^2n_2^2}^{\ 2}$。

引理 3.2的证明见附录 B。

记号。为了证明方程式（3.2），我们发现利用与方程式（3.3）中的分解相对应的图形表示会很方便，如图 4所示。对于 $\sharp=a,\ b,\ \ldots\ldots,\ o$，我们将 $\mathrm{Val}(\sharp)(\eta,\ \eta')$ 记为图示（$\sharp$）在图 4中的解析值，即方程式（3.3）分解中对应的项；并将 $\|\mathrm{Val}(\sharp)\|_1^w$记为其加权范数，参见方程式（1.31）。尽管有 15 个图需要讨论，我们将看到，在适当意义下，其中只有一部分是独立的（参见注3.4）。

注 3.3。图4中的分解是理解该理论格点正则化所产生的组合困难的典型例子。在该模型的连续版本中 [25], ，右端将只有图示（d）这一项，其中 $n=1$ （见 [25, 图2]）；类似地，在 [4], 中，费米子相互作用仅保留项 ψ^2、ψ^4 和 $\psi^2G(J)$（参见式（1.21））， 此时只会得到图示（a）、（b）、（d）和（e），其中 $n=1$。在本文中，展开中出现大量项，是由于“裸核” v_n 的形式所致；根据方程式（ 1.29 ），这些裸核涉及对任意阶数的树求和。若采用图 5.(a) 中对裸核 v_n 的表示，我们可以看到，图 5.(b) 中的项（对应于图4中的图示（h））可以作为核 $W^{(h)|1}$、$\emptyset\emptyset\emptyset^{\ 1}$；；的贡献出现。

图中等式左边的团块5.(b) 应视为

$$
\frac{\delta^3\mathcal{V}^{(h)}}{\delta G^{(1)}_{b_2}\delta G^{(1)}_{b_3}\delta G^{(3)}_{b_4}}(\mathbf{0})\equiv 3!W^{(h)|0,0}_{(1,1,3);\emptyset;\emptyset}(b_2,b_3,b_4).
$$

阶乘中的因子 3 对应于 G 个场的数量，这等于图示中连接到团块的波浪线数量。现在，由于一般而言我们必须预期图 5.(b) 的等式左边会出现任意数量（比如 s条）的波浪线，按照这种展开，我们最终会得到无界阶乘（比如 $s!$），从而导致展开出现组合发散。我们解决这个问题的方法是将图 5.(b) 等式左边的图示改写为右端所示的形式，即把虚线末端的一簇波浪线（代表一个狄拉克 δ 函数）“隐藏”起来：这样便不会产生组合问题，因为团块上的点数有界。辅助源 G 的作用，正是以解析方式实现这里通过图示直观解释的做法。

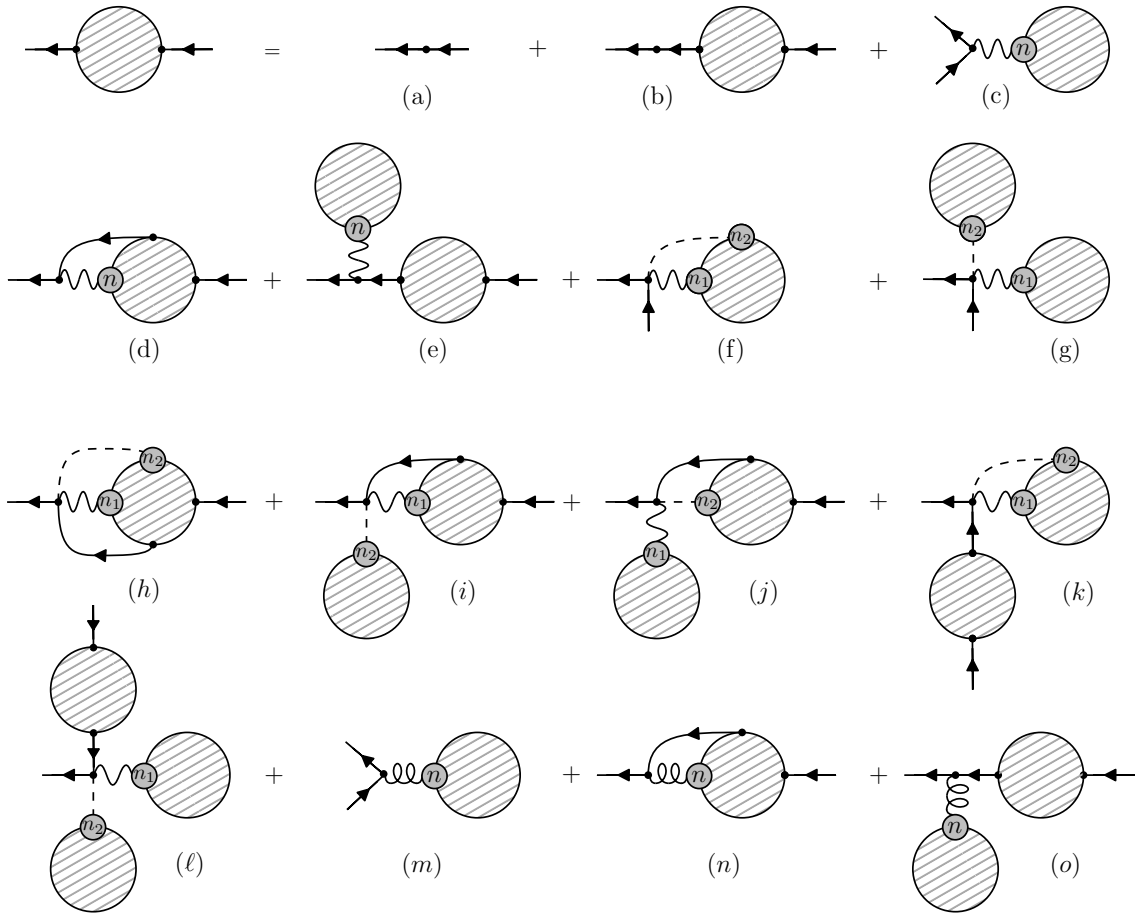


图4：方程式 (3.3) 的图形表示。图按照其在方程式 (3.3) 的展开中出现的顺序编号：图 (a)、(b) 对应于 $\mathcal{A}_1$，$(c)-(e)$ 对应于 $\mathcal{A}_2$，$(f)-(l)$ 对应于 $\mathcal{A}_3$，而 $(m)-(o)$ 对应于 $\mathcal{A}_4$。带有点状端点的实线和波浪线分别表示费米子和玻色子传播子，而带有黑色点状端点的虚线和卷曲线则表示狄拉克δ函数。团块（带有东北向线条图案的大圆）表示核，这些核与外场相关联，并通过连接到它们的线的类型加以区分：连接到团块的每条实线、波浪线、虚线和卷曲线分别标识一个 ψ、G、G 和 G 场。

图示(a)。这只是裸四次核，其加权范数可由下式界定（参见方程式（1.27））

$$\|\operatorname{Val}(a)\|_1^w \le 2^N \|c\|_1^w |\mu_{N,\lambda} - 1| \le 12K'\lambda N 2^{-N} \le \mathfrak{c}_{1,1}\lambda 2^{-\vartheta N},$$

其中我们使用了方程式 (1.19)、(1.31) 中的定义（回忆 $r=1$，参见方程式 (1.10) 下文）来得到 $\|c\|_1^w \le 6e^{\hat{\kappa}2^{-\frac{N}{2}-1}} \le 12$ 对于 N 足够大时，$\mu_{N\text{的显式表达式，}\lambda}$（方程式 (3.26) 下文）以及 $|g_\mu^A$ 的界，$\mu(0)| \le \|g^A\|_\infty \le K'N$（参见方程式 (1.28)）。

图示(b)。此处的界为

$$\|\operatorname{Val}(b)\|_1^w \le 2^N \|c\|_1^w |\mu_{N,\lambda} - 1| \|g^{(h,N]}\|_1^w \|W_{\emptyset;\emptyset;\emptyset}^{(h)|1,1}\|_1^w \le \tilde{K}C_0 R\lambda 2^N \|c\|_1^w |\mu_{N,\lambda} - 1|,$$

其中我们用到了：对某个[9] $\tilde{K} > 0$，$\|g^{(h,N]}\|_1^w \le \tilde{K}2^{-h}$，并且根据假设，如果 $\lambda \le (C_0R^4)^{-1}$，则有 $\|W^{(h)|1}{}_{;;\emptyset}^{,\emptyset\emptyset}\|_1^w \le C_0 R\lambda 2^h$。取 $\lambda \le \min\{(C_0R^4)^{-1}, (RC_0\tilde{K})^{-1}\}$，我们看到

[9]例如，可以选择 $\tilde{K} = 320K\hat{\kappa}^{-2}$，参见方程式 (2.4)。

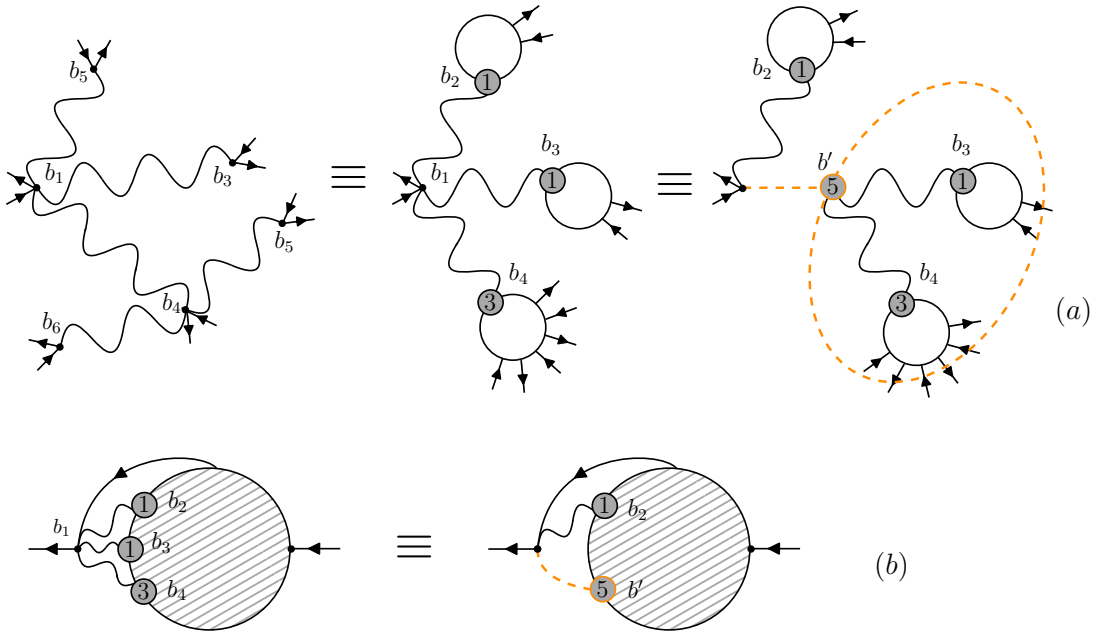


图5：(a)： $v_n(b)O_b^n$的合成表示，由图1 出发，首先将以 b_2、b_3 和 b_4 为根的每棵子树分别收缩成一个深色团块（标签 (n) 表示子树的阶），然后将以 b_3 和 b_4 为根的子树视为一棵以b'为根的树，其中 $b' = b$ （虚线表示狄拉克 δ 函数）。(b)：由 (a) 中的裸核产生的核 $W^{(h)|1}_{,\ \emptyset\emptyset\emptyset}{}^{1}_{;\ ;}$ 的贡献。

Val(b) 可以被界定为 Val(a)，即

$$\|\operatorname{Val}(b)\|_1^w \leq \mathfrak{c}_{1,1}\lambda 2^{-\vartheta N}. \tag{3.8}$$

˜ λ 上的约束意味着 $\mathfrak{c}_1' \geq K$。

注 3.4。图 (b) 是第一个例子，说明图4中的图并非都具有独立的界：每当一个图示中出现“修饰费米子线”（图4第一行的第一个图示），为了得到一个上界，我们可以在图示中删去修饰费米子线，代价是收缩 λ，最终这会体现为改变方程式 $\mathfrak{c}_1'$ （3.2）中的常数 b）、（k）和（o）分别可先验地由（a）、（f）和（m）界定。

图示 (c)。 在这种情况下，Val(c)$(\eta_1,\ \eta_2)\ = 0$。这实际上是 电荷共轭 对称性的结果（参见引理 E.1），该引理给出了以下抵消关系：

$$\int_{\Lambda_B^p} db_1' \dots db_p' W^{(h)|0,0}_{(n_1,\dots,n_p);\emptyset;\emptyset}(b_1',\dots,b_p') \prod_{j=1}^{p} g^A_{b_j,b_j'} = 0, \tag{3.9}$$

对于每个 $p \geq 1$ 奇数， n_1，……， $n_p \geq 1$ 以及 b_1，……， $b_p \in \Lambda_B$。特别是对于 $p = 1$，我们得到 Val(c)$(\eta_1,\ \eta_2)\ = 0$。方程式 (3.9) 的证明可通过注意到，由于电荷共轭 对称性（参见引理 E.1），立即得出：

$$W^{(h)|0;0}_{(n_1,\dots,n_p);\emptyset;\emptyset}(b_1',\dots,b_p') = W^{(h)|0;0}_{(n_1,\dots,n_p);\emptyset;\emptyset}(\bar{b}_1',\dots,\bar{b}_p'),$$

其中回顾一下，若 $b=(x,\ \mu,\ \bar{\epsilon})$，$b\equiv(x,\ \mu,\ -\epsilon)$。利用 $g^A_{b,\,b'}=-g^A_{\underline{b},\,\underline{b}'}$ 以及 p 为奇数这一事实，我们得到：

$$\int d\underline{b}'\prod_{j=1}^{p}g^A_{b_j,b'_j}\times W^{(h)|0;0}_{\underline{n};\emptyset;\emptyset}(\underline{b}')=\int d\underline{b}'\prod_{j=1}^{p}g^A_{b_j,b'_j}\times W^{(h)|0;0}_{\underline{n};\emptyset;\emptyset}(\overline{\underline{b}}')=$$
$$=\int d\underline{b}'\prod_{j=1}^{p}g^A_{b_j,\overline{b'_j}}\times W^{(h)|0;0}_{\underline{n};\emptyset;\emptyset}(\underline{b}')=-\int d\underline{b}'\prod_{j=1}^{p}g^A_{b_j,b'_j}\times W^{(h)|0;0}_{\underline{n};\emptyset;\emptyset}(\underline{b}'),$$

如所需。

图示 (d)。这是第一个必须利用 g^A 的非局域性的情形。该图示的解析值为

$$\mathrm{Val}(d)(\eta_1,\eta_2)=\sum_{n\geq1}\frac{\mu_{N,\lambda}}{n^2}\int dbdb'\int d\eta d\eta' c_b(\eta_1,\eta)\lambda g^A_{b,b'}g^{(h,N]}_{\eta,\eta'}W^{(h)|1,1}_{n;\emptyset;\emptyset}(\eta',\eta_2;b'),$$

它可以被估界为

$$\begin{aligned}
&\|\mathrm{Val}(d)\|^w_1\leq\\
&\leq\sum_{n\geq1}\frac{\lambda}{n^2}\int\frac{dbdb'}{L^2}\int d\eta d\eta' d\eta_1 d\eta_2 e^{\frac{\kappa}{2}\sqrt{\delta^D(\eta,\eta',\eta_1,\eta_2,b,b')}}|c_b(\eta_1,\eta)||g^A_{b,b'}||g^{(h,N]}_{\eta,\eta'}||W^{(h)|1,1}_{n;\emptyset;\emptyset}(\eta',\eta_2;b')|\\
&\leq\sum_{n\geq1}\frac{\lambda}{n^2}\int\frac{dbdb'}{L^2}\int d\eta d\eta' d\eta_1 d\eta_2\left(e^{\frac{\kappa}{2}\sqrt{\delta^D(b,\eta,\eta_1)}}|c_b(\eta_1,\eta)|\right)\left(e^{\frac{\kappa}{2}\sqrt{\delta^D(b-b')}}|g^A_{b,b'}|\right)|g^{(h,N]}_{\eta,\eta'}|\times\\
&\times\left(e^{\frac{\kappa}{2}\sqrt{\delta^D(\eta',\eta_2,b')}}|W^{(h)|1,1}_{n;\emptyset;\emptyset}(\eta',\eta_2;b')|\right)=\\
&=\sum_{n\geq1}\frac{\lambda}{n^2}\int\frac{dbdb'}{L^2}\int d\eta' d\eta_2\tilde{g}^{(h,N]}_{b,\eta'}\left(e^{\frac{\kappa}{2}\sqrt{\delta^D(b,b')}}|g^A_{b,b'}|\right)\left(e^{\frac{\kappa}{2}\sqrt{\delta^D(\eta',\eta_2,b')}}|W^{(h)|1,1}_{n;\emptyset;\emptyset}(\eta',\eta_2;b')|\right),
\end{aligned}$$

其中 $\tilde{g}^{(h,N]}_{b,\,\eta'}:=\int d\underline{\eta}_1 e^{\frac{\kappa}{2}\sqrt{\delta^D}(b,\ \eta,\ \eta_1)}|c_b(\eta_1,\ \eta)||g^{(h,N]}_{\eta\,\eta'}|$。我们通过使用权重 $p=\frac{2}{1-\vartheta}$ 和 $p'=\frac{2}{1+\vartheta}$ 应用 H¨older 不等式：

$$\|\mathrm{Val}(d)\|^w_1\leq\sum_{n\geq1}\frac{\lambda}{n^2}\|g^A\|^w_p\|\tilde{g}^{(h,N]}\|_{p'}\|W^{(h)|1,1}_{n;\emptyset;\emptyset}\|^w_1\leq\sum_{n\geq1}\frac{\lambda}{n^2}\tilde{K}_\vartheta C_0^2 2^{-\vartheta h}\lambda^{\frac{n-1}{2}}\leq\lambda\mathfrak{c}_{1,2}C_0^2 2^{-\vartheta h},$$

其中我们使用了方程式 (2.24)，其中 $\lambda\leq(C_0R^4)^{-1}$，用 $\tilde{K}_\vartheta$ 表示来自$\|\cdot\|_p$，$\|\cdot\|_{p'}$的常数（通过使用方程式 (1.27)），并利用了这样一个事实：$\tilde{g}^{(h,N]}$ 与 $g^{(h,N]}$ 具有相同的维数界，因为 $c_b(\eta_1,\ \eta)$ 是局域的；最后，$\mathfrak{c}_{1,\,2}=\tilde{K}_\vartheta\pi^2/6$ 与 $C_0,\ R$ 无关。

图示 (f)。这是第一个带有虚线的图示，对应于一个狄拉克δ函数（参见 $\mathcal{A}_3$ 中的第一项，方程式 (3.6)）。在估计这类项时，这迫使我们取与波浪线对应的玻色子传播子的 L^∞ 范数：

$$\begin{aligned}
&\|\mathrm{Val}(f)\|^w_1\leq\\
&\sum_{\substack{n_1\geq1\\n_2\geq2}}\frac{\mathcal{N}_{n_1,n_2}}{(n_1+n_2)^2}2^{-N}\lambda\|g^A\|_\infty\|W^{(h)|0,0}_{n_1;n_2;0}\|^w_1\leq\sum_{\substack{n_1\geq1\\n_2\geq2}}\frac{\lambda}{n_1^2n_2^2}2^{-N}K'NC_0^3\lambda^{\frac{n_1+n_2-2}{2}}\leq\mathfrak{c}_{1,3}C_0^3\lambda^{3/2}2^{-\vartheta N},
\end{aligned}$$

这里我们用到了方程（1.27）、（2.24），以及这样一个事实：对于任意 $\vartheta\in(0,\ 1)$，只要 N 足够大，$2^{-N}N\leq2^{-\vartheta N}$ 就成立；此外还有 $\mathcal{N}_{n_1,\ n_2}\leq{}_{(n_1+n_2)}{}_{n_1^2n_2^2}{}^2$；$\mathfrak{c}_{1,\ 3}=K'(\pi^2/6)^{\ 2}$ 不依赖于 $C_0,\ R$。

注 3.5。 图示（f）是某类图中第一个非平凡的情形（在图示（a）之后）。这类图不仅在任意固定尺度 h上满足所需的界，而且实际上会随$N \to \infty$. 趋于消失。为了证明定理 3.1 ，只需将上文中的因子 $2^{-\vartheta N}$ 替换为$2^{-\vartheta h}$；不过值得一提的是，在 N 中追踪小量对于分析该理论的 $N \to \infty$ 极限至关重要（概述见附录 F ）。

图示 (h)。 同样，由于虚线所关联的狄拉克δ函数，我们不得不取 L^∞ g^A 和 $g^{(h,N]}$的范数。我们得到：

$$\| \mathrm{Val}(h)\|_1^w \le \sum_{\substack{n_1\ge 1\\ n_2\ge 2}} 2^{-N} \frac{\mathcal{N}_{n_1,n_2}}{(n_1+n_2)^2} \lambda \|g^A\|_\infty \|g^{(h,N]}\|_\infty \|W^{(h)|1,1}_{n_1;n_2;\emptyset}\|_1^w \le C_0^3 K N \mathfrak{c}_{1,3} \lambda 2^{-h}, \tag{3.10}$$

其中 $\mathfrak{c}_{1,\ 3}$ 与前一项相同，并且我们使用了 $\|g^{(h,N]}\|_\infty \le 2K2^N$ （参见方程式（2.4）） 以及$\|W_{(h\ |1\ 1)\ ,\ ;\ ;\ \emptyset}\|_1^w \le C_0^3 \lambda^{\frac{n_1+n_2-2}{2}} 2^{-h}$，参见方程式（2.24）。这种表面上的对数发散与外部源 $\dot{G}^{n_1,n_2}$的定义有关，它要求取 L^∞ 和$g^{(h,N]}$的范数。我们将在本段末尾（见方程式（3.12）及下文）说明如何消除此发散；现在我们继续讨论图 4 中的其他图示。

图示(i)。 此时的解析值为：

$$\begin{aligned}&\mathrm{Val}(i)(\eta_1,\eta_2) = \\ &\sum_{\substack{n_1\ge 1\\ n_2\ge 2}} \frac{\mathcal{N}_{n_1,n_2}}{(n_1+n_2)^2} 2^{-N} \int d\eta d\eta' \int dbdb' c_b(\eta_1,\eta)\lambda g^A_{b,b'} g^{(h,N]}_{\eta,\eta'} W^{(h)|1,1}_{n_1;\emptyset;\emptyset}(\eta',\eta_2;b') W^{(h)|0,0}_{\emptyset;n_2;\emptyset}(b)\end{aligned} \tag{3.11}$$

并注意到，根据平移不变性以及引理E.1的第2、3 项，有 $W_{\emptyset,n_2,\emptyset}(b) = W_{\emptyset,n_2,\emptyset}((0,0,+))$，即可由图 ($d$) 的界推出该图的界：

$$\begin{aligned}\|\mathrm{Val}(i)\|_1^w \le \sum_{\substack{n_1\ge 1\\ n_2\ge 2}} &\frac{2^{-N}\mathcal{N}_{n_1,n_2}}{(n_1+n_2)^2} \|W^{(h)|0,0}_{\emptyset;n_2;\emptyset}\| \int \frac{d\eta_1 d\eta_2}{L^2} e^{\frac{\kappa}{2}\sqrt{\delta^D(\eta_1,\eta_2)}} \times \\ &\times \left| \int d\eta d\eta' \int dbdb' c_b(\eta_1,\eta)\lambda g^A_{b,b'} g^{(h,N]}_{\eta,\eta'} W^{(h)|1,1}_{n_1;\emptyset;\emptyset}(\eta',\eta_2;b') \right| \le \\ &\le \sum_{n_2\ge 2} \frac{1}{n_2^2} 2^{-N} \|W^{(h)|0,0}_{\emptyset;n_2;\emptyset}\|_1^w |\mu_{N,\lambda}^{-1}| \|\mathrm{Val}(d)\|_1^w \le C_0^3(\pi^2/3)\mathfrak{c}_{1,2}\lambda^{3/2}2^{-\vartheta h}\end{aligned}$$

这里用到了图示 (d) 的界；同样还有$\mathcal{N}_{n_1,n_2} \le (n_1+n_2)^2(n_1 n_2)^{-2}$，当 N 很大时$|\mu_{N,\lambda}^{-1}| \le 2$，以及 $\|W_{(h\ |0\ 0)\ ,;;\emptyset}\|_1^w \le C_0 2^N \lambda^{\frac{n_2-1}{2}}$，根据方程式 (2.22)。注意，若还施加条件 $\lambda \le (C_0^2\pi^4/9)^{-1}$，则有$\|\mathrm{Val}(i)\|_1^w \le C_0^2 \mathfrak{c}_{1,2}\lambda 2^{-\vartheta h}$，这与情形 ($d$)。相同。

注 3.6。我们观察到，需要给出界的图的数目出现了与虚线蝌蚪图的存在相关的第二次减少，即仅有一条虚线外线的团块，如（g）、（i）、（ℓ）。通过可能收缩 λ，即改变公式（3.2）中 $\mathfrak{c}_1'$ 的值，可得 Val(g)、Val(i)、Val(ℓ) 能够分别与 Val(e)、Val(d)、Val(c) 以完全相同的方式给出界（特别是 $\mathrm{Val}(g) = 0$）。

图示 (m)。 我们必须对方程式（3.7）中的第一项给出界，这立即给出

$$\| \operatorname{Val}(m)\|_1^w \le \sum_{n\ge 2} 2^{-N} \|c\|_1^w \|W^{(h)|0,0}_{\emptyset;\emptyset;n}\|_1^w \le 12 \sum_{n\ge 2} 2^{-N} C_0 \lambda^{\frac{5}{8}n} \le 12 C_0 \lambda^{5/4} 2^{-\vartheta h},$$

其中我们使用了 $\|c\|_1^w \le 12$，与情形（a）相同，方程式（2.22）以及 $\lambda \le 1/2^{8/5}$，从而（$1-\lambda^{5/8}$）$^{-1} \le 2$：这意味着 $\mathfrak{c}_1' \ge 2^{8/5}$.

图示 (n)。 弯曲线仍对应于一个狄拉克δ函数，它使我们必须取费米子传播子的 L^∞ 范数。其界为：

$$\| \operatorname{Val}(n)\|_1^w \le \sum_{n\ge 2} 2^{-N} \|g^{(h,N]}\|_\infty \|W^{(h)|1,1}_{\emptyset;\emptyset;n}\|_1^w \le \sum_{n\ge 2} 2KC_0^2 \lambda^{\frac{5}{8}n} 2^{\theta(h-N)} 2^{-h} \le 4KC_0^2 \lambda^{5/4} 2^{-\vartheta h},$$

其中我们使用了方程式（2.24），以及与前一项中 λ相同的假设。

对 (h)**的改进**。 最后，我们回到图（h）。克服表观发散的方法是提取第二条线，即对核 $W^{(h)|1}_{1}$ 进行展开，$n_1\ n_2\ \emptyset\ ;\ ;\ :$ 这使我们能够通过展开为有限个额外图示来消除表观对数发散，每个图示都具有良好的维数估计。类似于方程式（3.3），可以得到以下恒等式，该恒等式证明于附录 B：

$$\begin{aligned}
&W^{(h)|1,1}_{n_1;n_2;\emptyset}(\eta,\eta';b_1;b_2) = \\
&= \frac{n_2^2}{(n_2-1)^2}\mu_{N,\lambda}\int db \lambda g^A_{b_2,b} 2W^{(h)|1,1}_{(n_1,n_2-1);\emptyset;\emptyset}(\eta,\eta';b_1,b)+ \\
&- \sum_{\substack{n_1'\ge 1, n_2'\ge 2\\ n_1'+n_2'=n_2}} 2^{-N}\mathcal{N}_{n_1',n_2'} \int db_1' db_2' \lambda g^A_{b_2,b_1'}\delta(b_2-b_2')\Big[2W^{(h)|1,1}_{(n_1,n_1');n_2';\emptyset}(\eta,\eta';b_1,b_1';b_2')+ \\
&-2W^{(h)|1,1}_{(n_1,n_1');\emptyset;\emptyset}(\eta,\eta';b_1,b_1')W^{(h)|0,0}_{\emptyset;n_2';\emptyset}(b_2') - 2W^{(h)|0,0}_{(n_1,n_1');\emptyset;\emptyset}(b_1,b_1')W^{(h)|1,1}_{\emptyset;n_2';\emptyset}(\eta,\eta';b_2')+ \\
&-W^{(h)|1,1}_{n_1';\emptyset;\emptyset}(\eta,\eta';b_1')W^{(h)|0,0}_{n_1;n_2';\emptyset}(b_1;b_2') - W^{(h)|0,0}_{n_1';\emptyset;\emptyset}(b_1')W^{(h)|1,1}_{n_1;n_2';\emptyset}(\eta,\eta';b_1;b_2')\Big],
\end{aligned} \tag{3.12}$$

其图形表示见图 6。

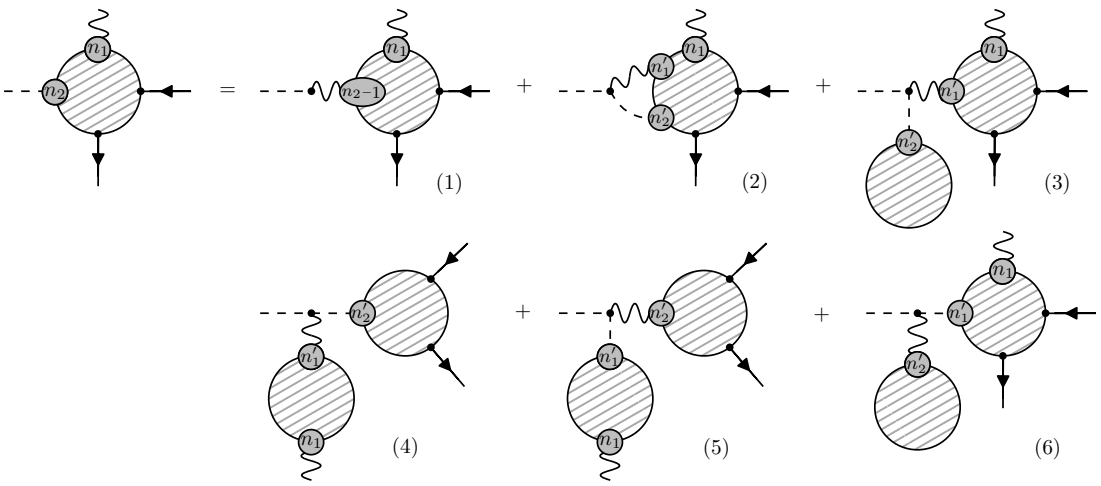


图6：方程式（3.12）的图形表示。

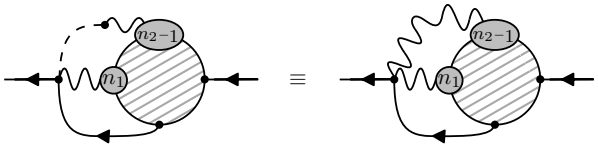


图7：图示（$h1$），将方程式（1）代入图h中的方程式，得到4。

将由 $(h1)$、$(h2)$……、$(h6)$ 表示的图，记作：这些图由 (h)（图 4）替换$W^{(h)|1,\ n_1\ n_2}{}^{1}{}_{;\ ;\ \emptyset}$ 为其展开式 (1)……、(6) 中的各项而得到（如图 6所示）。类似地，将 Val$(h1)$……、Val$(h6)$ 记作它们的解析值，记号同方程式 (3.7) 下方所用。

图示$(h1)$。明确地说，

$$
\begin{aligned}
&-\operatorname{Val}(h1)= \\
&\sum_{\substack{n_1\geq 1\\ n_2\geq 2}} \frac{2^{-N+1}\mu_{N,\lambda} n_2^2\,\mathcal{N}_{n_1,n_2}}{(n_1+n_2)^2(n_2-1)^2}\int db_1 dbd\tilde{b}d\eta d\eta' \lambda^2 g^A_{b_1,b} g^A_{b_1,\tilde{b}} c_{b_1}(\eta_1,\eta) g^{(h,N]}_{\eta_1,\eta'} W^{(h)|(1,1)}_{(n_1,n_2-1);\emptyset;\emptyset}(\eta',\eta_2;b;b'),
\end{aligned}
$$

对费子传播子取 L^1 范数，并对两个玻色子传播子取 L^∞范数，即可得到其上界：

$$
\begin{aligned}
\|\operatorname{Val}(h1)\|_1^w &\leq \sum_{\substack{n_1\geq 1\\ n_2\geq 2}} \frac{2^{-N+1}|\mu_{N,\lambda}| n_2^2\,\mathcal{N}_{n_1,n_2}}{(n_1+n_2)^2(n_2-1)^2} \|c\|_1^w \lambda^2 \|g^A\|_\infty^2 \|g^{(h,N]}\|_1^w \|W^{(h)|1,1}_{(n_1,n_2-1);\emptyset;\emptyset}\|_1^w \leq \\
&\leq 24 K'^2 \tilde{K} C_0^3 \lambda^2 2^{-2h} N^2 2^{-N} \sum_{n_1,n_2\geq 1} \frac{1}{n_1^2 n_2^2} \lambda^{\frac{n_1+n_2-2}{2}} \leq C_0^3 \mathfrak{c}_{1,4} \lambda^2 2^{-\theta N} 2^{-2h},
\end{aligned}
$$

其中 $\mathfrak{c}_{1,\ 4}=(4/3)\pi^4 K'^2\tilde{K}$，这些常数与前面各项中出现的相同。

图 $(h2)-(h6)$。注意，方程式（3.12）右端其余各项均含有维数因子 2^{-N}，在图示上对应于图（2）–（6）中最左侧带有两条虚线和一条波浪线的节点（见图6）。在这种情况下，只需注意到这些图（2）–（6）的解析值都有良好的界：

$$
\begin{aligned}
&\left\|\operatorname{Val}(2)_{n_1,n_2}\right\|_1^w \leq \sum_{\substack{n_1'\geq 1, n_2'\geq 2\\ n_1'+n_2'=n_2}} 2^{-N}\mathcal{N}_{n_1',n_2'}\lambda \|g^A\|_\infty \left\|W^{(h)|1,1}_{(n_1,n_1');n_2';\emptyset}\right\|_1^w \leq \\
&\sum_{\substack{n_1'\geq 1, n_2'\geq 2\\ n_1'+n_2'=n_2}} K' N 2^{-N} \lambda \frac{n_2^2}{n_1'^2 n_2'^2} \lambda^{\frac{n_1+n_1'+n_2'-3}{2}} \left\|W^{(h)|1,1}_{(n_1,n_1');n_2';\emptyset}\right\|_1^w \leq C_0^4 (4\pi^2/3) K' 2^{-N-2h} N \lambda^{\frac{n_1+n_2-1}{2}},
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

其中我们用到了方程式（2.24）以及 $\sum_{\ell=1}^{n-2} \ell^2\, \frac{n^2}{(n-\ell)_2} \leq 4\pi^2/3$ 这一事实。容易验证，其他图 (3) – (6) 也同样满足以下界：

$$
\sup_{j=3}^{6} \|\operatorname{Val}(j)_{n_1,n_2}\|_1^w \leq C_0^5 (4\pi^2/3) K' N 2^{-N} \lambda^{\frac{n_1+n_2-1}{2}}. \tag{3.14}
$$

因此，将它们代入图（h）中（见图4），便可得到一个界：

$$\begin{aligned}\sup_{j=2}^{6}\|\operatorname{Val}(hj)\|_1^w &\le \sum_{\substack{n_1\ge 1\\ n_2\ge 2}} \frac{2^{-N}\mathfrak{N}_{n_1,n_2}}{(n_1+n_2)^2}\lambda\|g^A\|_\infty\|g^{(h,N]}\|_\infty \sup_{j=2}^{6}\|\operatorname{Val}(j)_{n_1,n_2}\|_1^w \\ &\le C_0^5\mathfrak{c}_{1,5}\lambda^{3/2}N2^{-N}\end{aligned} \tag{3.15}$$

其中 $\mathfrak{c}_{1,5} = K'^2K(\pi^2/3)^3$。汇总图示（$a$）到（$o$）中的界，见图 4 一个实现 es 所有图（$d$）之外，都存在一个界，其因子为 $\lambda^{1+\eta}$，其中 $\eta \ge 1/4$。额外的小因子 $\lambda^{1/4}$ 可用于将除（d）以外每个图中的整体常数降至 $\mathfrak{c}_{1,2}/14$，代价是选择依赖于 $\mathfrak{c}_1$ 的 $\mathfrak{c}_1'$，$\mathfrak{c}_{1,3}$，$\mathfrak{c}_{1,4}$，并使得 $\mathfrak{c}_1' \ge \max\{K', 2^{8/5}\}$（见图（$b$）和（$m$））。对所有贡献求和可得，若 $\lambda \le (\mathfrak{c}_1'C_0^2R)^{-1}$

$$\|W^{(h)|1,1}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset}\|_1^w \le 2\mathfrak{c}_{1,2}C_0^5\lambda 2^{-\vartheta h}, \tag{3.16}$$

从而证明方程式（3.2），其中 $\mathfrak{c}_1 \ge 2\mathfrak{c}_{1,2}$，$\mathfrak{c}_{1,2}$ 出现在图（d）中。

3.2 最低次数顶点函数

现在我们将重点放在核 $G^{(1)}\psi^2$上。回顾裸顶点核 c的定义，在方程式（1.19）中，目标是证明

$$\left\|W^{(h)|1,1}_{1;\emptyset;\emptyset} - c\right\|_1^w \le C_0^6\mathfrak{c}_2\lambda, \tag{3.17}$$

其中 C_0 如命题2.1所示，$\lambda \le (\mathfrak{c}_2'C_0^2R)^{-1}$，且常数 $\mathfrak{c}_2$，$\mathfrak{c}_2' \ge 1$ 与 C_0无关，R。

同样，我们的策略是为 $W^{(h)|1}_{,\,1\,\emptyset\,\emptyset}{}^{1}{}_{;;}$推导一个方便的恒等式。类似于引理3.2，将$\delta/\delta\psi^-_{\eta_2}$应用于方程式（B.7），可证明

$$W^{(h)|1,1}_{1;\emptyset;\emptyset}(\eta_1,\eta_2;b) = \mu_{N,\lambda}c_b(\eta_1,\eta_2) + \mathfrak{D}W^{(h)|1,1}_{1;\emptyset;\emptyset}(\eta_1,\eta_2;b), \tag{3.18}$$

其中 $\mu_{N,\,\lambda}$ 如方程式（3.3）下方所示，且 $\mathfrak{D}W^{(h)|1}_{,\,1\,\emptyset\,\emptyset}{}^{1}{}_{;;}$是若干项之和，每一项都可解释为图示 (♮) 的解析值 $\operatorname{Val}(♮)(\eta_1,\ \eta_2;b)$，其理解方式与图 4及其下方的记号相同。本例中，利用备注 3.4 和 3.6，通过研究对其有贡献的一类子项，也可得到 $\mathfrak{D}W^{(h)|1}_{,\,1\,\emptyset\,\emptyset}{}^{1}{}_{;;}$的一个界：可以适当缩小 λ，即对上面的 $\mathfrak{c}_2'$ 值进行规范选取；这样，只需对图 8中标记为 $(♮) = (a)\dots,(k)$ 的图示给出界。除 (b)[10]，外，这些图示都是从一般图 $\mathfrak{D}W^{(h)|1}_{,\,1\,\emptyset\,\emptyset}{}^{1}{}_{;;}$中移除一个虚线蝌蚪图或一个缀饰费米子插入后得到的。

估计遵循与第3.1 小节相同的思路，完整细节不再赘述：我们只讨论主要的新内容。为了从图8中的图示推导出方程式（3.17），我们首先注意到以下事实。

注 3.7（气泡插入）。与上一小节的分析不同，现在图 8 中的某些图也涉及“气泡核” $W^{(h)|0}_{,\,0\ (1,1);\emptyset;\ \emptyset}$ 直接观察可知，它总是与玻色传播子卷积，即呈现为 $g^A * W^{(h)|0}_{,\,0\ (1,1);\emptyset;\ \emptyset}$ 的形式。这

[10]图（b）在这一过程中得以保留，因为为了恢复方程式（3.17）中的界，并没有额外的 λ 次幂可用于应用注记 3.4，这由 $\|W^{(h)|1}_{,\,\emptyset\,\emptyset}{}^{1}{}_{;;\,\emptyset}\|_1^w$ 为 λ 阶所导致。

