arXiv:2602.03726v1 [math.SP] 3 Feb 2026

随机覆盖的 Anosov 曲面上的 Pollicott–Ruelle 共振谱隙

JULIEN MOY

摘要。设 (M,g) 是一张具有 Anosov 测地流的闭黎曼曲面。我们证明，当次数趋于无穷大时，M 的随机有限覆盖上存在 Pollicott–Ruelle 共振谱隙，并且该谱隙有望是最优的。

证明结合了 Magee、Puder 和 vanHandel 关于曲面群置换表示的近期强收敛结果，以及对 M 的万有覆盖上球面平均算子的分析。

目录

1. 引言 1 2. 几何预备知识 14 $\widetilde{\ }$ 3. M 21
4. 概率低频估计 32 5. 主定理的证明 36 附录 A. 一个简短证明，说明 $\delta_0 < -\gamma_0$。 47
附录 B. 酉平坦丛上的半经典量子化 49 参考文献 57

1. 引言

1.1. 动机。 设 (M,g) 为一个无边的光滑连通黎曼流形。设 $\mathcal{M} = SM$ 表示 M 的单位切丛，并设 $\varphi_t : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 表示测地流。该流在 $\mathcal{M}$ 上保持一个自然的光滑概率测度，称为 刘维尔测度，它是黎曼体积到 SM 的规范化提升。刘维尔测度记为 μ_{L}。为研究该流的长时间行为，人们引入相关函数

$$\rho_{f,g}(t) := \int_{\mathcal{M}} (f \circ \varphi_{-t}) g \mathrm{d}\mu_{\mathrm{L}},$$

对于在 $\mathcal{M}$ 上足够正则的 f 和 g，以及 $\int g \mathrm{d}\mu_{\mathrm{L}} = 0$。从现在起，我们假设测地流是阿诺索夫的，或一致双曲的，这大致意味着它具有强混沌性，即 对初始条件的扰动敏感。例如，当 (M,g) 具有负截面曲率时，测地流就是阿诺索夫的。当 (φ_t) 是阿诺索夫的时，已知该流相对于刘维尔测度是混合的，

这意味着有

$$\rho_{f,g}(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{1.1}$$

与其直接研究 $\rho_{f,\,g}(t)$，不如考察其拉普拉斯变换

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-zt}\rho_{f,g}(t) = \int_{\mathcal{M}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-zt}(f\circ\varphi_{-t})g\mathrm{d}t\mathrm{d}\mu_{\mathrm{L}},$$

它在半平面 $\mathrm{Re}(z) > 0$内定义良好且为全纯函数。直观上，$\rho_{f,\,g}$ 的长时间行为应由其拉普拉斯变换在负半平面内亚纯延拓的极点决定；该亚纯延拓的存在性由下文的定理 1.1 得出。注意，Pollicott [Pol85] 和 Ruelle [Rue87] 利用符号动力系统，已经得到了 $\rho_{f,\,g}$ 的拉普拉斯变换在虚轴左侧一个小条带内的亚纯延拓。这些极点称为 ***Pollicott–Ruelle*** 共振。

我们关注关联的衰减速率；由于虚轴附近存在共振会阻碍 $\rho_{f,\,g}$ 的快速衰减，因此一个自然的问题是确立谱隙，即虚轴左侧存在一条无共振条带。

对于 $f\in C^\infty(\mathcal{M})$，函数 $f\circ\varphi_{-t}$ 是以下常微分方程在时刻 t 的解：

$$\partial_t u(t,x) = -Xu(t,x), \qquad u(0,x) = f(x),$$

其中 X 是测地向量场。因此，我们可以形式化地写作 $\mathrm{e}^{-tX}f := f\circ\varphi_{-t}$。这启发我们在 $\mathrm{Re}(z) > 0$时定义预解算子

$$(X+z)^{-1}f := \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-zt}(f\circ\varphi_{-t})\mathrm{d}t, \tag{1.2}$$

它作为算子 $C^\infty(\mathcal{M}) \to \mathcal{D}'(\mathcal{M})$ 定义良好。随后，$\rho_{f,g}$的拉普拉斯变换可表示为 $\langle (X+z)^{-1}f, g\rangle_{\mathcal{D}'(\mathcal{M})\,C^\infty(\mathcal{M})}$。