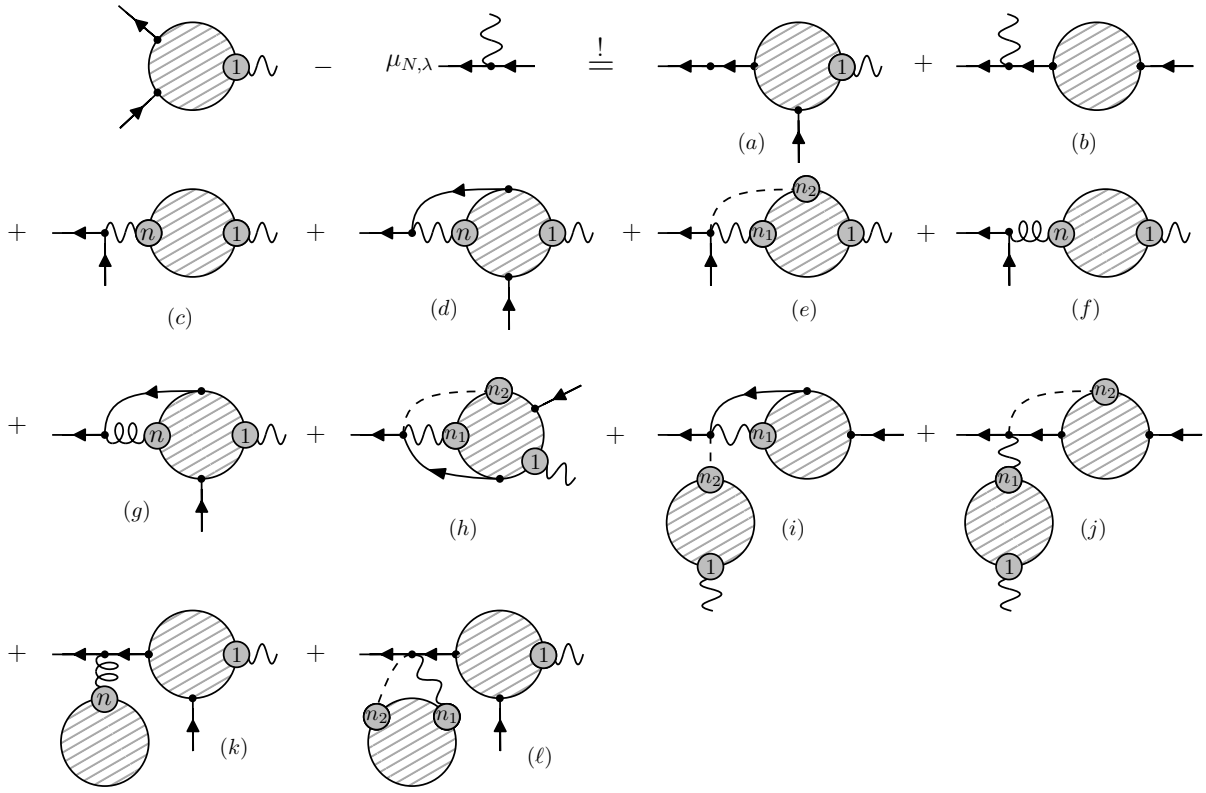


图 8：关于 $\mathfrak{D}W^{(h)|1}{}_{,\,1\,\emptyset\,\emptyset}{}^{1}{}_{;\,;}(\eta_1,\eta_2;\ b)$ 的图示展开。符号 ! = 提示该恒等式成立到可由所列图示控制的图为止；也就是说，只有在考虑约化过程之前的所有图时，该式才成立。约化过程概述于注释 3.4 和 3.6，其中删除虚线蝌蚪图，并将修饰费米子线替换为裸线。

意味着，对 $\|g^A * W^{(h)|0}{}_{,\,0\,(1,1);\emptyset;\,\emptyset}\|_1^w$ 的一个界（如方程式 (2.24) 所给出）就足以[11] 为整个图给出一个界：具体来说，最简单的例子是图 (c)，其表达式为

$$\mathrm{Val}(c)(\eta_1,\eta_2;b)=\mu_{N,\lambda}\sum_{n\geq 1}\frac{\lambda}{n^2}\int_{\Lambda_B^2}db'db''c_{b'}(\eta_1,\eta_2)g^A_{b',b''}W^{(h)|0,0}_{(n,1);\emptyset;\emptyset}(b'',b),$$

因此，利用核 $W^{(h)|0}{}_{,\,0\,(n,n');\emptyset;\emptyset}$ (方程式 (2.23)-(2.24)) 的界，以及根据方程式 (1.27)，$\|g^A\|_1^w\leq\frac{32\pi}{\kappa^2}$ 这一事实，我们得到：

$$\begin{aligned}\big\|\,\mathrm{Val}(c)\big\|_1^w&\leq\|c\|_1^w\lambda\Big(\big\|g^A*W^{(h)|0,0}_{(1,1);\emptyset;\emptyset}\big\|_1^w+\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2}\|g^A\|_1^w\big\|W^{(h)|0,0}_{(n,1);\emptyset;\emptyset}\big\|_1^w\Big)\\&\leq 12\lambda\Big(C_0+\sum_{n\geq 2}\tfrac{1}{n^2}\tfrac{32\pi}{\kappa^2}C_0^3\lambda^{\frac{n-1}{2}}\Big)\leq\mathfrak{c}_{2,1}C_0^3\lambda,\end{aligned}$$

对于某个 $\mathfrak{c}_{2,1}$，其与 C_0,R 无关。

需要强调的是，为了完成归纳过程，在对图示（b）的解析值进行界定时，必须实际使用刚刚得到的核 $W^{(h)|1}{}_{,\,\emptyset\,\emptyset\,\emptyset}{}^{1}{}_{;}$；而不能使用方程式（2.22）中的归纳假设。

[11] 通过对 $g^A*W_{(h)|0,0\,(1,1);\emptyset;\emptyset}$ 以及 $\|g^A\|_1^w\|W_{(h)|0,0\,(1,1);\emptyset;\emptyset}\|_1^w$ 进行界定，可以先验地得到一个对数发散因子 $|h-N|$；考察 λ 的一阶展开中泡图的范数即可验证这一点。

此外，直接对图（h）进行界定会发现其存在对数发散，这与前一小节中图（h）的情况完全类似（见图 4）。为消除这种发散，必须通过展开核 $W^{(h)|1,\ 1\ (1,\ n_1);\ n_2;\ \emptyset}$ 在图（h）中提取另一条波浪线，步骤与方程式（3.12）及其后续推导相同。

最后，类比备注 3.5，仔细分析表明，类型为 $\sharp \in\{a, e, f, g, h, i, k, \ell\}$ 的图实际上满足一个关于 N 指数衰减的界，即$\|\mathrm{Val}(\sharp)\|_1^w \leq \mathfrak{c}_{2,\ 1} C_0^6 \lambda N^2 2^{-\theta N}$，其中 $\lambda \leq (\mathfrak{c}'_{2,\ 1} C_0^2 R)^{-1}$，且某个 $\mathfrak{c}_{2,\ 2}$，$\mathfrak{c}'_{2,\ 1} \geq 1$。

综合所有界可知，存在 $\mathfrak{c}_{2,\ 3}$，$\mathfrak{c}'_2 \geq 1$，其与 C_0，R 无关，使得对于 $\lambda \leq (\mathfrak{c}'_2 C_0^2 R)^{-1}$，

$$\left\|\mathfrak{D} W_{1;\emptyset;\emptyset}^{(h)|1,1}\right\|_1^w \leq \mathfrak{c}_{2,3} C_0^6 \lambda,$$

因此由方程式 (3.18)，

$$\begin{aligned}\left\|W_{1;\emptyset;\emptyset}^{(h)|1,1} - c\right\|_1^w &\leq \left\|\mathfrak{D} W_{1;\emptyset;\emptyset}^{(h)|1,1}\right\|_1^w + (1-\mu_{N,\lambda})\|c\|_1^w \\ &\leq \left\|\mathfrak{D} W_{1;\emptyset;\emptyset}^{(h)|1,1}\right\|_1^w + \lambda 2^{-2N}\|g^A\|_\infty \|c\|_1^w \leq \mathfrak{c}_2 \lambda C_0^6,\end{aligned} \tag{3.19}$$

对于某个 $\mathfrak{c}_2 \geq \mathfrak{c}_{2,\ 3}$。

3.3 最低阶极化泡

现在我们分析与单项式 $(G^{(1)})^2$，相关的核 $W^{(h)|0,\ 0\ (1,\ 1);\emptyset;\ \emptyset}$，该单项式也称为极化泡。我们将证明

$$\left\|g^A * (W_{(1,1);\emptyset;\emptyset}^{(h)|0,0} - \Pi^{(h,N]})\right\|_1^w \leq \mathfrak{c}_3 C_0^8 \lambda, \tag{3.20}$$

其中 $\Pi^{(h,N]}$ 由方程式（2.16）中定义的无相互作用泡图，C_0 与命题 2.1中一样，$\lambda \leq (\mathfrak{c}'_3 C_0^2 R)^{-1}$，以及适当的常数 $\mathfrak{c}_3$，$\mathfrak{c}'_3 \geq 1$ 且与 C_0无关，R。完全类比引理 3.2，将 $\delta/\delta G_{b'}^{(1)}$ 应用于方程式（B.12），当 $n=1$时，可得以下恒等式：

$$W_{(1,1);\emptyset;\emptyset}^{(h)|0,0}(b,b') = \frac{1}{2}\int_{\Lambda_F^2} d\eta_1 d\eta_2 \mu_{N,\lambda} c_b(\eta_1,\eta_2) \int_{\Lambda_F^2} d\eta'_1 d\eta'_2 g_{\eta'_2,\eta_1}^{(h,N]} g_{\eta_2,\eta'_1}^{(h,N]} W_{1;\emptyset;\emptyset}^{(h)|1,1}(\eta'_1,\eta'_2;b'), \tag{3.21}$$

其图示表示如图 9所示。

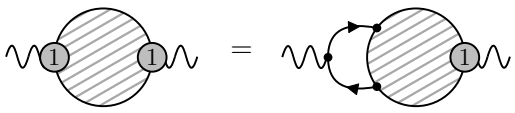


图 9：极化泡图的展开。

结合方程式（3.18）、（3.21），可得

$$W_{(1,1);\emptyset;\emptyset}^{(h)|0,0}(b,b') = \mu_{N,\lambda}\Pi^{(h,N]}(b,b') + \mathfrak{D} W_{(1,1);\emptyset;\emptyset}^{(h)|0,0}(b,b') \tag{3.22}$$

其中

$$\begin{aligned}&\mathfrak{D} W_{(1,1);\emptyset;\emptyset}^{(h)|0,0}(b,b') = \\ &\frac{1}{2}\int_{\Lambda_F^2} d\eta_1 d\eta_2 \mu_{N,\lambda} c_b(\eta_1,\eta_2) \int_{\Lambda_F^2} d\eta'_1 d\eta'_2 g_{\eta'_2,\eta_1}^{(h,N]} g_{\eta_2,\eta'_1}^{(h,N]}\ \mathfrak{D} W_{1;\emptyset;\emptyset}^{(h)|1,1}(\eta'_1,\eta'_2;b').\end{aligned} \tag{3.23}$$

由此可得:

$$\left\|g^A * (W^{(h)|0,0}_{(1,1);\emptyset;\emptyset} - \Pi^{(h,N]})\right\|_1^w \le |\mu_{N,\lambda} - 1| \left\|g^A * \Pi^{(h,N]}\right\|_1^w + \left\|g^A * \mathfrak{D} W^{(h)|0,0}_{(1,1);\emptyset;\emptyset}\right\|_1^w. \tag{3.24}$$

利用非相互作用泡图的有限性，见附录C.2 中的推论C，即$\|g^A * \Pi^{(h,N]}\|_1^w \le C'_\Pi$ 对于某个常数$C'_\Pi \ge 1$，可得

$$\left\|g^A * (W^{(h)|0,0}_{(1,1);\emptyset;\emptyset} - \Pi^{(h,N]})\right\|_1^w \le C'_\Pi K' \lambda N 2^{-2N} + \left\|g^A * \mathfrak{D} W^{(h)|0,0}_{(1,1);\emptyset;\emptyset}\right\|_1^w, \tag{3.25}$$

这里我们还用到了$|\mu_{N,\lambda} - 1| \le K' N \lambda 2^{-2N-1}$ （见小节3.1中对图（a）的分析）。

现在的思路是，通过像小节 3.2 中那样，将方程 (3.23) 右端的核 $\mathfrak{D}W^{(h)|0,0}_{(1,1);\emptyset;\emptyset}$ 展开，来控制量 $\left\|g^A * \mathfrak{D}W^{(h)|0,0}_{(1,1);\emptyset;\emptyset}\right\|_1^w$。所得结果可以表示为对图的求和，这些图由将图 9 右端的团块替换为图 8 中各图示之和而得到。例如，回想一下，类型为 $\sharp \in \{a, e, f, g, h, i, k, \ell\}$ 的图满足界$\|\mathrm{Val}(\sharp)\|_1^w \le \mathfrak{c}_{2,1} C_0^6 \lambda N^2 2^{-\theta N}$（对于 $\lambda \le (\mathfrak{c}'_{2,1} C_0^2 R)^{-1}$），它们对 $\left\|\mathfrak{D}W^{(h)|0,0}_{(1,1);\emptyset;\emptyset}\right\|_1^w$ 的贡献很容易作如下估计:

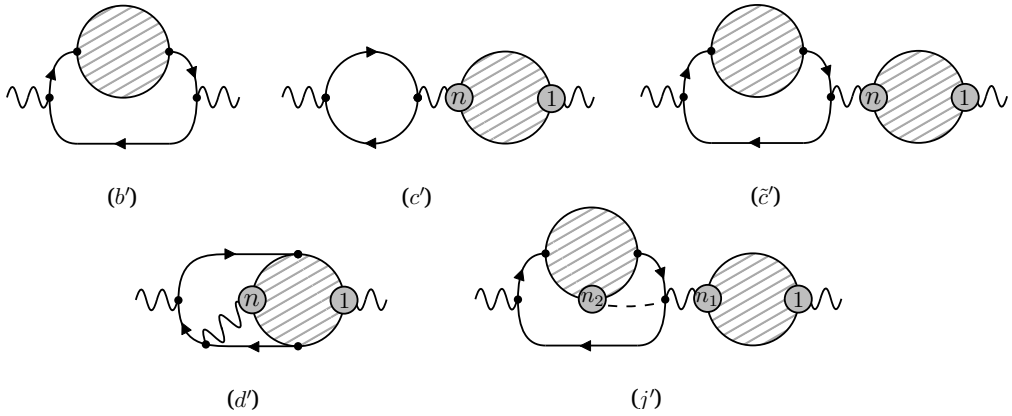
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{L^2} \int_{\Lambda_B} dbdb' e^{\frac{\kappa}{2}\sqrt{\delta^D(b,b')}} \int_{\Lambda_F^2} d\eta_1 d\eta_2 d\eta'_1 d\eta'_2 \mu_{N,\lambda} |c_b(\eta_1, \eta_2)| \times \\
&\times \sum_{k,j=h+1}^{N} |g^{(k)}_{\eta'_2,\eta_1}| |g^{(j)}_{\eta_2,\eta'_1}| |\mathrm{Val}(\sharp)(\eta'_1, \eta'_2; b')| \le \\
&\sum_{h<k\le j\le N} \|c\|_1^w \|g^{(k)}\|_\infty \|g^{(j)}\|_1^w \|\mathrm{Val}(\sharp)\|_1^w + \sum_{h<j\le k\le N} \|c\|_1^w \|g^{(j)}\|_\infty \|g^{(k)}\|_1^w \|\mathrm{Val}(\sharp)\|_1^w \\
&\le 2 \sum_{h<k\le j\le N} \|g^{(k)}\|_\infty \|g^{(j)}\|_1^w \mathfrak{c}_{2,1} C_0^6 \lambda N^2 2^{-\theta N} \le \sum_{h<k\le j\le N} \mathfrak{c}_{3,1} C_0^6 2^{k-j} \lambda N^2 2^{-\theta N} \le \\
&\le 2\mathfrak{c}_{3,1} C_0^6 \lambda N^3 2^{-\theta N},
\end{aligned} \tag{3.26}$$

对于合适的$\mathfrak{c}_{3,1} \ge 1$。将乘积 $g^{(h,N]} g^{(h,N]}$ 展开为单一尺度贡献之和，即$\sum_{h<k,\, j\le N} g^{(k)} g^{(j)}$，然后取传播子在最低尺度（分别为最高尺度）下的 L^∞（分别为 L^1）范数，这一技巧将在本段中反复使用。

我们还需对方程 (3.25) 右端中来自图 8 的图示 (*b*)、(*c*)、(*d*)、(*j*)，并对 $\left\|g^A * \mathfrak{D}W^{(h)|0,0}_{(1,1);\emptyset;\emptyset}\right\|_1^w$ 的贡献给出界。将图 8 中的 (*b*)、(*c*)、(*d*)、(*j*) 与图 9 的右端结合所得到的“复合”图示列于图 10。注意，与前一小节不同，在前一小节中，根据注 3.4，我们可以在图 8 中省略通过将一条修饰费米子线连接到图示 (*c*) 中的裸顶点[12] 而得到的图示 ($\tilde{c}$)；而现在，在对 $\left\|g^A * \mathfrak{D}W^{(h)|0,0}_{(1,1);\emptyset;\emptyset}\right\|_1^w$ 给出界时，则必须考虑这一图示。原因在于，对 $\|\mathrm{Val}(\tilde{c})\|_1^w$ 的界并不意味着图 10 中 $\|\mathrm{Val}(\tilde{c}')\|_1^w$ 有限，而必须利用所得复合图示的拓扑结构，具体解释如下。

图示 (b')。 与方程式（3.26）类似，我们将这三个传播子 $g^{(h,N]}$ 写作$\sum_{h'=h+1}^{N} g^{(h')}$，对于任意三元组 $g^{(h_1)}\ g^{(h_2)}\ g^{(h_3)}$，我们取传播子在

[12]恰如（b）由图 a）中的（4所得到的。



(b') (c') $(\tilde{c}')$

(d') (j')

图10：非平凡界的图（即经过备注 3.4、3.6 中的约化之后），将图8中的 (b)、(c)、$(\tilde{c})$、(d)、(j) 与图 10 中的图相结合得到，并对 $\mathfrak{D}W^{(h)|0}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset}(1,1)$ 作出贡献。

最低尺度处的范数，其余两个则取 L^1 范数。如此一来，图示（b'）的界变为：

$$\begin{aligned}&\big\|g^A * \mathrm{Val}(b')\big\|_1^w \le \\ &\sum_{h<h_1\le h_2,h_3\le N} \big(\|c\|_1^w\big)^2 \|g^A\|_1^w \big\|g^{(h_1)}\big\|_\infty \big\|g^{(h_2)}\big\|_1^w \big\|g^{(h_3)}\big\|_1^w \big\|W^{(h)|1,1}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset}\big\|_1^w \le \\ &\sum_{h<h_1\le h_2,h_3\le N} \mathfrak{c}_{3,2} 2^{h_1-h_2-h_3} \big\|W^{(h)|1,1}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset}\big\|_1^w \le 4\mathfrak{c}_{3,2} 2^{-h} \|W^{(h)|1,1}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset}\|_1^w \le 4\mathfrak{c}_{3,2}\mathfrak{c}_1 C_0^5 \lambda 2^{-(1+\vartheta)h},\end{aligned}$$

取合适的 $\mathfrak{c}_{3,2} \ge 1$ 并且对于 $\lambda \le (\mathfrak{c}_1' C_0^2 R)^{-1}$，使用了 $W^{(h)|1,1}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset}$ 的改进界，；；，方程式 (3.2)。

图示 (c')。明确地，我们有

$$\mathrm{Val}(c')(b_1,b_2) = \sum_{n\ge 1} \frac{\lambda}{n^2} \mu_{N,\lambda}^2 \int_{\Lambda_B} db db' \, \Pi^{(h,N]}(b_1,b) g^A_{b,b'} W^{(h)|0,0}_{(n,1);\emptyset;\emptyset}(b',b_2),$$

并利用非相互作用泡图的有限性，即 $\|g^A * \Pi^{(h,N]}\|_1^w \le C_\Pi'$（参见推论 C.2），我们得到

$$\begin{aligned}\big\|g^A * \mathrm{Val}(c')\big\|_1^w &\le \lambda \big\|g^A * \Pi^{(h,N]}\big\|_1^w \Big(\big\|g^A * W^{(h)|0,0}_{(1,1);\emptyset;\emptyset}\big\|_1^w + \sum_{n\ge 2} \tfrac{1}{n^2} \|g^A\|_1^w \big\|W^{(h)|0,0}_{(n,1);\emptyset;\emptyset}\big\|_1^w \Big) \\ &\le \lambda C_\Pi' \Big(C_0 + \sum_{n\ge 1} \tfrac{1}{n^2} \tfrac{32\pi}{\kappa^2} C_0^3 \lambda^{\frac{n-1}{2}} \Big) \le \lambda \mathfrak{c}_{3,3} C_0^3,\end{aligned}$$

其中某个常数为 $\mathfrak{c}_{3,3} \ge 1$。

图示 $(\tilde{c}')$。与图示 (b') 类似，我们使用将传播子 $g^{(h,N]}$ 拆分为其单尺度对应物的技巧：

$$\begin{aligned}\mathrm{Val}(\tilde{c}')(b_1,b_2) = &\sum_{n\ge 1} \sum_{h<h_1,h_2,h_3\le N} \mu_{N,\lambda} \int_{\Lambda_F^6} d\eta_1 d\eta_2 d\eta_1' d\eta_2' d\eta_1'' d\eta_2'' \int_{\Lambda_B^2} db_3 db_4 \times \\ &\times c_{b_1}(\eta_1,\eta_2) c_{b_3}(\eta_1'',\eta_2'') g^{(h_1)}_{\eta_2',\eta_1} g^{(h_2)}_{\eta_2,\eta_1''} g^{(h_3)}_{\eta_2'',\eta_1'} g^A_{b_3,b_4} W^{(h)|1,1}_{(1,n);\emptyset;\emptyset}(b_2,b_4).\end{aligned} \tag{3.27}$$

在方程式 (3.27) 的右端，我们必须区分三种可能的情况： $h_1 \le h_2$， h_3 或$h_2 \le h_1$， h_3或 $h_3 \le h_1$， h_2。例如，若 $h_1 \le h_2$， h_3，我们可以取 $g^{(h_1)}$ 的 L^∞ 范数，取 $g^{(h_2)}$ 的L^1 范数，并与第 3.1 小节的图示 (*d*) 类似，对乘积 $g^A \tilde{g}^{(h_3)}$ 使用带权重 $p = \frac{2}{1-\vartheta}$ 和 $p' = \frac{2}{1+\vartheta}$ 的 Hölder 不等式：

$$\big\|g^A * \mathrm{Val}(\tilde{c}'|_{h_1\le h_2,h_3})\big\|_1^w \le$$
$$\sum_{h<h_1\le h_2,h_3\le N}\sum_{n\ge 1}\frac{\lambda}{n^2}\|g^A\|_1^w\|g^{(h_1)}\|_\infty\|g^{(h_2)}\|_1^w\|g^A\|_p^w\|\tilde{g}^{(h_3)}\|_{p'}\big\|W^{(h)|1,1}_{(1,n);\emptyset;\emptyset}\big\|_1^w \le$$
$$\sum_{h<h_1\le h_2,h_3\le N}\sum_{n\ge 1}\frac{1}{n^2}\mathfrak{c}_{3,4}C_0^3\lambda\lambda^{\frac{n-1}{2}}2^{h_1-h_2-\vartheta h_3}2^{-h} \le \frac{\pi^2\mathfrak{c}_{3,4}}{3(1-2^{-\vartheta})^2}C_0^3\lambda 2^{-(1+\vartheta)h},$$

其中 $\tilde{g}^{(h_3)}{}_{b,\eta'} \equiv \int d\eta d\eta_1 e^{\frac{\kappa}{2}\sqrt{\delta^D}(b,\eta,\eta_1)}|c_b(\eta_1,\eta)||g^{(h_3)}{}_{\eta,\eta'}|$ 且$\mathfrak{c}_{3,4}$是一个大于1的合适常数。情形 $h_2 \le h_1, h_3$与 $h_3 \le h_1, h_2$可以用同样的方式处理，取传播子在最低尺度处的 L^∞范数，它们给出相同的界。

图示(d')。 这里我们再次利用非相互作用泡图的有限性，即$\|g^A * \Pi^{(h,N]}\|_1^w \le C'_\Pi$ （参见推论 C.2），从而

$$\big\|g^A * \mathrm{Val}(d')\big\|_1^w \le$$
$$\sum_{n\ge 1}\frac{\lambda}{n^2}\int_{\Lambda_B^3}\frac{db_1db_2db_3}{L^2}e^{\frac{\kappa}{2}\sqrt{\delta^D(b_1,b_2)}+\frac{\kappa}{2}\sqrt{\delta^D(b_2,b_3)}}\Big|\big(g^A * \Pi^{(h,N]}\big)(b_1,b_2)\big(g^A * W^{(h)|0,0}_{n;\emptyset;\emptyset}\big)(b_2,b_3)\Big| \le$$
$$\sum_{n\ge 1}\frac{\lambda}{n^2}\|g^A * \Pi^{(h,N]}\|_1^w\|g^A * W^{(h)|0,0}_{(n,1);\emptyset;\emptyset}\|_1^w \le C'_\Pi\lambda\|g^A * W^{(h)|0,0}_{(n,1);\emptyset;\emptyset}\|_1^w +$$
$$+ C'_\Pi\lambda\sum_{n\ge 2}\frac{1}{n^2}\|g^A\|_1^w\|W^{(h)|0,0}_{(n,1);\emptyset;\emptyset}\|_1^w \le \lambda C'_\Pi C_0 + \sum_{n\ge 2}\frac{1}{n^2}C'_\Pi\|g^A\|_1^w C_0^3\lambda^{\frac{n+1}{2}} \le \mathfrak{c}_{3,5}C_0^3\lambda,$$

对于一个合适的$\mathfrak{c}_{3,5} \ge 1$。

图示(d'')。 该图示的界可由图示(b')的界推出。事实上：

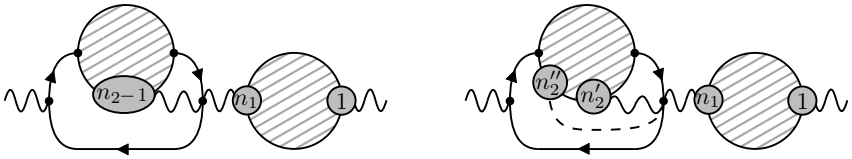
$$\mathrm{Val}(d'')(b_1,b_2) = \sum_{n\ge 1}\frac{\lambda}{n^2}\int_{\Lambda_B^2}db_3db_4\big(\mathrm{Val}(b')\big)(b_1,b_3)g^A_{b_3,b_4}W^{(h)|0,0}_{(n,1);\emptyset;\emptyset}(b_4,b_2)$$

由此可得：

$$\big\|g^A * \mathrm{Val}(d'')\big\|_1^w \le \sum_{n\ge 1}\frac{\lambda}{n^2}\big\|g^A * \mathrm{Val}(b')\big\|_1^w\big\|g^A * W^{(h)|0,0}_{(n,1);\emptyset;\emptyset}\big\|_1^w \le$$
$$\sum_{n\ge 1}\frac{\lambda}{n^2}4\mathfrak{c}_{3,2}\mathfrak{c}_1C_0^5\lambda 2^{-(1+\vartheta)h}C_0^3\lambda^{\frac{n-1}{2}} \le \lambda\mathfrak{c}_{3,6}C_0^8 2^{-(1+\vartheta)h},$$

其中 $\mathfrak{c}_{3,\,6} = \frac{2\pi^2}{3}\mathfrak{c}_{3,\,2}\mathfrak{c}_1$。

图示(j')。 与图h中的图示（4）类似，当前图呈现出表面发散的对数发散，可以通过第二次抽取线来解决。使用类似于方程式（3.12）的公式展开图示中出现的核 $W^{(h)|1}_{\emptyset\, n_2\, \emptyset}{}^{1}{}_{;\,;}$，我们发现，图示（$j'$）可以图形化地表示为两个图之和（见下图）



$(j'.1)$ $(j'.2)$

其解析值分别为：

$$\begin{aligned}&\mathrm{Val}(j'.1)(b,b')=\\&\sum_{n_1\geq 1,n_2\geq 2}\frac{\mathcal{N}_{n_1,n_2}}{(n_1+n_2)^2}\mu_{N,\lambda}^2 2^{-N}\lambda^2\int_{\Lambda_F^6}d\eta_1 d\eta_2 d\eta_1' d\eta_2' d\eta_3 d\eta_4\int_{\Lambda_B^3}db_1db_2db_3 c_b(\eta_1,\eta_2)\times\\&\times c_{b_1}(\eta_1',\eta_2')g^A_{b_1,b_2}g^A_{b_1,b_3}g^{(h,N]}_{\eta_2,\eta_1'}g^{(h,N]}_{\eta_4,\eta_1}g^{(h,N]}_{\eta_2',\eta_3}W^{(h)|1,1}_{n_2-1;\emptyset;\emptyset}(\eta_3,\eta_4;b_2)W^{(h)|0,0}_{(n_1,1);\emptyset;\emptyset}(b_3,b');\end{aligned}\tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{Val}(j'.2)(b,b')=\\&\sum_{n_1,n_2'\geq 1,n_2''\geq 2}\frac{\mathcal{N}_{n_1,n_2'+n_2''}\mathcal{N}_{n_2',n_2''}}{(n_1+n_2'+n_2'')^2}\mu_{N,\lambda}2^{-2N}\lambda^2\int_{\Lambda_F^6}d\eta_1 d\eta_2 d\eta_1' d\eta_2' d\eta_3 d\eta_4\times\\&\times\int_{\Lambda_B^4}db_1db_2db_3db_4 c_b(\eta_1,\eta_2)c_{b_1}(\eta_1',\eta_2')g^A_{b_1,b_2}g^A_{b_1,b_3}g^{(h,N]}_{\eta_2,\eta_1'}g^{(h,N]}_{\eta_4,\eta_1}g^{(h,N]}_{\eta_2',\eta_3}\delta(b_1-b_4)\times\\&\times W^{(h)|1,1}_{n_2';n_2'';\emptyset}(\eta_3,\eta_4;b_2;b_4)W^{(h)|0,0}_{(n_1,1);\emptyset;\emptyset}(b_3,b').\end{aligned}\tag{3.29}$$

这两个图都可以通过将 $g^{(h,N]}_{\eta_1'\,\eta_2}$ 和 $g^{(h,N]}_{\eta_1\,\eta_2'}$ 写成各自单尺度贡献之和，并取最低尺度处传播子的 L^∞ 范数来进行界定。在图示 $(j'.1)$ 中，利用第二条线的提取，对 $g^{(h,N]}_{\eta_2'\,\eta_3}$，取 L^1 范数，得到$\mathcal{O}(2^{-h})$；并对 $g^A_{b_1,b_3}$ 取 L^∞ 范数，得到 $\mathcal{O}(N)$，因此，得益于方程式 (3.28) 右端的维数因子 2^{-N}，界的有限性便可得出。在图示 $(j'.2)$ 中，与狄拉克 δ 函数相关联的虚线迫使我们以 L^∞ 范数界定 $g^{(h,N]}_{\eta_2'\,\eta_3}$ 和 $g^A_{b_1,b_3}$，从而得到因子 $\mathcal{O}(N2^N)$，但该因子被方程式 (3.29) 右端的维数因子 $\mathcal{O}(2^{-2N})$ 所抵消。总而言之，

$$\left\|g^A * \mathrm{Val}(g')\right\|_1^w \leq \mathfrak{c}_{3,7}C_0^7\lambda^2 2^{-N}N^2 2^{-h},$$

with a suitable $\mathfrak{c}_{3,\,7}\geq 1$。回顾方程式 (3.25)，并汇总对 $\mathfrak{D}W^{(h)|0,\,0\,(1,\,1);\emptyset;\,\emptyset}$ 各项贡献所得的界，可得核 $W^{(h)|0,\,0\,(1,\,1);\emptyset;\,\emptyset}$ 所需的界：

$$\begin{aligned}&\left\|g^A * \left(W^{(h)|0,0}_{(1,1);\emptyset;\emptyset}-\Pi^{(h,N]}\right)\right\|_1^w\leq\\&C'_\Pi K'\lambda N 2^{-2N}+18\|g^A\|_1^w\mathfrak{c}_{3,1}C_0^6\lambda N^3 2^{-\theta N}+2\sum_{\sharp\in\{b',c',d',d'',g'\}}\left\|g^A*\mathrm{Val}(\sharp)\right\|_1^w\leq\mathfrak{c}_3C_0^8\lambda,\end{aligned}\tag{3.30}$$

对于适当的 $\mathfrak{c}_3$ 大于全文中出现的所有常数 $\mathfrak{c}_{3,\,1}$，$\mathfrak{c}_{3,\,2}$，.....并且对于 $\lambda\leq\left(\max\left\{\mathfrak{c}'_{1,2},\mathfrak{c}'_1\right\}C_0^2R\right)^{-1}$。方程式（3.30）右端对图求和的前置因子 2，考虑到了图 10 中未纳入所有包含虚线蝌蚪图的图示，这与第 10 图的讨论一致，见第 3.6 条注释（3.1 小节）。

3.4 有效四次相互作用

我们希望证明以下界：

$$\big\|W^{(h)|2,2}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset} - \mathcal{Q}^{(N)}\big\|^{w}_{1} \le \mathfrak{c}_4 C_0^8 \lambda^{\frac{5}{4}}, \tag{3.31}$$

其中 $\mathcal{Q}^{(N)}$ 定义于方程式（2.17）中， C_0 如命题 2.1所述， $\lambda \le (\mathfrak{c}_4' C_0^2 R)^{-1}$，以及适当的常数 $\mathfrak{c}_4$， $\mathfrak{c}_4' \ge 1$ 与 C_0无关， R。类比引理 3.2，可以证明

$$W^{(h)|2,2}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset}(\eta_1,\eta_2,\eta_1',\eta_2') = \mu_{N,\lambda}\mathcal{Q}^{(N)}(\eta_1,\eta_2,\eta_1',\eta_2') + \mathfrak{D}W^{(h)|2,2}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset}(\eta_1,\eta_2,\eta_1',\eta_2'),$$

其中 $\mathfrak{D}W^{(h)|2}_{,\ \emptyset\emptyset\emptyset}{}^{2}{}_{;\ ;}$ 可以图示为若干图的和，其解析值可用与第 3.1 小节相同的方法推导。这些图汇集于图 11 中；与之前一样（见备注 3.4 和 3.6），我们省略了所有在消去一个“虚线蝌蚪图”或将一条“修饰线”替换为“裸线”后，会归结为已有图示之一的图。

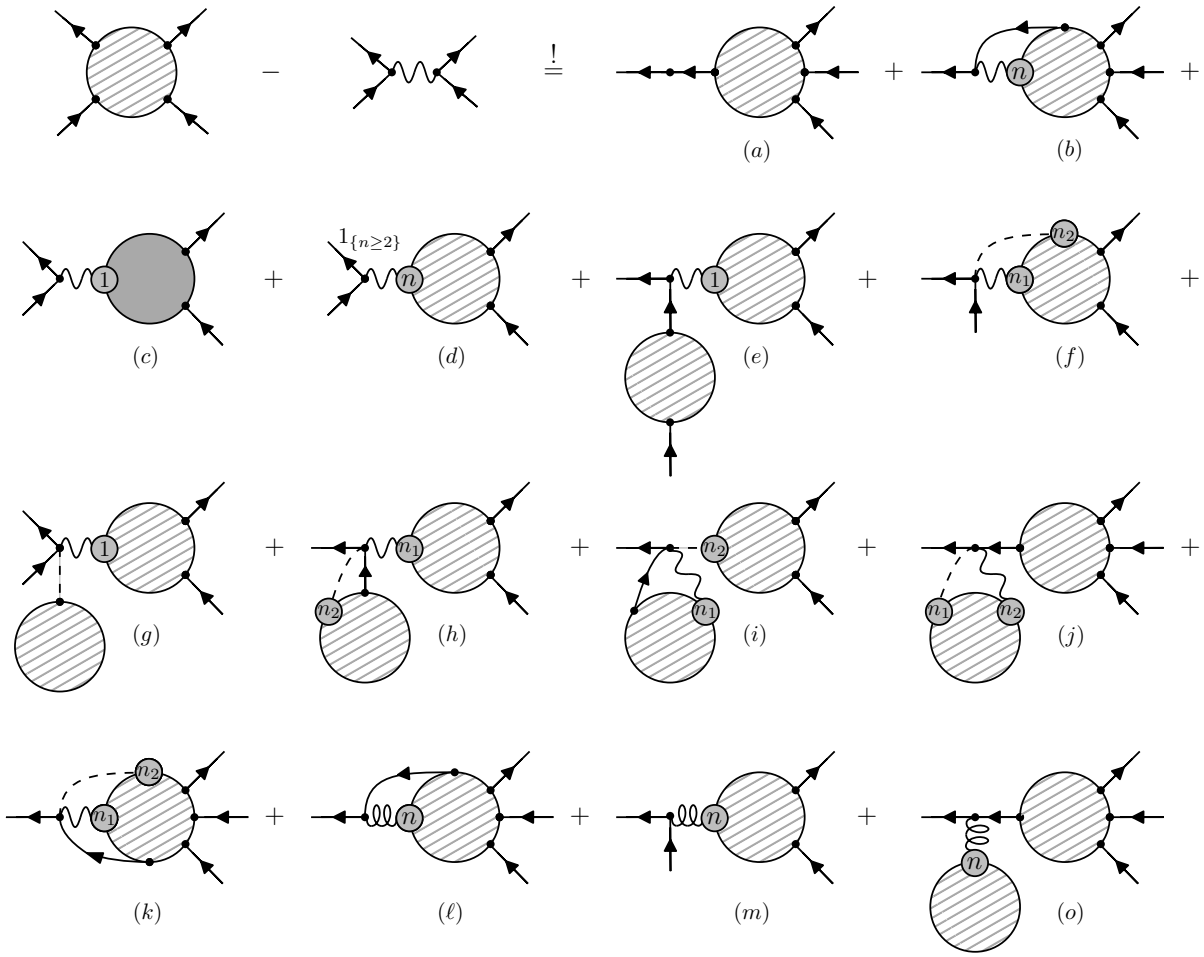


图 11：对 $\mathfrak{D}W^{(h)|2}_{,\ \emptyset\emptyset\emptyset}{}^{2}{}_{;\ ;}(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_1',\ \eta_2')$ 有贡献的图。图（c）中较深的团块是差分核 $\mathfrak{D}W^{(h)|1}_{,\ 1\emptyset\emptyset}{}^{1}{}_{;\ ;}$。连接到裸顶点的伸出半线始终对应坐标标签 η_1，而标签 η_1'， η_2' 可以按两种可能的方式与进入线对应。

这些估计采用了本小节迄今为止所用的相同技巧，没有概念上的复杂之处，因此不再详细重复。需要强调的是，在图示（c）和

（e）中，分别需要对 $\|W^{(h)|1,1}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset} - c\|^w_1$ 和 $\|W^{(h)|1,1}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset}\|^w_1$ 使用改进界，即公式（3.17）和（3.16）。此外，类似于图4和图 8 中的图示（h），这里图11中的图示（k）呈现出表面上的对数发散，可通过再次抽取线轻松解决，也就是说，展开核 $W^{(h)|2}_{n_1\,n_2\,\emptyset;;}$（这一类似过程已在公式（3.12）及其下文中作了详细说明）。汇总图11中所有图的界，可得：

$$\big\|\mathfrak{D}W^{(h)|2,2}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset}\big\|^w_1 \le \mathfrak{c}_{4,1}C_0^8\lambda^{\frac{5}{4}} \tag{3.32}$$

对于 $\lambda \le (\mathfrak{c}'_4C_0^2R)^{-1}$，取适当的常数$\mathfrak{c}_{4,1}$，$\mathfrak{c}'_4 \ge 1$。指数 $5/4$ 在 λ 中计及了 λ 在方程式（3.32）等式左边所有贡献中的最低次幂，即图示（b），其中 $n=1$，以及图示（m），其中 $n=2$。由方程式（3.32）可得所需的界：

$$\begin{aligned}&\big\|W^{(h)|2,2}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset} - \mathcal{Q}^{(N)}\big\|^w_1 \le \\ &|\mu_{N,\lambda}-1|\|\mathcal{Q}^{(N)}\|^w_1 + \big\|\mathfrak{D}W^{(h)|2,2}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset}\big\|^w_1 \le \mathfrak{c}_{4,2}\lambda^2N2^{-2N} + \mathfrak{c}_{4,1}C_0^8\lambda^{\frac{5}{4}} \le (\mathfrak{c}_{4,1}+\mathfrak{c}_{4,2})C_0^8\lambda^{\frac{5}{4}}\end{aligned}$$

对于 $\lambda \le (\mathfrak{c}'_4C_0^2R)^{-1}$，其中我们还用到了这样一个事实：$\|\mathcal{Q}^{(N)}\|^w_1 \le \frac{\lambda}{2}(\|c\|^w_1)^2\|g^A\|^w_1$ 被一个与 λ 成正比的常数所界定。

3.5 高次边缘核

到目前为止，我们一直在讨论四次理论[7, 25, 4]中已经存在的核。现在还剩下分析由源场 $\{G^{(n)},\dot G^{(n)}\}_{n\ge2}$ 产生的边缘核，即 $W^{(h)|0}_{n;;}$、$W^{(h)|1,1}_{n\,\emptyset\,\emptyset;;}$、$W^{(h)|1,1}_{\emptyset\,n\,\emptyset;;}$、$W^{(h)|1,1}_{\emptyset\,n\,n';;}$、$W^{(h)|1,1}_{n\,n'\,\emptyset;;}$，其中 $n+n'\ge3$。尽管上述场通过无关单项式进入初始势（式（1.44））V，但它们的标度维数均为 1，因此会在尺度 $h<N$ 处产生非无关项。事实证明，这些额外边缘项的界在某种程度上比本小节此前讨论的界更容易得到，原因在于场 $G^{(n)}$、$\dot G^{(n)}$ 与核$\{v_n\}_{n\ge2}$（参见式（1.29））耦合，而后者不同于 v_1，至少包含一条波浪线。正如本小节中已经反复显现的那样，由于玻色子传播子的非局域性，波浪线的存在通常会带来维数增益。

由于分析沿用前面几个小节的相同思路，我们将仅对核 $W^{(h)|1,1}_{n\,\emptyset\,\emptyset;;}$ 作较为详细的讨论，而对其他情形只给出处理思路。

高次顶点。我们考虑核 $W^{(h)|1,1}_{n\,\emptyset\,\emptyset;;}$，其中 $n\ge2$，并希望证明

$$\big\|W^{(h)|1,1}_{n;\emptyset;\emptyset}\big\|^w_1 \le \mathfrak{c}_5C_0^5\lambda^{\frac12}\lambda^{\frac{n-1}{2}}, \qquad n\ge2, \tag{3.33}$$

对于 $\lambda \le (\mathfrak{c}''_5C_0R)^{-1}$，以及适当选取的常数 $\mathfrak{c}_5$，$\mathfrak{c}''_5 \ge 1$，它们与 C_0，R无关。注意，方程式 (3.33) 直接推出方程式 (2.19) 中所需的界，只需要求 $\lambda \le (\mathfrak{c}'_5C_0^{10}R)^{-1}$，其中$\mathfrak{c}'_5$ = 最大值$\{\mathfrak{c}_5^2,\mathfrak{c}''_5\}$。我们回顾一下，选择损失 λ 的一个分数次幂，从而使方程式 (3.34) 右端的前因子恰好为 1，这纯粹是技术性的处理，目的是使证明的归纳结构更易于处理。

再次，起点是推导出由引理B.2得到的核的展开，方法是将 $\delta^2/\delta\psi^-_{\eta_2}\delta\psi^+_{\eta_1}$ 应用于方程式（B.12）。展开结果如图12所示；与之前一样（参见备注3.4 和3.6），我们省略了所有这样的图：消去“虚线蝌蚪图”或将“修饰线”替换为“裸线”后，它们会化为已出现过的图。

为了读出图示的值，与前文提及的图4、8、10 和 11中的情形不同，现在图12 中各图的节点按如下方式解释。若节点处流入和流出的实线分别带有费米子标签 η_2、 η_1 ，则：

- 带有两条波浪线且标记为 n 和 $n-1$ 的节点对应因子 $2^{-N}\ {}^{n^2}{}_{(n-1)_2}\mu_{N,\ \lambda}c_b(\eta_1,$ $\eta_2)$ ；
- 带有两条波浪线和一条虚线，且分别标记为 n， n_1， n_2，并满足 $n_1+n_2=n$ 的节点对应因子 $2^{-2N}\mathcal{N}_{n_1,\ n_2}c_b(\eta_1,\ \eta_2)$，其中我们回顾一下，$\mathcal{N}_{n_1,\ n_2}={}_{(n_1+n_2)^2}\ {}_{(n_1+n_2-1)n_1n_2^2}\leq{}_{(n_1+n_2)_{n_1^2n_2^2}}{}^{2}$。

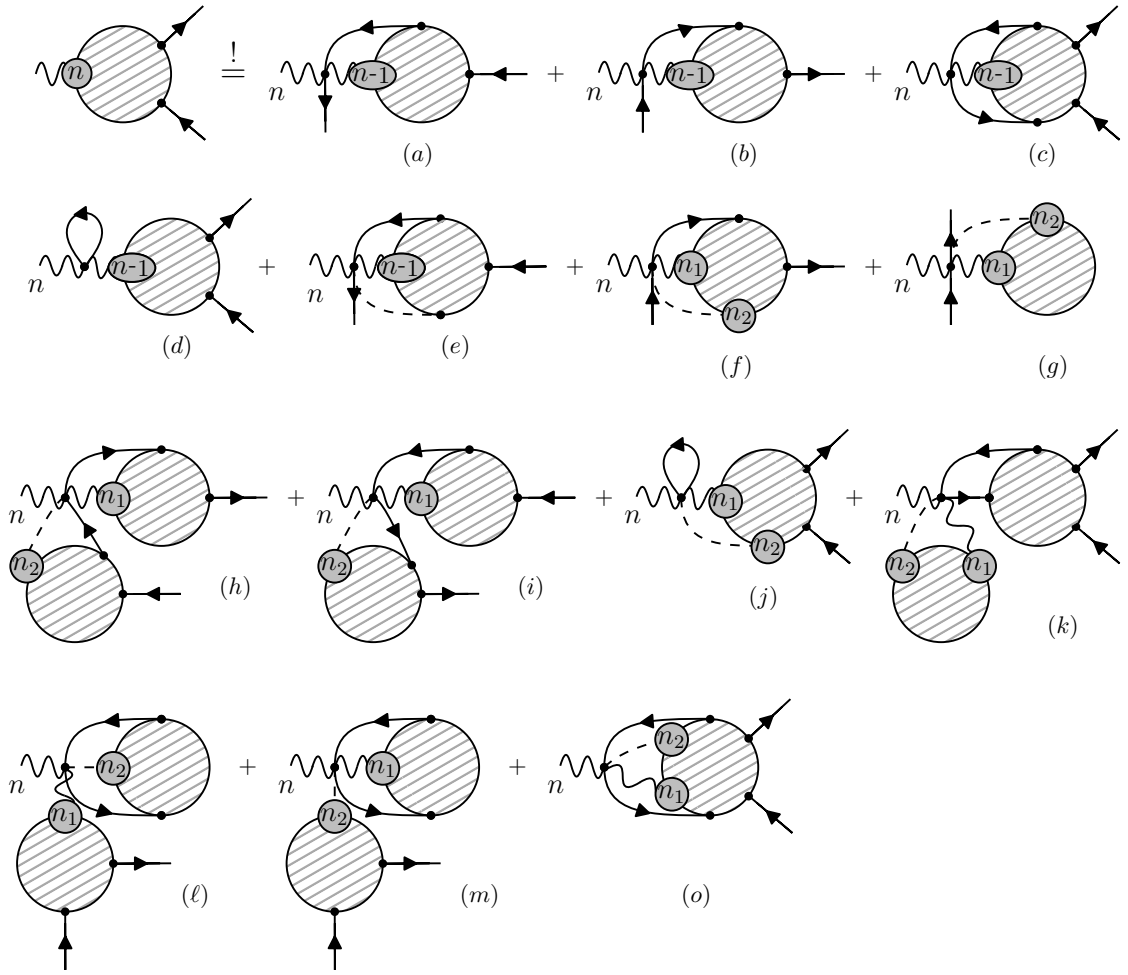


图12：对核有贡献的图 $W^{(h)|1}{}_{,\ n\emptyset\emptyset}{}^{1}$ ；；，其中 $n\geq 2$。每个图示中最左侧波浪线的 n 标签提示外场的类型为 $G^{(n)}$. 符号 ！ = 表示该恒等式是在相差一些未画出的图的意义下成立的，这些图依据下方方程式（3.33）中说明的约化过程处理。

图示 (a)。 在这种情况下，我们得到

$$\begin{aligned}\left\|\mathrm{Val}(a)\right\|_1^w &\leq 2^{-N}n^2(n-1)^{-2}\|c\|_1^w\lambda\|g^A\|_\infty\|g^{(h,N]}\|_1^w\left\|W^{(h)|1,1}_{n-1;\emptyset;\emptyset}\right\|_1^w\\ &\leq 24\lambda K'\tilde{K}N2^{-N}2^{-h}C_0^2\lambda^{\frac{n-2}{2}}\leq\mathfrak{c}_{5,1}C_0^2\lambda^{\frac{1}{2}}\lambda^{\frac{n-1}{2}},\end{aligned}\tag{3.34}$$

˜其中 $\mathfrak{c}_{5,\ 1} \geq 1$ 是一个适当的常数，取决于 K，K'，它们已在第 3.1 小节中出现。注意，我们忽略了趋于零的因子 $2^{-\theta N-h}$，因为 $N \to \infty$（参见注释 3.5）图（b）和（d）遵循与（a）相同类型的估计。

图示 (c)。这里我们采用与方程式 (3.26) 及下文相同的思路，将每个 $g^{(h,N]}$ 按尺度拆分，并取 L^∞ 范数 g^A,

$$\begin{aligned}\big\|\mathrm{Val}(c)\big\|_1^w &\leq \lambda 2^{-N+1} n^2 (n-1)^{-2} \sum_{h\leq i\leq j\leq N} \|g^A\|_\infty \|g^{(i)}\|_\infty \|\tilde{g}^{(j)}\|_1^w \big\|W_{n-1;\emptyset;\emptyset}^{(h)|2,2}\big\|_1^w \\ &\leq \mathfrak{c}_{5,2} C_0^2 2^{-N} N^2 \lambda^{\frac{n-2}{2}} \leq \mathfrak{c}_{5,2} C_0^2 \lambda^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{n-1}{2}},\end{aligned}$$

对于合适的 $\mathfrak{c}_{5,\ 2} \geq 1$。

图示 (e)。虚线的存在迫使我们对 $g^{(h,N]}$ 和 g^A 都取 L^∞ 范数:

$$\begin{aligned}\big\|\mathrm{Val}(e)\big\|_1^w &\leq \sum_{\substack{n_1\geq 1, n_2\geq 2\\ n_1+n_2=n}} 2^{-2N} \mathcal{N}_{n_1,n_2} \|g^{(h,N]}\|_\infty \lambda \|g^A\|_\infty \big\|W_{n_1;n_2;\emptyset}^{(h)|1,1}\big\|_1^w \\ &\leq \sum_{\substack{n_1\geq 1, n_2\geq 2\\ n_1+n_2=n}} \tfrac{n^2}{n_1^2 n_2^2} \mathfrak{c}_{5,3} \lambda 2^{-N} N C_0^3 \lambda^{\frac{n_1+n_2-2}{2}} 2^{-h} \leq \tfrac{4}{3}\pi^2 \mathfrak{c}_{5,3} C_0^3 \lambda^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{n-1}{2}} 2^{-h},\end{aligned} \tag{3.35}$$

对于合适的 $\mathfrak{c}_{5,\ 3} \geq 1$，同时也用到了 $\sum_{n_1+n_2=n} \frac{n^2}{n_1^2 n_2^2} \leq \frac{4}{3}\pi^2$ 这一事实。

注3.8。量 $\mathcal{N}_{n_1,\ n_2} \leq (n_1+n_2)^2 n_1^{-2} n_2^{-2}$的来源是 n^3 这一数值因子，它们出现在源项 $G^{(n)}$ 和 $\dot{G}^{(n)}$ 在方程式 (1.44) 的定义中；这一点可由引理 B.1 和B.2明确推导得出。若我们用 n^3 替代 n^k，则在方程式 (3.35) 的右端将得到:

$$\sum_{n_1+n_2=n} \left(\frac{n}{n_1 n_2}\right)^{k-1},$$

对每个 $k \geq 3$，它在 n 中都有界，但对于 $k = 0,1,2$，它实际上是无界的。例如，采用朴素的选择 $k = 0$，图示 (d) 的估计将会是:

$$\big\|\mathrm{Val}(d)\big\|_1^w \leq \mathcal{O}(n) C_0^3 N 2^{-N-h} \lambda^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{n-1}{2}},$$

这不可能与方程式 (2.19) 中所需的界相一致。采用我们的选择$k = 3$ 则可以得到 $\mathcal{O}$，以 (1) 代替 $\mathcal{O}(n)$。

图 (f)-(o) 的估计可以类似地进行，细节不再赘述。我们指出，对图示 (o) 直接取界会显示出表面发散；展开核 $W^{(h)|2}{}_{,\emptyset\,\emptyset\,\emptyset}^{\ 2}{}_{;;}$并利用额外玻色子传播子的存在即可解决这一问题（图 4 中图示 (h) 的类似处理已在方程式 (3.12) 及其下文中说明）。

汇总图 12 中的所有贡献，可得方程式 (3.33) 中的界，由此可推出方程式 (2.19) 中所需的界。

剩余的高次核。 对高阶泡图，即核$W^{(h)|0,\ 0\,(n,\ n');\ \emptyset;\ \emptyset}$在 $n+n'\geq 3$ 的情况下进行的分析，与高次顶点的分析几乎完全相同，由此可得

$$\left\|W^{(h)|0,0}_{(n,n');\emptyset;\emptyset}\right\|_1^w \leq \mathfrak{c}_6 C_0^6 \lambda^{\frac{n+n'-2}{2}}, \qquad n+n'\geq 3, \tag{3.36}$$

对于 $\lambda \leq (\mathfrak{c}_6'' C_0 R)^{-1}$，并取适当的 $\mathfrak{c}_6''\geq 1$。与前面一样，通过要求 $\lambda \leq (\mathfrak{c}_6' C_0^{12} R)^{-1}$，其中 $\mathfrak{c}_6' =$ 最大值$\{\mathfrak{c}_6'', \mathfrak{c}_6^2\}$，即可得到方程式 (2.21) 中所需的界。

至于核 $W^{(h)|1}_{,\ \emptyset\, n\, \emptyset}{}^{1}_{;;}$，$W_{\emptyset\ n\, n'}^{(h\ |0\,0),\ ;(,\ );\emptyset}$以及 $W_{n'\ n\ \emptyset}^{(h\ |0\,0),\ ;;}$，它们的展开与方程式 (3.12)（图示于图 6）类似，并展示于图 13。

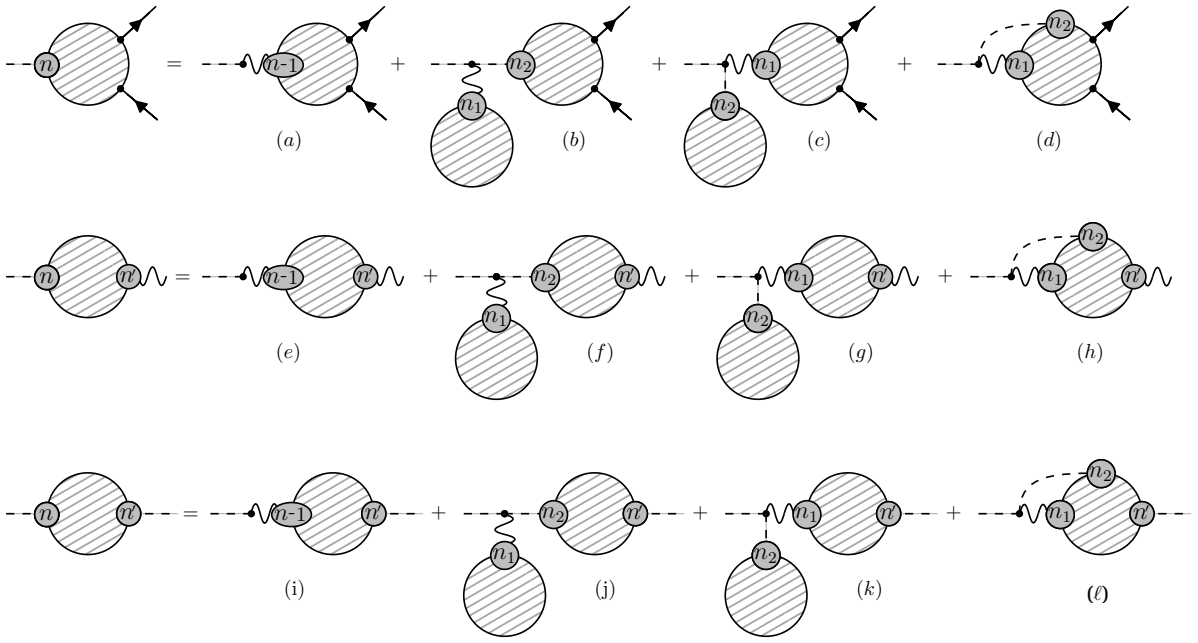


图13：核的图形展开 $W_{\emptyset\, n\, \emptyset}^{(h\ |0\,0),;;}$，$W^{(h)|1}_{,\emptyset\, n\, \emptyset}{}^{1}_{;;}$，$W^{(h)|0}_{,n'\, n\, \emptyset}{}^{0}_{;;}$以及 $W_{\emptyset\ n'\ n}^{(h\ |0\,0),;(,);\emptyset}$分别。

使用与前述情形相同的方法，可以验证图示 13 中每一行右端的各个图示都满足界 $\mathcal{O}\big(C_0^4 \lambda^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{n-1}{2}}\big)$，无需再提取任何玻色子线，因此：

$$\left\|W^{(h)|1,1}_{\emptyset;n;\emptyset}\right\|_1^w \leq \lambda^{\frac{n-1}{2}}, \quad \left\|W^{(h)|1,1}_{\emptyset;(n,n');\emptyset}\right\|_1^w \leq \lambda^{\frac{n+n'-2}{2}}, \quad \left\|W^{(h)|1,1}_{n';n;\emptyset}\right\|_1^w \leq \lambda^{\frac{n+n'-2}{2}}, \tag{3.37}$$

对于任意 $n\geq 2$ 和 $\lambda \leq (\mathfrak{c}_7' C_0^8)^{-1}$，其中 $\mathfrak{c}_7'\geq 1$ 取适当值。

综上，利用式 (3.2)、(3.17)、(3.20)、(3.31)、(3.33) 和 (3.37)，我们证明了式 (2.18)-(2.21) 中的界成立，其中 $R = \max_{j=1}^4 \mathfrak{c}_j C_0^8$，且对于满足$\lambda \leq \min\left\{(C_0\hat{}R^4)^{-1}、\min_{j=1}^7(\mathfrak{c}_j' C_0^{12}\hat{}R)^{-1}\right\}$的 λ。这证明了第 3 节开头引入的归纳步骤成立，从而完成了定理 3.1 的证明。

4 完整生成泛函

在本小节中，我们重新引入该理论的外部源，即背景矢量场 J、手征矢量 B 和格拉斯曼场 φ，以完成以下证明：

定理1.4 适用于完整生成泛函：

$$\mathcal{W}^{(u.v.)}(\psi;\varphi;J;B)=-\log\int P^{(0,N]}(\mathcal{D}\zeta)e^{-\mathcal{V}(\psi+\zeta;G(J))+(\varphi,\zeta+\psi)-(B,O_5(\zeta+\psi))} \tag{4.1}$$

（参见方程 (1.35)、(1.21)）。我们将分两个中间步骤进行：首先，在保留 $J=0$ 的情况下重新引入场 φ 和 B；随后讨论 $J\neq 0$ 的情形。之所以这样划分，是因为在 $J=0$ 处存在 φ 和 B 时进行多尺度分析，需要采用一种与第 2、3 节中针对纯费子相互作用所介绍的方法十分接近的处理流程。具体而言，我们将结合新的标准维数界与改进界，类似于方程 (2.22)–(2.24) 和方程 (2.18)–(2.21)；最终，这些界将给出定理 1.4 中出现的新 φ、B 核的界。另一方面，重新引入场 J 并推导定理 1.4 中相关核的界，则只需采用一种更简单的策略，仅基于标准估计，无需改进界。

4.1 手征源与费米子源

此时，我们在费米子势 $\mathcal{V}(\psi;0)$，方程式 (1.21) 中加入以下两个源项：

$$\int_{\Lambda_F}d\eta(\varphi_\eta^+\psi_\eta^-+\psi_\eta^+\varphi_\eta^-)+\int_{\Lambda_B}dbB_bO_{5;b}(\psi).$$

这些外场的标度维数定义为使单项式 $\varphi\psi$ 和 $B\psi^2$均为边缘项。这样，单项式 $(\psi)^q(\varphi)^{\tilde q}(B)^p$ 的标度维数为 $2-q-\frac{3}{2}\tilde q-p$。与小节 2类似，为了便于控制相关项与边缘项，在势中加入一些辅助源项是有益的。事实证明，只需引入 $\dot{}$ $\ddot{}$与小节 2中的源场完全相同的 G，$\dot G$，$\ddot G$，其势为

$$\mathcal{V}(\psi;G;\dot G;\ddot G;\varphi;B):=\mathcal{V}(\psi;G;\dot G;\ddot G)+\int_{\Lambda_F}d\eta(\varphi_\eta^+\psi_\eta^-+\psi_\eta^+\varphi_\eta^-)+\int_{\Lambda_B}dbB_bO_{5;b}(\psi), \tag{4.2}$$

其中 $\mathcal{V}(\psi;\ G;\ \dot G;\ \ddot G)$ 与方程式 (1.44) 相同。与小节 2类似，我们构造尺度 h下的有效势：

$$\mathcal{V}^{(h)}(\psi;G;\dot G;\ddot G;\varphi;B)=-\log\int P^{(h,N]}(\mathcal{D}\zeta)e^{-\mathcal{V}(\psi+\zeta;G;\dot G;\ddot G;\varphi;B)}, \tag{4.3}$$

并将 $W^{(h\ |q\ q'\ \tilde q\ \tilde q')}_{n\ \dot n\ \ddot n}(\eta,\eta';\ \tilde\eta,\tilde\eta';\ \underline{b};\ \underline{\dot b};\ \underline{\ddot b};\ \underline{b'})$ 记作与单项式 $\mathcal{V}^{(h)}$ 相关联的一般核

$$\prod_{k=1}^{q}\psi^+_{\eta_k}\prod_{k=1}^{\tilde q}\varphi^+_{\tilde\eta_k}\prod_{k=1}^{q'}\psi^-_{\eta'_k}\prod_{k=1}^{\tilde q'}\varphi^-_{\tilde\eta'_k}\prod_{k=1}^{\dim\underline{n}}G^{(n_k)}_{b_k}\prod_{k=1}^{\dim\underline{\dot n}}\dot G^{(\dot n_k)}_{\dot b_k}\prod_{k=1}^{\dim\underline{\ddot n}}\ddot G^{(\ddot n_k)}_{\ddot b_k}\prod_{k=1}^{p}B_{b'_k}, \tag{4.4}$$

这里沿用方程式（2.9）中的记号及其后各行的记号。与核 $W^{(h\ |q\ q'\ \tilde q\ \tilde q')}_{n\ \dot n\ \ddot n}$相关联的标度维数为

$$D_{sc}:=2-\tfrac{1}{2}(q+q')-\tfrac{3}{2}(\tilde q+\tilde q')-\dim\underline{n}-\dim\underline{\dot n}-2\dim\underline{\ddot n}-p. \tag{4.5}$$

新出现的相关和边缘（即非无关）核满足$D_{sc}\geq 0$，其图示见图14。

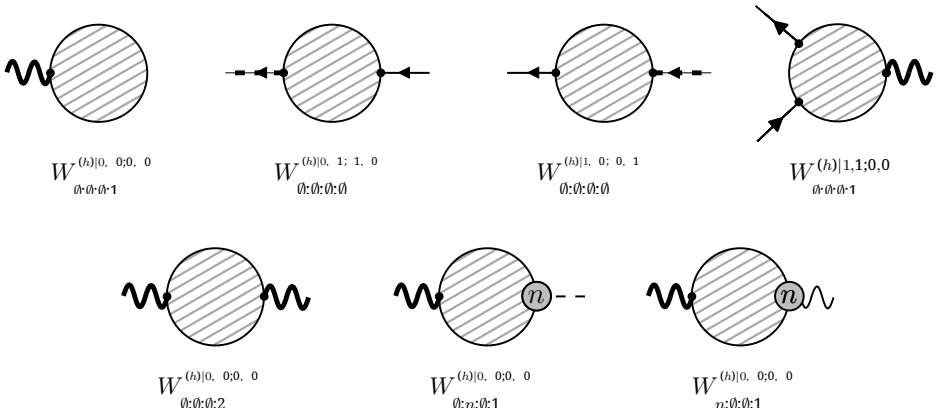


图14：与场 φ，B 相关的边缘核和相关核的图形表示，它们分别表示为粗虚线和波浪形外线。由于后者附有环圈n 标签，粗虚线与和 $\dot{G}^{(n)}$ 相关的虚线有所区别。

现在我们陈述定理3.1的类似结果，为所有核 $W^{(h|q\,q'\,\tilde{q}\,\tilde{q}'),\ ;\ ,\ ;\ ;\ ;\ p}_{n\,\dot{n}\,\ddot{n}}$ 给出界。这些界涉及整个核，或其相对于最低阶对应项取值的偏差。具体而言，

$$\Pi_5^{(h,N]}(b_1,b_2) := \frac{1}{2}\int d\eta_1 d\eta_1' d\eta_2 d\eta_2' c_{b_1}(\eta_1,\eta_1') c^5_{b_2}(\eta_2,\eta_2') g^{(h,N]}_{\eta_1',\eta_2} g^{(h,N]}_{\eta_2',\eta_1} \tag{4.6}$$

这是核 $W^{(h)|0}_{0;0\,0\ ,\ ;;;}$ 的最低阶对应项，其中 c^5 裸手征顶点[13]由方程式 (1.20) 给出；它也是核 $W^{(h)|1}_{1;0\,0\ ,\ ;;;}$ 的最低阶贡献。

命题 4.1。对于固定的 $\vartheta,\theta\in(0,\ 1)$，存在 $N_0'\geq 1$, $R', C_0'\geq 1$ 和 $\lambda_0'>0$，使得对于任意 $N\geq N_0'$, $\lambda\leq\lambda_0'$和 $0\leq h\leq N$，以下结论成立。

1. 图 *14* 中表示的非无关核满足以下界：

$$\big\|W^{(h)|0,1;1,0}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset;0}-\delta\big\|_1^w\leq R'\lambda 2^{-(1+\vartheta)h};\ \ \big\|W^{(h)|1,0;0,1}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset;0}-\delta\big\|_1^w\leq R'\lambda 2^{-(1+\vartheta)h}; \tag{4.7}$$

$$\big\|W^{(h)|1,1;0,0}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset;1}-c^5\big\|_1^w\leq R'\lambda;\ \ \big\|g^A * (W^{(h)|0,0;0,0}_{1;\emptyset;\emptyset;1}-\Pi_5^{(h,N]})\big\|_1^w\leq R'\lambda; \tag{4.8}$$

$$\big\|W^{(h)|0,0;0,0}_{n;\emptyset;\emptyset;1}\big\|_1^w\leq\lambda^{\frac{n-1}{2}}\ \forall n\geq 2;\ \ \big\|W^{(h)|0,0;0,0}_{\emptyset;n;\emptyset;1}\big\|_1^w\leq\lambda^{\frac{n-1}{2}}\ \forall n\geq 2; \tag{4.9}$$

其中 δ 格点狄拉克δ函数 $\delta(\eta-\eta')$ 定义在 Λ_F 上。

2. 所有未包含在方程 (2.22)-(2.24)中的无关核和非无关核，均满足以下界：

$$\big\|g^A * W^{(h)|0,0;0,0}_{1;\emptyset;\emptyset;1}\big\|_1^w\leq C_0',\ \ \big\|W^{(h)|0,0;0,0}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset;2}\big\|_1^w\leq C_0' N,\ \ W^{(h)|0,0;0,0}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset;1}=0 \tag{4.10}$$

在其余情况下

$$\big\|W^{(h)|q,q';\tilde{q},\tilde{q}'}_{\underline{n};\underline{\dot{n}};\underline{\ddot{n}};p}\big\|_1^w\leq C_0'^{1+\dim\underline{n}+\dim\underline{\dot{n}}+\dim\underline{\ddot{n}}+\tilde{q}+\tilde{q}'+p}\lambda^{\tilde{d}}2^{hD_{sc}}\times\begin{cases}2^{\theta(h-N)} & \dim\underline{\ddot{n}}>0\\ 1 & otherwise,\end{cases} \tag{4.11}$$

其中 D_{sc}如方程式 (4.5) 所示，且 $\tilde{d}:=\frac{1}{8}$最大值$\{0,q+q'+\tilde{q}+\tilde{q}'-2\}+\frac{1}{2}(|n|+|\dot{n}|_{\perp}-$维数$_n-$维数 $\dot{n})+\frac{3}{4}|\ddot{n}|$。

[13]回想一下，根据假设 $|Z_N^5|\leq\frac{3}{2}$，参见小节 1.2。

由此可直接推导出原始生成泛函的核的界 $\mathcal{W}^{(u.v.)}(\psi;\ \varphi;\ 0;\ B)$，因为 $\mathcal{W}^{(u.v.)}(\psi;\ \varphi;\ 0;\ B) = \mathcal{V}^{(0)}(\psi;\ 0;\ 0;\ 0;\ \varphi;\ B)$，参见第 5.1 小节。

命题 4.1 是定理 3.1 的类似结果，适用于还涉及外场 φ 和 B的核，且 $J = 0$；其证明沿用小节 2 和第3节中的相同思路，因此我们只给出证明概要。

证明概要。 策略分为两步。

1. 首先推导命题 2.1的类似结果，即存在 $C_0' \geq 1$ （与命题 C_0' 4.1中的 相同），使得在假设尺度高于 4.7)-（4.9）处的界成立的情况下，在尺度 h处，若 h 足够小，例如 4.10)-（4.11）中的界便成立，其中 λ足够小，比如 $\lambda \leq (C_0'R')^4$。证明这一事实所用的论证与命题 2.1基本相同，它们基于 Gallavotti-Nicol`o 树展开（见附录 D），此处不再赘述。

2. 第二步，需要证明当 R'足够大且 λ 足够小时，式（4.7）—（4.9）中的界成立，即命题 4.1的类似结论。这通过对尺度 h进行归纳法来实现，具体说明见第3节开头。同样，这一事实的证明最终也基于玻色子传播子的非局域性，并可利用式（4.7）—（4.9）等式左边非无关核的关键恒等式。这些恒等式可写成关于 $\mathcal{V}^{(h)}$的所有核的展开形式，为此我们将使用：

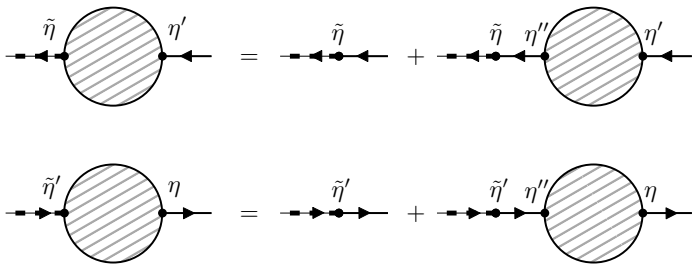
- 式（4.10）—（4.11）中的界，适用于至少包含变量 $\varphi^{\pm}$ 或B的核；
- 式（2.22）—（2.23）中的界，其中 R 在第3节开头定义，适用于不含任何 $\varphi^{\pm}$ 或 B 变量的核。

我们先来讨论核的界 $\varphi^{\pm}\psi^{\mp}$，方程式 (4.7)。类比引理 3.2，对方程式 (4.3) 关于 $\psi^{\pm}$ 求导，可得到这些核的如下表示，$\varphi^{\mp}$:

$$W^{(h)|0,1;1,0}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset;0}(\eta';\tilde{\eta}) = \delta(\eta'-\tilde{\eta}) - \int d\eta'' g^{(h,N]}_{\tilde{\eta},\eta''} W^{(h)|1,1;0,0}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset;0}(\eta'',\eta'), \tag{4.12}$$

$$W^{(h)|1,0;0,1}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset;0}(\eta;\tilde{\eta}') = \delta(\eta-\tilde{\eta}') - \int d\eta'' g^{(h,N]}_{\eta'',\tilde{\eta}'} W^{(h)|1,1;0,0}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset;0}(\eta,\eta''), \tag{4.13}$$

其图示如下图所示。



因此，我们得到以下 L^1 范数估计：

$$\left\|W^{(h)|0,1;1,0}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset;0} - \delta\right\|^w_1 \leq \|g^{(h,N]}\|^w_1 \left\|W^{(h)|1,1;0,0}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset;0}\right\|^w_1. \tag{4.14}$$

回顾一下，核 $W^{(h)|1}_{\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset}{}^{1;0\,0}_{\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset}$、；；；与 $W^{(h\,|1\,1)}_{\emptyset\emptyset\emptyset}$、；；有效势方程式（2.9）中的3.1相一致；根据定理，该核满足界 $\|W^{(h)|1}_{\emptyset}{}^{1}_{\emptyset}$、；；$\emptyset\|_1 \le R\lambda 2^{-\vartheta h}$ 当 $\lambda \le \lambda_0$时，其中的量 R 和 λ_0 由小节3的分析确定。回顾 $\|g^{(h,N]}\|_1^w \le \tilde{K}2^{-h}$ 对于˜某个适当的常数 $K \ge 1$，由方程式（4.14）可得

$$\left\|W^{(h)|0,1;1,0}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset;0} - \delta\right\|_1^w \le \tilde{K}R\lambda 2^{-(1+\vartheta)h}.$$

同样的论证适用于核 $\psi^+\varphi^-$，从而得到相同的界。

含有一个场 B 的边缘核，几乎可以用与处理B 替换为 $G^{(1)}$的核完全相同的方法处理；这些核已在第3节中讨论。例如，对于核$B\psi^2$，完全类比于 $G^{(1)}\psi^2$ 在小节 3.2中讨论的核，可以得到差值

$$W^{(h)|1,1;0,0}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset;1}(\eta_1,\eta_2;b) - c_b^5(\eta_1,\eta_2)$$

可展开为图形形式如图15所示的级数，其图形规则与第3 节中的类似（新核的记号也见图 14 ），并约定带有粗波浪线和两条实线的节点对应于裸手征顶点 $c_b^5(\eta_1,\ \eta_2)$。

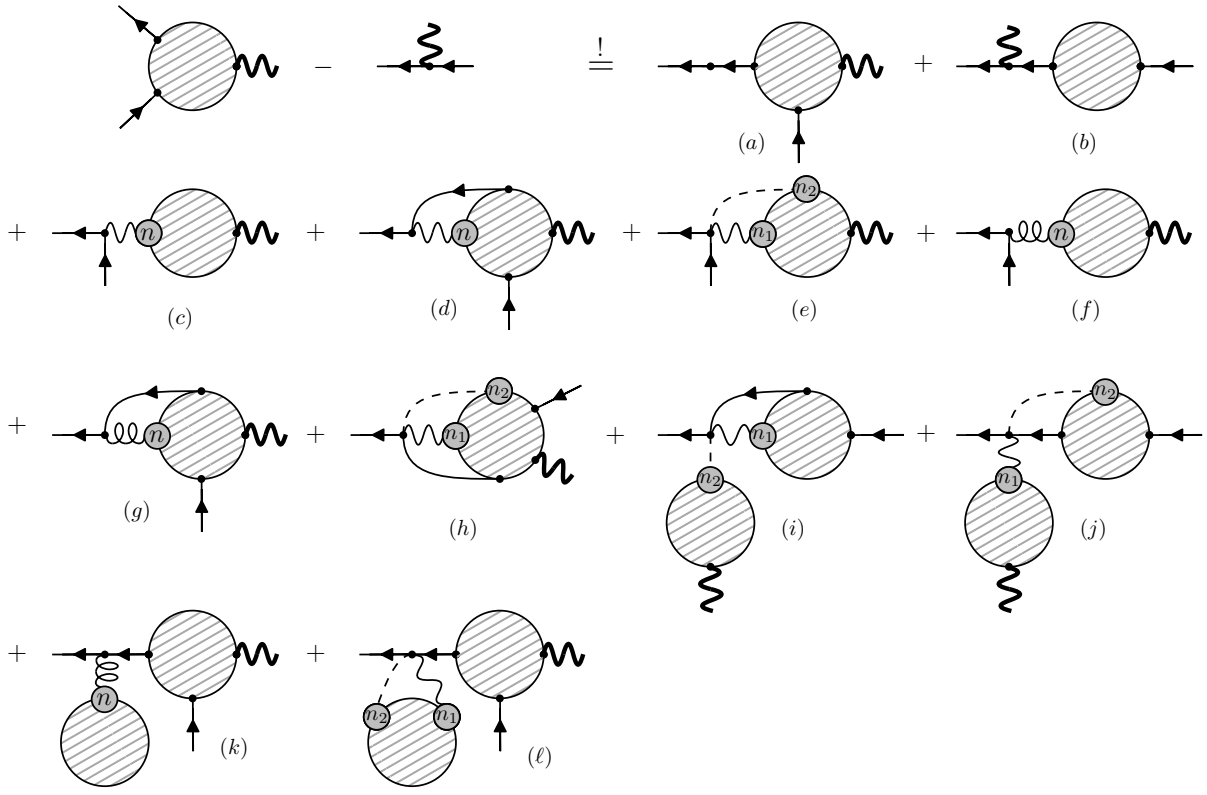


图15：对差值 $W^{(h\,|1\,1\,0\,0)}_{\emptyset\,\emptyset\,\emptyset\,1}$，；，；；；$(\eta_1,\ \eta_2;\ b) - c_b^5(\eta_1,\ \eta_2)$作出贡献的图。

图 15 中的图与图 8 中的图一一对应，实际上也可以用完全相同的方式给出界。事实上，可以验证，对于合适的常数 $\mathfrak{c}_8, \mathfrak{c}_8' \ge 1$，它们中的每一个都可由 $\max\left\{C_0, C_0'\right\}^6 \mathfrak{c}_8\lambda$ for $\lambda \le \left(\mathfrak{c}_8' \max\left\{C_0, C_0'\right\}^2 \max\left\{R', R\right\}\right)^{-1}$ 控制，且该界与 R' 和 C_0' 无关。这样的界导出与方程式（3.17）相同的定性估计，只需将等式左边的 $W^{(h)|1}_{,1\,\emptyset\,\emptyset}{}^{1}_{;;}$ 和 c 分别替换为 $W^{(h\,|1\,1\,0\,0)}_{\emptyset\,\emptyset\,\emptyset\,1}$,;,;;; 和 c^5，并将右端的 C_0 替换为 $\max\left\{C_0, C_0'\right\}$。

类似地，也可以研究核 $G^{(n)}B$。例如，在 $n=1$ 的情形下，按照第3.3小节中的相同步骤，可以展开差 $W^{(h)|0}_{1\emptyset\emptyset 1}{}_{0;0\,0}{}_{,;;;}(b;\,b')-\mu_{N,\lambda}\Pi_5^{(h,N]}(b,b')$，最终得到与图 10 相同的图示；此时，连接到其中一个团块的外部波浪线更粗，对应于外场 B，而非 $G^{(1)}$。同样，这些图的估计在形式上与第3.3小节中的估计完全相同，因此这里不再赘述。一个关键事实是，矢量泡图 $\Pi^{(h,N]}$ 及其手征对应物 $\Pi_5^{(h,N]}$ 都一致有界，即 $\|g^A*\Pi_5^{(h,N]}\|_1^w\le C'_\Pi$（见推论 C.2）。