一种用于研究算子 $(X+z)$的泛函分析方法，是建立在使用与动力系统相适应的分布各向异性巴拿赫空间之上的。该方法由 Liverani [Liv04], Butterley–Liverani [BL07]以及 Faure– Sjöstrand [FS11], 在早期关于阿诺索夫微分同胚的研究基础上发展起来（非详尽列举，参见 [BKL02; GL06; BT07]）。由此得到以下结果：

定理 1.1 (Butterley–Liverani, Faure–Sjöstrand)。 算子族 $(X+z)^{-1}: C^\infty(\mathcal{M}) \to \mathcal{D}'(\mathcal{M})$，最初定义于 $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$ 并在此处全纯，可亚纯延拓至 $z\in\mathbb{C}$。其极点均为有限秩，称为 Pollicott–Ruelle 共振。

M 的 Pollicott–Ruelle 共振集合记为 $\mathrm{Res}(X_M)$。若 z_0 是一个共振，可通过沿以 z_0为圆心的小圆对预解算子积分，定义一个有限秩的谱投影算子 Π_{z_0}。我们将 z_0 的重数 称为该投影算子的秩。

混合性质 φ_t 通常源于以下事实：在$\mathbb{C}$中存在一个无共振区域，并且该区域伴随着相应的预解估计。以下结果由 Tsujii [Tsu10], 以及 Nonnenmacher–Zworski [NZ 15] 在更一般的情形下证明（关于谱的更精确描述，另见 Faure–Tsujii [FT24] ）：

定理 1.2（Tsujii，Nonnenmacher–Zworski）。设 γ_0 是由不稳定雅可比在（2.4）中定义的最小指数增长率。那么，对于任意 $\varepsilon > 0$，在半空间 $\mathrm{Re}(z) > -\frac{\gamma_0}{2} + \varepsilon$内只有有限多个共振。

由于 0 是位于虚轴上的唯一共振——这一事实等价于弱混合——，定理 1.2 （连同一个预解算子界）的一个副产品是如下关于相关衰减的估计，它恢复了 Dolgopyat[Dol98]与 Liverani [Liv04]的结果。

推论 1.3（关联的指数衰减）。存在常数 $\kappa > 0$，使得对任意 f，$g \in C^\infty(\mathcal{M})$，其中 $\int g = 0$:

$$\rho_{f,g}(t) = \mathcal{O}_{f,g}(\mathrm{e}^{-\kappa t}).$$

可以更精确地给出 $\rho_{f,g}(t)$，其余项为 $\mathcal{O}(\mathrm{e}^{-(\gamma_0/2-\varepsilon)\,t})$，其中涉及实部为 $> -\gamma_0/2$ 的共振，参见 例如 [NZ15，推论 5]。

1.1.1. **大型随机曲面的谱性质。** 近年来，人们日益关注大型随机对象的谱性质。特别地，已有一些工作致力于理解大亏格随机双曲曲面上拉普拉斯–贝尔特拉米算子的谱。我们着重介绍三个值得关注的模型，参考文献见 §1.6 。

- 亏格为 g 的随机双曲曲面的 Weil–Petersson 模型。
- 随机双曲曲面的 Brooks–Makover 模型，其通过粘合$2n$ 理想双曲三角形以某种方式得到，引入于 [BM04]。
- 随机覆盖模型，其次数为 n，底曲面为一固定负曲率曲面，由 Magee、Naud 与 Puder 引入 [MNP22]。

这些模型的一个核心问题是，是否存在概率意义下的谱隙，即拉普拉斯–贝尔特拉米算子的第一个非平凡特征值的一致下界，且该下界在大亏格极限下渐近几乎必然成立。拉普拉斯算子的最优谱隙现已由阿南塔拉曼–Monk [AM25b] 对 Weil–Petersson 模型给出（另见 [HMT25b]），由 Magee–Puder–van Handel [MPvH25] 对随机覆盖模型给出，以及由 Shen–Wu [SW25] 对 Brooks–Makover 模型给出——参见§1.6 中的先前结果。这些结果给出了热流的某种显式的趋于平衡的收敛速率。