□

注4.2. 性质 $W^{(h)|0}_{\emptyset\emptyset\emptyset}{}_{0;0\,0}{}_{,;;;}{}_{1}=0$，即方程式 (4.10) 的第三个性质，是电荷共轭对称性（参见方程式 E.1）的直接结果。在这一变换下，$O_{5;x,\mu,\epsilon}(\psi)\mapsto O_{5;x,\mu,\epsilon}(\mathcal{Q}\psi)=O_{5;x,\mu,-\epsilon}(\psi)$。这立即意味着 $W^{(h)|0}_{\emptyset\emptyset\emptyset 1}{}_{0;0\,0}{}_{,;;;}(x,\mu,\epsilon)=W^{(h)|0}_{\emptyset\emptyset\emptyset 1}{}_{0;0\,0}{}_{,;;;}(x,\mu,-\epsilon)$。另一方面，由于 $O_{5;x,\mu,-\epsilon}(\psi)=-O_{5;x,\mu,\epsilon}(\psi)$，我们还有 $W(h_{\emptyset\emptyset\emptyset 1}|0\,0\,0\,0)_{,;,;;;}(x,\mu,\epsilon)=-W^{(h)|0}_{\emptyset\emptyset\emptyset 1}{}_{0;0\,0}{}_{,;;;}(x,\mu,-\epsilon)$，这意味着 $W(h_{\emptyset\emptyset\emptyset 1}|0\,0\,0\,0)_{,;,;;;}(x,\mu,\epsilon)=0$。

4.2 矢量源

根据方程式 (1.21)，为了恢复生成泛函对 J 的原始依赖关系，我们必须将方程式 (1.21) 的右端作为起始势：

$$\mathcal{V}(\psi;G(J))=\mathcal{V}(\psi;0)+\sum_{n\ge1}\sum_{1\le p\le n}2^{N(2-n-p)}\int_{\Lambda_B^n}d\underline{b}\int_{\Lambda_B^p}d\underline{b}'w_{n,p}(\underline{b};\underline{b}')O_{\underline{b}}^n(\psi)G_{\underline{b}'}^p(J),\tag{4.15}$$

其中核 $w_{n、p}$ 由方程式 (1.22)、(1.23) 给出。方程式 (4.15) 中存在无穷多个单项式，同样是局域相位不变性，即方程式 (1.24) 的结果。为处理这一组合复杂性，我们采用以下策略。

1. 方程式 (4.15) 中所有关于 $G(J)$ 的线性项，都将改写为一种形式，使其在将 $G^{(n)}$ 替换为 $G(J)$ 后，与方程式 (1.44) 的右端相容。这样，对于多尺度积分产生的、仅涉及变量 $G^{(n)}$ 和 ψ的所有非无关项，我们将依赖定理 3.1给出的界。

2. 我们将检验方程式 (4.15) 中所有至少涉及两个变量 $G(J)$ 的单项式，证明它们在较低尺度上不会产生任何相关项或边缘项（但有一个例外，不过很容易处理）；因此，我们可以利用附录D中介绍的树展开技术进行标准的多尺度分析，从而对它们加以控制。

实际上，在方程式 (4.15) 的右端，我们先分离出关于 $G(J)$ 的线性项，再通过拆分 $w_{n,0}(b)=v_n(b)+2^{-2N}\tilde{v}_n(b)$（参见方程式 (1.29)），将它们改写为

$$\sum_{n\ge2}n2^{N(1-n)}\int d\underline{b}w_{n,0}(\underline{b})G_{b_1}O_{\underline{b}}^n(\psi)\equiv\sum_{n\ge2}n2^{N(1-n)}\int d\underline{b}\big(v_n(\underline{b})+2^{-2N}\tilde{v}_n(\underline{b})\big)G_{b_1}O_{\underline{b}}^n(\psi),$$

这样我们就可以将方程式 (4.15) 改写为

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\psi;G(J))=\mathcal{V}(\psi;0)&+\\&+\sum_{n\ge1}n2^{N(1-n)}\int_{\Lambda_B^n}d\underline{b}v_n(\underline{b})G_{b_1}(J)O_{\underline{b}}^n(\psi)+\\&+\sum_{n\ge1}n2^{-N(1+n)}\int_{\Lambda_B^n}d\underline{b}\tilde{v}_n(\underline{b})G_{b_1}(J)O_{\underline{b}}^n(\psi)+\\&+\sum_{n\ge2}\sum_{2\le p\le n}2^{N(2-n-p)}\int_{\Lambda_B^n}d\underline{b}\int_{\Lambda_B^p}d\underline{b}'w_{n,p}(\underline{b};\underline{b}')O_{\underline{b}}^n(\psi)G_{\underline{b}'}^p(J).\end{aligned}\tag{4.16}$$

现在的思路是，对方程式 (4.16) 右端最后三行中的源场 $G(J)$ 分别进行处理。为此，我们引入三族辅助场：

$$H \equiv \{H_b^{(n)}\}_{n\geq 1, b\in\Lambda_B},\ \dot{H} \equiv \{\dot{H}_b^{(n)}\}_{n\geq 2, b\in\Lambda_B},\ \ddot{H} \equiv \{\ddot{H}_b\}_{b\in\Lambda_B},$$

以及广义势

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(\psi;H;\dot{H};\ddot{H};\varphi;B) := \mathcal{V}(\psi;0) + \int_{\Lambda_F} d\eta\ (\varphi_\eta^+\psi_\eta^- + \psi_\eta^+\varphi_\eta^-) + \int_{\Lambda_B} db\ B_b O_{5;b}(\psi) + \\ + \sum_{n\geq 1} n 2^{N(1-n)} \int_{\Lambda_B^n} d\underline{b}\ v_n(\underline{b}) H_{b_1}^{(n)} O_{\underline{b}}^n(\psi) + \\ + \sum_{n\geq 2} n 2^{-(n+1)N} \int_{\Lambda_B^n} d\underline{b}\ \tilde{v}_n(\underline{b}) \dot{H}_{b_1}^{(n)} O_{\underline{b}}^n(\psi) + \\ + \sum_{2\leq p\leq n} 2^{N(2-n-p)} \int_{\Lambda_B^n} d\underline{b} \int_{\Lambda_B^p} d\underline{b}' w_{n,p}(\underline{b};\underline{b}') O_{\underline{b}}^n(\psi) \ddot{H}_{\underline{b}'}^p.\end{aligned} \tag{4.17}$$

注意，按定义，$\mathcal{V}(\psi;\ G(J);\ \varphi;\ B) = \mathcal{U}(\psi;\ G(J);\ G(J);\ G(J);\ \varphi;\ B)$[14]。接着，对每个 $0 \leq h \leq N$，我们考虑

$$\mathcal{U}^{(h)}(\psi;H;\dot{H};\ddot{H};\varphi;B) := -\log \int P^{(h,N]}(\mathcal{D}\zeta) e^{-\mathcal{U}(\psi+\zeta;H;\dot{H};\ddot{H};\varphi;B)} \tag{4.18}$$

因此，特别是，原始生成泛函 $\mathcal{W}^{(u.v.)}(\psi;\ J;\ \varphi;\ B)$ 可通过以下对应关系恢复

$$\mathcal{W}^{(u.v.)}(\psi;J;\varphi;B) = \mathcal{U}^{(0)}\big(\psi;G(J);G(J);G(J);\varphi;B\big). \tag{4.19}$$

照例，$\mathcal{U}^{(h)}$ 可以写成与方程式（2.9）类似的积分形式，此处我们使用符号 $U^{(h)|q,\ q'\ \tilde{q}\ \tilde{q}';\ ,\ ;\ ;\ ;}_{n\ \dot{n}\ \ddot{p};\ p}(\eta,\ \eta';\ \underline{\tilde{\eta}},\ \underline{\tilde{\eta}}';\ b;\ \underline{\dot{b}};\ \underline{\ddot{b}};\ \underline{b}')$ 表示与单项式 $\mathcal{U}^{(h)}$ 相关联的一般核

$$\prod_{k=1}^{q}\psi_{\eta_k}^+ \prod_{k=1}^{\tilde{q}}\varphi_{\tilde{\eta}_k}^+ \prod_{k=1}^{q'}\psi_{\eta_k'}^- \prod_{k=1}^{\tilde{q}'}\varphi_{\tilde{\eta}_k'}^- \prod_{k=1}^{\dim \underline{n}} H_{b_k}^{(n_k)} \prod_{k=1}^{\dim \underline{\dot{n}}} \dot{H}_{\dot{b}_k}^{(\dot{n}_k)} \prod_{k=1}^{\ddot{p}} \ddot{H}_{\ddot{b}_k} \prod_{k=1}^{p} B_{b_k'}. \tag{4.20}$$

与核 $U^{(h)|q,\ q'\ \tilde{q}\ \tilde{q}';\ ,\ ;\ ;\ ;}_{n\ \dot{n}\ \ddot{p};\ p}$ 的标度维数照例定义，使其适配方程式（4.17）右端的维数因子：

$$D_{sc} \equiv D_{sc} := 2 - \tfrac{1}{2}(q+q') - \tfrac{3}{2}(\tilde{q}+\tilde{q}') - \dim \underline{n} - 3\dim \underline{\dot{n}} - \ddot{p} - p. \tag{4.21}$$

注记 4.3。正如方程式（14.15）下方的条目中所预期的，场 $G(J)$ 用辅助变量 H，$\dot{H}$，$\ddot{H}$ 进行不同标记，目的是建立 $H^{(n)}$ 与方程式（$G^{(n)}$ 中引入的辅助场 4.2）之间的对应关系，即

$$\mathcal{U}\big(\psi;\{n^2 G^{(n)}\}_{n\geq 1};0;0;\varphi;B\big) = \mathcal{V}\big(\psi;\{G^{(n)}\}_{n\geq 1};0;0;\varphi;B\big).$$

因此，$\mathcal{U}^{(h)}$ 的核与 $\mathcal{V}^{(h)}$ 的核（参见方程式（4.3）及下文）通过以下关系相关联：

$$U^{(h)|q,q';\tilde{q},\tilde{q}'}_{\underline{n};\emptyset;0;p} = \prod_{j=1}^{s} n_j^{-2} \times W^{(h)|q,q';\tilde{q},\tilde{q}'}_{\underline{n};\emptyset;\emptyset;p}, \qquad \underline{n} \equiv (n_1,\dots,n_s). \tag{4.22}$$

[14] $H = G(J)$表示对于每个 $n \geq 1$，都将 $H_b^{(n)}$ 替换为 $G_b(J)$，$\dot{H}$同理，$\ddot{H}$。

这些核 $W^{(h)|q}_{\emptyset\emptyset\emptyset}{}_{q'\,\tilde{q}\,\tilde{q}';\,,\,;\,;\,;}$ 已在先前的分析中得到研究。特别是对于满足 $\tilde{q}+\tilde{q}'=0$ 的那些情形，我们有如下对应关系 $W^{(h)|q}_{\emptyset\emptyset\emptyset}{}_{q;0\,0\,,\,;\,;\,;\,0} \equiv W_{(h)|q,\,n\,\emptyset\,\emptyset}{}^{q}_{\emptyset\emptyset\emptyset\,;\,;}$ 并且定理 3.1 适用；另一方面，对于满足 $\tilde{q}+\tilde{q}'\geq 1$ 的那些核，我们可以使用命题 4.1。

现在我们给出关于此前分析未涵盖的核的结果，即至少与一个变量 H 或 H相关联的那些核。

命题 4.4。 对于固定的 $\vartheta,\theta\in(0,1)$，存在 $C_0''\geq 1$ 和 $\lambda_0''>0$，使得对于$\lambda\leq\lambda_0''$，核 $U^{(h)}$ 满足以下界。 $\big\|U^{(h\,|0\,0\,0\,0)}_{\emptyset\,\emptyset\,2\,;,;,;,;0}\big\|^{w}_{1}\leq\frac{1-2^{\theta-1}}{1-2^{-\theta}}C_0''^{3}\lambda^{\frac{1}{2}}$；而对于任何其他满足$|\dot{n}|+\ddot{p}\geq 1$ 的核，

$$\big\|U^{(h)|q,q';\tilde{q},\tilde{q}'}_{\underline{n};\dot{\underline{n}};\ddot{p};p}\big\|^{w}_{1}\leq C_0''^{1+\dim\underline{n}+\dim\dot{\underline{n}}+\ddot{p}+p}\lambda^{d}2^{hD_{sc}}2^{\theta(h-N)} \tag{4.23}$$

其中 D_{sc}如方程式 (4.21)所示，且 $d:=\frac{1}{2}(|\underline{n}|-$维数 $\underline{n})+\frac{5}{8}|\dot{\underline{n}}|+\frac{1}{4}\ddot{p}+\frac{1}{8}$最大值 $\{0,q+q'+\tilde{q}+\tilde{q}'-2\}$。

根据方程式 (4.19)，命题 4.4直接推出了定理 1.4中出现的核的界，详见第 5.1小节。

命题 *4.4* 的证明。 证明过程与命题 2.1 的证明大致相同。为方便起见，我们引入核的单尺度贡献，$\widetilde{U}^{(h\,|q\,q'\,\tilde{q}\,\tilde{q}')}_{\underline{n}\,\dot{\underline{n}}\,,;,;,;;\ddot{p};p}:=U^{(h)|q,\,q'\,\tilde{q}\,\tilde{q}';,;,;;\ddot{p};p}_{\underline{n}\,\dot{\underline{n}}}$，$\bar{U}^{(h+1)|q\,q'\,\tilde{q}\,\tilde{q}';,;,;;\ddot{p};p}_{\underline{n}\,\dot{\underline{n}}}$，对于 $0\leq h\leq N-1$。对于这些核，利用树展开的工具（见附录 D），可得到以下界：

$$\big\|\widetilde{U}^{(h)|q,q';\tilde{q},\tilde{q}'}_{\underline{n};\dot{\underline{n}};\ddot{p};p;\ddot{\underline{n}}}\big\|^{w}_{1}\leq\big(1-2^{\theta-1}\big)C_0''^{1+\dim\underline{n}+\dim\dot{\underline{n}}+\ddot{p}+p}2^{hD_{sc}}\lambda^{d}2^{\theta(h-N)}, \tag{4.24}$$

对于 $\lambda\leq\lambda_0''$。方程式 (4.24) 的证明与方程式 (2.26) 的证明非常相似，因此省略。我们仅指出，与方程式 (2.26) 的主要区别是，方程式 (4.24) 的右端始终存在“短记忆因子” $2^{\theta(h-N)}$。这体现了这样一个事实：$\dot{}$ $\ddot{}$含有 H 和 H的单项式，在方程式 (4.17) 的右端均为无关项，在多尺度积分过程中不会产生任何“流动耦合函数”，也就是说，不会产生含有 ψ的相关项或边缘项。

考虑一个核 $U^{(h)}$，它是无关项，也就是说具有 $D_{sc}\leq -1$。利用方程式 (4.24)，我们得到：

$$\begin{aligned}
\big\|U^{(h)|q,q';\tilde{q},\tilde{q}'}_{\underline{n};\dot{\underline{n}};\ddot{p};p}\big\|^{w}_{1}&\leq\sum_{h'=h}^{N-1}\big\|\widetilde{U}^{(h')|q,q';\tilde{q},\tilde{q}'}_{\underline{n};\dot{\underline{n}};\ddot{p};p}\big\|^{w}_{1}+\big\|U^{(N)|q,q';\tilde{q},\tilde{q}'}_{\underline{n};\dot{\underline{n}};\ddot{p};p}\big\|^{w}_{1}\\
&\leq\sum_{h'=h}^{N}\big(1-2^{\theta-1}\big)C_0''^{1+\dim\underline{n}+\dim\dot{\underline{n}}+\ddot{p}+p}\lambda^{d}2^{h'D_{sc}}2^{\theta(h'-N)}\\
&\leq\big(1-2^{\theta-1}\big)C_0''^{1+\dim\underline{n}+\dim\dot{\underline{n}}+\ddot{p}+p}\lambda^{d}2^{hD_{sc}}2^{\theta(h-N)}\sum_{h'=h}^{N}2^{(h'-h)(\theta+D_{sc})}\\
&\leq C_0''^{1+\dim\underline{n}+\dim\dot{\underline{n}}+\ddot{p}+p}\lambda^{d}2^{hD_{sc}}2^{\theta(h-N)},
\end{aligned}$$

这里我们用到了 $\|U^{(N)|q}_{\dot{n}\,,\,\ddot{n}\,q'\,\tilde{q}\,\tilde{q}';\,,\,;\,;\,;\,\ddot{p};\,p}\|^{w}_{1}$满足与方程式（4.23）右端相同的界，其中$h=N$。现在我们必须分析非无关项，即那些含有 $D_{sc}\geq 0$的项。注意$\ddot{}$，由于（按构造）方程式（4.17）右端不存在只含一个

$|\underline{\dot{n}}| + \ddot{p} \geq 1$ 场的项，而且多尺度积分也不会生成这类项，因此唯一含有 $|\dot{n}| = 0$，$\ddot{p} = 2$的非无关核是这一项。尽管这个核是边缘的，方程式（4.24）右端的“短记忆因子” $2^{\theta(h-N)}$ 足以给出有限界：

$$\left\|U^{(h)|0,0;0,0}_{\emptyset;\emptyset;2;0}\right\|^w_1 \leq \sum_{h'=h}^{N-1} \left\|\widetilde{U}^{(h')|0,0;0,0}_{\emptyset;\emptyset;2;0}\right\|^w_1 \leq \sum_{h'=h}^{N-1} \left(1-2^{\theta-1}\right) C_0'''^3 \lambda^{\frac{1}{2}} 2^{\theta(h'-N)} \leq \frac{1-2^{\theta-1}}{1-2^{-\theta}} C_0'''^3 \lambda^{\frac{1}{2}}.$$

□

定理的证明1.4。

在本小节中，我们结合第2-4 节中得到的部分结果，以证明定理1.4的各项陈述。为清晰起见，我们强调方程式（1.35）中生成泛函对 h^*_M 的依赖，并将其写作 $\mathcal{W}^{(u.v.|h^*_M)}$；定理1.4中出现的核也同样处理。请注意，根据方程式（2.1），$\mathcal{W}^{(u.v.|h^*_M)}$的核与 $\mathcal{W}^{(u.v.|0)}$ 的核通过简单的重标度相关联。

5.1 核的界

为了证明方程式（1.37）-（1.39），我们遵循本文的结构，首先分别为 φ、J、$B = 0$（即 $\tilde{q}$、$\tilde{q}'$、p、$p' = 0$，参见第2.2-3节）收集所需的界；然后为 $J = 0$（即 $p = 0$，参见第 4.1 节）收集；最后讨论最一般的情形（即 q、q'、$\tilde{q}$、$\tilde{q}'$、p、$p' \neq 0$，参见第 4.2 节）。

情形 φ、J、$B = 0$。若同时 $\psi = 0$，根据定义（参见方程式（1.36）、（2.9）对于 $h = 0$ 以及方程式 (2.13)):

$$\mathcal{F}^{(u.v|0)} = L^{-2} W^{(0)|0,0}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset} = \sum_{h=0}^{N-1} L^{-2} \widetilde{W}^{(0)|0,0}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset}, \tag{5.1}$$

这在方程式（2.26）之后意味着 $|\mathcal{F}^{(u.v.|0)}| \leq \frac{1}{3}(1-2^{-\theta}) C_0 \lambda 2^{2N}$。利用方程式（2.1）进行重标度，$\mathcal{F}^{(u.v.|h^*_M)} = 2^{2h^*_M} \mathcal{F}^{(u.v.|0)}$ 与 $\lambda \mapsto \lambda 2^{-2h^*_M}$，$N \mapsto N - h^*_M$从而 $|\mathcal{F}^{(u.v.|h^*_M)}| \leq C_\star (\lambda 2^{-2h^*_M}) 2^{2N}$，对于$C_\star \geq \frac{1}{3}(1-2^{-\theta}) C_0$，即方程式（1.38）中的第一式。

若 $\psi \neq 0$，结合方程式 (2.2)、(2.5) 和方程式 (2.9)，并回想方程式 (2.1) 中的重标度，本情形下所需的界可由定理 3.1 （应用时取 $h = 0$）推出：因此我们得到约束 $N_\star \geq N_0$，$\lambda_\star \leq \lambda_0$ 以及 $C_\star \geq C_0$ 最大值 $\{R, \frac{1}{3}(1+2^{-\theta})\}$.

情形 $J = 0$，$(\varphi, B) \neq 0$。在此情形下，由于 $\mathcal{W}^{(u.v.|0)}(\psi; \varphi; 0; B) = \mathcal{V}^{(0)}(\psi; 0; 0; 0; \varphi; B)$（参见方程式 (4.1)、(4.3)），命题 4.1 立即推出定理 1.4 中关于含零个 J变量的核的结论，即 $W^{(u.v.|0)}_{q,q';\tilde{q},\tilde{q}';0;p}$，其约束为 $N_\star \geq N'_0, \lambda_\star \leq \lambda'_0$和 $C_\star \geq C'_0$。对于 $W^{(u.v.|h^*_M)}_{q,q';\tilde{q},\tilde{q}';0;p}$，只需使用方程式 (2.1) 中的重标度即可。

情况 $J \neq 0$。在这种情况下，$\mathcal{U}^{(0)}$ 的核 $U(0 |q\, q'\, \tilde{q}\, \tilde{q}')$、；、、；；$\ddot{p}$；$p'$（参见方程式 (4.18)）汇集了关于 $W^{(u.v.|0)}_{q、q'；\tilde{q}、\tilde{q}；p；p'}$ 的全部信息，因为 $\mathcal{W}^{(u.v.|0)}(\psi; J; \varphi; B) = \mathcal{U}^{(0)}(\psi; G(J); G(J); G(J); \varphi; B)$（比较方程式 (4.1)、(4.18)及下文）。我们首先讨论两个重要情况下的策略。

蝌蚪图 $G(J)$。我们有

$$\begin{aligned} W^{(u.v.|0)}_{0,0;0,0;1;0}(b) &= \sum_{n\geq 1} U^{(0)|0,0;0,0}_{n;\emptyset;\emptyset}(b) + \sum_{\dot{n}\geq 2} U^{(0)|0,0;0,0}_{\emptyset;\dot{n};\emptyset}(b) \\ &= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} W^{(0)|0,0}_{n;\emptyset;\emptyset}(b) + \sum_{\dot{n}\geq 2} U^{(0)|0,0;0,0}_{\emptyset;\dot{n};\emptyset}(b). \end{aligned} \tag{5.2}$$

注意到，由于 $b \in \Lambda_B$，上述核实际上是常数，这是因为电荷共轭和坐标轴翻转对称性（参见引理E.1），以及理论的平移不变性。利用定理3.1中核 $W^{(0|00)}_{n\emptyset\emptyset}$、；；给出的界，以及命题4.4中 $U^{(0)|0}_{\emptyset\dot{n}00}$、0;00、；；；给出的界，我们得到：

$$\begin{aligned}\big\|W^{(u.v.|0)}_{0,0;0,0;1;0}\big\|_1^w &\le \sum_{n\ge1}\tfrac{1}{n^2}\big\|W^{(0)|0,0}_{n;\emptyset;\emptyset}\big\|_1^w + \sum_{\dot n\ge2}\big\|U^{(0)|0,0;0,0}_{\emptyset;\dot n;0;0}\big\|_1^w \\ &\le \sum_{n\ge1}\tfrac{1}{n^2}C_0 2^N\lambda^{\frac{n-1}{2}} + \sum_{\dot n\ge2}C_0''^2\lambda^{\frac58\dot n}2^{-\theta N} \le 2^N\Big(\tfrac{\pi^2}{6}C_0^2 + \tfrac{\sqrt2}{\sqrt2-1}C_0''^2\Big),\end{aligned}$$

对于 $\lambda \le$最小值$\{\lambda_0, \lambda_0'', \frac12\}$；通过重标度 $\|W_{(u.v.|h_M^*)0,\ 0;0,\ 0;1;0}\|_1^w = 2^{h_M^*}\|W_{(u.v.|0)0,\ 0;0,\ 0;1;0}\|_1^w$可得方程式（1.38）的第三式。

极化泡 $G(J)G(J)$. 我们有

$$\begin{aligned}W^{(u.v.|0)}_{0,0;0,0;2;0}(b,b') = W^{(0)|0,0}_{(1,1);\emptyset;\emptyset}(b,b') + \sum_{\substack{n_1,n_2\ge1\\ n_1+n_2\ge3}}\tfrac{1}{n_1^2n_2^2}W^{(0)|0,0}_{(n_1,n_2);\emptyset;\emptyset}(b,b') \\ + U^{(0)|0,0;0,0}_{\emptyset;\emptyset;2;0}(b,b') + \sum_{n\ge1,\dot n\ge2}U^{(0)|0,0;0,0}_{n;\dot n;0;0}(b,b'),\end{aligned} \tag{5.3}$$

which，再根据定理 3.1 和命题 4.4，对 $\lambda \le$最小值$\{\lambda_0, \lambda_0'', \frac12\}$ - ：

$$\begin{aligned}&\big\|g^A * W^{(u.v.|0)}_{0,0;0,0;2;0}\big\|_1^w \le \\ &C_0^3 + \sum_{\substack{n_1,n_2\ge1\\ n_1+n_2\ge3}}\frac{\lambda^{\frac{n_1+n_2-2}{2}}}{n_1^2n_2^2} + C_0''^3\lambda^{\frac12}\sum_{n\ge1,\dot n\ge2}C_0''^3\lambda^{\frac12(n-1)+\frac58\dot n} \le C_0^3 + C_0''^3 + \tfrac{\sqrt2}{\sqrt2-1}(1+C_0''^3).\end{aligned} \tag{5.4}$$

通过重标度，$g^A_{\mu,\ \nu}(x-y) \mapsto g^A_{\mu,\ \nu}(2^{h_M^*}(x-y))$ 和 $W_{(u.v.|0)0,\ 0;0,\ 0;2;0} \mapsto W_{(u.v.|h_M^*)0,\ 0;0,\ 0;2;0}$，其中

$$W^{(u.v.|h_M^*)}_{0,0;0,0;2;0}\big((x,\mu,\epsilon),(y,\nu,\epsilon')\big) = 2^{2h_M^*}W^{(u.v.|0)}_{0,0;0,0;2;0}\big((2^{h_M^*}x,\mu,\epsilon),(2^{h_M^*}y,\nu,\epsilon')\big),$$

从而 $\big\|g^A * W_{(u.v.|h_M^*)0,0;0,0;2;0}\big\|_1^w$ 被方程式（5.4）的右端乘以额外的 $2^{-2h_M^*}$所界定，从而证明方程式（1.39）中当 $C_\star$ 大于方程式（5.4）的右端时的第一个界。

对核 $G(J)B$的所需界，即方程式（1.39）中的第二个界，可类似地得出。

其余核。类似（尽管更为繁琐）的步骤对场 $G(J)$中任意阶的所有其余核给出有限的界。如上所述，须将 $\mathcal{W}^{(u.v.|0)}$ 的核用 $\mathcal{U}^{(0)}$的核来表示，经由关系方程式（4.19），然后利用定理3.1以及命题4.1、4.4来界定所出现的各项。总而言之，可以发现第1 项（定理1.4）中的全部界，在 $N_\star$ 足够大且适当的常数 $C_\star$ 足够大而 $\lambda_\star$ 足够小时成立。

5.2 关联函数

这里我们讨论定理 1.4 的条目 2，涉及二点函数 $\hat{}S^{(u.v.)}$、流-流函数 $\hat{}\Sigma^{(u.v.)}_{\mu\ \nu}$ 以及其手征对应物。我们继续采用第 5 小节开头介绍的相同约定。

两点施温格函数。 根据构造，我们有 $\hat{S}^{(u.v.|0)}_{s\,s'}(k)$ = $\int_\Lambda dx\, e^{ik\cdot x} W^{(u.v.|0)}_{0\,0\,1,1\,0\,0}(x\ s\ ,\ 0\ s')$ 4 12 4 13 , ; ; ; (,)

(,)。类比公式（。）、（。），不难验证，核 $W_{(u.v.|0)\,0,\ 0;1,\ 1;0;0}$ 可以展开为：

$$W^{(u.v.|0)}_{0,0;1,1;0;0}\big((x,s),(0,s')\big) = g^{(0,N]}_{s,s'}(x) - \sum_{s_1,s_2\in\{1,2\}} \int_\Lambda dydz\, g^{(0,N]}_{s,s_1}(x-y) W^{(u.v.|0)}_{1,1;0,0;0;0}\big((y,s_1),(z,s_2)\big) g^{(0,N]}_{s_2,s'}(z). \tag{5.5}$$

由此可得

$$\hat{S}^{(u.v.|0)}_{s,s'}(k) = \hat{g}^{(0,N]}_{s,s'}(k) - \sum_{s_1,s_2\in\{1,2\}} \hat{g}^{(0,N]}_{s,s_1}(k)\hat{g}^{(0,N]}_{s_2,s'}(k) \int_\Lambda dy\, e^{ik\cdot y} W^{(u.v.|0)}_{1,1;0,0;0;0}\big((y,s_1),(0,s_2)\big).$$

注意，由于 $1-\chi\equiv 0$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$, 方程式 (2.3) 中的界意味着：

$$|\hat{g}^{(0,N]}_{s,s'}(k)| = \big(1-\chi(|k|)\big)\big|\big(-i\not{k}(k) + m_N + M_N(k)\big)^{-1}_{s,s'}\big| \le \sqrt{2}\pi \frac{1-\chi(|k|)}{\sqrt{|k|^2+m_N^2}} \le \frac{4\sqrt{2}\pi}{|k|+1}.$$

再利用核的界 $W_{(u.v.|0)\,1,1;0,0;0;0} \equiv W^{(0)|1}_{\emptyset\,\emptyset\,,\emptyset\quad\ \ 1}$;;由定理 3.1可得：

$$\big|\hat{S}^{(u.v.|0)}_{s,s'}(k) - \hat{g}^{(0,N]}_{s,s'}(k)\big| \le \sum_{s_1,s_2\in\{1,2\}} \frac{32\pi^2}{1+|k|^2} \big\|W^{(u.v.|0)}_{1,1;0,0;0;0}\big\|_1^w \le \frac{32\pi^2 R\lambda}{1+|k|^2},$$

经过方程式 (2.1) 中的重标度后，对于 $\hat{S}^{(u.v.|h^*_M)\ s,s'}(k)$，若 $C_\star \ge 32\pi^2 R$，便得到方程式 (1.40) 中所需的界。

非相互作用流函数。 为具体起见，我们仅讨论矢量流函数，也就是说，我们证明方程式 (1.41) 和方程式 (1.42) 中的第一个界，因为方程式 (1.41) 和方程式 (1.43) 中关于手征流函数的第二个界，也可以用同样的策略证明。

方程式（(1.41)的证明。 根据定义 $\hat{\Sigma}^{(u.v.|0),}_{\mu\ \nu}(p)$: = $\int_\Lambda dx e^{-ip\cdot x} \frac{\delta^2 \mathcal{W}^{(u.v.|0)}}{\delta J_{\mu\ x}\delta J_{\nu\ 0}\ .\ .}(0)$，以及 $\mathcal{W}^{(u.v.|0)}$ 的结构（参见方程式（1.36））， 不难验证

$$\hat{\Sigma}^{(u.v.|0)}_{\mu,\nu}(p) = -2\lambda\Big(2^{-N}\delta_{\mu,\nu} W^{(u.v.|0)}_{0,0;0,0;1;0} + \sum_{\epsilon,\epsilon'=\pm} \epsilon\epsilon' \int_\Lambda dx\, e^{-ip\cdot x} W^{(u.v.|0)}_{0,0;0,0;2;0}\big((x,\mu,\epsilon),(0,\nu,\epsilon')\big)\Big), \tag{5.6}$$

其中请回忆，核 $W^{(u.v.|0)}_{0\,0\quad 1,\ ;\ 0,\ 0;\ ;\ 0}$ 实际上是一个常数（参见方程式（5.2）及下文）。现在我们明确刻画 λ 中方程式（5.6）右端的主导项。关于右端的第一项，我们从方程式（5.2）中对核 $W^{(u.v.|0)}_{0\,0\quad 1,\ ;\ 0,\ 0;\ ;\ 0}$ 的分解出发，并应用引理 B.2 进一步展开核 $W^{(0)|0}_{,\ 1\,\emptyset\,\emptyset\quad\ 0\ ;\ ;\ :}$

$$W^{(0)|0,0}_{1;\emptyset;\emptyset}(b) = \mu_{N,\lambda} 2^N \mathcal{T}^{(0,N]} + \mu_{N,\lambda} \int d\eta_1 d\eta_2 c_b(\eta_1,\eta_2) \int d\eta d\eta' g^{(h,N]}_{\eta,\eta_1} g^{(h,N]}_{\eta_2,\eta'} W^{(0)|1,1}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset}(\eta',\eta), \tag{5.7}$$

其中

$$\mathcal{T}^{(h,N]} := 2^{-N}\mathcal{E}^T_{(h,N]}(O_b) \equiv -2^{-N}\int_{\Lambda_F^2} d\eta_1 d\eta_2 c_b(\eta_1,\eta_2) g^{(h,N]}_{\eta_2,\eta_1}. \tag{5.8}$$

将方程式（5.7）中的分解代入方程式（5.2），得到

$$\begin{aligned}&\big|2^{-N}\big(W^{(u.v.|0)}_{0,0;0,0;1;0}-\mathfrak{T}^{(0,N]}\big)\big|\le\\&(1-\mu_{N,\lambda})2^{-N}\|c\|_1^w\|g^{(0,N]}\|_\infty+2^{-N}\|c\|_1^w\|g^{(0,N]}\|_1^w\|g^{(0,N]}\|_\infty\big\|W^{(0)|1,1}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset}\big\|_1^w+\\&\sum_{n\ge2}\tfrac{1}{n^2}\big\|W^{(0)|0,0}_{n;\emptyset;\emptyset}\big\|_1^w+\sum_{\dot n\ge2}\big\|U^{(0)|0,0;0,0}_{\emptyset;\dot n;0;0}\big\|_1^w\le C_1\lambda^{\frac12},\end{aligned}\tag{5.9}$$

对于适当的常数 $C_1\ge1$，其中在最后一步中，我们使用定理 3.1 得到了 $W^{(0\ |1\ 1\ )}_{\emptyset\ \emptyset\ \emptyset;;;}$和 $W^{(0\ |0\ 0\ )}_{n\ \emptyset\ \emptyset;;;}$的界，以及命题 4.4得到了 $U^{(0)|0,\quad 0;0\ 0\ ;;\ ;;}_{\emptyset;\dot n;0;0}$的界。

关于方程式 (5.6) 右端的第二项，由方程式(5.3) 可得

$$\begin{aligned}&\big\|g^A*\big(W^{(u.v.|0)}_{0,0;0,0;2;0}-\Pi^{(0,N]}\big)\big\|_1^w\le\big\|g^A*\big(W^{(0)|0,0}_{(1,1);\emptyset;\emptyset}-\Pi^{(0,N]}\big)\big\|_1^w+\\&+\|g^A\|_1^w\left(\sum_{\substack{n_1,n_2\ge1\\n_1+n_2\ge3}}\tfrac{1}{n_1^2n_2^2}\big\|W^{(0)|0,0}_{(n_1,n_2);\emptyset;\emptyset}\big\|_1^w+\big\|U^{(0)|0,0;0,0}_{\emptyset;\emptyset;2;0}\big\|_1^w+\sum_{n\ge1,\dot n\ge2}\big\|U^{(0)|0,0;0,0}_{n;\dot n;0;0}\big\|_1^w\right)\le C_2\lambda^{\frac12},\end{aligned}$$

对于适当的常数 $C_2\ge1$。在动量空间中，这个界写作：

$$\Big|\sum_{\epsilon=\pm}\epsilon\int_\Lambda dx\,e^{-ip\cdot x}W^{(u.v.|0)}_{0,0;0,0;2;0}\big((x,\mu,\epsilon),(0,\nu,\epsilon')\big)-\epsilon'\hat\Pi^{(0,N]}_{\mu,\nu}(p)\Big|\le\big(|p|^2+4\big)C_2\lambda^{\frac12},\tag{5.10}$$

其中我们用到了 $|\sigma(p)|^2+M^2\le|p|^2+4$ 这一事实（回想一下，我们假设 $h^*_M=0$），并引入了：

$$\begin{aligned}\hat\Pi^{(h,N]}_{\mu,\nu}(p)&:=\frac12\sum_{\epsilon,\epsilon'=\pm}\epsilon\epsilon'\int_\Lambda\frac{dxdy}{L^2}e^{-ip\cdot(x-y)}\Pi^{(h,N]}\big((x,\mu,\epsilon),(y,\nu,\epsilon')\big)\\&\equiv\sum_{\epsilon=\pm}\epsilon\epsilon'\int_\Lambda\frac{dxdy}{L^2}e^{-ip\cdot(x-y)}\Pi^{(h,N]}\big((x,\mu,\epsilon),(y,\nu,\epsilon')\big),\end{aligned}\tag{5.11}$$

其中 $\Pi^{(h,N]}$ 定义于方程式 (2.16)，最后一个等式成立是由于方程式 (*E.1*) 中的电荷共轭对称性。只需将方程式 (2.1) 中的重标度还原，方程式 (5.7)、(5.10) 即变为：

$$\big|2^{-N}\big(W^{(u.v.|h^*_M)}_{0,0;0,0;1;0}-\mathfrak{T}^{(h^*_M,N]}\big)\big|\le C_1(2^{-2h^*_M}\lambda)^{\frac12},\tag{5.12}$$

$$\Big|\sum_{\epsilon=\pm}\epsilon\int_\Lambda dx\,e^{-ip\cdot x}W^{(u.v.|h^*_M)}_{0,0;0,0;2;0}\big((x,\mu,\epsilon),(0,\nu,\epsilon')\big)-\epsilon'\hat\Pi^{(h^*_M,N]}_{\mu,\nu}(p)\Big|\le5C_2(2^{-2h^*_M}\lambda)^{\frac12},\tag{5.13}$$

对于每个 $p\in\Lambda^*$ 使得 $|p|\le2^{h^*_M}$。将这些界代回方程式 (5.6)，并令：

$$\hat{\mathfrak{B}}^{(u.v.|h^*_M)}_{\mu,\nu}(p,M,m_N,L):=-2\Big(\delta_{\mu,\nu}\mathfrak{T}^{(h^*_M,N]}(m_N,L)+2\hat\Pi^{(h^*_M,N]}_{\mu,\nu}(p,m_N,L)\Big),\tag{5.14}$$

我们得到：

$$\begin{aligned}&\Big|\hat\Sigma^{(u.v.|h^*_M)}_{\mu,\nu}(p)-\lambda\hat{\mathfrak{B}}^{(u.v.|h^*_M)}_{\mu,\nu}(p,M,m_N,L)\Big|\le2\lambda2^{-N}\delta_{\mu,\nu}\Big|W^{(u.v.|h^*_M)}_{0,0;0,0;1;0}-\mathfrak{T}^{(h^*_M,N]}\Big|+\\&+2\lambda\Big|\sum_{\epsilon,\epsilon'=\pm}\epsilon\epsilon'\int_\Lambda dx\,e^{-ip\cdot x}W^{(u.v.|h^*_M)}_{0,0;0,0;2;0}\big((x,\mu,\epsilon),(0,\nu,\epsilon')\big)-2\hat\Pi^{(h^*_M,N]}_{\mu,\nu}(p)\Big|\\&\le2(C_1+5C_2)2^{-h^*_M}\lambda^{\frac32},\end{aligned}\tag{5.15}$$

从而证明了方程式 (1.41) 中的第一个式子，对于 $C_\star\ge2(C_1+5C_2)$。

$\hat{}$ 对于后续分析，引入 $\mathfrak{B}_{\mu,\nu}(p,M,m_N,L)$ 也很有用：$=\lim_{\lambda\to 0^+}\frac{1}{\lambda}\hat{}\Sigma_{\mu,\nu}(p)$，根据方程式 (1.25)，它满足以下沃德恒等式：

$$\sum_{\mu=0,1}\sigma_\mu(p)\hat{\mathfrak{B}}_{\mu,\nu}(p,M,m_N,L)=0,\ \forall p\in\tfrac{2\pi}{L}\mathbb{Z}^2\cap(-\tfrac{\pi}{a},\tfrac{\pi}{a}]. \tag{5.16}$$

不难验证

$$\hat{\mathfrak{B}}_{\mu,\nu}(p,M,m_N,L)=-2\Big(\delta_{\mu,\nu}\mathfrak{T}^{(\le N)}(m_N,L)+2\hat{\Pi}^{(\le N)}_{\mu,\nu}(p,m_N,L)\Big), \tag{5.17}$$

其中，$\mathfrak{T}^{(\le N)}$ 和 $\hat{}\Pi^{(\le N)}_{\mu\nu}$，分别如式（5.8）和（5.11）右端所示，只需将其定义中的费子传播子 $g^{(h,N]}$ 替换为 $g^{(\le N)}$。为继续推导，我们将使用以下命题来刻画 $\hat{}\mathfrak{B}_{\mu,\nu}$ 和 $\hat{}\mathfrak{B}^{(u.v.)}_{\mu\nu}$。

命题 *5.1.* 对于定理 *1.4* 中的任意 M、m_N、L，若 $m_N\neq 0$，则函数 $\Lambda^*\ni p\mapsto\hat{}\Pi^{(h^*_M,N]}(p,m_N,L)$ 和 $\Lambda^*\ni p\mapsto\hat{}\Pi^{(h^*_M,N]}(p,m_N,L)$ 在 $(-\frac{\pi}{a},\frac{\pi}{a}]^2$ 上均存在连续延拓。稍微滥用一下记号，我们仍用相同符号表示该延拓；它们的 $L\to\infty$极限存在，且关于 $p\in(-\frac{\pi}{a},\frac{\pi}{a}]^2$ 一致收敛。此外，对于 $p\neq 0$，

$$\begin{aligned}
&\lim_{M\to0^+}\lim_{m_N\to0}\lim_{L\to\infty}\hat{\Pi}^{(h^*_M,N]}_{\mu,\nu}(p,m_N,L)=\lim_{m_N\to0}\lim_{L\to\infty}\hat{\Pi}^{(\le N)}_{\mu,\nu}(p,m_N,L)=:\hat{\Pi}_{\mu,\nu}(p),\\
&\lim_{M\to0^+}\lim_{m_N\to0}\lim_{L\to\infty}\mathfrak{T}^{(h^*_M,N]}(m_N,L)=\lim_{m_N\to0}\lim_{L\to\infty}\mathfrak{T}^{(\le N)}(m_N,L)=:\mathfrak{T},
\end{aligned} \tag{5.18}$$

其中

$$\hat{\Pi}_{\mu,\nu}(p)=\frac{1}{8\pi|p|^2}\left(2p_\mu p_\nu-|p|^2\delta_{\mu,\nu}\right)+\tilde{R}_{\mu,\nu}(ap), \tag{5.19}$$

对于适当的函数 $\tilde{R}_{\mu,\nu}$在 $(-\pi,\pi]^2$ 上，使得 $|\tilde{R}_{\mu,\nu}(q)-\tilde{R}_{\mu,\nu}(0)|\le C|q|^{\frac{1}{2}}$，其中某个常数$C>0$ 与 N 无关。

证明推迟到附录 C.2。下面来看命题 5.1 如何推出方程式 (1.42)（方程式 (1.43) 的推导可类似完成）。首先注意，在对方程式 (*L* → ∞ 5.16) 两边取极限后，依据命题 5.1所建立的一致收敛性，上述等式对每个 $p\in(-\frac{\pi}{a},\frac{\pi}{a}]^2$都成立。再取极限 $m_N\to 0$，然后$M\to 0^+$，得到：

$$\sum_{\mu=0,1}\tfrac{i}{a}\left(e^{-iap_\mu}-1\right)\left(\frac{1}{4\pi|p|^2}\left(2p_\mu p_\nu-|p|^2\delta_{\mu,\nu}\right)+2\tilde{R}_{\mu,\nu}(ap)+\mathfrak{T}\delta_{\mu,\nu}\right)=0,$$

对每个 $p\in(-\frac{\pi}{a},\frac{\pi}{a}]^2\setminus\{0\}$。利用 $\tilde{R}_{\mu\nu}$在 *0* 处的连续性，我们得到

$$\sum_{\mu=0,1}p_\mu\left(\frac{1}{4\pi|p|^2}\left(2p_\mu p_\nu-|p|^2\delta_{\mu,\nu}\right)+2\tilde{R}_{\mu,\nu}(0)+\mathfrak{T}\delta_{\mu,\nu}\right)+\mathcal{O}\left(a^{\frac{1}{2}}|p|^{\frac{3}{2}}\right)=0,$$

由于 p 的任意性，我们必须有 $2\tilde{R}_{\mu,\nu}(0)+\mathfrak{T}\delta_{\mu,\nu}=-\frac{1}{4\pi}\delta_{\mu,\nu}$。因此，回到 $\hat{}\mathfrak{B}^{(u.v.|h^*_M)}_{\mu,\nu}$，我们得到

$$\begin{aligned}
\lim_{M\to0^+}\lim_{m_N\to0}\lim_{L\to\infty}\hat{\mathfrak{B}}^{(u.v.|h^*_M)}_{\mu,\nu}(p,M,m_N,L)&=-2\left(\frac{1}{4\pi|p|^2}\left(2p_\mu p_\nu-|p|^2\delta_{\mu,\nu}\right)+2\tilde{R}_{\mu,\nu}(ap)+\mathfrak{T}\delta_{\mu,\nu}\right)\\
&=\frac{1}{\pi}\left(\delta_{\mu,\nu}-\frac{p_\mu p_\nu}{|p|^2}\right)-4\Big(\tilde{R}_{\mu,\nu}(ap)-\tilde{R}_{\mu,\nu}(0)\Big),
\end{aligned}$$

对于每个 $p\neq 0$ 均成立，这就证明了方程式（1.42），其中 $R_{\mu,\nu}(p)=-4\begin{pmatrix}\tilde{} & \tilde{R}_{\mu,\nu}(ap)\\ -R_{\mu,\nu}(0) & \end{pmatrix}$.

局部相位不变性的推论

本小节讨论理论的局域相位不变性（如方程式 (1.24)）带来的两个主要后果，即 ξ–无关性（引理 1.3）和沃德恒等式（方程式 (1.25) 和 (1.26)）。

引理的证明 *1.3*。 令

$$Z_\xi(\varphi;J;B) := e^{-\mathcal{W}_\xi(\varphi;J;B)} \equiv \frac{\int \mathbb{P}_\xi(\mathcal{D}A)\int \mathcal{D}\psi\; e^{-I(A+J,\psi)-(\varphi,\psi)-i(B,j^5(\psi))}}{\int \mathcal{D}\psi\; e^{-I(0,\psi)}}, \tag{A.1}$$

我们将证明 $Z_\xi(0;\ J;\ B)$ 关于 $\xi\in[0,1]$ 是常数。注意， $Z_\xi(\varphi;\ J;\ B)$ 作为 ξ 的函数，在 $[0,1]$ 上连续，且在 $(0,\ 1)$ 上连续可微，其中

$$\partial_\xi Z_\xi(\varphi;J;B) = \frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu\in\{0,1\}}\int_{\Lambda^2} dxdy\;\partial_\xi g^{A,\xi}_{\nu,\mu}(y-x)\frac{\delta^2 Z_\xi}{\delta J_{\mu,x}\delta J_{\nu,y}}(\varphi;J;B), \tag{A.2}$$

这是高斯测度导数的标准公式，其中 $\overset{\delta}{\delta J_{\mu,\ x}} \equiv 2^{2N}\overset{\partial}{\partial J_{\mu,\ x}}$。因此，只需证明 $\partial_\xi Z_\xi(0;\ J;\ B) = 0$ 对每个 $\xi\in(0,\ 1)$。方程式 (A.2) 可在傅里叶空间中改写为：

$$\partial_\xi Z_\xi(\varphi;J;B) = \frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu}\int_{\Lambda^*} dk\;\partial_\xi\left(\frac{1-\xi}{\xi|\sigma(k)|^2+M^2}\right)\frac{\sigma_\nu(k)\sigma^*_\mu(k)}{|\sigma(k)|^2+M^2}\hat{K}^\xi_{\mu,\nu}(k,-k)_{\varphi;J;B}, \tag{A.3}$$

其中 $\hat{K}^\xi_{\mu,\ \nu}(k,\ p)_{\varphi;J;B}:= \int_{\Lambda^2} dxdy e^{ik\cdot x+ip\cdot y}\underline{\frac{\delta^2 Z_\xi}{\delta J_\mu}}_{,\ x\delta J_{\nu,\ y}}(\varphi;\ J;\ B)$ 以及 $\sigma_\mu(k)$ 的定义见方程式 (1.8) 后。现在有如下方程：

$$\sum_{\mu=0,1}\sigma^*_\mu(k)\hat{K}^\xi_{\mu,\nu}(k,p)_{0;J;B} = 0, \qquad \forall k,p\in\Lambda^*, \tag{A.4}$$

这很容易推出方程式（A.3）右端在 $\varphi=0$处为零，进而意味着 $Z_\xi(0;\ J;\ B)$ 不依赖于 $\xi\in[0,1]$。为了证明方程式（A.4），我们必须利用该理论的局域相位不变性，即

$$Z_\xi(e^{ie\alpha}\varphi;J+\nabla\alpha;B) = Z_\xi(\varphi;J;B), \qquad \forall\alpha\in\mathbb{R}^\Lambda \tag{A.5}$$

其中约定 $(e^{ie\alpha}\varphi)^{\pm}_{x,\ s}\equiv e^{\pm ie\alpha(x)}\varphi^\pm_{x,\ s}$，$(A+\nabla\alpha)_{\mu,\ x}\equiv A_{\mu,\ x}+\nabla_\mu\alpha(x)$，并且 $\nabla_\mu\alpha(x)\equiv a^{-1}(\alpha(x+a\hat{e}_\mu)-\alpha(x))$。对方程式（A.5）两端关于 $\alpha(x)$ 求导，并令 $\alpha=0$，我们得到：

$$\begin{aligned} &a^{-1}\sum_{\mu=0,1}\left(\frac{\delta Z_\xi}{\delta J_{\mu,x-a\hat{e}_\mu}}(\varphi;J;B)-\frac{\delta Z_\xi}{\delta J_{\mu,x}}(\varphi;J;B)\right) = \\ &-ie\sum_{s=1,2}\left(\varphi^+_{x,s}\frac{\delta Z_\xi}{\delta\varphi^+_{x,s}}(\varphi;J;B)-\varphi^-_{x,s}\frac{\delta Z_\xi}{\delta\varphi^-_{x,s}}(\varphi;J;B)\right). \end{aligned} \tag{A.6}$$

如果我们进一步对方程式（A.6）两边关于 $J_{\nu,\ y}$ 求导，并令 $\varphi=0$，则得到：

$$a^{-1}\sum_{\mu=0,1}\left(\frac{\delta^2 Z_\xi}{\delta J_{\mu,x-a\hat{e}_\mu}\delta J_{\nu,y}}(0;J;B)-\frac{\delta^2 Z_\xi}{\delta J_{\mu,x}\delta J_{\nu,y}}(0;J;B)\right) = 0. \tag{A.7}$$

通过进行傅里叶变换，我们最终得到方程式（A.4）：

$$0 = a^{-1}\sum_{\mu=0,1}\int_{\Lambda^2} dxdy\; e^{i(k\cdot x+p\cdot y)}\left(\frac{\delta^2 Z_\xi}{\delta J_{\mu,x-a\hat{e}_\mu}\delta J_{\nu,y}}(0;J;B)-\frac{\delta^2 Z_\xi}{\delta J_{\mu,x}\delta J_{\nu,y}}(0;J;B)\right)=$$
$$\sum_{\mu=0,1}\frac{e^{iak_\mu}-1}{a}\int_{\Lambda^2} dxdy\; e^{i(k\cdot x+p\cdot y)}\frac{\delta^2 Z_\xi}{\delta J_{\mu,x}\delta J_{\nu,y}}(0;J;B)=i\sum_{\mu=0,1}\sigma^*_\mu(k)\hat{K}^\xi_{\mu,\nu}(k,p)_{0;J;B}.$$

□

现在我们将焦点转向生成泛函，其形式化定义为 $\mathcal{W}_\xi(\varphi;\,J;\,B)\;=-\log\,Z_\xi(\varphi;\,J;\,B)$。我们将假设 $\mathcal{W}_\xi$ 是一个定义良好的对象，它关于 J解析，且 B 足够接近零：请注意，这先验上仅对取决于模型截断的非常小的 $|\mathsf{e}|$值 成立，即 N，L，m_N；然而，我们分析的一个非平凡结果是，对于 $|\mathsf{e}|\ll M$，$\mathcal{W}_1$的适定性能够一致地成立，而与 N，L，m_N无关。

沃德恒等式的证明：方程式 (1.25)，(1.26)。 在对方程式 (A.5) 两边取对数后，可得 $\mathcal{W}_\xi(e^{i\mathsf{e}\alpha}\varphi;\,J+\nabla\alpha;\,B)$ $=\mathcal{W}_\xi(\varphi;\,J;\,B)\;\forall\alpha\in\mathbb{R}^\Lambda$。这蕴含了方程式 (A.6) 的类似结论，其中以 $\mathcal{W}_\xi$ 替换 Z_ξ ；对两边关于 $J_{\nu,\,0}$ 求导后，得到：

$$\begin{aligned}&a^{-1}\sum_{\mu=0,1}\left(\frac{\delta}{\delta J_{\mu,x-a\hat{e}_\mu}}-\frac{\delta}{\delta J_{\mu,x}}\right)\left(\frac{\delta\mathcal{W}_\xi(\varphi;J;B)}{\delta J_{\nu,0}}\right)=\\&-i\mathsf{e}\sum_{s=1,2}\left(\varphi^+_{x,s}\frac{\delta}{\delta\varphi^+_{x,s}}-\varphi^-_{x,s}\frac{\delta}{\delta\varphi^-_{x,s}}\right)\left(\frac{\delta\mathcal{W}_\xi(\varphi;J;B)}{\delta J_{\nu,0}}\right).\end{aligned}\tag{A.8}$$

首先，我们令 φ,J,B 在方程式 (A.8) 两边都为零；然后若再进行傅里叶变换，便得到：

$$a^{-1}\sum_{\mu=0,1}\int_\Lambda dx\; e^{-ip\cdot x}\left(\frac{\delta^2\mathcal{W}_\xi}{\delta J_{\mu,x-a\hat{e}_\mu}\delta J_{\nu,0}}(0;0;0)-\frac{\delta^2\mathcal{W}_\xi}{\delta J_{\mu,x}\delta J_{\nu,0}}(0;0;0)\right)=0$$

这直接推出方程式 (1.25) 的第一式，即 $\sum_{\mu=0,1}\sigma_\mu(p)\,\hat{\Sigma}^\xi_{\mu,\nu}(p)\;=\;0$对任意$p\in\Lambda^*$.

关于 $\hat{\Sigma}^\xi_{5\,;\mu,\nu}$ 的方程式 (1.25) 第二式，完全类似地可得。现在考虑方程式 (A.8) 的对应形式，其中关于 $J_{\nu,0}$ 的导数替换为关于$\varphi^-_{0\;\;,s'}$ 和$\varphi^+_{y\;\;,s''}$的二阶导数：

$$a^{-1}\sum_{\mu=0,1}\left(\frac{\delta^3\mathcal{W}_\xi}{\delta J_{\mu,x-a\hat{e}_\mu}\delta\varphi^-_{0,s'}\delta\varphi^+_{y,s''}}(0;0;0)-\frac{\delta^3\mathcal{W}_\xi}{\delta J_{\mu,x}\delta\varphi^-_{0,s'}\delta\varphi^+_{y,s''}}(0;0;0)\right)=$$
$$i\mathsf{e}\sum_{s=1,2}\left(\delta(y-x)\delta_{s,s''}\frac{\delta^2\mathcal{W}_\xi}{\delta\varphi^+_{x,s}\delta\varphi^-_{0,s'}}(0;0;0)-\delta(x)\delta_{s,s'}\frac{\delta^2\mathcal{W}_\xi}{\delta\varphi^+_{y,s''}\delta\varphi^-_{x,s}}(0;0;0)\right).$$

然后，进行傅里叶变换，

$$\sum_{\mu=0,1}\frac{e^{-iap_\mu}-1}{a}\int_{\Lambda^2} dxdy\; e^{i(-p\cdot x+k\cdot y)}\frac{\delta^3\mathcal{W}_\xi}{\delta J_{\mu,x}\delta\varphi^-_{0,s'}\delta\varphi^+_{y,s''}}(0;0;0)=$$
$$i\mathsf{e}\left(\int_\Lambda dx\; e^{i(-p+k)\cdot x}\frac{\delta^2\mathcal{W}_\xi}{\delta\varphi^+_{x,s''}\delta\varphi^-_{0,s'}}(0;0;0)-\int_\Lambda dy\; e^{ik\cdot y}\frac{\delta^2\mathcal{W}_\xi}{\delta\varphi^+_{y,s''}\delta\varphi^-_{0,s'}}(0;0;0)\right),$$

这正是方程式（1.26），即

$$\sum_{\mu=0,1} \sigma_\mu(p)\hat{\Gamma}^{\xi}_{\mu}(p;k) = -\mathsf{e}\big(\hat{S}^{\xi}(k-p) - \hat{S}^{\xi}(k)\big), \qquad \forall p,k \in \Lambda^*.$$

□

B 有效势的恒等式

这里给出有效势各核之间恒等式的证明，这些恒等式已在第 3 小节中使用。由于只要 N、L 有限，$\mathcal{V}^{(h)}$ 就只取决于次数 n 小于或等于 $n_* \equiv 2(2^N L)^2+1$的场源，因此在本小节中，与 $G^{(n)}$、$\dot{G}^{(n)}$、$\ddot{G}^{(n)}$ 相关的泛函导数和核，对于 $n > n_*$，均理解为零。为完整起见，回顾一下：

$$\mathcal{V}^{(h)}(\psi;G;\dot{G};\ddot{G}) = -\log \mathcal{E}\Big(e^{-\mathcal{V}(\psi+\cdot;G;\dot{G};\ddot{G})}\Big),$$

其中在本小节中，$\mathcal{E}(F) \equiv \mathcal{E}_{(h,N]}(F) := \int P^{(h,N]}(\mathcal{D}\zeta)\, F(\zeta)$ 对于任意 Grassmann 多项式$F(\zeta)$，而 $\mathcal{V}$ 与方程式（1.44）中的定义相同。

下面的分析基于以下两个基本恒等式。

1. *Grassmann* 分部积分。给定任意 Grassmann 多项式 $F(\zeta)$,

$$\int P^{(h,N]}(\mathcal{D}\zeta)\zeta^{-}_{\eta} F(\zeta) = \int_{\Lambda_F} d\eta' g^{(h,N]}_{\eta,\eta'} \int P^{(h,N]}(\mathcal{D}\zeta)\frac{\delta F}{\delta \zeta^{+}_{\eta'}}(\zeta) \tag{B.1}$$

$$\int P^{(h,N]}(\mathcal{D}\zeta)\zeta^{+}_{\eta} F(\zeta) = -\int_{\Lambda_F} d\eta' g^{(h,N]}_{\eta',\eta} \int P^{(h,N]}(\mathcal{D}\zeta)\frac{\delta F}{\delta \zeta^{-}_{\eta'}}(\zeta). \tag{B.2}$$

2. 树性质。设 $I := \{1,\dots,n\}$，$I' := I\setminus\{1\}$，$g^A_T := \prod_{(i,\ j)\in T} \lambda g^A_{b_i,\ b_j}$并回顾 $\mathfrak{T}(I)$ 表示 I 上的所有生成树的集合（参见下方方程式（1.23））。若 $n=1$ 按定义$\mathfrak{T}(I) = \emptyset$, 否则：

$$\begin{aligned}
&\sum_{T\in\mathfrak{T}(I)} g^A_T = \\
&= \sum_{k\in I'} g^A_{b_1,b_k} \sum_{T\in\mathfrak{T}(I')} g^A_T + \mathbb{1}_{(n\geq 3)} \sum_{\substack{X_1\dot\cup X_2 = I' \\ X_1\ni 2}} \sum_{k\in X_1} g^A_{b_1,b_k} \sum_{T_1\in\mathfrak{T}(X_1)} g^A_{T_1} \sum_{T_2\in\mathfrak{T}(X_2\cup\{1\})} g^A_{T_2}.
\end{aligned} \tag{B.3}$$

虽然*Grassmann* 分部积分是一个标准事实（例如参见[25, 方程式 (A4)]），但树性质并非完全显而易见。由于它是本小节接下来分析的关键基础，我们将给出其证明。

树性质的证明。$\mathfrak{T}(I)$ 与以下对象之间存在一一对应关系

$$\mathcal{C}(I) := \Big\{(X_1,T_1,T_2,k):\ X_1\subseteq I', 2\in X_1, T_1\in\mathfrak{T}(X_1), T_2\in\mathfrak{T}(I'\setminus X_1), k\in X_1\Big\}.$$

事实上，我们可以定义一个映射 $\mathfrak{T}(I)\mapsto\mathcal{C}(I)$，其定义方式是：对于任意 $T\in\mathfrak{T}(I)$，令

- $X_1\subseteq I'$ 是满足 $2\in X_1$ 的极大连通集。
- T_1 是 T在 X_1上的限制，即 $T_1 = \{(i,\ j)\in T:\ i,\ j\in X_1\}$。

- $k \in X_1$ 是满足 $(1,\ k)\ \in T$ 的唯一顶点。
- 令 $X_2 := I' \setminus X_1$, T_2 是 T 在 $X_2 \cup \{1\}$ 上的限制。

参见图16 以查看图形表示。另一方面，我们可以考虑映射$\mathcal{C}(I) \mapsto \mathcal{T}(I)$，定义为 $T := T_1 \dot\cup T_2 \dot\cup (1,k)$。很容易验证，映射$\mathcal{T}(I) \mapsto \mathcal{C}(I)$ 和 $\mathcal{C}(I) \mapsto \mathcal{T}(I)$ 互为逆映射。

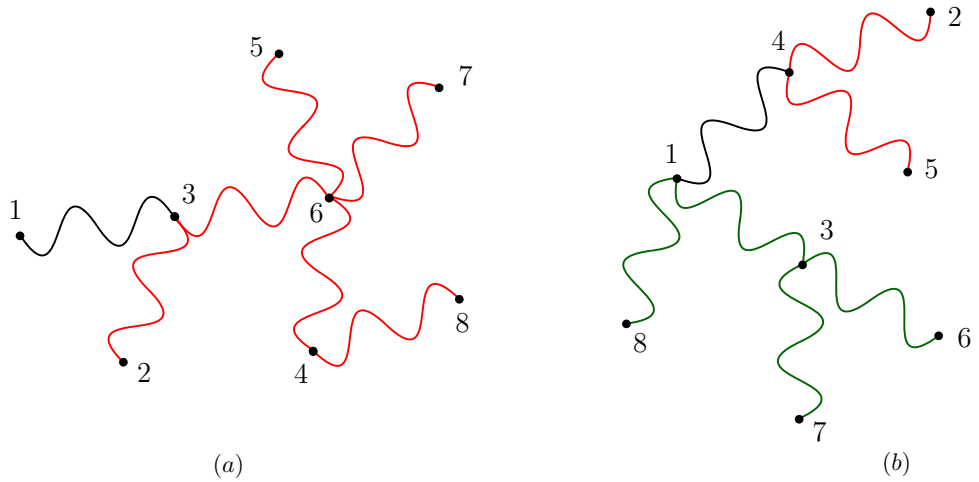


图16：对应关系 $\mathcal{T}(I) \leftrightarrow \mathcal{C}(I)$ 的图形表示。在例 (a) 中，顶点 1 是 T, $X_1 = I', X_2 = \emptyset$, $T_1 = \{(2,3),(3,6),(6,5),(6,7),(6,4),(4,8)\}$ 和$k = 3$的叶节点。在例 (b) 中，1 不是叶节点，$X_1 = \{2,4,5\}$, $X_2 = \{3,6,7,8\}$, $T_1 = \{(4,2),(4,5)\}$,$T_2 = \{(1,3),(3,6),(3,7),(1,8)\}$ 和 $k = 4$。

$\mathcal{C}(I)$ 与 $\mathcal{T}(I)$ 之间的双射使我们可以写出：

$$\sum_{T \in \mathcal{T}(I)} g_T^A = \sum_{(X_1,T_1,T_2,k) \in \mathcal{C}(I)} g^A_{T_{(X_1,T_1,T_2,k)}}, \tag{B.4}$$

其中 $T_{(X_1,T_1,T_2,k)}$ 是 $\mathcal{T}(I)$ 中由 $(X_1,T_1,T_2,k) \in \mathcal{C}(I)$ 唯一确定的树。现在，区分 $X_2 \equiv I' \setminus X_1$ 是否为空很方便（即顶点 1 是否为叶节点，见图 16）。在第一种情况下，我们直接得到：$g^A_{T(X_1,T_1,T_2,k)} = g^A_{(1,k)} g^A_{T_1}$；而如果 $X_2 \neq \emptyset, g^A_{T(X_1,T_1,T_2,k)} = g^A_{(1,k)} g^A_{T_1} g^A_{T_2}$。因此，方程式 (B.4) 变为：

$$\sum_{T \in \mathcal{T}(I)} g_T^A = \sum_{\substack{(X_1,T_1,T_2,k) \in \mathcal{C}(I) \\ X_1 = I'}} g^A_{(1,k)} g^A_{T_1} + \sum_{\substack{(X_1,T_1,T_2,k) \in \mathcal{C}(I) \\ X_1 \subset I'}} g^A_{(1,k)} g^A_{T_1} g^A_{T_2}. \tag{B.5}$$

注意到，方程式 (B.5) 右端的第二个求和仅在 $n = 3$时才非空，所需的树性质方程式 (B.3) 即得证。 □

B.1 预备恒等式

我们先给出两个中间引理。第一个引理 LemmaB.1刻画了 $\mathcal{V}^{(h)}$ 关于 ψ 和 $G^{(1)}$的导数。接下来，引理 B.2刻画了 $\mathcal{V}^{(h)}$ 关于$G^{(n)}$ 和 $\dot G^{(n)}$的导数，其中 $n \geq 2$。我们将使用记号 $\mathcal{V}^{(h)}(\psi;\mathbf{0}) := \mathcal{V}^{(h)}(\psi; G;\ \dot G;\ \ddot G)|_{G,\dot G,\ddot G \equiv 0}$ 或$\mathcal{V}^{(h)}(\psi; G^{(1)}; \mathbf{0})$，当 $G^{(n)}, \dot G^{(n)}, \ddot G^{(n)} \equiv 0$ 对于 $n \geq 2$, 等。

引理 B.1。 有效势 $\mathcal{V}^{(h)}$满足以下恒等式。

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta \mathcal{V}^{(h)}}{\delta \psi^+_{\eta_1}}(\psi;\mathbf{0}) = e^{\mathcal{V}^{(h)}(\psi;\mathbf{0})} \int db_1 d\eta c_{b_1}(\eta_1,\eta) \left(\psi^-_\eta + \int d\eta' g^{(h,N]}_{\eta,\eta'} \frac{\delta}{\delta \psi^+_{\eta'}}\right) \times \\
&\times \left\{ 2^N (\mu_{N,\lambda} - 1) - \sum_{n\geq 1} \frac{\mu_{N,\lambda}}{n^2} \int db \lambda g^A_{b_1,b} \frac{\delta}{\delta G^{(n)}_b} + \right. \\
&\left. + \sum_{n_1\geq 1, n_2 \geq 2} 2^{-N} \frac{\mathcal{N}_{n_1,n_2}}{(n_1+n_2)^2} \int db \lambda g^A_{b_1,b} \frac{\delta^2}{\delta G^{(n_1)}_b \delta \dot{G}^{(n_2)}_{b_1}} - \sum_{n\geq 2} 2^{-N} \frac{\delta}{\delta \ddot{G}^{(n)}_{b_1}} \right\} e^{-\mathcal{V}^{(h)}} \Big|_{(\psi;\mathbf{0})},
\end{aligned} \tag{B.6}$$

where $\mathcal{N}_{n_1,n_2} = \frac{(n_1+n_2)^2}{(n_1+n_2-1)n_1 n_2^2} \leq \frac{(n_1+n_2)^2}{n_1^2 n_2^2}$. *Moreover:*

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta^2 \mathcal{V}^{(h)}}{\delta G^{(1)}_b \delta \psi^+_{\eta_1}}(\psi;\mathbf{0}) = \\
&\frac{\delta}{\delta G^{(1)}_b} \left\{ e^{\mathcal{V}^{(h)}} \int db_1 d\eta c_{b_1}(\eta_1,\eta) \left(\psi^-_\eta + \int d\eta' g^{(h,N]}_{\eta,\eta'} \frac{\delta}{\delta \psi^+_{\eta'}}\right) \times \right. \\
&\times \left[2^N (\mu_{N,\lambda} - 1) - \sum_{n\geq 1} \frac{\mu_{N,\lambda}}{n^2} \int db \lambda g^A_{b_1,b} \frac{\delta}{\delta G^{(n)}_b} + \right. \\
&\left. \left. + \sum_{n_1\geq 1, n_2 \geq 2} 2^{-N} \frac{\mathcal{N}_{n_1,n_2}}{(n_1+n_2)^2} \int db \lambda g^A_{b_1,b} \frac{\delta^2}{\delta G^{(n_1)}_b \delta \dot{G}^{(n_2)}_{b_1}} - \sum_{n\geq 2} 2^{-N} \frac{\delta}{\delta \ddot{G}^{(n)}_{b_1}} \right] \right\} e^{-\mathcal{V}^{(h)}} \Big|_{(\psi;\mathbf{0})} + \\
&+ \mu_{N,\lambda} \int d\eta c_b(\eta_1,\eta) \left(\psi^-_\eta - \int d\eta' g^{(h,N]}_{\eta,\eta'} \frac{\delta \mathcal{V}^{(h)}}{\delta \psi^+_{\eta'}}(\psi;\mathbf{0})\right).
\end{aligned} \tag{B.7}$$

证明。 我们从以下恒等式开始:

$$\frac{\delta \mathcal{V}^{(h)}}{\delta \psi^+_{\eta_1}}(\psi;G;\dot{G};\ddot{G}) = e^{\mathcal{V}^{(h)}(\psi;G;\dot{G};\ddot{G})} \mathcal{E}\Big(\frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \psi^+_{\eta_1}}(\psi+\cdot;G;\dot{G};\ddot{G}) e^{-\mathcal{V}(\psi+\cdot;G;\dot{G};\ddot{G})}\Big)$$

并且我们将除 ψ 和 $G^{(1)}$之外的所有场都设为零。由方程式（1.44）我们得到:

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta \mathcal{V}^{(h)}}{\delta \psi^+_{\eta_1}}(\psi;G^{(1)};\mathbf{0}) = \\
&e^{\mathcal{V}^{(h)}} \left\{ \left[2^N (\mu_{N,\lambda} - 1) \int db_1 \mathcal{E}\Big(\frac{\delta O_{b_1}}{\delta \psi^+_{\eta_1}}(\psi+\cdot) e^{-\mathcal{V}(\psi+\cdot;G^{(1)};\mathbf{0})}\Big) + \right.\right. \\
&\sum_{n\geq 2} n 2^{N(2-n)} \int d\underline{b} v_n(\underline{b}) \mathcal{E}\Big(\frac{\delta O_{b_1}}{\delta \psi^+_{\eta_1}}(\psi+\cdot) O_{\underline{b}'}(\psi+\cdot) e^{-\mathcal{V}(\psi+\cdot;G^{(1)};\mathbf{0})}\Big) + \\
&\left.\left. \sum_{n\geq 2} n 2^{-nN} \int d\underline{b} \tilde{v}_n(\underline{b}) \mathcal{E}\Big(\frac{\delta O_{b_1}}{\delta \psi^+_{\eta_1}}(\psi+\cdot) O_{\underline{b}'}(\psi+\cdot) e^{-\mathcal{V}(\psi+\cdot;G^{(1)};\mathbf{0})}\Big) \right] \right\} + \\
&e^{\mathcal{V}^{(h)}(\psi;G^{(1)};\mathbf{0})} \int db\ G^{(1)}_b v_1(b) \mathcal{E}\Big(\frac{\delta O_b}{\delta \psi^+_{\eta_1}}(\psi+\cdot) e^{-\mathcal{V}(\psi+\cdot;G^{(1)};\mathbf{0})}\Big),
\end{aligned} \tag{B.8}$$

其中我们使用了分解 $w_{n,0}=v_n+2^{-2N}\tilde{v}_n$，依据方程式（1.29）。注意到 $\frac{\delta O_b}{\delta\psi^+_{\eta_1}}(\psi+\zeta)$ $=\int \overline{d\eta c_b}(\eta_1,\eta)(\psi^-_\eta+\zeta^-_\eta)$，并利用方程式（B.1），我们发现方程式（B.8）右端的第一行变为

$$2^N(\mu_{N,\lambda}-1)\int db\int d\eta c_b(\eta_1,\eta)\left(\psi^-_\eta+\int d\eta' g^{(h,N]}_{\eta,\eta'}\frac{\delta}{\delta\psi^+_{\eta'}}\right)e^{-\mathcal{V}^{(h)}(\psi;G^{(1)};\mathbf{0})}.$$

接下来考察方程式 (B.8) 右端的第二行。回想 $v_n(b) = \sum_{T\in\mathcal{T}(I)}\mu_{N,\,n}^{n\quad\lambda}!\quad g^A_T$ (参见方程式 (1.29))，并利用方程式 (B.3)，可得

$$\begin{aligned}v_n(\underline{b}) &= \mu_{N,\lambda}\mathbb{1}_{(n=1)}+\mathbb{1}_{(n\geq 2)}\sum_{k\in I}\frac{\lambda\mu_{N,\lambda}}{n}g^A_{b_1,b_k}v_{n-1}(\underline{b}')+\\ &+\mathbb{1}_{(n\geq 3)}\sum_{\substack{X_1\dot\cup X_2=I'\\ 2\in X_1}}\binom{n}{|X_1|}^{-1}\sum_{k\in X_1}\lambda g^A_{b_1,b_k}v_{|X_1|}(\underline{b}_{X_1})v_{|X_2|+1}(\underline{b}_{X_2\cup\{1\}}),\end{aligned}\tag{B.9}$$

其中 $\underline{b}_{X_1}=\{b_i:\quad i\in X_1\}$ 并回想 v_n 在其变量的置换下具有对称性。因此，我们可以将方程式 (B.8) 右端的第二行改写为

$$\begin{aligned}&\sum_{n\geq 2}\int d\underline{b}e^{\mathcal{V}^{(h)}(\psi;G^{(1)};\mathbf{0})}\mathcal{E}\Big(\frac{\delta O_{b_1}}{\delta\psi^+_{\eta_1}}(\psi+\cdot)\Big\{\mu_{N,\lambda}(n-1)\lambda g^A_{b_1,b_2}\Big(2^{N(2-n)}v_{n-1}(\underline{b}')O_{\underline{b}'}(\psi+\cdot)\Big)\\ &+2^{-N}n\mathbb{1}_{(n\geq 3)}\sum_{\substack{X_1\dot\cup X_2=I'\\ X_1\ni 2}}\binom{n}{|X_1|}^{-1}|X_1|\lambda g^A_{b_1,b_2}2^{N(1-|X_1|)}v_{|X_1|}(\underline{b}_{X_1})O_{\underline{b}_{X_1}}(\psi+\cdot)\times\\ &\times 2^{N(1-|X_2|)}v_{|X_2|+1}(\underline{b}_{X_2\cup\{1\}})O_{\underline{b}_{X_2}}(\psi+\cdot)\Big\}e^{-\mathcal{V}(\psi+\cdot;G^{(1)};\mathbf{0})}\Big),\end{aligned}\tag{B.10}$$

其中我们利用了 v_n 和 $O_{b_{X_1}}$ 的对称性：$=\prod_{i\in X_1}O_{b_i}$ 等等。方程式 (B.10) 还可以进一步改写：将括号中的各项识别为 $\mathcal{V}$ 关于 G 和 G (参见方程式 (1.44)) 的导数，可得

$$\begin{aligned}&\int db_1db\,e^{\mathcal{V}^{(h)}(\psi;G^{(1)};\mathbf{0})}\mathcal{E}\Big(\frac{\delta O_{b_1}}{\delta\psi^+_{\eta_1}}(\psi+\cdot)\Big[-\sum_{n\geq 2}\frac{\mu_{N,\lambda}}{(n-1)^2}\lambda g^A_{b_1,b}\frac{\delta}{\delta G^{(n-1)}_b}+\\ &+\sum_{n\geq 3}2^{-N}\sum_{\substack{n_1\geq 1,n_2\geq 2\\ n_1+n_2=n}}\frac{\mathcal{N}_{n_1,n_2}}{(n_1+n_2)^2}\lambda g^A_{b_1,b}\frac{\delta}{\delta G^{(n_1)}_b}\frac{\delta}{\delta\dot G^{(n_2)}_{b_1}}\Big]e^{-\mathcal{V}(\psi+\cdot;G^{(1)};\mathbf{0})}\Big),\end{aligned}$$

其中

$$\mathcal{N}_{n_1,n_2}=\frac{(n_1+n_2)^3n_1}{\binom{n_1+n_2}{n_1}n_1^3n_2^3}\sum_{\substack{X_1\dot\cup X_2=I'\\ X_1\ni 2\\ |X_1|=n_1}}1=\frac{\binom{n_1+n_2-2}{n_1-1}(n_1+n_2)^3}{\binom{n_1+n_2}{n_1}n_1^2n_2^3}=\frac{(n_1+n_2)^2}{(n_1+n_2-1)n_1n_2^2}.\tag{B.11}$$

再次展开 $\frac{\delta O_b}{\delta\psi^+_{\eta_1}}(\psi+\underline{\zeta})=\int d\eta c_b(\eta_1,\ \eta)(\psi^-_\eta+\zeta^-_\eta)$，并利用方程式 (B.1)，我们发现方程式 (B.8的第二行可写为

$$\begin{aligned}&e^{\mathcal{V}^{(h)}(\psi;G^{(1)};\mathbf{0})}\int db_1dbd\eta\ c_{b_1}(\eta_1,\eta)\left(\psi^-_\eta+\int d\eta' g^{(h,N]}_{\eta,\eta'}\frac{\delta}{\delta\psi^+_{\eta'}}\right)\times\\ &\times\left(-\sum_{n\geq 2}\frac{\mu_{N,\lambda}\lambda g^A_{b_1,b}}{(n-1)^2}\frac{\delta}{\delta G^{(n-1)}_b}+\sum_{n_1\geq 1,n_2\geq 2}2^{-N}\frac{\mathcal{N}_{n_1,n_2}}{(n_1+n_2)^2}\lambda g^A_{b_1,b}\frac{\delta^2}{\delta G^{(n_1)}_b\delta\dot G^{(n_2)}_{b_1}}\right)e^{-\mathcal{V}^{(h)}(\psi;G^{(1)};\mathbf{0})}.\end{aligned}$$

现在讨论方程式 (B.8右端的第三行，它可以改写为

$$\sum_{n\geq 2} 2^{-N} \int d\underline{b} e^{\mathcal{V}^{(h)}(\psi;G^{(1)};\mathbf{0})} \mathcal{E}\Big(\int d\eta c_{b_1}(\eta_1,\eta)\Big(\psi^-_\eta + \int d\eta' g^{(h,N]}_{\eta,\eta'} \frac{\delta}{\delta\psi^+_{\eta'}}\Big)\times$$
$$\times \Big(n 2^{N(1-n)} \tilde{v}_n(\underline{b}) O_{\underline{b}'}(\psi+\cdot)\Big) e^{-\mathcal{V}(\psi+\cdot;G^{(1)};\mathbf{0})}\Big) =$$
$$-\sum_{n\geq 2} 2^{-N} \int db_1 d\eta c_{b_1}(\eta_1,\eta) e^{\mathcal{V}^{(h)}} \Big(\psi^-_\eta + \int d\eta' g^{(h,N]}_{\eta,\eta'} \frac{\delta}{\delta\psi^+_{\eta'}}\Big) \frac{\delta}{\delta \ddot{G}^{(n)}_{b_1}} e^{-\mathcal{V}^{(h)}(\psi;G^{(1)};\mathbf{0})}.$$

最后，利用方程式 (B.8) 右端的第四行可轻松处理：再次使用方程式 (B.1)，并回想 $v_1(b) = \mu_{N,\lambda}$:

$$e^{\mathcal{V}^{(h)}(\psi;G^{(1)};\mathbf{0})} \mu_{N,\lambda} \int db G^{(1)}_b \mathcal{E}\Big(\frac{\delta O_b}{\delta\psi^+_{\eta_1}}(\psi+\cdot) e^{-\mathcal{V}(\psi+\cdot;G^{(1)};\underline{0})}\Big) =$$
$$e^{\mathcal{V}^{(h)}(\psi;G^{(1)};\mathbf{0})} \mu_{N,\lambda} \int db d\eta G^{(1)}_b c_b(\eta_1,\eta)\Big(\psi^-_\eta + \int d\eta' g^{(h,N]}_{\eta,\eta'} \frac{\delta}{\delta\psi^+_{\eta'}}\Big) e^{-\mathcal{V}^{(h)}(\psi;G^{(1)};\mathbf{0})}.$$