在常曲率情形下，拉普拉斯算子谱与 Pollicott–Ruelle 谱之间存在明确的对应关系。特别是，拉普拉斯算子的谱隙也会带来 Pollicott–Ruelle 谱的谱隙，从而得到测地流的关联的定量衰减速率。然而，在变曲率情形下，这种对应关系不再成立。因此，我们希望了解，能否在变负曲率随机曲面模型上，或在仅满足较弱假设——即测地流为阿诺索夫流——的模型上，建立动力系统关联的定量衰减速率。

1.2. **主要结果。** 设 (M, g) 为一个闭流形。为陈述我们的结果，我们需要定义势函数 $F \in C(SM)$ 的拓扑压力。我们将在 §3.2 中回顾压力的各种定义。目前，我们仅指出，若 ψ_u 是不稳定方向

雅可比矩阵，定义见（3.4），且 $q \in \mathbb{R}$，则 $-q\psi_u$ 的压力由下式给出（见 [Par88]）

$$\Pr(-q\psi_u) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \log \sum_{\ell(\gamma)\in[T,T+1]} \frac{1}{|\det(I-P_\gamma)|^q},$$

其中求和遍历测地流的周期轨道 γ，$\ell(\gamma)$表示轨道的长度，P_γ 表示该轨道的线性化庞加莱映射。注意，$\Pr(0) = h_{\mathrm{top}}$是该流的拓扑熵，且$\Pr(-\psi^u) = 0$。此外，当 M 具有非恒曲率时，函数 $q \mapsto \Pr(-q\psi^u)$是严格凸的。我们定义

$$\delta_0 := \frac{\Pr(-2\psi^u)}{2}.$$

注意，我们可以给出界

$$-\frac{h_{\mathrm{top}}}{2} \leq \delta_0 \leq -\frac{\gamma_0}{2}, \tag{1.3}$$

其中 γ_0 是该流在定理 1.2 中出现的最小膨胀率。此外，当 (M,g) 是具有非常值负曲率的曲面时，这些不等式是严格的，参见命题 A.1，附录中有更一般的结果。

1.2.1. 一致随机阿诺索夫曲面覆盖的几乎必然谱隙。我们现在描述随机覆盖的模型。设 M 是一个闭 Anosov 流形，其基本$\widetilde{\ }$群为 Γ。M 的万有覆盖记为 $\widetilde{M}$。于是 Γ 通过等距映射$\widetilde{\ }$作用在 $\widetilde{M}$上，从而 M 与商等同

$$M = \Gamma\backslash\widetilde{M}.$$

我们用 S_n 表示 $[n]$ 上的对称群：$= \{1,\dots,n\}$。设 $\phi_n\colon \Gamma \to S_n$ 是一个$\widetilde{\ }$群同态；于是，Γ 通过 $\gamma.(x,i) = (\gamma x, \phi_n[\gamma](i))$作用于乘积 $\widetilde{M}\times[n]$。通过如下方式定义与 ϕ_n 相关联的、次数为 n 的 M 的覆盖：

$$M_n := \Gamma\backslash(\widetilde{M}\times[n]).$$

由于 Γ 是有限生成的，集合 $\mathrm{Hom}(\Gamma, S_n)$ 是有限的，因此我们可以在其上赋予均匀概率测度。这给出了一个次数为 n 的 M的均匀随机黎曼覆盖模型。

备注 1.4。若两个同态 $\Gamma \to S_n$ 通过 S_n 的一个内自同构共轭，则它们产生的 M的黎曼覆盖彼此等距；然而，我们不对 $\mathrm{Hom}(\Gamma, S_n)$ 按照此关系取商。

定义 1.5。设 $(\Omega_n, \mathbb{P}_n)$ 是一列离散概率空间。若一列事件 $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 满足 $A_n \subset \Omega_n$ 发生的概率渐近几乎必然（或$a.a.s.$），则

$$\mathbb{P}_n(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

如果 $M' \to M$ 是有限黎曼覆盖，那么 M 的任意 Pollicott–Ruelle 共振也是 M' 的共振，且重数更大或相等，这是因为存在嵌入$C^\infty(SM) \subset C^\infty(SM')$。因此，我们只关注新的 共振。

定义 1.6。设 $M' \to M$ 是一个有限黎曼覆盖。如果 $z_0 \in \mathbb{C}$ 在 $\mathrm{Res}(X_{M'})$ 中出现的重数高于在 $\mathrm{Res}(X_M)$ 中的重数，我们就称其为新的共振。