综上，我们将方程式 (B.8) 改写为

$$\frac{\delta \mathcal{V}^{(h)}}{\delta\psi^+_{\eta_1}}(\psi;G^{(1)};\mathbf{0}) =$$
$$e^{\mathcal{V}^{(h)}(\psi;G^{(1)};\mathbf{0})} \int db_1 d\eta c_{b_1}(\eta_1,\eta)\Big(\psi^-_\eta + \int d\eta' g^{(h,N]}_{\eta,\eta'} \frac{\delta}{\delta\psi^+_{\eta'}}\Big)\Big\{ 2^N(\mu_{N,\lambda}-1) +$$
$$-\sum_{n\geq 1} \frac{\mu_{N,\lambda}}{n^2} \int db\lambda g^A_{b_1,b} \frac{\delta}{\delta G^{(n)}_b} + 2^{-N} \sum_{\substack{n_1\geq 1\\ n_2\geq 2}} \frac{\mathcal{N}_{n_1,n_2}}{(n_1+n_2)^2} \int db\lambda g^A_{b_1,b} \frac{\delta^2}{\delta G^{(n_1)}_b \delta \dot{G}^{(n_2)}_{b_1}} +$$
$$-2^{-N} \sum_{n\geq 2} \frac{\delta}{\delta \ddot{G}^{(n)}_{b_1}}\Big\} e^{-\mathcal{V}^{(h)}(\psi;G^{(1)};\mathbf{0})} +$$
$$+ e^{\mathcal{V}^{(h)}(\psi;G^{(1)};\mathbf{0})} \mu_{N,\lambda} \int db d\eta G^{(1)}_b c_b(\eta_1,\eta) \left(\psi^-_\eta + \int d\eta' g^{(h,N]}_{\eta,\eta'} \frac{\delta}{\delta\psi^+_{\eta'}}\right) e^{-\mathcal{V}^{(h)}(\psi;G^{(1)};\mathbf{0})}.$$

再令 $G^{(1)}=0$，即可得到方程式 (B.6)；而对两边关于 $G^{(1)}$ 求导，然后令 $G^{(1)}=0$，则可得到方程式 (B.7)。 □

引理 B.2. 以下恒等式适用于有效势 $\mathcal{V}^{(h)}$。

$$\frac{\delta \mathcal{V}^{(h)}}{\delta G^{(n)}_{b_1}} =$$
$$e^{\mathcal{V}^{(h)}} \int d\eta_1 d\eta_2 c_{b_1}(\eta_1,\eta_2) \left(\psi^+_{\eta_1}\psi^-_{\eta_2} + \psi^-_{\eta_2} \int d\eta g^{(h,N]}_{\eta,\eta_1} \frac{\delta}{\delta\psi^-_\eta} + \psi^+_{\eta_1} \int d\eta' g^{(h,N]}_{\eta_2,\eta'} \frac{\delta}{\delta\psi^+_{\eta'}} + \right.$$
$$\left. - g^{(h,N]}_{\eta_2,\eta_1} + \int d\eta d\eta' g^{(h,N]}_{\eta,\eta_1} g^{(h,N]}_{\eta_2,\eta'} \frac{\delta^2}{\delta\psi^+_{\eta'}\delta\psi^-_\eta} \right) \times \tag{B.12}$$
$$\times \left\{ \mathbb{1}_{(n=1)}\mu_{N,\lambda} - \mathbb{1}_{(n\geq 2)} \frac{n^2}{(n-1)^2} 2^{-N} \mu_{N,\lambda} \int db\lambda g^A_{b_1,b} \frac{\delta}{\delta G^{(n-1)}_b} + \right.$$
$$\left. + \mathbb{1}_{(n\geq 3)} 2^{-2N} \sum_{\substack{n_1\geq 1, n_2\geq 2\\ n_1+n_2=n}} \mathcal{N}_{n_1,n_2} \int db\lambda g^A_{b_1,b} \frac{\delta^2}{\delta G^{(n_1)}_b \delta \dot{G}^{(n_2)}_{b_1}} \right\} e^{-\mathcal{V}^{(h)}},$$

其中 $\mathcal{N}_{n_1,\ n_2}$ 如引理 *B.1*所述。此外：

$$\frac{\delta \mathcal{V}^{(h)}}{\delta \dot{G}^{(n)}_{b_1}} =$$
$$e^{\mathcal{V}^{(h)}} \int db \Bigg\{ -\frac{\mu_{N,\lambda} n^2}{(n-1)^2} \lambda g^A_{b_1,b} \frac{\delta}{\delta G^{(n-1)}_b} + 2^{-N} \mathbb{1}_{(n\geq 3)} \sum_{\substack{n_1\geq 1\\ n_2\geq 2\\ n_1+n_2=n}} \mathcal{N}_{n_1,n_2} \lambda g^A_{b_1,b} \frac{\delta^2}{\delta G^{(n_1)}_b \delta \dot{G}^{(n_2)}_{b_1}} \Bigg\} e^{-\mathcal{V}^{(h)}}. \tag{B.13}$$

证明。 证明过程沿用引理 B.1 所用的相同思路，这里不再详述。出发点是以下恒等式：

$$\frac{\delta \mathcal{V}^{(h)}}{\delta G^{(n)}_{b_1}}(\psi; G; \dot{G}; \ddot{G}) = e^{\mathcal{V}^{(h)}(\psi;G;\dot{G};\ddot{G})} \mathcal{E}\Big(\frac{\delta \mathcal{V}}{\delta G^{(n)}_{b_1}}(\psi + \cdot\,; G; \dot{G}; \ddot{G}) e^{-\mathcal{V}(\psi+\cdot\,;G;\dot{G};\ddot{G})} \Big)$$

用于证明方程式 (B.12)，而将关于 $\dot{G}^{(n)}$ 的导数替换为 $G^{(n)}$ 的导数，可得相同的恒等式，用于证明方程式 (B.13)。注意：

$$\frac{\delta \mathcal{V}}{\delta G^{(n)}_{b_1}}(\psi + \zeta; G; \dot{G}; \ddot{G}) = n^3 2^{N(1-n)} \int d\underline{b}' v_n(\underline{b}) O_{\underline{b}}(\psi + \zeta).$$

利用方程式 (B.9) 重写 v_n ，并遵循引理B.1证明中的相同步骤，可得：

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{V}^{(h)}}{\delta G^{(n)}_{b_1}}(\psi; G; \dot{G}; \ddot{G}) = e^{\mathcal{V}^{(h)}} \Bigg\{ \mathbb{1}_{(n=1)} \mu_{N,\lambda} - 2^{-N} \mathbb{1}_{(n\geq 2)} \frac{\mu_{N,\lambda}\, n^2}{(n-1)^2} \int db \lambda g^A_{b_1,b} \frac{\delta}{\delta G^{(n-1)}_b} + \\ + 2^{-2N} \mathbb{1}_{(n\geq 3)} \int db \sum_{\substack{n_1\geq 1, n_2\geq 2\\ n_1+n_2=n}} \mathcal{N}_{n_1,n_2} \lambda g^A_{b_1,b} \frac{\delta^2}{\delta G^{(n_1)}_b \delta \dot{G}^{(n_2)}_{b_1}} \Bigg\} \mathcal{E}\Big(O_{b_1}(\psi + \cdot) e^{-\mathcal{V}(\psi+\cdot\,;G;\dot{G};\ddot{G})} \Big), \end{aligned} \tag{B.14}$$

对于 $\frac{\delta \mathcal{V}^{(h)}}{\delta \dot{G}^{(n)}_{b_1}}$，相同的表达式也成立，只需在 Grassmann $\dot{}$ $\ddot{}$ 积分中去掉因子 $O_{b_1}(\psi+\zeta)$，即可直接得到方程式 (B.13)。令 $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\psi + \zeta; G; G; G)$，则可将其重写为：

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}\Big(O_{b_1}(\psi + \cdot) e^{-\mathcal{V}} \Big) = \int d\eta_1 d\eta_2 c_{b_1}(\eta_1, \eta_2) \mathcal{E}\Big((\psi^+_{\eta_1} + (\cdot)^+_{\eta_1})(\psi^-_{\eta_2} + (\cdot)^-_{\eta_2}) e^{-\mathcal{V}} \Big) \\ &= \int d\eta_1 d\eta_2 c_{b_1}(\eta_1, \eta_2) \mathcal{E}\Big(\Big[-(\psi^-_{\eta_2} + (\cdot)^-_{\eta_2}) \Big(\psi^+_{\eta_1} - \int d\eta g^{(h,N]}_{\eta,\eta_1} \frac{\delta}{\delta (\cdot)^-_\eta} \Big) - g^{(h,N]}_{\eta_2,\eta_1} \Big] e^{-\mathcal{V}} \Big) = \\ &= \int d\eta_1 d\eta_2 c_{b_1}(\eta_1, \eta_2) \Bigg(\psi^+_{\eta_1} \psi^-_{\eta_2} + \psi^-_{\eta_2} \int d\eta g^{(h,N]}_{\eta,\eta_1} \frac{\delta}{\delta \psi^-_\eta} + \psi^+_{\eta_1} \int d\eta' g^{(h,N]}_{\eta_2,\eta'} \frac{\delta}{\delta \psi^+_{\eta'}} + \\ &+ \int d\eta d\eta' g^{(h,N]}_{\eta,\eta_1} g^{(h,N]}_{\eta_2,\eta'} \frac{\delta^2}{\delta \psi^+_{\eta'} \delta \psi^-_\eta} - g^{(h,N]}_{\eta_2,\eta_1} \Bigg) e^{-\mathcal{V}^{(h)}}, \end{aligned}$$

将其代入方程式 (B.14) 的右端后，即得方程式 (B.12)。 □

B.2 核的恒等式

引理B.1 和引理B.2 可借助方程式（ $\mathcal{V}^{(h)}$，推导出2.10）中核之间的恒等式。

引理3.2的证明。这实际上是方程式（B.6）的推论：

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{V}^{(h)}}{\delta\psi^{+}_{\eta_1}}(\psi;\mathbf{0}) = \int db_1 \int d\eta c_{b_1}(\eta_1,\eta)\left(\psi^{-}_{\eta} - \int d\eta' g^{(h,N]}_{\eta,\eta'}\frac{\delta\mathcal{V}^{(h)}}{\delta\psi^{+}_{\eta'}} + \int d\eta' g^{(h,N]}_{\eta,\eta'}\frac{\delta}{\delta\psi^{+}_{\eta'}}\right)\times \\ \times\left\{2^N(\mu_{N,\lambda}-1) + \sum_{n\geq 1}\frac{\mu_{N,\lambda}}{n^2}\int db\lambda g^{A}_{b_1,b}\frac{\delta\mathcal{V}^{(h)}}{\delta G^{(n)}_{b}} + \right. \\ - 2^{-N}\sum_{n_1\geq 1,n_2\geq 2}\frac{\mathcal{N}_{n_1,n_2}}{(n_1+n_2)^2}\int db\lambda g^{A}_{b_1,b}\left(\frac{\delta^2\mathcal{V}^{(h)}}{\delta G^{(n_1)}_{b}\delta\dot{G}^{(n_2)}_{b_1}} + \frac{\delta\mathcal{V}^{(h)}}{\delta G^{(n_1)}_{b}}\frac{\delta\mathcal{V}^{(h)}}{\delta\dot{G}^{(n_2)}_{b_1}}\right) + \\ \left. + \sum_{n\geq 2}2^{-N}\frac{\delta\mathcal{V}^{(h)}}{\delta\ddot{G}^{(n)}_{b_1}}\right\}(\psi;\mathbf{0}).\end{aligned} \tag{B.15}$$

方程式 (3.3) 可通过对方程式 (B.15) 两边关于 $\psi^{-}_{\eta_2}$ 求导，然后令 $\psi=0$，从而得到。$\mathcal{A}_1(\eta_1,\eta_2)$ 来自方程式 (B.15) 右端花括号中的第一项：

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1(\eta_1,\eta_2) &= 2^N(\mu_{N,\lambda}-1)\int db_1\int d\eta c_{b_1}(\eta_1,\eta)\frac{\delta}{\delta\psi^{-}_{\eta_2}}\left[\psi^{-}_{\eta} - \int d\eta' g^{(h,N]}_{\eta,\eta'}\frac{\delta\mathcal{V}^{(h)}}{\delta\psi^{+}_{\eta'}}\right](\mathbf{0}) \\ &= 2^N(\mu_{N,\lambda}-1)\int db_1\int d\eta c_{b_1}(\eta_1,\eta)\left[\delta(\eta-\eta_2) - \int d\eta' g^{(h,N]}_{\eta,\eta'}W^{(h)|1,1}_{\emptyset;\emptyset;\emptyset}(\eta',\eta_2)\right].\end{aligned}$$

$\mathcal{A}_2(\eta_1,\eta_2)$ 来自方程式 (B.15):

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_2(\eta_1,&\eta_2) = \sum_{n\geq 1}\frac{\mu_{N,\lambda}}{n^2}\int dbdb_1\int d\eta\lambda g^{A}_{b_1,b}c_{b_1}(\eta_1,\eta)\times \\ &\times\left[\frac{\delta}{\delta\psi^{-}_{\eta_2}}\left(\psi^{-}_{\eta} - \int d\eta' g^{(h,N]}_{\eta,\eta'}\frac{\delta\mathcal{V}^{(h)}}{\delta\psi^{+}_{\eta'}} + \int d\eta' g^{(h,N]}_{\eta,\eta'}\frac{\delta}{\delta\psi^{+}_{\eta'}}\right)\frac{\delta\mathcal{V}^{(h)}}{\delta G^{(n)}_{b}}\right](\mathbf{0}) = \\ &= \sum_{n\geq 1}\frac{\mu_{N,\lambda}}{n^2}\int dbdb_1\int d\eta\lambda g^{A}_{b_1,b}c_{b_1}(\eta_1,\eta)\left[\delta(\eta-\eta_2)\frac{\delta\mathcal{V}^{(h)}}{\delta G^{(n)}_{b}}(\mathbf{0}) + \right. \\ &\left. - \int d\eta' g^{(h,N]}_{\eta,\eta'}\frac{\delta^2\mathcal{V}^{(h)}}{\delta\psi^{-}_{\eta_2}\delta\psi^{+}_{\eta'}}(\mathbf{0})\frac{\delta\mathcal{V}^{(h)}}{\delta G^{(n)}_{b}}(\mathbf{0}) + \int d\eta' g^{(h,N]}_{\eta,\eta'}\frac{\delta^3\mathcal{V}^{(h)}}{\delta\psi^{-}_{\eta_2}\delta\psi^{+}_{\eta'}\delta G^{(n)}_{b}}(\mathbf{0})\right].\end{aligned}$$

类似地， $\mathcal{A}_3(\eta_1,\eta_2)$ 和 $\mathcal{A}_4(\eta_1,\eta_2)$ 分别来自方程式 (B.15) 右端花括号中的第三项和第四项。 □

方程式的证明 (3.12)。 这是方程式 (B.13) 的推论：

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{V}^{(h)}}{\delta\dot{G}^{(n_2)}_{b_2}} &= \frac{n_2^2}{(n_2-1)^2}\mu_{N,\lambda}\int db\lambda g^{A}_{b_2,b}\frac{\delta\mathcal{V}^{(h)}}{\delta G^{(n_2-1)}_{b}} + \\ &- 2^{-N}\sum_{\substack{n'_1\geq 1,n'_2\geq 2\\ n'_1+n'_2=n_2}}\mathcal{N}_{n'_1,n'_2}\int db'_1db'_2\lambda g^{A}_{b_2,b'_1}\delta(b_2-b'_2)\left(\frac{\delta^2\mathcal{V}^{(h)}}{\delta G^{(n'_1)}_{b'_1}\delta\dot{G}^{(n'_2)}_{b'_2}} - \frac{\delta\mathcal{V}^{(h)}}{\delta G^{(n'_1)}_{b'_1}}\frac{\delta\mathcal{V}^{(h)}}{\delta\dot{G}^{(n'_2)}_{b'_2}}\right).\end{aligned}$$

分别对 ψ^+_η、$\psi^-_{\eta'}$ 和 $G^{(n_1)}_{b_1}$ 求导，并令场为零，我们得到：

$$\frac{\delta^4\mathcal{V}^{(h)}}{\delta\psi^-_{\eta'}\delta\psi^+_\eta\delta G^{(n_1)}_{b_1}\delta\dot{G}^{(n_2)}_{b_2}}(\mathbf{0}) =$$
$$\frac{n_2^2}{(n_2-1)^2}\mu_{N,\lambda}\int db\lambda g^A_{b_2,b}\frac{\delta^4\mathcal{V}^{(h)}}{\delta\psi^-_{\eta'}\delta\psi^+_\eta\delta G^{(n_1)}_{b_1}\delta G^{(n_2-1)}_{b}}(\mathbf{0})+$$
$$-\sum_{\substack{n_1'\geq 1,n_2'\geq 2\\ n_1'+n_2'=n_2}}2^{-N}\mathcal{N}_{n_1',n_2'}\int db_1'db_2'\lambda g^A_{b_2,b_1'}\delta(b_2-b_2')\left[\frac{\delta^5\mathcal{V}^{(h)}}{\delta\psi^-_{\eta'}\delta\psi^+_\eta\delta G^{(n_1)}_{b_1}\delta G^{(n_1')}_{b_1'}\delta\dot{G}^{(n_2')}_{b_2'}}(\mathbf{0})+\right.$$
$$-\frac{\delta^4\mathcal{V}^{(h)}}{\delta\psi^-_{\eta'}\delta\psi^+_\eta\delta G^{(n_1)}_{b_1}\delta G^{(n_1')}_{b_1'}}(\mathbf{0})\frac{\delta\mathcal{V}^{(h)}}{\delta\dot{G}^{(n_2')}_{b_2'}}(\mathbf{0})-\frac{\delta^2\mathcal{V}^{(h)}}{\delta G^{(n_1)}_{b_1}\delta G^{(n_1')}_{b_1'}}(\mathbf{0})\frac{\delta^3\mathcal{V}^{(h)}}{\delta\psi^-_{\eta'}\delta\psi^+_\eta\delta\dot{G}^{(n_2')}_{b_2'}}(\mathbf{0})+$$
$$\left.-\frac{\delta^3\mathcal{V}^{(h)}}{\delta\psi^-_{\eta'}\delta\psi^+_\eta\delta G^{(n_1')}_{b_1'}}(\mathbf{0})\frac{\delta^2\mathcal{V}^{(h)}}{G^{(n_1)}_{b_1}\delta\dot{G}^{(n_2')}_{b_2'}}(\mathbf{0})-\frac{\delta\mathcal{V}^{(h)}}{\delta G^{(n_1')}_{b_1'}}(\mathbf{0})\frac{\delta^4\mathcal{V}^{(h)}}{\delta\psi^-_{\eta'}\delta\psi^+_\eta\delta G^{(n_1)}_{b_1}\delta\dot{G}^{(n_2')}_{b_2'}}(\mathbf{0})\right],$$

这恰好给出方程式 (3.12)，依据方程式 (2.10)。 □

C 非相互作用气泡

本附录旨在刻画非相互作用气泡 $\Pi^{(h,N]}$ 和$\Pi^{(h,N]}_5$ ：

$$\Pi^{(h,N]}(b_1,b_2) = -\frac{1}{2}\mathcal{E}^T_{(h,N]}(O_{b_1},O_{b_2}) \equiv \frac{1}{2}\int d\eta_1 d\eta_1' d\eta_2 d\eta_2' c_{b_1}(\eta_1,\eta_1')c_{b_2}(\eta_2,\eta_2')g^{(h,N]}_{\eta_1',\eta_2}g^{(h,N]}_{\eta_2',\eta_1}$$
$$\Pi^{(h,N]}_5(b_1,b_2) = -\frac{1}{2}\mathcal{E}^T_{(h,N]}(O_{b_1},O_{5;b_2}) \equiv \frac{1}{2}\int d\eta_1 d\eta_1' d\eta_2 d\eta_2' c_{b_1}(\eta_1,\eta_1')c^5_{b_2}(\eta_2,\eta_2')g^{(h,N]}_{\eta_1',\eta_2}g^{(h,N]}_{\eta_2',\eta_1},$$

(参见方程式 (2.16))，其中 c 和 c^5 分别定义于方程式 (1.19) 和方程式 (1.19) 中。

C.1 无相互作用气泡的有限性

在本附录的第一部分，我们证明以下结果成立。

引理 C.1. 存在 $C_\Pi \geq 1$，使得对每个 $0 \leq h \leq N$，令

$$\hat{\Pi}^{(h,N]}_{\sharp;\mu,\nu}(p) := \frac{1}{2}\sum_{\epsilon,\epsilon'=\pm}\epsilon\epsilon'\int_\Lambda \frac{dxdy}{L^2}e^{-ip\cdot(x-y)}\Pi^{(h,N]}_\sharp\big((x,\mu,\epsilon),(y,\nu,\epsilon')\big), \tag{C.1}$$

(参见方程式 (5.11))，其中 $\sharp$ 为空或为 5，以下各项成立。

1. $\hat{\Pi}^{(h,N]}_{\mu,\nu;}(\mathbf{0}) = \delta_{\mu,\nu}\hat{\Pi}^{(h,N]}_{0,0;}(\mathbf{0})$；$\hat{\Pi}^{(h,N]}_{5;\mu,\nu}(\mathbf{0}) = \varepsilon_{\mu,\nu}\hat{\Pi}^{(h,N]}_{5;0,1}(\mathbf{0})$。

2. $|\hat{\Pi}^{(h,N]}_{\sharp;\mu,\nu;,}(0)| \leq C_\Pi$.

3. 对每个 $v: \Lambda_B \mapsto \mathbb{C}$，使得 $v\big((x,\mu,\epsilon),(y,\nu,\epsilon')\big) = \epsilon\epsilon'\tilde{v}_{\mu,\nu}(x-y)$ 对于某个 $\tilde{v}: \Lambda\times\{0,1\}\mapsto\mathbb{C}$，我们有

$$\big\|v * \Pi^{(h,N]}_\sharp - v\hat{\Pi}^{(h,N]}_\sharp(0)\big\|^w_1 \leq C_\Pi 2^{-h}\|\nabla v\|^w_1,$$

其中 $\nabla_\alpha v\big((x,\mu,\epsilon),(y,\nu,\epsilon')\big) := 2^N\epsilon\epsilon'\big(\tilde{v}_{\mu,\nu}(x+2^{-N}\hat{e}_\alpha)-\tilde{v}_{\mu,\nu}(x)\big)$ 以及 $\|\nabla v\|^w_1 := \sum_{\alpha=0,1}\|\nabla_\alpha v\|^w_1$。

作为引理 C.1 的直接推论，我们得到该理论的一项关键性质：量 $\|g^A * \Pi_\sharp^{(h,N]}\|_1^w$ 是有限的；它是第 3 节和 4 节中估计的主要构成部分。

推论 C.2. 存在一个常数 $C'_\Pi \geq 1$ ，使得对任意 $0 \leq h \leq N$，都有：$\|g^A * \Pi_\sharp^{(h,N]}\|_1^w \leq C'_\Pi$。

证明。 由引理C.1可得：

$$\begin{aligned}\|g^A * \Pi_\sharp^{(h,N]}\|_1^w &\leq \|g^A \hat{\Pi}_\sharp^{(h,N]}(0)\|_1^w + \|g^A * \Pi_\sharp^{(h,N]} - g^A \hat{\Pi}_\sharp^{(h,N]}(0)\|_1^w \\ &\leq \left(2C_\Pi \|g^A\|_1^w + C_\Pi 2^{-h} \|\nabla g^A\|_1^w\right).\end{aligned}$$

我们已经知道 $\|g^A\|_1^w$ 有一个常数界（参见方程式 (1.27) 及其后的讨论）；对于 ∇g^A，容易证明

$$|\nabla_\alpha g^A_{\mu,\nu}(x-y)| \leq \frac{K_\nabla \delta_{\mu,\nu}}{2^{-N} + |x-y|_L} e^{-\kappa_3 \sqrt{|x-y|_L}} \tag{C.2}$$

对于适当的 K_∇， $\kappa_3 > 0$。方程式 (C.2) 立即推出 $\|\nabla g^A\|_1^w \leq K'_\nabla$，其中 $K'_\nabla > 0$取适当值，从而得到推论 C.2的结论。 □

引理 *C.1*的证明。

条目 1。这是理论的两种对称性所导致的结果，即坐标轴翻转和宇称，二者分别定义于公式 (E.2)、(E.3) 中。首先，在坐标轴翻转变换下，有：$O_{x,\mu,\epsilon}(\psi) \mapsto O_{x,\mu,\epsilon}(\mathcal{F}\psi) = O_{Tx,1-\mu,\epsilon}(\psi)$，其中，若 $b = (x,\mu,\epsilon)$，则 $Tb \equiv (Tx, 1-\mu, \epsilon)$。此外，$O_{5;x,\mu,\epsilon}(\psi) \mapsto O_{5;x,\mu,\epsilon}(\mathcal{F}\psi) = -O_{5;Tx,1-\mu,\epsilon}(\psi)$。因此：

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}^{(h,N]}_{\mu,\nu}(0) = &-\frac{1}{4}\sum_{\epsilon,\epsilon'=\pm} \epsilon\epsilon' \int \frac{dxdy}{L^2} \mathcal{E}^T_{(h,N]}(O_{x,\mu,\epsilon}, O_{y,\nu,\epsilon'}) = \\ &-\frac{1}{4}\sum_{\epsilon,\epsilon'=\pm} \epsilon\epsilon' \int \frac{dxdy}{L^2} \mathcal{E}^T_{(h,N]}(O_{Tx,1-\mu,\epsilon}, O_{Ty,1-\nu,\epsilon'}) = \hat{\Pi}^{(h,N]}_{1-\mu,1-\nu}(0).\end{aligned}$$

类似地，可以得到 $\hat{\Pi}^{(h,N]}_{5;\mu,\nu}(0) = -\hat{\Pi}^{(h,N]}_{5;1-\mu,1-\nu}(0)$。另一方面，在宇称变换下，有 $O_b(\psi) \mapsto O_b(\mathcal{P}\psi) = O_{Pb}(\psi)$，其中若 $b = (x,\mu,\epsilon)$，则 $Pb \equiv (Px - \delta_{\mu,1} 2^{-N} \hat{e}_1, \mu, (-1)^\mu \epsilon)$。此外，$O_{5;x,\mu,\epsilon}(\psi) \mapsto O_{5;x,\mu,\epsilon}(\mathcal{P}\psi) = (-1)^{\mu-1} O_{5;Px,\mu,\epsilon}(\psi)$。由此可得

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}^{(h,N]}_{0,1}(0) = &-\frac{1}{4}\sum_{\epsilon,\epsilon'=\pm} \epsilon\epsilon' \int \frac{dxdy}{L^2} \mathcal{E}^T_{(h,N]}(O_{x,0,\epsilon}, O_{y,1,\epsilon'}) = \\ &-\frac{1}{4}\sum_{\epsilon,\epsilon'=\pm} \epsilon\epsilon' \int \frac{dxdy}{L^2} \mathcal{E}^T_{(h,N]}(O_{Px,0,\epsilon}, O_{Py-2^{-N}\hat{e}_1,1,-\epsilon'}) = \\ &\frac{1}{4}\sum_{\epsilon,\epsilon'=\pm} \epsilon\epsilon' \int \frac{dxdy}{L^2} \mathcal{E}^T_{(h,N]}(O_{Px,0,\epsilon}, O_{Py-2^{-N}\hat{e}_1,1,\epsilon'}) = -\hat{\Pi}^{(h,N]}_{0,1}(0).\end{aligned}$$

类似地，$\hat{\Pi}^{(h,N]}_{5;0,0}(0) = -\hat{\Pi}^{(h,N]}_{5;0,0}(0)$。总而言之：$\hat{\Pi}^{(h,N]}_{\mu,\nu}(0) = \delta_{\mu,\nu} \hat{\Pi}^{(h,N]}_{0,0}(0)$ 和 $\hat{\Pi}^{(h,N]}_{5;\mu,\nu}(0) = \varepsilon_{\mu,\nu} \hat{\Pi}^{(h,N]}_{5;0,1}(0)$。

条目 *2*. 首先请注意，根据电荷共轭 对称性，方程式 (E.3),[15] 我们有（另请参见方程式 (5.11)）：

$$\hat{\Pi}^{(h,N]}_{\sharp;\mu,\nu}(p) = \sum_{\epsilon=\pm} \epsilon \int_{\Lambda} \frac{dxdy}{L^2} e^{-ip\cdot(x-y)} \Pi^{(h,N]}_{\sharp}((x,\mu,\epsilon),(y,\nu,+)).$$

现在先来看矢量泡图， $\Pi^{(h,N]}$。回顾 $c_b(\eta_1, \eta_2)$ 的显式表达式，方程式 (1.19)，可得

$$\begin{aligned}
&\hat{\Pi}^{(h,N]}\big((\mu,+),(\nu,+)\big)(0) \equiv L^{-2}\int_{\Lambda} dxdy\, \Pi^{(h,N]}((x,\mu,+),(y,\nu,+)) = \\
&\frac{1}{8L^2}\int dzdy\, \mathrm{Tr}\left\{(\gamma_\mu - r)g^{(h,N]}(x+2^{-N}\hat{e}_\mu - y)(\gamma_\nu - r)g^{(h,N]}(y+2^{-N}\hat{e}_\nu - x)\right\} = \\
&\frac{1}{8}\int dz\, \mathrm{Tr}\left\{(\gamma_\mu - r)g^{(h,N]}(z)(\gamma_\nu - r)g^{(h,N]}(-z)\right\} + \\
&+\frac{1}{8}\sum_{j,j'=h+1}^{N}\int dz\, \mathrm{Tr}\left\{(\gamma_\mu - r)g^{(j)}(z)(\gamma_\nu - r)\left[g^{(j')}(-z) - g^{(j')}(-z+2^{-N}(\hat{e}_\mu+\hat{e}_\nu))\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{C.3}$$

注意，方程式 (C.3) 右端的最后一行可由以下界定

$$\frac{1}{2}2^{-N}\sum_{h+1\le j\le j'\le N}\|g^{(j)}\|_\infty \sum_{\mu=0,1}\|\nabla_\mu g^{(j')}\|_1 \le \sum_{h+1\le j\le j'\le N} \mathcal{O}(2^{-N+j}) = \mathcal{O}(1),$$

其中我们用到了 $\|\nabla_\mu g^{(j')}\|_1 = \mathcal{O}(1)$，其中 $\mathcal{O}(1)$ 表示由普适常数所界定的量。因此：

$$\hat{\Pi}^{(h,N]}\big((\mu,+),(\nu,+)\big)(0) = \frac{1}{8}\int dz' \mathrm{Tr}\left\{(\gamma_\mu - r)g^{(h,N]}(z')(\gamma_\nu - r)g^{(h,N]}(-z')\right\} + \mathcal{O}(1). \tag{C.4}$$

类似地，可得：

$$\hat{\Pi}^{(h,N]}\big((\mu,-),(\nu,+)\big)(0) = -\frac{1}{8}\int dz' \mathrm{Tr}\left\{(\gamma_\mu + r)g^{(h,N]}(z')(\gamma_\nu - r)g^{(h,N]}(-z')\right\} + \mathcal{O}(1). \tag{C.5}$$

合并方程式 (C.4) 和 (C.5)，可得：

$$\begin{aligned}
&\sum_{\epsilon=\pm}\epsilon\hat{\Pi}^{(h,N]}\big((\mu,\epsilon),(\nu,+)\big)(0) = \\
&\frac{1}{8}\sum_{\epsilon=\pm}\int dz' \mathrm{Tr}\left\{(\gamma_\mu - \epsilon r)g^{(h,N]}(z')(\gamma_\nu - r)g^{(h,N]}(-z')\right\} + \mathcal{O}(1) = \\
&\frac{1}{4}\int_{\Lambda^*} dk \frac{\chi^2_{(h,N]}(k)}{\left(|s(k)|^2 + (m_N + M_N(k))^2\right)^2}\times \\
&\times \mathrm{Tr}\Big\{\gamma_\mu\left(i\not{s}(k) + m_N + M_N(k)\right)(\gamma_\nu - r)\left(i\not{s}(k) + m_N + M_N(k)\right)\Big\} + \mathcal{O}(1).
\end{aligned} \tag{C.6}$$

方程式（C.6）右端的迹可利用 $\mathrm{Tr}\{\gamma_\mu\gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu,\nu}$、$\mathrm{Tr}\{\gamma_\mu\} =$ 来计算

[15] 注意，在 *charge conjugation* 变换下，$O_{5;x,\ \mu,\ \epsilon}(\psi) \mapsto O_{5;x,\ \mu,\ \epsilon}(\Omega\psi) = O_{5;x,\ \mu,\ -\epsilon}(\psi$).

$\mathrm{Tr}\{\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\}=0$ 以及 $\mathrm{Tr}\{\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta\}=2\ (\delta_{\mu,\alpha}\delta_{\nu,\beta}-\delta_{\mu,\nu}\delta_{\alpha,\beta}+\delta_{\mu,\beta}\delta_{\nu,\alpha})$ 。我们发现

$$\begin{aligned}&\sum_{\epsilon=\pm}\epsilon\hat{\Pi}^{(h,N]}\big((\mu,\epsilon),(\nu,+)\big)(0)=\\&=-\frac{1}{2}\int_{\Lambda^*}dk\frac{\chi^2_{(h,N]}(k)}{\big(|s(k)|^2+(m_N+M_N(k))^2\big)^2}\Big(2s_\mu(k)s_\nu(k)-\delta_{\nu,\mu}|s(k)|^2\Big)+\\&-ir\int_{\Lambda^*}dk\ \chi^2_{(h,N]}(k)\frac{(m_N+M_N(k))s_\mu(k)}{\big(|s(k)|^2+(m_N+M_N(k))^2\big)^2}+\\&+\frac{1}{2}\delta_{\mu,\nu}\int_{\Lambda^*}dk\ \chi^2_{(h,N]}(k)\frac{(m_N+M_N(k))^2}{\big(|s(k)|^2+(m_N+M_N(k))^2\big)^2}+\mathcal{O}(1).\end{aligned}$$

现在可以验证，经过坐标轴翻转: $(k_0,k_1)\mapsto(k_1,k_0)$ 以及坐标轴反演: $(k_0,k_1)\mapsto-(k_0,k_1)$ 后，上述右端的前两项为零。[16] 第三项不为零，但仍然有限:

$$\int_{\Lambda^*}dk\ \chi^2_{(h,N]}(k)\frac{\big(m_N+M_N(k)\big)^2}{\big(|s(k)|^2+(m_N+M_N(k))^2\big)^2}\le 4\pi^2\int_{\Lambda^*}dk\,\chi^2_{(0,N]}(k)\frac{m_N^2+r^2 2^{-2N}|k|^4}{\big(|k|^2+m_N^2\big)^2}=\mathcal{O}(1),$$

其中我们使用了方程式（2.3）；由此可得 $\hat{\Pi}^{(h,N]}_{\mu\,\nu,}(0)=\mathcal{O}(1)$。

No现在我们来讨论手征泡图 $\Pi^{(h,N]}_5$ 。类比矢量泡图，有:

$$\hat{\Pi}^{(h,N]}_5\big((\mu,\epsilon),(\nu,+)\big)(0)=\frac{Z_N^5}{8}\int_\Lambda dz\,\mathrm{Tr}\Big\{(\epsilon\gamma_\mu-r)g^{(h,N]}(z)\gamma_\nu\gamma_5 g^{(h,N]}(-z)\Big\}+\mathcal{O}(1).$$

注意到 $\gamma_\nu\gamma_5=i\sum_{\sigma=0,1}\varepsilon_{\nu,\sigma}\gamma_\sigma$，因此:

$$\begin{aligned}&\sum_{\epsilon=\pm}\epsilon\hat{\Pi}^{(h,N]}_5\big((\mu,\epsilon),(\nu,+)\big)(0)=\frac{iZ_N^5}{4}\sum_{\sigma=0,1}\varepsilon_{\nu,\sigma}\int_{\Lambda^*}dk\frac{\chi^2_{(h,N]}(k)}{\big(|s(k)|^2+(m_N+M_N(k))^2\big)^2}\times\\&\times\mathrm{Tr}\Big\{\gamma_\mu\big(i\not{s}(k)+m_N+M_N(k)\big)\gamma_\sigma\big(i\not{s}(k)+m_N+M_N(k)\big)\Big\}+\mathcal{O}(1)\end{aligned}$$

计算恰好化简为简单泡图的计算，因此:

$$\hat{\Pi}^{(h,N]}_{5;\mu,\nu}(0)\equiv\sum_{\epsilon=\pm}\epsilon\hat{\Pi}^{(h,N]}_5\big((\mu,\epsilon),(\nu,+)\big)(0)=\mathcal{O}(1).$$

第 3 项。令 $P^{(h)}_\sharp(b,b'):=\big(v*\Pi^{(h,N]}_\sharp\big)(b,b')-\big(v\,\hat{}\,\Pi^{(h,N]}_\sharp(0)\big)(b,b')$，则有

$$\begin{aligned}&P^{(h)}_\sharp\big((x,\mu,\epsilon),(y,\nu,\epsilon')\big)=\\&\sum_{\alpha\in\{0,1\}}\sum_{\epsilon''\in\{\pm\}}\epsilon\epsilon''\int_\Lambda dz\Big(v_{\mu,\alpha}(x-z)-v_{\mu,\alpha}(x-y)\Big)\Pi^{(h,N]}_\sharp\big((z,\alpha,\epsilon''),(y,\nu,\epsilon')\big).\end{aligned}\tag{C.7}$$

我们改写为: $v_{\mu,\ \alpha}(x-z)-v_{\mu,\ \alpha}(x-y)=\int_{\mathcal{C}_{y\to z}}d\ell\cdot\nabla v_{\mu,\ \alpha}(x-\ell)$，具体约定如下。

- $\mathcal{C}_{y\to z}$ 是离散环面 Λ 上连接 y 与 z 的一条路径，且长度最短。更确切地说， $\mathcal{C}_{y\to z}$ 是一组有序对:

$$\big((x_1,x_2),(x_2,x_3),\dots,(x_{n-1},x_n),(x'_1,x'_2),(x'_2,x'_3),\dots,(x'_{m-1},x'_m)\big)$$

满足约束条件: $x_1=y,x'_m=z$; $x_{i+1}-x_i=2^{-N}\sigma_0\hat{}\,e_0$和 $x'_{i+1}-x'_i=2^{-N}\sigma_1\hat{}\,e_1$，其中 $0\le m,n\le 2^N_2L+1$和$\sigma_0,\sigma_1\in\{\pm\}$。

[16]请注意，第一项的消失在维数 $d\neq 2$ 中并不成立。

• 如果 $\mathcal{C}_{y\to z}=\{(x_1,x_2),(x_2,x_3)\ldots,(x_n,x_{n+1})\}$，那么

$$\int_{\mathcal{C}_{y\to z}} d\ell\cdot\nabla v_{\mu,\alpha}(x-\ell)\equiv\sum_{i=1}^{n}2^{-N}\left(\tfrac{v_{\mu,\alpha}(x-x_{i+1})-v_{\mu,\alpha}(x-x_i)}{2^{-N}}\right),$$

其中请注意，差值 $\left(v_{\mu,\alpha}(x-x_{i+1})-v_{\mu,\alpha}(x-x_i)\right)/(\cdot)$ 等于离散梯度 $\nabla_\nu v_{\mu,\alpha}(x-u)$ $\equiv\left(v_{\mu,\alpha}(x-u+2^{-N}\hat{}e_\nu)-v_{\mu,\alpha}(x-u)\right)/(\cdot)$，但可能相差一个符号，其中 $x_{i+1}+2^{-N}\hat{}e_\nu=x_i=u$或 $x_i+2^{-N}\hat{}e_\nu=x_{i+1}=u$。

利用这个关于 v's 差值的插值展开，我们可以估计：

$$\begin{aligned}\|P_\sharp^{(h)}\|_1^w&=\frac{1}{L^2}\sum_{\mu,\nu\in\{0,1\}}\sum_{\epsilon,\epsilon'\in\{\pm\}}\int_{\Lambda^2}dxdy\,e^{\frac{\kappa}{2}\sqrt{|x-y|_L}}\left|P_\sharp^{(h)}\big((x,\mu,\epsilon),(y,\nu,\epsilon')\big)\right|\leq\\&\leq\frac{1}{L^2}\sum_{\mu,\nu,\alpha\in\{0,1\}}\sum_{\epsilon,\epsilon',\epsilon''\in\{\pm\}}\int_{\Lambda^3}dxdydz\,e^{\frac{\kappa}{2}\sqrt{|x-y|_L}}\left|\int_{\mathcal{C}_{y\to z}}d\ell\cdot\nabla v_{\mu,\alpha}(x-\ell)\right|\times\\&\times\left|\Pi_\sharp^{(h,N]}\big((z,\alpha,\epsilon''),(y,\nu,\epsilon')\big)\right|\end{aligned}$$

请注意，对于任意 $u\in\mathcal{C}_{y\to z}$，量 $\sqrt{|x-y|_L}$ 小于 $\sqrt{|x-u|_L}+\sqrt{|z-y|_L}$。因此，利用路径 $\mathcal{C}_{y\to z}$ 的长度小于 $\sqrt{2}|z-y|_L$这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}\|P_\sharp^{(h)}\|_1^w&\leq C\|\nabla v\|_1^w\sum_{\nu,\alpha\in\{0,1\}}\sum_{\epsilon',\epsilon''\in\{\pm\}}\int_{\Lambda^2}\frac{dydz}{L^2}\left|\Pi_\sharp^{(h,N]}\big((z,\alpha,\epsilon''),(y,\nu,\epsilon')\big)\right|e^{\frac{\kappa}{2}\sqrt{|y-z|_L}}|y-z|_L\\&\equiv C\|\nabla v\|_1^w\int_{\Lambda_B^2}\frac{dbdb'}{L^2}\left|\Pi_\sharp^{(h,N]}(b,b')\right|e^{\frac{\kappa}{2}\sqrt{\delta^D(b,b')}}\delta^D(b,b').\end{aligned}\tag{C.8}$$

对于某个合适的常数 $C>0$。展开 $\Pi_\sharp^{(h,N]}$ 的表达式，并按照方程式 (3.26) 及其下文所述的方法，对每个传播子按尺度进行分解，我们可以估计方程式 (C.8) 的右端为

$$C'\|\nabla v\|_1^w\sum_{h+1\leq j'\leq j\leq N}2^{-j}\|g^{(j')}\|_\infty\left\|g^{(j)}(\,\cdot\,)e^{\frac{\kappa}{2}\sqrt{2^j|\cdot|_L}}\right\|_1\leq\frac{C_\Pi}{4}\|\nabla v\|_1^w\sum_{h+1\leq j'\leq j\leq N}2^{j'-2j},$$

对于某个 $C_\Pi>0$，这里我们用到了以下事实：根据方程式 (2.4)，

$$\left\|g^{(j)}(\,\cdot\,)e^{\frac{\kappa}{2}\sqrt{2^j|\cdot|_L}}\right\|_1\equiv\sum_{s,s'\in\{1,2\}}\int_\Lambda dx|g_{s,s'}^{(j)}(x)|e^{\frac{\kappa}{2}\sqrt{2^j|x|_L}}\leq\tilde{K}2^{-j},$$

其中，$K>0$为适当的常数。因此，正如所需：

$$\|P_\sharp^{(h)}\|_1^w\leq\frac{C_\Pi}{4}\|\nabla v\|_1^w\sum_{h+1\leq j'\leq j\leq N}2^{j'-2j}\leq C_\Pi 2^{-h}\|\nabla v\|_1^w.$$

□

C.2 命题5.1的证明

为明确起见，我们仅讨论关于 $\hat{\Pi}^{(h_M^*,N]}_{\mu\nu}(p,M,m_N,L)$ 和 $\hat{\Pi}^{(\le N)}_{\mu\nu}(p,m_N,L)$ 的断言；关于 $\mathcal{T}^{(h_M^*,N]}$ 和 $\mathcal{T}^{(\le N)}$ 的讨论也类似。

极限：方程式 (5.18) 的证明。利用电荷共轭对称性，方程式 (E.1)，结合方程式 (C.1) 中的定义与方程式 (1.19) 中的记号，可明确得到，对于任意 $p\in\frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}^2\cap(-\frac{\pi}{a},\frac{\pi}{a}]^2$，

$$\begin{aligned}&\hat{\Pi}^{(\le N)}_{\mu,\nu}(p,m_N,L)=\\&\frac{1}{8}\int_{\Lambda^*}dk\sum_{\epsilon=\pm}e^{ia(\epsilon k_\mu-k_\nu-p_\nu+\frac{1-\epsilon}{2}p_\mu)}\mathrm{Tr}\left\{(\gamma_\mu-\epsilon r)\hat{g}^{(\le N)}(k)(\gamma_\nu-r)\hat{g}^{(\le N)}(k+p)\right\},\end{aligned}\tag{C.9}$$

以及 $\Pi^{(h_M^*,N]}_{\mu\nu}$，$(p,\ M,\ m_N,\ L)$ 具有相同的表达式，只是在积分符号下多了一个因子 $(1-\chi_{h_M^*}(|k|)(1-\chi_{h_M^*}(|k+p|))$。注意，方程式 (C.9) 的右端对每个 $p\in(-\frac{\pi}{a},\ \frac{\pi}{a}]^2$ 都有意义，因此定义了 $\hat{\Pi}^{(\le N)}_{\mu\nu}$ 的一个扩展；只要满足 $m_N\neq 0$，该扩展关于 p 连续。通过对 $k\to ak=q\in a\Lambda^*\equiv\frac{2\pi a}{L}\mathbb{Z}^2\cap(-\pi,\ \pi]^2$ 进行重标度，可得

$$\begin{aligned}&\hat{\Pi}^{(\le N)}_{\mu,\nu}(p,m_N,L)=\\&\frac{1}{8}\int_{a\Lambda^*}dq\sum_{\epsilon=\pm}e^{i(\epsilon q_\mu-q_\nu-ap_\nu+\frac{1-\epsilon}{2}ap_\mu)}\mathrm{Tr}\left\{(\gamma_\mu-\epsilon r)\tilde{g}(q)(\gamma_\nu-r)\tilde{g}(k+ap)\right\},\end{aligned}\tag{C.10}$$

其中 $\tilde{g}(q)=2^N\hat{g}^{(\le N)}(2^Nq)\equiv\left(-i\sum_{\mu=0,\ 1}\gamma_\mu\sin(q_\mu)+am_N+2r\sum_{\mu=0,\ 1}\sin^2(q_\mu/2)\right)^{-1}$。

极限 $\lim_{L\to\infty}\hat{\Pi}^{(\le N)}_{\mu\nu}(p,m_N,L)=:\hat{\Pi}^{(\le N)}_{\mu\nu}(p,m_N)$ 可通过泊松求和公式 [31, 附录 D],来刻画，该公式证明其收敛到与方程式 (C.10) 右端相同的表达式，其中将关于 $a\Lambda^*$ 的黎曼和替换为关于 $(-\frac{\pi}{a},\frac{\pi}{a}]^2$的积分。此外，对任意固定的 $a>0$和 $m_N\neq 0$，该收敛关于 $p\in(-\frac{\pi}{a},\frac{\pi}{a}]^2$是一致的。类似的考虑也适用于 $\hat{\Pi}^{(h_M^*,N]}_{\mu\nu}(p,M,m_N):=\lim_{L\to\infty}\hat{\Pi}^{(h_M^*,N]}_{\mu\nu}(p,M,m_N,L)$。$\hat{\Pi}^{(h_M^*,N]}_{\mu\nu}(p,M):=\lim_{m_N\to 0}\hat{\Pi}^{(h_M^*,N]}_{\mu\nu}(p,M,m_N)$ 的存在性则可直接由 $M>0$ 起红外截断作用这一事实得到。最后，对于 $p\neq 0$，控制收敛定理[17]表明 $\lim_{M\to 0^+}\hat{\Pi}^{(h_M^*,N]}_{\mu\nu}(p,M)$ 和 $\lim_{m_N\to 0}\hat{\Pi}^{(\le N)}_{\mu\nu}(p,m_N)$ 均存在，且二者都由下式给出

$$\hat{\Pi}_{\mu,\nu}(p):=\frac{1}{8}\int_{(-\pi,\pi]^2}\frac{d^2q}{(2\pi)^2}\sum_{\epsilon=\pm}e^{i(\epsilon q_\mu-q_\nu-ap_\nu+\frac{1-\epsilon}{2}ap_\mu)}\mathrm{Tr}\left\{(\gamma_\mu-\epsilon r)\tilde{g}(q)(\gamma_\nu-r)\tilde{g}(q+ap)\right\}$$

其中理解为 $\tilde{g}(q)$ 与 $\tilde{g}(q+ap)$ 均在 $m_N=0$ 处计算。

计算 $\hat{\Pi}_{\mu,\nu}(p)$：方程式 (5.19) 的证明。我们首先改写 $\hat{\Pi}_{\mu,\nu}(p)=\hat{\Pi}^{(\mathrm{sing})}_{\mu\nu}(p)+\hat{\Pi}^{(\mathrm{reg})}_{\mu\nu}(p)$，其中

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}^{(\mathrm{sing})}_{\mu,\nu}(p):=&\frac{1}{8}\int_{(-\pi,\pi]^2}\frac{d^2q}{(2\pi)^2}\sum_{\epsilon=\pm}\mathrm{Tr}\left\{(\gamma_\mu-\epsilon r)\frac{\chi(|q|)}{-i\not{q}}(\gamma_\nu-r)\frac{\chi(|q+ap|)}{-i(\not{q}+a\not{p})}\right\}=\\&-\sum_{\alpha,\beta=0,1}\int_{(-\pi,\pi]^2}\frac{d^2q}{(2\pi)^2}\frac{\chi(|q|)\chi(|q+ap|)q_\alpha(q_\beta+ap_\beta)}{4|q|^2|q+p|^2}\mathrm{Tr}\left\{\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta\right\},\ \forall p\neq 0,\end{aligned}\tag{C.11}$$

其中 $\not{q}\equiv\sum_{\mu=0,1}\gamma_\mu q_\mu$，并且我们利用了 $\mathrm{Tr}\{\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\}=0.$。此外可以证明

[17]只需注意，如果 $p\neq 0$，那么 $\mathrm{Tr}\{(\gamma_\mu-\epsilon r)\tilde{g}(q)(\gamma_\nu-r)\tilde{g}(q+ap)\}$ 在 $q=0,\ q=-ap$ 处有两个简单的可积奇点。

$$\hat{\Pi}^{(\mathrm{reg})}_{\mu,\nu}(p) := \frac{1}{8}\sum_{\epsilon=\pm}\int_{(-\pi,\pi]^2}\frac{d^2q}{(2\pi)^2}\Big(-\mathrm{Tr}\Big\{(\gamma_\mu-\epsilon r)\tfrac{\chi(|q|)}{-i\not{q}}(\gamma_\nu-r)\tfrac{\chi(|q+ap|)}{-i(\not{q}+a\not{p})}\Big\} + e^{i(\epsilon q_\mu - q_\nu - ap_\nu + \frac{1-\epsilon}{2}ap_\mu)}\mathrm{Tr}\Big\{(\gamma_\mu-\epsilon r)\tilde{g}(q)(\gamma_\nu-r)\tilde{g}(q+ap)\Big\}\Big) \tag{C.12}$$

是一个定义良好的函数，其自变量为 $p\in(-\frac{\pi}{a},\ \frac{\pi}{a}]^2$，其中包括 $p=0$ 的情形；此时经检验，被积函数仅在 $q=0$ 处有一个可积奇点，参见公式（C.16）-（C.17）及附近的注释。总之，只需证明以下两个性质即可：

$$\hat{\Pi}^{(\mathrm{sing})}_{\mu,\nu}(p) = \frac{1}{8\pi|p|^2}(2p_\mu p_\nu - |p|^2\delta_{\mu,\nu}) + \tilde{R}'_{\mu,\nu}(ap), \qquad p\neq 0, \tag{C.13}$$

$$\big|\hat{\Pi}^{(\mathrm{reg})}_{\mu,\nu}(p) - \hat{\Pi}^{(\mathrm{reg})}_{\mu,\nu}(0)\big| \le C(a|p|)^{1/2}, \tag{C.14}$$

对于某个正常数 C 和函数 $\tilde{R}'_{\mu,\nu}$，使得 $|\tilde{R}'_{\mu,\nu}(q)|\le C|q|^{1/2}$。注意，这就完成了方程式（5.19）的证明，其中 $\tilde{R}_{\mu,\nu} = \tilde{R}'_{\mu,\nu} + \hat{\Pi}^{(\mathrm{reg})}_{\mu,\nu}$，并约定 $\tilde{R}'_{\mu,\nu}(0)\equiv 0$。

方程式（C.13）的证明。给定 $\omega=\pm$，我们引入 $\gamma_\omega := \frac{1}{2}(-i\gamma_0-\omega\gamma_1)$，使得 $\gamma_\mu = \sum_{\omega=\pm}\Omega_{\mu,\omega}\gamma_\omega$，其中 $\Omega_{\mu,\omega} = i\delta_{\mu,0}-\omega\delta_{\mu,1}$。利用 $\mathrm{Tr}\{\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta\} = 2(\delta_{\mu,\alpha}+\delta_{\mu,\beta}\delta_{\nu,\alpha}-\delta_{\mu,\nu}\delta_{\alpha,\beta})$，可以验证 $\mathrm{Tr}\{\gamma_\omega\gamma_\alpha\gamma_{\omega'}\gamma_\beta\} = \delta_{\omega,\omega'}(i\omega\delta_{\alpha,0}+\delta_{\alpha,1})(i\omega\delta_{\beta,0}+\delta_{\beta,1})$，这意味着我们可以将方程式（C.11）改写为

$$\hat{\Pi}^{(\mathrm{sing})}_{\mu,\nu}(p) = \sum_\omega \frac{\Omega_{\mu\omega}\Omega_{\nu\omega}}{4}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{d^2q}{(2\pi)^2}\frac{\chi(|q|)\chi(|q+ap|)}{D_\omega(q)D_\omega(q+ap)}, \qquad D_\omega(q) := -iq_0+\omega q_1. \tag{C.15}$$

现在已知 [6, 附录 B.1] 方程式（C.15）中的积分由 $\frac{1}{4\pi}\frac{D_{-\omega}}{D_\omega}(p)\,(p) + \tilde{R}'_\omega(ap)$ 给出，其中 $|\tilde{R}'_\omega(q)|\le C|q|^{1/2}$，因此令 $4\tilde{R}'_{\mu,\nu}(q) := \sum_\omega \Omega_{\mu,\omega}\Omega_{\nu,\omega}\tilde{R}'_\omega(q)$，

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}^{(\mathrm{sing})}_{\mu,\nu}(p) - \tilde{R}'_{\mu,\nu}(ap) &= \frac{1}{16\pi|p|^2}\sum_{\omega=\pm}\Omega_{\mu,\omega}\Omega_{\nu,\omega}(p_1^2-p_0^2-2i\omega p_0p_1)\\ &= \frac{1}{8\pi|p|^2}\Big((p_1^2-p_0^2)(-\delta_{\mu0}\delta_{\nu0}+\delta_{\mu1}\delta_{\nu1}) - 2p_0p_1(\delta_{\mu0}\delta_{\nu1}+\delta_{\mu1}\delta_{\nu0})\Big)\\ &= \frac{1}{8\pi|p|^2}(2p_\mu p_\nu - \delta_{\mu,\nu}|p|^2).\end{aligned}$$

式（(C.14)的证明。对于 $p\in(-\frac{\pi}{a},-\frac{\pi}{a}]^2$ 和 $|p|\ge\frac{1}{2}a^{-1}$，通过简单的量纲论证可以很容易地验证，$\hat{\Pi}_{\mu,\nu}(p)$ 和 $\hat{\Pi}^{(\mathrm{sing})}_{\mu,\nu}(p)$ 都被某个常数所界定，因此方程式 (C.14) 对某个常数 $C>0$ 显然成立。因此，我们必须分析 $|p|\le\frac{1}{2}a^{-1}$ 的情形。明确地说，右端中的表达式还可以进一步展开为 $\hat{\Pi}^{(\mathrm{reg})}_{\mu,\nu}(p) = \hat{\Pi}^{(\mathrm{reg},1)}_{\mu,\nu}(p) + \hat{\Pi}^{(\mathrm{reg},2)}_{\mu,\nu}(p)$，其中：

$$\hat{\Pi}^{(\mathrm{reg},1)}_{\mu,\nu}(p) = \frac{1}{8}\sum_{\epsilon=\pm}\int_{(-\pi,\pi]^2}\frac{d^2q}{(2\pi)^2}\Big[\big(1-\chi(|q+ap|)\big)+\chi(|q+ap|)\big(1-\chi(|q|)\big)\Big]\times \times e^{i(\epsilon q_\mu - q_\nu - ap_\nu+\frac{1-\epsilon}{2}ap_\mu)}\mathrm{Tr}\Big\{(\gamma_\mu-\epsilon r)\tilde{g}(q)(\gamma_\nu-r)\tilde{g}(q+ap)\Big\}, \tag{C.16}$$

$$\hat{\Pi}^{(\mathrm{reg},2)}_{\mu,\nu}(p) = \frac{1}{8}\sum_{\epsilon=\pm}\int_{(-\pi,\pi]^2}\frac{d^2q}{(2\pi)^2}\Bigg(e^{i(\epsilon q_\mu - q_\nu - ap_\nu+\frac{1-\epsilon}{2}ap_\mu)}\mathrm{Tr}\Big\{(\gamma_\mu-\epsilon r)\tilde{g}(q)(\gamma_\nu-r)\tilde{g}(q+ap)\Big\} - \mathrm{Tr}\Big\{(\gamma_\mu-\epsilon r)\tfrac{1}{-i\not{q}}(\gamma_\nu-r)\tfrac{1}{-i(\not{q}+a\not{p})}\Big\}\Bigg)\chi(|q|)\chi(|q+ap|). \tag{C.17}$$

现在，由于对于 $|p| \le \frac{1}{2}a^{-1}$，我们有 $\tilde{g}(\cdot + ap)$ 在 $1-\chi(|\cdot + ap|)$ 的支集上从不奇异，因此可知 $\hat{\Pi}^{(\mathrm{reg},1)}_{\mu\nu}$ 实际上在半径为 $\frac{1}{2}a^{-1}$ 的球上是 $\mathscr{C}^\infty$；[18] $\big|\hat{\Pi}^{(\mathrm{reg},1)}_{\mu\nu}(p) - \hat{\Pi}^{(\mathrm{reg},1)}_{\mu\nu}(0)\big| = \mathcal{O}(|ap|)$。为了求出 $\hat{\Pi}^{(\mathrm{reg},2)}_{\mu\nu}$ 在零点处的连续性，我们进一步将其分解：对于 $p' \in \{0, p\}$，$\hat{\Pi}^{(\mathrm{reg},2)}_{\mu\nu}(p') = \hat{\Pi}^{(\mathrm{reg},2,1)}_{\mu\nu}(p'; p) + \hat{\Pi}^{(\mathrm{reg},2,2)}_{\mu\nu}(p'; p)$，其中前者（分别地，后者）定义为方程式 (C.17) 的右端，但将积分限制在半径为 $\sqrt{a|p|}$ 的球（分别地，球的补集）内。由于方程式 (C.17) 右端的被积函数至多相差一个常数即可被 $(|q||q+ap|)^{-1}$ 所界定，我们得到

$$\begin{aligned}&\big|\hat{\Pi}^{(\mathrm{reg},2,1)}_{\mu,\nu}(p;p) - \hat{\Pi}^{(\mathrm{reg},2,1)}_{\mu,\nu}(0;p)\big| \le \\ &\big|\hat{\Pi}^{(\mathrm{reg},2,1)}_{\mu,\nu}(p;p)\big| + \big|\hat{\Pi}^{(\mathrm{reg},2,1)}_{\mu,\nu}(0;p)\big| \le \int_{|q|\le\sqrt{a|p|}} \frac{d^2q}{(2\pi)^2}\left[\mathcal{O}\Big(\tfrac{1}{|q+ap|}\Big) + \mathcal{O}\Big(\tfrac{1}{|q|}\Big)\right] = \mathcal{O}\big(\sqrt{a|p|}\big).\end{aligned}$$

关于 $\hat{\Pi}^{(\mathrm{reg},2,2)}_{\mu\nu}(p'; p)$，令 $F(q, ap)$ 为方程式（C.17）右端的被积函数。写出 $F(q, ap) - F(q, 0) = \int_0^1 ds\, \partial_s F(q, asp)$ 后，根据量纲分析可知，对于任意 $|q| \ge \sqrt{a|p|}$ 和 $|p| \le \frac{1}{2}a^{-1}$，有 $|F(q, ap) - F(q, 0)| \le \mathcal{O}\Big(\frac{a|p|}{|q|^2}\Big)$。因此：

$$\big|\hat{\Pi}^{(\mathrm{reg},2,2)}_{\mu,\nu}(p;p) - \hat{\Pi}^{(\mathrm{reg},2,2)}_{\mu,\nu}(0;p)\big| \le \int_{\sqrt{a|p|}\le|q|\le\sqrt{2}\pi} \frac{d^2q}{(2\pi)^2}\mathcal{O}\Big(\tfrac{a|p|}{|q|^2}\Big) = \mathcal{O}\Big(a|p|\log\big(\tfrac{1}{a|p|}\big)\Big) \le \mathcal{O}\big(\sqrt{a|p|}\big),$$

由此完成了方程式（C.14）的证明。 □

D 树展开

在本附录中，我们证明方程式（2.26）。引入无量纲范数$\|\widetilde{W}^{(h)|q,\ n\,\dot{n}\ \ddot{n}}_{;;}\|_{(h)} := 2^{-hD_{sc}}\|\widetilde{W}^{(h)|q,\ n\,\dot{n}\ \ddot{n}}_{;;}\|^w_1$较为方便。利用这一范数，可以很容易地得到以下部分结果。

引理 D.1。 存在 $C \ge 1$，使得对于每个 $\tau \in \mathcal{T}_{h,\ N}$ 以及 $\mathbf{P} \in \mathcal{P}_\tau$，

$$\|\widetilde{W}[\tau, \mathbf{P}]\|_{(h_{v_0}-1)} \le \prod_{v\in V(\tau)\setminus\{v_0\}} 2^{(h_v - h_{v'})D_{sc}(P_v)} \prod_{v\in V_e(\tau)} C^{|P_v|}\|W^{(h_v-1)}_{P_v}\|_{(h_v-1)}, \tag{D.1}$$

其中，v' 是沿着 τ 位于 v 之前的顶点。

我们将引理 D.1 的证明推迟到本小节末尾。将方程式 (D.1) 的界代入方程式 (2.13)，并回想只有满足 $h_{v_0} = h + 1$ 的树有贡献，我们得到：[19]

$$\begin{aligned}\|\widetilde{W}^{(h)|q,q}_{\underline{n};\underline{\dot{n}};\underline{\ddot{n}}}\|_{(h)} &\le \sum_{\tau\in\mathcal{T}_{h,N}}^{*}\sum_{\mathbf{P}\in\mathcal{P}_\tau}^{**}\big\|\widetilde{W}[\tau,\mathbf{P}]\big\|_{(h_{v_0}-1)} \\ &\le 4^{|P_{v_0}|}\sum_{\tau\in\mathcal{T}_{h,N}}^{*}\sum_{\mathbf{P}\in\mathcal{P}_\tau}^{**}\prod_{v\in V(\tau)} 2^{(h_v-h_{v'})D_{sc}(P_v)}\prod_{v\in V_e(\tau)} C^{|P_v|}\|W^{(h_v-1)}_{P_v}\|_{(h_v-1)},\end{aligned} \tag{D.2}$$

其中，为了简化表达式，我们也将乘积 $\prod_v 2^{(h_v-h_{v'})D_{sc}(P_v)}$ 扩展到 $v = v_0$，代价是引入因子 $4^{|P_{v_0}|}$，该因子可以吸收到常数 C 中。现在

[18] 对于方程式 (C.16) 右端中方括号内的项 $1-\chi(|q+ap|)$ 所产生的贡献，其光滑性显而易见。对于来自 $\chi(|q+ap|)\big(1-\chi(|q|)\big)$ 的贡献，可以先将积分扩展到 $\mathbb{R}^2$，然后进行变量替换 $q \mapsto q - ap$，由此可知积分具有光滑性。

[19] 注意，鉴于上界，方程式 (2.13) 右端的算子 $\mathscr{S}$ 不起作用。

根据构造，对于每个 $v \in V(\tau)$， $D_{sc}(P_v) \leq -1$（这也说明了为什么一旦遇到非无关核，即 $D_{sc} \geq 0$，就必须立即停止树的展开），但紧接在根之后的顶点以及与非无关项相关联的端点可能除外；不过，对于这些端点，数量 $h_v - h_{v'}$ 固定为 1。此外，如果 $D_{sc}(P_v) \leq -1$，则 $D_{sc}(P_v) \leq -\frac{1}{8}|P_v^{\psi}|$ 也成立，其中 P_v^{ψ} 是与 ψ 变量相关联的场标签集合。因此可以写成：

$$\prod_{v\in V(\tau)} 2^{(h_v-h_{v'})D_{sc}(P_v)} \leq 8^{|V_e|+1} \prod_{v\in V(\tau)} 2^{-\frac{1+\theta}{2}(h_v-h_{v'})} \prod_{v\in V(\tau)} 2^{-\frac{1-\theta}{16}|P_v^{\psi}|}.$$

前置因子 $8^{|V_e|+1}$ 可以吸收到方程式 (D.2) 右端的常数 C 中，而因子 $\prod_{v\in V(\tau)} 2^{-\frac{1-\theta}{16}|P_v^{\psi}|}$ 可用于对任意固定构型 $\mathbf{P}$ 的求和取界 $\mathbf{P}_{V_e} \equiv \{P_v\}_{v\in V_e(\tau)}$。总而言之 [29, 附录 A。6]:

$$\|\widetilde{W}^{(h)|q,q}_{\underline{n};\dot{\underline{n}};\ddot{\underline{n}}}\|_{(h)} \leq \sum_{\tau\in\mathfrak{T}_{h,N}}^{*} \sum_{\mathbf{P}_{V_e}}^{**} \prod_{v\in V(\tau)} 2^{-\frac{1+\theta}{2}(h_v-h_{v'})} \prod_{v\in V_e(\tau)} C'^{|P_v|} \|W^{(h_v-1)}_{P_v}\|_{(h_v-1)}, \tag{D.3}$$

取适当的常数 $C' \geq 1$。现在，量 $\|W^{(h_v-1)}_{P_v}\|_{(h_v-1)}$ 对每个 $\epsilon > 0$ 都可按如下方式取界：

$$\|W^{(h_v-1)}_{P_v}\|_{(h_v-1)} \leq \begin{cases} R\lambda 2^{-(1+\vartheta)(h_v-1)} \leq R\lambda, & P_v \sim \psi^2; \\ C_1^q \lambda^{q-1}, & P_v \sim \psi^{2q} \text{ with } q \geq 2; \\ C_1 \lambda^{\frac{n-1}{2}} \lambda^{\frac{1-\epsilon}{2}(q-1)}, & P_v \sim G^{(n)}\psi^{2q} \text{ with } q \in \{1, n\}; \\ C_1 \lambda^{\frac{n-1}{2}} \lambda^{\frac{1-\epsilon}{2}(q-1)}, & P_v \sim \dot{G}^{(n)}\psi^{2q} \text{ with } q \in \{1, n-1\}; \\ C_1 \lambda^{\frac{5}{8}n} \lambda^{\frac{3}{8}(1-\epsilon)q}, & P_v \sim \ddot{G}^{(n)}\psi^{2n-2}. \end{cases} \tag{D.4}$$

取适当的 $C_1 \geq 1$，并且当 λ 足够小时，例如[20] $\lambda \leq (C_1' R^4)^{-1}$。为在 λ 中舍去一个幂次 ϵ，方便起见，通常在上述右端取前置因子 C_1，而非 $C_1^{|P_v|}$。方程式 (D.4) 中的界可以验证推出以下对方程式 (D.3) 右端的估计，在对 $\sum^{**}_{\mathbf{P}_{V_e}}$ 求和之后：

$$\|\widetilde{W}^{(h)|q,q}_{\underline{n};\dot{\underline{n}};\ddot{\underline{n}}}\|_{(h)} \leq C_2^{1+\dim \underline{n}+\dim \dot{\underline{n}}+\dim \ddot{\underline{n}}} \lambda^d \sum_{\tau\in\tilde{\mathfrak{T}}_{h,N}} 2^{-\frac{1+\theta}{2}(h_v-h_{v'})} \lambda^{\epsilon'\left(|V_e|-\max\{1,\dim \underline{n}+\dim \dot{\underline{n}}+\dim \ddot{\underline{n}}\}\right)} \times$$
$$\times \begin{cases} R & q=1, |\underline{n}|=|\dot{\underline{n}}|=|\ddot{\underline{n}}|=0 \\ 1 & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{D.5}$$

对于某些足够小的 $C_2 \geq 1$ 和 ϵ'，其中 $\mathfrak{T}_{h,N}$ 是端点数为 $\geq \max\{1, \dim n + \dim \dot{n} + \dim \ddot{n}\}$ 的 Gallavotti-Nicolò 树的集合，且所有非端点的顶点都是分支节点。注意，参数 R 仅当我们考虑核 $W^{(h)|1,\emptyset\emptyset}_{1}$ 时，才会出现在方程式 (D.5) 的右端；事实上，对于其他所有核，都可以验证每个因子 R 总是伴随着某个额外因子 $\lambda^{\frac{1}{2}}$，且 $R\lambda^{\frac{1}{2}} \leq 1$ 对于 $\lambda \leq R^{-2}$。现在，方程式 (D.5) 右端的和可以由以下界定

$$\sum_{\tau\in\tilde{\mathfrak{T}}_{h,N}} 2^{-\theta(h_{\max}(\tau)-h)} 2^{-\frac{1-\theta}{2}(h_v-h_{v'})} \lambda^{\epsilon'\left(|V_e|-\max\{1,\dim \underline{n}+\dim \dot{\underline{n}}+\dim \ddot{\underline{n}}\}\right)}, \tag{D.6}$$

[20] 其依赖性 R^{-4} 由要求 $\|W^{(h)|2}_{\cdot,\emptyset\emptyset;;\emptyset}\|^{w}_{1} \leq C\lambda$，其中 C 独立于 R，参见方程式 (2.18) 的第二个式子。

其中 $h_{\max}(\tau)$ 是 τ所有端点中的最高尺度。注意，在核带有标签 $\ddot{n} \neq \emptyset$的情况下，即至少有一个场 G，我们必须有 $h_{\max}(\tau) = N+1$，因为根据构造，不存在在较低尺度上带有场 G 的端点。最后，很容易验证方程式 (D.6) 右端的和有界于 $\big(8(2^{\frac{1-\theta}{2}}-1)^{-1}\big)^2$ max $\{1,\dim \underline{n}+\dim \dot{\underline{n}}+\dim \ddot{\underline{n}}\}$，只要 λ 足够小，因此：

$$\|\widetilde{W}^{(h)|q,q}_{\underline{n};\dot{\underline{n}};\ddot{\underline{n}}}\|_{(h)} \leq C_3^{1+\dim \underline{n}+\dim \dot{\underline{n}}+\dim \ddot{\underline{n}}} \lambda^d \times \begin{cases} 2^{\theta(h-N)}, & |\ddot{\underline{n}}| \geq 1 \\ R, & q=1, |\underline{n}|=|\dot{\underline{n}}|=|\ddot{\underline{n}}|=0 \\ 1, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

取 $C_3 = C_2\big(8(2^{\frac{1-\theta}{2}}-1)^{-1}\big)^2$，并再次取 λ 足够小（例如 $\lambda \leq (C_4 R^4)^{-1}$，对适当的常数 $C_4 \geq 1$）。命题 2.1 的结论在 $C_0 := (1-2^{\theta-1})^{-1}\max\{C_3, C_4\}$ 下成立。

为完成方程式（2.26）的证明，我们需要证明引理 D.1。

引理 *D.1* 的证明。 出发点是方程式（2.14）：

$$\widetilde{W}[\tau,\mathbf{P}](\underline{\eta};\underline{b};\dot{\underline{b}};\ddot{\underline{b}}) = \frac{\sigma_{\mathbf{P}}}{s_{v_0}!}\int_{\Lambda_F} d\underline{\eta}_{Q_{v_0}} \mathcal{E}^T_{(h_{v_0})}\big(\psi_{\tilde{P}_{w_1}},\dots,\psi_{\tilde{P}_{w_{s_{v_0}}}}\big)\prod_{j=1}^{s_{v_0}} \widetilde{W}[\tau,\mathbf{P}_{w_j}]\big((\underline{\eta};\underline{b};\dot{\underline{b}};\ddot{\underline{b}})_{P_{w_j}}\big),$$

由此我们得到：

$$\begin{aligned}\big\|\widetilde{W}[\tau,\mathbf{P}]\big\|_{(h_{v_0}-1)} \leq{}& \frac{2^{-(h_{v_0}-1)D_{sc}(P_{v_0})}}{L^2 s_{v_0}!}\int_{\Lambda_B} d\underline{b}_{v_0}\int_{\Lambda_F} d\underline{\eta}_{v_0} e^{\frac{\kappa}{2}\sqrt{\delta^D(\underline{b}_{v_0},\underline{\eta}_{v_0})}}\times \\ &\times \big|\mathcal{E}^T_{(h_{v_0})}\big(\psi_{\tilde{P}_{w_1}},\dots,\psi_{\tilde{P}_{w_{s_{v_0}}}}\big)\big|\prod_{j=1}^{s_{v_0}}\big|\widetilde{W}[\tau,\mathbf{P}_{w_j}]\big((\underline{\eta};\underline{b};\dot{\underline{b}};\ddot{\underline{b}})_{P_{w_j}}\big)\big|,\end{aligned} \tag{D.7}$$

其中 $\underline{b}_{v_0} \equiv \underline{b}_{P_{v_0}}$ 与 $\underline{\eta}_{v_0} = (\underline{\eta}_{P_{v_0}}, \underline{\eta}_{Q_{v_0}})$。作为 Battle-Brydges-Federbush-Kennedy 公式的一个标准推论 [29, 方程式 (4.43)] 以及 Gram-Hadamard 不等式 [29, 第 A.3 节。4],我们有如下的界：

$$\big|\mathcal{E}^T_{(h_{v_0})}\big(\psi_{\tilde{P}_{w_1}},\dots,\psi_{\tilde{P}_{w_{s_{v_0}}}}\big)\big| \leq C_1^{|Q_{v_0}|} 2^{\frac{1}{2}h_{v_0}(\sum_{j=1}^{s_{v_0}}|P^\psi_{w_j}|-|P^\psi_{v_0}|-2(s_{v_0}-1))}\sum_T \prod_{(f,f')\in T} |g^{(h_{v_0})}_{\eta_f,\eta_{f'}}|, \tag{D.8}$$

在适当的 $C_1 \geq 1$ 下，其中 $\sum_T$ 是对由 $s_{v_0}-1$ 条边构成的、连接场标签 $f \in P_{w_i}$（与 Grassmann 变量 $\psi^-_{\eta_f}$ 相关联）和场标签 $f' \in \tilde{P}_{w_j}$（带有 $j \neq i$，与 $\psi^+_{\eta_{f'}}$ 相关联）的所有生成树求和；这些生成树覆盖簇 $\tilde{P}_{w_1}, \dots, \tilde{P}_{w_s}$。

将方程式 (D.8) 的右端代入方程式 (D.7) 的右端，并利用

$$\sqrt{\delta^D(\underline{b}_{v_0},\underline{\eta}_{v_0})} \leq \sum_{j=1}^{s_{v_0}}\sqrt{\delta^D(\underline{b}_{P_{w_j}},\underline{\eta}_{P_{w_j}})} + \sum_{(f,f')\in T}\sqrt{\delta^D(\eta_f,\eta_{f'})},$$

我们发现：

$$\begin{aligned}&\big\|\widetilde{W}[\tau,\mathbf{P}]\big\|_{(h_{v_0}-1)} \leq \\ &2^{-(h_{v_0}-1)D_{sc}(P_{v_0})}2^{\frac{1}{2}h_{v_0}(\sum_{j=1}^{s_{v_0}}|P^\psi_{w_j}|-|P^\psi_{v_0}|-2(s_{v_0}-1))}\frac{C_1^{|Q_{v_0}|}}{L^2 s_{v_0}!}\sum_T\int_{\Lambda_B} d\underline{b}_{v_0}\int_{\Lambda_F} d\underline{\eta}_{v_0}\times \\ &\times \prod_{(f,f')\in T}\Big(e^{\frac{\kappa}{2}\sqrt{\delta^D(\eta_f,\eta_{f'})}}|g^{(h_{v_0})}_{\eta_f,\eta_{f'}}|\Big)\prod_{j=1}^{s_{v_0}}\Big(e^{\frac{\kappa}{2}\sqrt{\delta^D\left(\underline{b}_{P_{w_j}},\underline{\eta}_{P_{w_j}}\right)}}\big|\widetilde{W}[\tau,\mathbf{P}_{w_j}]\big((\underline{\eta};\underline{b};\dot{\underline{b}};\ddot{\underline{b}})_{P_{w_j}}\big)\big|\Big).\end{aligned} \tag{D.9}$$

通过对进行标准的剥树估计，在 T [29,第 6 节。2], 我们得到:

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{W}[\tau,\mathbf{P}]\right\|_{(h_{v_0}-1)} \leq 2^{-(h_{v_0}-1)D_{sc}(P_{v_0})}2^{\frac{1}{2}h_{v_0}(\sum_{j=1}^{s_{v_0}}|P^{\psi}_{w_j}|-|P^{\psi}_{v_0}|-2(s_{v_0}-1))}\frac{C_1^{|Q_{v_0}|}}{s_{v_0}!}\times\\ \times\sum_{T}\prod_{(f,f')\in T}\|g^{(h_{v_0})}\|_1^w\prod_{j=1}^{s_{v_0}}\left\|\widetilde{W}[\tau,\mathbf{P}_{w_j}]\right\|_1^w.\end{aligned} \tag{D.10}$$

现在，利用以下事实： $\|g^{(h)}\|_1^w = \mathcal{O}\left(2^{-h}\right)$ （参见方程式（2.4）），生成树的数量T受 s_{v_0} 界$e^{2|Q_{v_0}|}$ [29, 引理 A。5], 并回顾本小节开头对范数的定义 $\|\cdot\|_{(h)}$ 可得:

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{W}[\tau,\mathbf{P}]\right\|_{(h_{v_0}-1)} \leq 2^{(h_{v_0}-1)\left[-D_{sc}(P_{v_0})+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s_{v_0}}|P^{\psi}_{w_j}|-\frac{1}{2}|P^{\psi}_{v_0}|-2(s_{v_0}-1)\right]}C_2^{|Q_{v_0}|}\times\\ \times\prod_{j=1}^{s_{v_0}}2^{(h_{w_j}-1)D_{sc}(P_{w_j})}\left\|\widetilde{W}[\tau,\mathbf{P}_{w_j}]\right\|_{(h_{w_j}-1)},\end{aligned} \tag{D.11}$$

取适当的 $C_2 \geq 1$。现在，在方程式（D.11）的右端，我们写成 $h_{w_j}-1=\left(h_{w_j}-h_{v_0}\right)+\left(h_{v_0}-1\right)$，并利用以下事实 $\sum_{j=1}^{s_{v_0}}\left(|P^G_{w_j}|+|P^{\dot{G}}_{w_j}|+2|P^{\ddot{G}}_{w_j}|\right)=|P^G_{v_0}|+|P^{\dot{G}}_{v_0}|+2|P^{\ddot{G}}_{v_0}|$（无法对任何源场进行积分），我们注意到

$$\begin{aligned}&-D_{sc}(P_{v_0})+\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{s_{v_0}}|P^{\psi}_{w_j}|-\tfrac{1}{2}|P^{\psi}_{v_0}|-2s_{v_0}+2+\sum_{j=1}^{s_{v_0}}D_{sc}(P_{w_j})=\\ &=-2+\tfrac{1}{2}|P^{\psi}_{v_0}|+|P^{G}_{v_0}|+|P^{\dot{G}}_{v_0}|+2|P^{\ddot{G}}_{v_0}|+\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{s_{v_0}}|P^{\psi}_{w_j}|-\tfrac{1}{2}|P^{\psi}_{v_0}|-2s_{v_0}+2+\\ &+\sum_{j=1}^{s_{v_0}}\left(2-\tfrac{1}{2}|P^{\psi}_{w_j}|-|P^{G}_{w_j}|-|P^{\dot{G}}_{w_j}|-2|P^{\ddot{G}}_{w_j}|\right)=0.\end{aligned}$$

因此方程式（D.11）变为

$$\left\|\widetilde{W}[\tau,\mathbf{P}]\right\|_{(h_{v_0}-1)} \leq C_2^{|Q_{v_0}|}\prod_{j=1}^{s_{v_0}}2^{(h_{w_j}-h_{v_0})D_{sc}(P_{w_j})}\left\|\widetilde{W}[\tau,\mathbf{P}_{w_j}]\right\|_{(h_{w_j}-1)}, \tag{D.12}$$

对 τ的顶点反复迭代后，即可得到方程式（D.1）中所需的界。 □

E 对称性

本小节介绍有质量格点 QED_2的对称性：为明确起见，我们仅陈述带有外部源的模型 $G(J)$ B, φ，即玻色子场积分后立即得到的模型 A。然而，对于包含辅助 $\dot{}$ $\ddot{}$外场 G, $\dot{G}$, $\ddot{G}$的模型，相同的对称性仍然成立；参见方程式（1.44）、（4.2），其中变量 $G_b^{(n)}$，$\dot{G}_b^{(n)}$，$\ddot{G}_b^{(n)}$ 的变换与以下引理中规定的 $G(J)$ 相同。

引理 E.1。势 $\mathcal{V}(\psi;\ G(J))+(\varphi,\ \psi)+(B,\ O_5)$ 以及高斯积分 $P_{(h)}$(参见方程式 (1.21) 以及方程式 (2.5)后的注释）分别在以下对称性下保持不变，其中约定 $\varphi^{\pm}$ 的变换与 $\psi^{\pm}$相同。

1. *Global* $U(1)$: $(\mathcal{U}_\alpha\psi)^{\pm}_{x,s}:=e^{\pm i\alpha}\psi^{\pm}_{x,s}$, *for every* $\alpha\in[0,2\pi)$.