我们的主要结果如下。回顾一下， $\delta_0 = \frac{1}{2}\Pr(-2\psi^u)$，其中 ψ^u 是不稳定雅可比。

定理 1.7。设 M 是一个闭安诺索夫曲面。固定一个紧集 $\mathcal{K} \subset \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > \delta_0\}$。若随机均匀选取 $\phi_n \in \mathrm{Hom}(\Gamma, S_n)$，且 $M_n \to M$ 是相应的覆盖，则渐近几乎必然地，X_{M_n} 在 $\mathcal{K}$ 中没有新共振。

我们在 §5.7 中讨论这一结果的最优性。

1.3. 表示的强收敛与谱隙。与其研究 M 的覆盖，不如转换视角，研究与基本群的置换表示相关联的 M 上的酉平坦丛。设 $M_n \to M$ 是一个次数为 n 的黎曼覆盖，它与同态 $\phi_n : \Gamma \to S_n$ 相关联。存在一个自然分解

$$C^\infty(M_n) = C^\infty(M) \oplus C^\infty_{\mathrm{new}}(M_n).$$

第一个因子对应于从 M 到 M_n 的函数的提升，而因子 $C^\infty_{\mathrm{new}}(M_n)$ 由在投影 $M_n \to M$ 的所有纤维上平均值为零的函数组成。

$C^\infty(M_n)$中的元素可以视为满足以下条件的函数 $f : \widetilde{M} \times [n] \to \mathbb{C}$ 满足不变性

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad f(x,i) = f(\gamma x, \phi_n[\gamma](i)).$$

反过来，这类函数可以视为满足等变性条件 $s(\gamma x) = \pi_n(\gamma)s(x)$的函数 $s : M \to \mathbb{C}^n$，其中 $\pi_n(\gamma)$就是与 $\phi_n[\gamma]$相关联的置换矩阵。在 M 上定义一个平坦丛如下：

$$E_{\pi_n} := \Gamma\backslash(\widetilde{SM} \times \mathbb{C}^n), \qquad \gamma.(x,v) = (\gamma x, \pi_n(\gamma)v).$$

于是我们得到一个对应关系 $C^\infty(M_n) \simeq C^\infty(M, E_{\pi_n})$。令$(\mathrm{std}_{n-1}, V_n^0)$为 S_n的标准不可约（$n-1$维）表示，它是将自然作用限制在平均值为零的向量空间上得到的：

$$V_n^0 = \Big\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \ : \ \sum x_i = 0\Big\}.$$

丛E_{π_n} 的秩为 n；去除$C^\infty(M_n)$中对应于在纤维上为常数的函数的平凡部分后，可得到一个秩为 $n-1$的子丛E_{ρ_n}，它对应于由以下方式定义的 Γ 表示：

$$\rho_n := \mathrm{std}_{n-1} \circ \phi_n. \tag{1.4}$$

换言之，子空间 $C^\infty_{\mathrm{new}}(M_n) \subset C^\infty(M_n)$ 可识别为子空间 $C^\infty(M, E_{\rho_n}) \subset C^\infty(M, E_{\pi_n})$。

令 $\pi : SM \to M$ 表示投影，我们可以将 E_{ρ_n} 提升为丛 $\mathcal{E}_{\rho_n} := \pi^* E_{\rho_n}$，其位于 SM之上。同样地，我们有如下识别

$$C^\infty_{\mathrm{new}}(SM_n) \simeq C^\infty(SM, \mathcal{E}_{\rho_n}).$$

若 ϕ_n 是在 $\mathrm{Hom}(\Gamma, S_n)$中均匀随机选取的，我们便得到一个随机表示$(\rho_n, V_n^0)$ 由（1.4）定义。我们将 $\mathbf{X}^{\mathcal{E}_{\rho_n}}$ 记为作用于光滑 X 上的李导数

截面 $\mathcal{E}_{\rho_n}$ 的集合，并令 Res(X$^{\mathcal{E}_{\rho_n}}$) 表示算子 X$^{\mathcal{E}_{\rho_n}}$ 的 Pollicott–Ruelle 共振，它们定义为亚纯延拓的极点

$$(\mathbf{X}_{\mathcal{E}_{\rho_n}} + z)^{-1} : C^\infty(SM, \mathcal{E}_{\rho_n}) \to \mathcal{D}'(SM, \mathcal{E}_{\rho_n}).$$