2. 电荷共轭：

$$\begin{cases} (\mathcal{Q}\psi)^+_{x,s} := \sum_{s'} \psi^-_{x,s'}(\gamma_1)_{s,s'} \\ (\mathcal{Q}\psi)^-_{x,s} := \sum_{s'}(\gamma_1)_{s,s'}\psi^+_{x,s'} \end{cases}, \qquad \begin{cases} (\mathcal{Q}G)_b(J) := G_{\bar{b}}(J) \\ (\mathcal{Q}B)_b := B_{\bar{b}}, \end{cases} \tag{E.1}$$

其中 $b^{=}\equiv(x、\overline{\mu、\ \epsilon})=(x、\ \mu、\ -\epsilon)$。

3. 坐标轴翻转：

$$\begin{cases} (\mathcal{F}\psi)^+_{x,s} := \sum_{s'} \psi^+_{Tx,s'}F^*_{s,s'} \\ (\mathcal{F}\psi)^-_{x,s} := \sum_{s'} F_{s,s'}\psi^-_{Tx,s'} \end{cases}, \qquad \begin{cases} (\mathcal{F}G)_b(J) := G_{Tb}(J) \\ (\mathcal{F}B)_b := -B_{Tb}, \end{cases} \tag{E.2}$$

$where\ F \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_0-\gamma_1)\gamma_5 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix},\ Tx \equiv (x_1, x_0)\ and\ T(x,\mu,\epsilon) \equiv (Tx, 1-\mu, \epsilon).$

4. 宇称：

$$\begin{cases} (\mathcal{P}\psi)^+_{x,s} := \sum_{s'} \psi^+_{Px,s'}(\gamma_5\gamma_1)_{s',s} \\ (\mathcal{P}\psi)^-_{x,s} := \sum_{s'}(\gamma_1\gamma_5)_{s,s'}\psi^-_{Px,s'} \end{cases}, \qquad \begin{cases} (\mathcal{P}G)_b(J) := G_{Pb}(J) \\ (\mathcal{P}B)_{x,\mu,\epsilon} := (-1)^{\mu-1}B_{Px,\mu,\epsilon}, \end{cases} \tag{E.3}$$

$where\ Px \equiv (x_0, -x_1)\ and\ P(x,\mu,\epsilon) \equiv (Px - \delta_{\mu,1}2^{-N}\hat{e}_1, \mu, (-1)^\mu\epsilon).$

证明。

1. 全局 $U(1)$ 很直接，因为每个场 ψ^+ 或 φ^+ 总是伴随着一个场 ψ^- 或 φ^-。

2. 注意到 $\gamma_1^T\gamma_\mu^T\gamma_1 = \gamma_\mu$ 和 $\gamma_1^T\gamma_1 = -1$，因此，回想起 $O_{x,\mu,+}(\psi) \equiv \frac{1}{2}\psi^+_x(\gamma_\mu - r)\psi^-_{x+2^{-N}\hat{e}_\mu}$ 和 $O_{x,\mu,-}(\psi) = -\frac{1}{2}\psi^+_{x+2^{-N}\hat{e}_\mu}(\gamma_\mu + r)\psi^-_x$，我们得到：

$$\begin{cases} O_{x,\mu,+}(\mathcal{Q}\psi) = -\frac{1}{2}\psi^+_{x+2^{-N}\hat{e}_\mu}\gamma_1^T(\gamma_\mu^T - r)\gamma_1\psi^-_x = -\frac{1}{2}\psi^+_{x+2^{-N}\hat{e}_\mu}(\gamma_\mu + r)\psi^-_x = O_{x,\mu,-}(\psi) \\ O_{x,\mu,-}(\mathcal{Q}\psi) = \frac{1}{2}\psi^+_x\gamma_1^T(\gamma_\mu^T + r)\gamma_1\psi^-_{x+2^{-N}\hat{e}_\mu} = \frac{1}{2}\psi^+_x(\gamma_\mu - r)\psi^-_{x+2^{-N}\hat{e}_\mu} = O_{x,\mu,+}(\psi). \end{cases}$$

此外，回顾方程式 (1.22)、(1.23)，并注意到 $g^A_{b,b'} = g^A_{\bar{b}\,\bar{b}'}$，，我们看到 $\underline{w}_{n,m}(b,b') = w_{n,m}(b,b')$，由此可得 $\mathcal{V}(\psi; G(J))$ 的不变性。此外，由于 $\gamma_1^T(\gamma_\mu\gamma_5)^T\gamma_1 = -\bar{\gamma}_1^T\gamma_5^T\gamma_1\gamma_1^T\bar{\gamma}_\mu^T\bar{\gamma}_1 = -\gamma_5\gamma_\mu = \gamma_\mu\gamma_5$，我们看到 $O_{5;x,\mu,-\epsilon}(\mathcal{Q}\psi) = O_{5;x,\mu,\epsilon}(\psi)$，这意味着项 (B, O_5) 的不变性。Grassmann 积分 $P(h)$ 的不变性意味着，对于每个 Grassmann 多项式 f，都有 $\mathcal{E}_{(h)}(f(\cdot)) = \mathcal{E}_{(h)}(f(\mathcal{Q}\cdot))$。根据格拉斯曼威克规则 [29, 方程式 (4.20)]，，只需考虑 f 为二次的情形，此时简单期望值化为单尺度传播子。

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_{(h)}\big((\mathcal{Q}\psi)^-_{x,s}(\mathcal{Q}\psi)^+_{y,s'}\big) = -\big(\gamma_1 g^{(h)}(y-x)\gamma_1^T\big)_{s',s} = \\ &-\int_{\Lambda^*} dk e^{-ik\cdot(y-x)} f_h(|k|)\Big(\gamma_1\big(-i\not{s}(k) + m_N + M_N(k)\big)^{-1}\gamma_1^T\Big)_{s',s} = \\ &-\int_{\Lambda^*} dk e^{-ik\cdot(y-x)} f_h(|k|)\Big(-i\not{s}(k)^T - m_N - M_N(k)\Big)^{-1}_{s',s} = \\ &\int_{\Lambda^*} dk e^{-ik\cdot(x-y)} f_h(|k|)\Big(-i\not{s}(k) + m_N + M_N(k)\Big)^{-1}_{s,s'} = \mathcal{E}_{(h)}(\psi^-_{x,s}\psi^+_{y,s'}), \end{aligned}$$

其中，我们为 $0 \le h < N$ 引入了 $f_h(|k|) \equiv \chi_h(|k|) - \chi_{h-1}(|k|)$ 和 $f_N(|k|) \equiv 1 - \chi_{N-1}(|k|)$，并利用了 $s_\mu(-k) = -s_\mu(k)$ 和 $M_N(-k) = M_N(k)$。

3。我们注意到 $F^\dagger\gamma_\mu F=\gamma_{1-\mu}$，其中 $F^\dagger$ 是 F的厄米共轭，因此：

$$\begin{cases} O_{x,\mu,+}(\mathcal{F}\psi)=\frac{1}{2}\psi^+_{Tx}(\gamma_{1-\mu}-r)\psi^-_{Tx+2^{-N}\hat{e}_{1-\mu}}=O_{Tx,1-\mu,+}(\psi) \\ O_{x,\mu,-}(\mathcal{F}\psi)=-\frac{1}{2}\psi^+_{Tx+2^{-N}\hat{e}_{1-\mu}}(\gamma_{1-\mu}+r)\psi^-_{Tx}=O_{Tx,1-\mu,-}(\psi). \end{cases}$$

再回想一下 $g^A_{b,\,b'}=g^A_{Tb,\,Tb'}$，由此可得 $w_{n,\,m}(b,\;b')=w_{n,\,m}(Tb,\,Tb')$，于是 $\mathcal{V}$ 的不变性便得证。对于手征流，我们利用这一事实： $F^\dagger\gamma_5F=-\gamma_5$，因此$O_{5;Tx,\,\mu,\,\epsilon}(\mathcal{F}\psi)=-O_{5;x,\,1-\mu,\,\epsilon}(\psi)$。对于格拉斯曼积分，我们有

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_{(h)}\big((\mathcal{F}\psi)^-_{x,s}(\mathcal{F}\psi)^+_{y,s'}\big)=\Big(Fg^{(h)}(T(x-y))F^\dagger\Big)_{s,s'}= \\ &\int_{\Lambda^*}dke^{-iTk\cdot(x-y)}f_h(|k|)\Big(F\big(-i\not{s}(k)+m_N+M_N(k)\big)^{-1}F^\dagger\Big)_{s,s'}= \\ &\int_{\Lambda^*}dke^{-ik\cdot(x-y)}f_h(|k|)\Big(F\big(-i\not{s}(Tk)+m_N+M_N(Tk)\big)F^\dagger\Big)^{-1}_{s,s'}= \\ &\int_{\Lambda^*}dke^{-ik\cdot(x-y)}f_h(|k|)\Big(-i\not{s}(k)+m_N+M_N(k)\Big)^{-1}=\mathcal{E}_{(h)}(\psi^-_{x,s}\psi^+_{y,s'}), \end{aligned}$$

这里我们用到了 $s_\mu(k)=s_{1-\mu}(Tk)$ 和 $M_N(k)=M_N(Tk)$。

4. 我们注意到 $\gamma_5\gamma_1\gamma_\mu\gamma_1\gamma_5=(-1)^\mu\gamma_\mu$，由此显然可得 $O_b(\mathcal{P}\psi)=O_{Pb}(\psi)$。另一方面，我们有 $g^A_{b,\,b'}=g^A_{Pb,Pb'}$，因此 $w_{n,m}(b,b')=w_{n,m}(Pb,Pb')$，这意味着 $\mathcal{V}$ 在宇称变换下保持不变。此外，我们注意到 $(\gamma_5\gamma_1)\gamma_\mu\gamma_5(\gamma_1\gamma_5)=(-1)^{\mu-1}\gamma_\mu\gamma_5$，因此 $O_{5;Px,\mu,\epsilon}(\mathcal{P}\psi)=(-1)^{\mu-1}O_{5;x,\mu,\epsilon}(\psi)$。最后：

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_{(h)}\big((\mathcal{P}\psi)^-_{x,s}(\mathcal{P}\psi)^+_{y,s'}\big)=\Big(\gamma_1\gamma_5g^{(h)}(P(x-y))\gamma_5\gamma_1\Big)_{s,s'}= \\ &\int_{\Lambda^*}dke^{-iPk\cdot(x-y)}f_h(|k|)\Big((\gamma_5\gamma_1)^{-1}\big(-i\not{s}(k)+m_N+M_N(k)\big)^{-1}(\gamma_1\gamma_5)^{-1}\Big)_{s,s'}= \\ &\int_{\Lambda^*}dke^{-iPk\cdot(x-y)}f_h(|k|)\Big((\gamma_1\gamma_5)\big(-i\not{s}(Pk)+m_N+M_N(Pk)\big)(\gamma_5\gamma_1)\Big)^{-1}_{s,s'}= \\ &\int_{\Lambda^*}dke^{-ik\cdot(x-y)}f_h(|k|)\Big(-i\not{s}(k)+m_N+M_N(k)\Big)^{-1}=\mathcal{E}_{(h)}(\psi^-_{x,s}\psi^+_{y,s'}), \end{aligned}$$

其中我们使用了 $(\gamma_\mu\gamma_5)^{-1}=\gamma_5\gamma_\mu$, $s_\mu(Pk)=(-1)^\mu s_\mu(k)$ 以及 $M_N(Pk)=M_N(k)$。

□

F 连续统极限概述

我们简要介绍证明极限存在性的方案 $N\to\infty$，即生成泛函的核在方程式（1.35）中的极限存在。

我们希望证明生成泛函的 $N\to\infty$ 核的傅里叶变换的极限 $W^{(u.v.;N)}_{q\;q'\;\tilde{q}\;\tilde{q}'\;p,\;;\;,\;;\;;\;p'}$ 存在，参见方程式（1.35）-（1.36），其中（例如当 $\tilde{q}=\tilde{q}'=p=p'=0$时）由下式给出

$$\hat{W}^{(u.v.;N)}_{q,q;0,0;0,0}\big((\underline{k},\underline{s}),(\underline{k}',\underline{s}')\big):=\frac{1}{L^2}\int_{\Lambda_N^{2q}}d\underline{x}d\underline{x}'e^{i(\underline{k}\cdot\underline{x}+\underline{k}'\cdot\underline{x}')}W^{(u.v.;N)}_{q,q;0,0;0,0}(\underline{\eta},\underline{\eta}';\underline{b}),\;\;\underline{k},\underline{k}'\in(\Lambda_N^*)^q \tag{F.1}$$

其中 $\Lambda_N\equiv\Lambda$ 以及 $\Lambda_N^*\equiv\Lambda^*$ 对于这些量，我们已在每个表达式中明确写出对 N 的依赖性，回顾方程式（1.17）下方的记号。

因此，只需证明一个柯西性质，也就是说（不失一般性地假设$h_M^*=0$），对于每个 $k,k'\in\big(\frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}^2\big)^q$，

$$\big|\hat W^{(u.v.;N)}_{q,q;0,0;0;0}\big((\underline k,\underline s),(\underline k',\underline s')\big)-\hat W^{(u.v.;N')}_{q,q;0,0;0;0}\big((\underline k,\underline s),(\underline k',\underline s')\big)\big|\le C^{1+q}\lambda^{\max\{1,\frac25 q\}}2^{-\theta\min\{N,N'\}},\quad (F.2)$$

对任意 N，N'足够大，并取适当的 $C>0$与 $\theta\in(0,1)$。注意，方程式（F.2）的右端与方程式（1.37）的右端相同，只是乘以一个小因子 $2^{-\theta\min\{N,N'\}}$。

由于傅里叶空间中任一核的绝对值均受 L^1 范数所界，该范数为其位置空间对应物之范数（参见方程式（1.31）），并且由于进行非微扰多尺度分析时我们被引导在位置空间中工作，推导方程式（F.2）的一种自然方法是证明这些核 $W^{(u.v.;N)}$ 是柯西序列，在 L^1 范数下。

比较不同格点：平滑。第一个问题在于，在存在格点正则化的情况下，核 $W^{(u.v.;N)}$ 与 $W^{(u.v.;N')}$ 先验地定义在不同的格点上，每当在不失一般性的条件下 $N<N'$时。为了赋予 $W^{(u.v.;N)}-W^{(u.v.;N')}$ 以意义，我们引入磨光函数 $\mathfrak{d}_N$，由下式给出

$$\mathfrak{d}_N(x):=\frac{1}{L^2}\int_{\Lambda_\infty^*}dk\,e^{-ik\cdot x}\chi(\tfrac{\gamma^{-N}}{2}|k|),\qquad x\in\Lambda_\infty:=\mathbb{R}^2/(L\mathbb{Z}^2),$$

其中 $\Lambda_\infty^*\equiv\frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}^2$，$\chi$ 定义于方程式（1.33）之后，以及 $1<\gamma\le 2$（例如 $\gamma=\sqrt2$），并且我们定义核的平滑版本，记为 $\mathsf{W}^{(u.v;N)}$，通过与 $\mathfrak{d}_N$ 的卷积得到，即：

$$\begin{cases}\mathsf{W}^{(u.v;N)}(x_1,\dots,x_q):=\int_{\Lambda_N^q}dy_1\dots dy_qW^{(u.v.;N)}(y_1,\dots,y_q)\prod_{j=1}^q\mathfrak{d}_N(x_j-y_j)\\ \mathsf{W}^{(u.v;N')}(x_1,\dots,x_q):=\int_{\Lambda_{N'}^q}dy_1\dots dy_qW^{(u.v.;N')}(y_1,\dots,y_q)\prod_{j=1}^q\mathfrak{d}_N(x_j-y_j).\end{cases}$$

注意，方程式（F.2）对 $\max_{j=1}^q\{|k_j|,|k'_j|\}\le\gamma^N$，[21] 成立，如果我们证明

$$\big\|\mathsf{W}^{(u.v.);N}_{q,q;0,0;0;0}-\mathsf{W}^{(u.v.);N'}_{q,q;0,0;0;0}\big\|_{L^1(\Lambda_\infty)}\le C^{1+q}\lambda^{\max\{1,\frac25 q\}}2^{-\theta N},\quad (F.3)$$

其中$\|\cdot\|_{L^1(\Lambda_\infty)}$表示方程式（1.31）在 Λ_∞上。

我们强调，由于平滑程序截断了所有模 $|k|\ge 2\gamma^N$（$\chi=0$ 在$[1,\infty$上）），嵌套地使用由 $\mathfrak{d}_N$ 在多尺度方案中所做的平滑，会隐式排除所有来自至少大于$2\gamma^N$的模对关联函数的贡献，而这相当于说格点理论可由其带有动量截断的连续理论对应物很好地近似。后一性质实际上是不正确的，因为人们很容易意识到存在三个不可约图，即 $\hat\Pi^{(0,N]}_{\mu\,\nu}$，$(p)$，$\hat\Pi^{(0,N]}_{5\quad\nu\,;\,\mu,}(p)$ 以及 $\mathfrak{T}^{(0,N]}$，其定义于方程式（C.1）和（5.8）中，它们允许来自大小为 $\sim 2^N$的动量的不可忽略贡献。事实上，可以证明

$$\lim_{N\to\infty}\mathfrak{T}^{(0,N]}=-\int_{(-\pi,\pi]^2}\frac{d^2q}{(2\pi)^2}e^{-iq_0}\frac{i\tilde s_0(q)-r\tilde M(q)}{|\tilde s(q)|^2+\tilde M(q)^2},\quad (F.4)$$

其中 $\tilde M(q)\equiv 2r\sum_\mu\sin^2(\frac{q_\mu}{2})$，且 $\tilde s_\mu(q)\equiv\sin(q_\mu)$。在方程式 (F.4) 右端的积分中，$q$可解释为“重标度动量”，即 $q=2^{-N}k\in 2^{-N}\Lambda_N^*$：这表明，当 $N\to\infty$ 时，所有贡献都来自满足 $|k|\ge 2^{N(1-\epsilon)}$ 的动量 $k\in\Lambda^*$，对于任意 $\epsilon>0$ 均如此。类似的考量也适用于泡图 $\hat\Pi^{(0,N]}_{\mu\,\nu}(0)$ 和 $\hat\Pi^{(0,N]}_{5\quad\nu\,;\mu,}(0)$。

[21]请注意，截断函数 χ在 $[0,\frac12]$，上确实等于 1，因此，对于小于 γ^N的动量，$\mathfrak{d}_N$的卷积不会影响傅里叶变换。

柯西性质。 鉴于前面的讨论，可以看出，为了证明方程式 (F.3)，必须考虑对定理 3.1 的细化。具体而言（更多详情见最后一段），事实证明，每个非无关核都可以分解为

$$W^{(h;N)|q,q}_{\underline{n};\dot{\underline{n}};\ddot{\underline{n}}} = w^{(h;N)|q,q}_{\underline{n};\dot{\underline{n}};\ddot{\underline{n}}} + \mathcal{R}W^{(h;N)|q,q}_{\underline{n};\dot{\underline{n}};\ddot{\underline{n}}},$$

其中 $w^{(h;N)|q}_{,\,n\,\dot{n}\,\ddot{n}}{}^{q}{}_{;\,;}$ 是显式的，可用上述方程式（F.4）上方的三个图示表示，而 $\mathcal{R}W_{(h;\,N)|q,\,\underline{n}\,\dot{\underline{n}}\,\ddot{\underline{n}}}{}^{q}{}_{;\,;}$ 满足一个额外改进的界，该改进至少比朴素的量纲估计 2^{-h} 小 $2^{hD_{sc}}$（参见方程式（2.12））。[22]

采用这一分解，例如固定 $\gamma = \sqrt{2}$，并为简单起见，假设 N，N' 是 4 的倍数，且 $N' > N$；我们可以将尺度范围划分为以下两个不同的区域。

1. $N/4 \le h \le N$。在此区域，关于该理论的所有信息都由边缘核的主导部分 $w^{(h;N)|q}_{,\,n\,\dot{n}\,\ddot{n}}{}^{q}{}_{;\,;}$ 承载，因为来自 $\mathcal{R}W_{(h;\,N)|q,\,n\,\dot{n}\,\ddot{n}}{}^{q}{}_{;\,;}$ 的项会多出一个因子 $2^{-h\vartheta} \le 2^{-\frac{N\vartheta}{4}}$。因此，为了得到方程式（F.3），需要利用 $\mathsf{W}^{(h;N)|q}_{,\,n\,\dot{n}\,\ddot{n}}{}^{q}{}_{;\,;}$ 的拆分以及以下事实

$$\big\|\mathsf{w}^{(h;N)|q,q}_{\underline{n};\dot{\underline{n}};\ddot{\underline{n}}} - \mathsf{w}^{(h;N')|q,q}_{\underline{n};\dot{\underline{n}};\ddot{\underline{n}}}\big\|^{w}_{L^1(\Lambda_\infty)} = \mathcal{O}(2^{-N/4}), \tag{F.5}$$

这由图 $\hat{\Pi}^{(h,N]}(0)$ 和 $\mathcal{T}^{(h,N]}$ 显式收敛至其连续极限可得，即

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}^{(h,N]}(0) - \lim_{N\to\infty}\hat{\Pi}^{(h,N]}(0) &= \mathcal{O}(2^{-\frac{2}{3}N}) + \mathcal{O}(2^{h-N}),\\ \mathcal{T}^{(h,N]} - \lim_{N\to\infty}\mathcal{T}^{(h,N]} &= \mathcal{O}(2^{-\frac{2}{3}N}) + \mathcal{O}(2^{h-N}).\end{aligned}$$

2. $0 \le h \le N/4$。这一情形采用与证明定理 3.1 相同的归纳结构进行分析，该结构见小节2、3 。不同之处在于，现在方程 (2.18)- (2.21) 和方程 (2.22)-(2.24) 的界在等式左边涉及的是差值 $\mathsf{W}^{(h;N)|q}_{,n\,\dot{n}}{}^{q}{}_{;;\ddot{n}} - \mathsf{W}^{(h;N')|q,n\,\dot{n}\,\ddot{n}}{}^{q}{}_{;;}$，而非核 $W_{(h;N)|q,n\,\dot{n}\,\ddot{n}}{}^{q}{}_{;;}$ 本身；并且等式右端还多出一个小量因子，例如 $2^{-N/8}$。策略同样基于一个双重步骤。

首先要证明命题 2.1 的对应结论，即对所有核，$\mathsf{W}^{(h;N)|q}_{,\,n\,\dot{n}}{}^{q}{}_{;\,;\,\ddot{n}} - \mathsf{W}^{(h;N')|q}_{,\,n\,\dot{n}\,\ddot{n}}{}^{q}{}_{;\,;}$ 差异均很小，前提是相关项和边缘项满足该结论。为此，我们利用树展开的工具（参见第 2.2 小节），并结合费米子传播子之差的维数界：

$$\Big(\mathfrak{d}_N * g^{(h)}_N * \mathfrak{d}_N\Big)(x,y) - \Big(\mathfrak{d}_N * g^{(h)}_{N'} * \mathfrak{d}_N\Big)(x,y) = \mathcal{O}\Big(2^{2h-N}e^{-\kappa_4\sqrt{2^h|x-y|_L}}\Big) \tag{F.6}$$

对于适当的 $\kappa_4 > 0$。注意，方程式 (F.6) 的右端带有一个增益因子 2^{h-N}，相较于 $g^{(h)}_N$ 本身的维数界（参见方程式 (2.4)）；例如，对于 $h \le \frac{N}{2}$，这一增益优于 $2^{-\frac{N}{2}}$。

然后，第二步需要证明 $\mathsf{W}^{(h;N)|q}_{,\,n\,\dot{n}}{}^{q}{}_{;\,;\,\ddot{n}} - \mathsf{W}^{(h;N')|q,\,n\,\dot{n}\,\ddot{n}}{}^{q}{}_{;\,;}$ 对于非无关核，这可以按照第3节的思路来完成，首先

[22]例如，在第一个非平凡情形 $\big\|\mathcal{R}W_{(h\,N\,|2\,2;\,),\,;\,;\,\emptyset}{}_{\emptyset\,\emptyset}\big\|^{w}_{1} \le R\lambda^{\frac{5}{4}}2^{-h}$，必须将其与方程式 (2.18) 进行比较。

从核之间的精确恒等式出发（例如，见引理3.2），并归纳利用树展开给出的界，以及玻色子传播子之差的界：

$$\Big(\mathfrak{d}_N * g_N^A * \mathfrak{d}_N\Big)(x,y) - \Big(\mathfrak{d}_N * g_{N'}^A * \mathfrak{d}_N\Big)(x,y) = \mathcal{O}\Big(2^{-N} e^{-\kappa_4 \sqrt{|x-y|_L}}\Big) + \mathcal{O}\Big(\tfrac{2N'-N}{2} e^{-\kappa_4 \sqrt{2^{-\frac{N}{2}}|x-y|_L}}\Big),$$

以及费米子传播子（方程式 (F.6)）。

提取主导项：定理 3.1 的改进。如上所述，要使前述策略奏效，就需要在多尺度分析中分离出图示 $\hat{\Pi}^{(h,N]}_{\mu\,\nu}$、$\hat{\Pi}^{(h,N]}_{5\quad\nu\;;\mu,}$和 $\mathfrak{T}^{(h,N]}$ 的贡献，并分别分析它们的连续极限。这类图通常以几何级数的形式出现在核 $W^{(h)}$ 中（对应于所有可约图之和），其和会产生

$$\Upsilon^{(h,N]}(b,b') := \delta_{\mu,\nu}\epsilon\epsilon' \int_{\Lambda_N^*} dk \frac{e^{-ik\cdot(x-y)}}{|\sigma(k)|^2 + M^2 - 2\lambda\big(2\hat{\Pi}^{(h,N]}(0) + \mathfrak{T}^{(h,N]}\big)}, \tag{F.7}$$

其中约定 $b = (x,\mu,\epsilon)$、$b' = (y,\nu,\epsilon')$ 和 $\hat{\Pi}^{(h,N]}(0) \equiv \hat{\Pi}^{(h,N]}_{0\;0}(0)$（回想一下，根据引理 C.1，$\hat{\Pi}^{(h,N]}_{\mu\,\nu}(0) = \delta_{\mu,\nu}\hat{\Pi}^{(h,N]}_{0\;0}(0)$）。[23] 下面我们说明如何对一类受限的核建立维数改进，即 $W^{(h;N)|0,0}_{(n,n');\emptyset;\emptyset}$。事实证明，这些核的主导部分为

$$w^{(h;N)|0,0}_{(n,n');\emptyset;\emptyset} = (nn')^2 \Big(\lambda\mathfrak{T}^{(h,N]} g^A\Big)^{*(n-1)} * \big(\mathbb{1} + \lambda\Omega^{(h,N]}\big) * \Pi^{(h,N]} * \Big(\lambda\mathfrak{T}^{(h,N]} g^A\Big)^{*(n'-1)}, \tag{F.8}$$

因此

$$\big\|g^A * \mathcal{R}W^{(h;N)|0,0}_{(1,1);\emptyset;\emptyset}\big\|_1^w \le R\lambda 2^{-h}; \quad \big\|\mathcal{R}W^{(h;N)|0,0}_{(n,n');\emptyset;\emptyset}\big\|_1^w \le \lambda^{\frac{n+n'-2}{2}} 2^{-h}\ \forall n+n' \ge 3. \tag{F.9}$$

证明 $\mathcal{R}W^{(h;N)|0}_{,0\;(n,n');\emptyset;\emptyset}$ 的维数改进策略，在定性上与小节 2、3 中讨论的相同。不过，虽然与命题 2.1 相关的部分几乎可以用完全相同的方法证明，但归纳部分（即小节 3）要复杂得多，下面将对此进行说明。

首先，使用小节3 中引入的相同展开（见图10，其中给出了核 $W^{(h;N)|0,0}_{(1,1);\emptyset;\emptyset}$），可以看出，大多数项都具有方程式（F.9）右端所需的维数因子 2^{-h}。对于核 $W^{(h;N)|0}_{,0\;(1,1);\emptyset;\emptyset}$，不具备这种维数改进的贡献只有非相互作用泡图 $\Pi^{(h,N]}$ 和图10中的图（c'）。接下来，将展开中所有不具备维数改进 2^{-h}的项分离出来；对于核 $W^{(h;N)|0}_{,0\;(n,n');\emptyset;\emptyset}$，我们有：

$$W^{(h;N)|0,0}_{(1,1);\emptyset;\emptyset} = \Pi^{(h,N]} + 2\sum_{n\ge 1} \tfrac{1}{n^2} \lambda\Pi^{(h,N]} * g^A * W^{(h;N)|0,0}_{(n,1);\emptyset;\emptyset} + \mathcal{O}(\lambda 2^{-h}), \tag{F.10}$$

$$W^{(h;N)|0,0}_{(n,n');\emptyset;\emptyset} = \tfrac{n^2}{(n-1)^2} \lambda\mathfrak{T}^{(h,N]} g^A * W^{(h;N)|0,0}_{(n-1,n');\emptyset;\emptyset} + \mathcal{O}\big(\lambda^{\frac{n+n'-1}{2}} 2^{-h}\big),\ \ n \ge 2, \tag{F.11}$$

[23] 正如方程式 (5.14) 和 (5.15) 所确立的，若 $h = 0$ 方程式（F.9）右端出现的量 $-2\lambda\big(2\hat{\Pi}^{(h,N]}(0) + \mathfrak{T}^{(h,N]}\big)$ 恰好是关联函数 $\hat{\Sigma}^{(u,v,)}_{\mu\;\nu}(0)$ 的最低阶贡献。

其中 $\mathcal{O}(\cdot)$ 是相对于加权 L^1 范数理解的（参见方程式（1.31））。方程式（F.10）、（F.11）可视为以变量 $\{W_{(h;N)|0,0\,(n,n');\emptyset;\emptyset}\}_{n\geq n'\geq 1}$ 为未知数的线性方程组。首先，通过迭代使用方程式（F.11），我们得到

$$\begin{aligned} &W^{(h;N)|0,0}_{(n,n');\emptyset;\emptyset} = \\ &(nn')^2(\lambda\mathcal{T}^{(h,N]}g^A)^{*(n-1)} * W^{(k)|0,0}_{(1,1);\emptyset;\emptyset} * (\lambda\mathcal{T}^{(h,N]}g^A)^{*(n'-1)} + \mathcal{O}\big(\lambda^{\frac{1}{2}}\lambda^{\frac{n+n'-2}{2}}2^{-h}\big). \end{aligned} \tag{F.12}$$

现在，将方程式 (F.10) 与方程式 (F.12) 结合，并令 $\Gamma^{(h,N]} := \sum_{n\geq 0}(\lambda\mathcal{T}^{(h,N]}g^A)^{*n}$，我们得到

$$W^{(h;N)|0,0}_{(1,1);\emptyset;\emptyset} = \Pi^{(h,N]} + 2\lambda\Pi^{(h,N]} * g^A * \Gamma^{(h,N]} * W^{(h;N)|0,0}_{(1,1);\emptyset;\emptyset} + \mathcal{O}(\lambda 2^{-h}). \tag{F.13}$$

此外，将方程式 (F.13) 两边与 g^A 进行卷积，将 $g^A * \Pi^{(h,N]}$ 写作 $\hat{}\Pi^{(h,N]}(0)g^A + \big(g^A * \Pi^{(h,N]} - \hat{}\Pi^{(h,N]}(0)g^A\big)$，并应用引理 C.1的第 3 项，我们进一步得到：

$$g^A * \big(W^{(h;N)|0,0}_{(1,1);\emptyset;\emptyset} - \Pi^{(h,N]} - 2\lambda\hat{\Pi}^{(h,N]}(0)g^A * \Gamma^{(h,N]} * W^{(h;N)|0,0}_{(1,1);\emptyset;\emptyset}\big) = \mathcal{O}(\lambda 2^{-h}). \tag{F.14}$$

最后，利用 $\Omega^{(h,N]} = \big(\mathbb{1} - 2\lambda\,\hat{}\Pi^{(h,N]}(0)g^A * \Gamma^{(h,N]}\big)^{-1}$ 以及 $\Omega^{(h,N]} * g^A = g^A * \Omega^{(h,N]}$，并注意到 $\|\Omega^{(h,N]}\|^w_1 = \mathcal{O}(1)$，我们得到方程式 (F.9) 的第一个式子：

$$\Big\|g^A * \big(W^{(h;N)|0,0}_{(1,1);\emptyset;\emptyset} - \Omega^{(h,N]} * \Pi^{(h,N]}\big)\Big\|^w_1 \equiv \|g^A * \mathcal{R}W^{(h;N)|0,0}_{(1,1);\emptyset;\emptyset}\|^w_1 \leq R\lambda 2^{-h}, \tag{F.15}$$

对于足够大的 R。此外，结合方程式 (F.12)、(F.15)，可得到方程式 (F.9) 中关于核 $W^{(k)|0}_{,0\,(n,n');\emptyset;\emptyset}$ 的第二个关系，其中 $n + n' \geq 3$:

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{R}W^{(h;N)|0,0}_{(n,n');\emptyset;\emptyset}\|^w_1 \equiv \\ &\|W^{(h;N)|0,0}_{(n,n');\emptyset;\emptyset} - (nn')^2(\lambda\mathcal{T}^{(h,N]}g^A)^{*(n-1)} * w^{(h;N)|0,0}_{(1,1);\emptyset;\emptyset} * (\lambda\mathcal{T}^{(h,N]}g^A)^{*(n'-1)}\|^w_1 \leq \\ &\|W^{(h;N)|0,0}_{(n,n');\emptyset;\emptyset} - (nn')^2(\lambda\mathcal{T}^{(h,N]}g^A)^{*(n-1)} * W^{(h;N)|0,0}_{(1,1);\emptyset;\emptyset} * (\lambda\mathcal{T}^{(h,N]}g^A)^{*(n'-1)}\|^w_1 + \\ &+ (nn')^2\|(\lambda\mathcal{T}^{(h,N]}g^A)^{*(n-1)} * \mathcal{R}W^{(h;N)|0,0}_{(1,1);\emptyset;\emptyset} * (\lambda\mathcal{T}^{(h,N]}g^A)^{*(n'-1)}\|^w_1 \leq \lambda^{\frac{n+n'-2}{2}}2^{-h}, \end{aligned}$$

对于足够小的 λ。

致谢。 我们感谢 A. Giuliani 和 M. Porta 提供宝贵的意见、建议并参与讨论。我们衷心感谢意大利大学与研究部通过 PRIN 2022 项目 MaIQuFi（项目编号 20223J85K3）提供的经费支持。本工作是在 INdAM 的 GNFM 支持下完成的。

参考文献

[1] S. L. Adler 和 W. A. Bardeen，“反常轴矢量散度方程中不存在高阶修正”，物理评论，第 182 卷，第 1517–1536 页，1969 年 6 月。[2] J. Dimock 和 T. R. Hurd，“红外量子电动力学的重整化群分析”，数学物理杂志，第 33 卷，第 814–821 页，1992 年 2 月。[3] V. Mastropietro，“格点有效电弱理论中的反常抵消”，数学物理杂志，第 64 卷，032303 页，2023 年 3 月。[4]V. Mastropietro，“格点索末菲矢量模型的非微扰重整化”，物理评论*D*，2022 年。[5] G. Benfatto 和 V. Mastropietro，“卢廷格液体中的沃德恒等式与手征反常”，数学物理通讯，第 258 卷，第 609–655 页，2005 年 6 月。[6] G. Benfatto、P. Falco 和 V. Mastropietro，“有质量蒂林模型的泛函积分构造：公理验证与无质量极限”，数学物理通讯，第 258 卷，第 67–118 页，2007 年 4 月。[7] G. Benfatto、P. Falco 和 V. Mastropietro，“平面格点模型的扩展标度关系”，数学物理通讯，2009 年。[8] S. J. Summers，“构造性量子场论展望”，*arXiv:* 数学物理，2012 年。[9] H. Georgi 和 J. M. Rawls，“二维中的轴矢量流反常”，物理评论*D*，第 3 卷，第 874–879 页，1971 年 2 月。[10] C. M. Sommerfield，“一维空间场论中流的定义与作用量原理”，物理学年鉴，第 26 卷，第 1 期，第 1–43 页，1964 年。[11] L. Brown，“二维模型中的规范不变性与质量”，新试验，第 29 卷，第 617—643 页，1963 年。[12] C. R. Hagen，“模型场论中的流定义与质量重整化”，新试验 *A*，1967 年 10 月。[13] J. Schwinger，“规范不变性与质量 II”，物理评论，第 128 卷，第 2425–2429 页，1962 年 12 月。[14] K. Johnson，“二维相对论性场论格林函数方程的解”，新试验，第 20 卷，第 773–790 页，1961 年。[15] A. Das 和 V. S. Mathur，“二维模型的路径积分可解性”，物理评论*D*，第 33 卷，第 489–495 页，1986 年 1 月。[16]J. Frohlich 和 E. Seiler，“有质量蒂林-施温格模型（二维 QED）：微扰理论的收敛性与粒子结构”，*Helv. Phys.Acta*，第 49 卷，889 页，1976 年。[17] H. Georgi 和 Y. Kats，“二维非粒子示例”，物理评论快报，第 101 卷，131603 页，2008 年 9 月。

[18] J. Kogut 和 L. Susskind，《Wilson格点规范理论的哈密顿量表述》，物理评论*D*，第 11 卷，第 395–408 页，1975年1月。[19] F. Berruto、G. Grignani、G. W. Semenoff 和 P. Sodano，《格点上的手征对称性破缺：强耦合格点Schwinger模型研究》，物理评论*D*，第 57 卷，第 5070–5083 页，1998年4月。[20] R. Dempsey、I. R. Klebanov、S. S. Pufu 和 B. Zan，《Schwinger模型格点哈密顿量方法中的离散手征对称性与质量偏移》，物理评论研究，第 4 卷，第 043133 页，2022年11月。[21] R. Dempsey、I. R. Klebanov、S. S. Pufu、B. T. Sωgaard 和 B. Zan，《双味Schwinger模型的零温度相图》，物理评论快报，第 132 卷，第 031603 页，2024年1月。[22] A. Chatterjee、S. D. Pace 和 S.-H. Shao，《交错费米子的量子化轴荷与手征反常》，物理评论快报，第 134 卷，第 021601 页，2025年1月。[23] N. Seiberg 和 S.-H. Shao，《马约拉纳链与伊辛模型——（非可逆）平移、反常与涌现对称性》，*SciPost*物理，第 16 卷，第 064 页，2024年。[24] V. Mastropietro，《非微扰 Adler-Bardeen 定理》，数学物理杂志，2007年。[25] P. Falco，《Thirring-Wess模型中的矢量反常与轴反常》，数学物理杂志，2010年。[26] V. Mastropietro 和 M. Porta，《量子霍尔系统边缘的多通道Luttinger液体》，数学物理通讯，第 395 卷，第 1097–1173 页，2022年9月。[27] A. Giuliani、V. Mastropietro 和 F. Toninelli，《非可积二聚体：倾斜高度剖面的普适涨落》，数学物理通讯，第 377 卷，第 1883–1959 页，2020年6月。[28] A. Lesniewski，《Yukawa2量子场论的有效作用量》，数学物理通讯，1987年。[29] G. Gentile 和 V. Mastropietro，《一维费米子的重整化群：数学结果综述》，物理学报告，2001年。[30] D. Brydges，《簇展开短期课程》，莱苏什暑期学校，1984年。[31] A. Giuliani 和 V. Mastropietro，《蜂窝格子上的二维Hubbard模型》，数学物理通讯，2010年。[32] A. Giuliani、V. Mastropietro 和 S. Rychkov，《严谨重整化群入门：一个完整演算的费米子例子》，高能物理杂志，2021年。