于是，有

$$\mathrm{Res}(X_{M_n}) = \mathrm{Res}(X_M) \cup \mathrm{Res}(\mathbf{X}_{\mathcal{E}_{\rho_n}}), \tag{1.5}$$

其中并集按重数计。在这种改写中，我们可以不再考虑是在覆盖上工作 $M_n \to M$，而改为研究M上的酉平坦丛。特别地，我们可以研究与 Γ 的酉表示相关联的平坦丛，而这些酉表示不必是形式为（1.4）的置换表示。

我们回顾表示的强收敛的定义。

定义 1.8。令 $(\lambda_\Gamma, \ell^2(\Gamma))$ 表示 Γ 的正则表示。若酉表示序列 $(\rho_n, V_n)_{n\geq 0}$ of Γ 强收敛到 $(\lambda_\Gamma, \ell^2(\Gamma))$，则称其满足以下条件。对任意 $w \in \mathbb{C}[\Gamma]$ 和任意 $\varepsilon > 0$，当 n 足够大时（取决于 w, ε），有：

$$\big| \|\rho_n(w)\|_{V_n} - \|\lambda_\Gamma(w)\|_{\ell^2(\Gamma)} \big| < \varepsilon, \tag{1.6}$$

其中范数均为算子范数。这里我们将 $w \in \mathbb{C}[\Gamma]$ 视为群元素的线性组合，并且 $\rho_n(w)$ 通过线性延拓 V_n 作用于 ρ_n。若随机酉表示序列 (ρ_n, V_n) 渐近几乎必然强收敛渐近几乎必然到 $(\lambda_\Gamma, \ell^2(\Gamma))$，则称 $w \in \mathbb{C}[\Gamma]$ 和 $\varepsilon > 0$满足（1.6），且按照定义1.5，该条件渐近几乎必然成立。

注 1.9。此外还有一种弱收敛的概念，它将（1.6）中的算子范数收敛替换为归一化迹收敛。在我们的设定中，强收敛蕴含弱收敛 [LM25，引理 6。1]。对于一列酉表示 (ρ_n)，它们与一列黎曼覆盖 $(M_n \to M)$ 相关联，（(ρ_n) 弱收敛等价于 $\widetilde{\ }$（(M_n) 在 Benjamini– MSchramm 意义下收敛到万有覆盖。

随机覆盖模型与此的联系由 Magee、Puder 和 van Handel 的一项最新结果给出 [MPvH25]，，该结果证明曲面群的均匀随机置换表示几乎必然强收敛。

定理 1.10 (Magee–Puder–van Handel)。设 Γ 为一个曲面群（亏格为 ≥ 2）。那么，若 $\phi_n \in \mathrm{Hom}(\Gamma, S_n)$ 是均匀随机选取的，则由 $((\rho_n, V_n)$ 定义的随机表示序列 (1.4) 几乎必然强收敛到 $(\lambda_\Gamma, \ell^2(\Gamma))$。

因此，定理 1.7 是以下结果的一个特例。

定理 1.11. 设(M, g) 是一个维数为 ≥ 2、基本群为 Γ 的闭阿诺索夫流形。设 $\{(\rho_n, V_n)\}_{n=1}^{+\infty}$ 是一列Γ的随机酉表示。假设(ρ_n, V_n) 几乎必然强收敛到$(\lambda_\Gamma, \ell^2(\Gamma))$。那么，对于任意紧子集 $\mathcal{K} \subset \{\mathrm{Re}(z) > \delta_0\}$，几乎必然，预解算子

$$(\mathbf{X}_{\mathcal{E}_{\rho_n}} + z)^{-1} : C^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{E}_{\rho_n}) \to \mathcal{D}'(\mathcal{M}, \mathcal{E}_{\rho_n})$$

对 $z \in \mathcal{K}$ 全纯。

注 1.12. 定理 1.11 包含表示的确定性序列这一情形，$\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 这些表示强收敛于正则表示；只需考虑支集为单点的概率测度即可。

定理 1.7 由定理 1.10 与定理 1.11结合得到。Magee 和 Thomas [MT23] 证明了，任意双曲3-流形的基本群都至少存在一个强收敛的酉表示序列（该序列不一定是置换表示），这为定理 1.11提供了另一项应用。

在高维情形下，目前尚无已知的 Γ 酉表示强收敛序列的例子。我们选择以目前这种形式陈述结果，是因为未来可能会证明新的随机或确定性酉表示序列 Γ具有强收敛性。此外，我们认为 §3 中关于 M 上的球面平均算子的结果本身也很有趣，因此值得在任意维数下加以研究。

1.4. 高频谱隙。由于定理 1.2 中 γ_0 的取值与覆盖 $M_n \to M$ 无关，定理 1.2 告诉我们，对于任意覆盖 $M_n \to M$，半平面 $\{\mathrm{Re}(z) > -\gamma_0/2 + \varepsilon\}$ 中只有有限多个共振。然而，定理 1.2 并未给出这些共振的位置。特别是，如果 $M_n \to M$ 是一列覆盖，它并未排除存在一列共振 $z_n \in \mathrm{Res}(X_{M_n})$，使得 $\mathrm{Re}(z_n) > -\gamma_0 + \varepsilon$ 且 $|\mathrm{Im}(z_n)| \to +\infty$。鉴于定理 1.2 和定理 1.7，提出以下猜想仍然是自然的。

猜想 1.13。 设 M 为一闭安诺索夫曲面。对于任意 $\varepsilon > 0$，当 $n \to +\infty$时，均匀随机覆盖 $M_n \to M$ 在半平面 $\{\mathrm{Re}(z) > -\frac{\gamma_0}{2} + \varepsilon\}$内不含新共振的概率趋于1 。

猜想 1.13 可由以下 确定性 结果推出（结合定理 1.7）。

猜想 1.14。 对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个常数 C_ε，使得对于任意有限秩酉平坦丛 $\mathcal{E} \to SM$，鲁埃勒算子 $\mathbf{X}_{\mathcal{E}}$ 均不含共振，

$$\mathcal{S}_\varepsilon := \left\{ z \in \mathbb{C},\ |\mathrm{Im}(z)| \geq C_\varepsilon \ \textit{and}\ \mathrm{Re}(z) \geq -\frac{\gamma_0}{2} + \varepsilon \right\}.$$

注 1.15。 这里我们不假设 $\mathcal{E}$ 是 M上某个丛的提升。

猜想 1.14 将在未来的工作中加以研究。它应可通过再次执行 [NZ15，定理 4]中的证明而得出。正如附录 B中已经提示的，将标量函数 $a \in C^\infty(T^*\mathcal{M})$ 量子化为作用于 $C^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{E})$上的算子 $\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(a)$，我们会得到一种演算，其误差关于丛是一致的；这主要是因为丛的过渡映射是常值酉矩阵。作为动机，我们指出，Magee 和 Naud 已证明了关于肖特基曲面上拉普拉斯算子共振的猜想 1.14 的类似结果（具有非显式的一致谱隙），参见 [MN20，定理 1。10]。

注释 1.16。 猜想 1.14 的一个更强版本应当成立，即无共振区域应当伴随关于 $\mathcal{E}$ 的一致预解界，即

存在一个足够小的 $h_0 > 0$，使得对于任意酉平坦丛 $\mathcal{E} \to \mathcal{M}$:

$$\forall z \in \mathcal{S}_\varepsilon, \qquad \|(\mathbf{X}_\mathcal{E} + z)^{-1}\|_{\mathcal{H}^s_{h_0}(\mathcal{M},\mathcal{E})} \leq C_\varepsilon(1 + |\operatorname{Im}(z)|^{N_0}).$$

这里 $\mathcal{H}^s_h(\mathcal{M},\mathcal{E})$ 是 Faure–Sjöstrand 引入的各向异性 Sobolev 空间，见 §5.1。当 M 是一个闭安诺索夫曲面时，这一猜想结合定理 1.11，将推出存在一个一致常数 $\kappa > 0$ 和一个整数 $k \geq 0$，使得几乎必然地，对任意 f, $g \in H^k(SM_n)$,

$$\int_{SM_n} (f \circ \varphi_t) g \mathrm{dvol} = \int_{SM_n} f \mathrm{dvol} \int_{SM_n} g \mathrm{d}\mu_{\mathrm{L}} + \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\kappa t}\|f\|_{H^k(SM_n)}\|g\|_{H^k(SM_n)}), \quad (1.7)$$

$\mathcal{O}(\cdot)$ 中的隐含常数与 n 无关。乍看之下，这个结果可能有些令人惊讶。事实上，已知均匀随机覆盖 $M_n \to \widetilde{M}$ 在 Benjamini–Schramm 意义下收敛到万有覆盖 $\widetilde{M}$。特别地，在 M_n 中可以找到半径为 $R_n \to +\infty$ 的球，它们与 M 中半径相同的球微分同胚，这似乎表明在时间 $t \leq R_n$ 内不会发生混合。关键在于，关联不仅反映混合，也反映弥散。当质量为 ~ 1 的初始点云均匀分布在整个流形上时，就会发生混合。为了对此进行度量，取支集包含在半径为 1 的球内且归一化满足 $\int_{SM_n} f\mathrm{dvol} = \int_{SM_n} g\mathrm{dvol} = 1$ 的光滑函数 f、g。我们甚至可以假设 f、g 的 H^k 范数一致有界。那么，右端的第一项（1.7）是 $\sim n^{-1}$ 阶，因为

$$\int_{SM_n} g \mathrm{d}\mu_{\mathrm{L}} = \frac{1}{\mathrm{vol}(SM_n)} \int_{SM_n} f \mathrm{dvol} \sim \frac{1}{n},$$

而误差的阶为 $\mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\kappa t})$。当误差相对于主项可以忽略时，混合便会出现，也就是说，

$$t \gtrsim \frac{\log n}{\kappa}$$

因此，我们必须达到 $\sim \log n$ 量级的时间，才能观察到初始尺寸为 ~ 1 的点云均匀扩散。这反映了均匀随机覆盖 $M_n \to M$ 的直径按 $\sim \log n$ 的量级增长。这一事实可由（1.7）推出，也可利用切格常数证明：由拉普拉斯算子的第一个非平凡特征值下界可得直径的上界；而该特征值已由[MPvH25所知；HMN25], 例如可参见 [Mag20] 。

对于 $t \lesssim \log n$ 量级的时间，单射半径较大的区域内的动力系统可以通过将其提升到万有覆盖来理解。初始质量为 1、支集位于半径为 1 的球内的点云，会扩散到直径为 $\sim t$ 的区域，并在任意半径为 1 的球内放入质量 . $\mathrm{e}^{-\gamma_0 t}$ 。与一个 H^k 函数积分后，便会产生一个很小的贡献。这是一个弥散 但尚未完全混合的阶段。

1.5. **双曲曲面的情形**。 在 M 具有常负曲率 -1的情形下，我们知道猜想 1.13 成立。这源于拉普拉斯算子的特征值与 Pollicott–Ruelle 共振之间的对应关系，并可由 Magee–Puder–van Handel [MPvH25]近期取得的突破性成果推出。事实上，假设

其中 M 是一个紧致连通双曲曲面。那么，拉普拉斯–贝尔特拉米算子Δ_M 具有离散谱

$$\mathrm{Spec}(\Delta_M) = \{0 = \lambda_0 < \lambda_1 \le \ldots \le \lambda_n \to +\infty\}.$$

例如例如 [DFG15，定理 1], 的 Pollicott–Ruelle 共振 SM 实部为> -1 恰好由下式给出

$$\mu_j = -\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\sqrt{\lambda_j - \frac{1}{4}} \in (-1, 0] \cup \Big(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\mathbb{R}\Big),$$

此外，μ_j 作为共振的重数等于$^{-}\mu_j(\mu_j + 1)$ 作为拉普拉斯算子特征值的重数。特别地，实部为$> -\frac{1}{2}$ 的共振对应于拉普拉斯算子的特征值 $\lambda_j \in [0, \frac{1}{4})$。 [MPvH25，定理 1.2] 表明，这些小特征值在随机黎曼覆盖下是稳定的:

定理 1.17 (Magee–Puder–vanHandel)。 设 M 为一闭双曲曲面。对于任意 $\varepsilon > 0$，渐近几乎必然，次数为 n 的均匀随机覆盖 $M_n \to M$ 没有小于 $\frac{1}{4} - \varepsilon$的新特征值，即

$$\mathrm{Spec}(\Delta_{M_n}) \cap \Big[0, \frac{1}{4} - \varepsilon\Big] = \mathrm{Spec}(\Delta_M) \cap \Big[0, \frac{1}{4} - \varepsilon\Big],$$

其中两边的重数相同。

根据上述对应关系，定理 1.17 立即推出以下结论

推论 1.18。 设 M 是一个闭双曲曲面。对于任意 $\varepsilon > 0$，当 $n \to +\infty$时， M 的次数为 n 的均匀随机覆盖以趋于1 的概率，在半平面 $\{\mathrm{Re}(z) \ge -\frac{1}{2} + \varepsilon\}$中没有新的 *Pollicott–Ruelle* 共振。

注意，定理 1.17 中的数值 1 4 是最优的。事实上，通过调整[LMS17，定理 9.2], 中的证明 $\varepsilon > 0$，可以证明存在一个常数 $c_\varepsilon > 0$ 使得渐近几乎必然有

$$\#\,\mathrm{Spec}(\Delta_{M_n}) \cap \Big[\frac{1}{4}, \frac{1}{4} + \varepsilon\Big] \ge c_\varepsilon n.$$

同样， $-\frac{1}{2}$ 推论 1.18 中的结果也是最优的。

定理 1.17 可以推广到变曲率曲面——此时需将 1 4替换为 M的万有覆盖的谱底, 见 [HMN25]——但拉普拉斯算子特征值与 Pollicott–Ruelle 共振之间的对应关系不再成立，因此必须直接处理共振问题。

1.6. 相关工作。

1.6.1. 图的随机提升的特征值。考虑一个有限图 $G = (V, \vec{E})$，其顶点为 V，有向边为 $\vec{E}$。我们始终假设，对于任意 $(x, y) \in E$，$(y, x) \in \vec{E}$。记 A_G 和 B_G 分别为邻接算子和非回溯算子，它们按照以下公式分别作用于 $L^2(G)$ 和 $L^2(\vec{E})$:

$$A_G\varphi(x) = \sum_{(x,y)\in\vec{E}} \varphi(y), \qquad B_G\psi(f) = \sum_{e\to f} \psi(e),$$

其中，对于 $e=(x,y)$ 和 $f=(x',y')\in\vec{E}$，我们记 $e\to f$ 若 $y=x'$ 且 $y'\neq x$。以下结果由弗里德曼和科勒 [FK14], 通过改进 [Fri08]的方法得到。

定理 1.19 (弗里德曼–科勒)。对于图 G 的均匀随机覆盖 $G_n\to G$，几乎必然有

$$\mathrm{Spec}(A_{G_n})\cap[\sqrt{d-1}+\varepsilon,+\infty)=\mathrm{Spec}(A_G)\cap[\sqrt{d-1}+\varepsilon,+\infty),$$

两边的重数相同。

这里，$\sqrt{d-1}$ 恰好是万有覆盖 上邻接算子的谱半径；该万有覆盖是 d-正则树。Bordenave [Bor20] 随后得到了以下适用于非正则图的结果。

定理 1.20 ([Bor20，定理 23])。设 $G=(V,\vec{E})$ 是一个有限图，其万有覆盖为 $\widetilde{G}$。对于均匀随机覆盖 $G_n=(V_n,\vec{E}_n)\to G$，令 $H_0\subset L^2(\vec{E}_n)^{\to}$ $^{\to}$表示在投影 $E_n\to E$的各纤维上平均值为 0的函数空间，则几乎必然有

$$\rho(B_{G_n}|_{H_0})\leq\rho(B_{\widetilde{G}})+\varepsilon,$$

其中 $\rho(B)$表示 B 的谱半径。

若 G 是 d-正则的，则定理 1.20 借助此情形下由伊原–巴斯公式给出的邻接谱与非回溯谱之间的显式联系，推出了弗里德曼和科勒的结果。然而，这仍使定理 1.19 关于非正则图的类似结论悬而未决。该问题最终在博尔德纳夫–柯林斯的突破性工作中得到解决[BC19]。关键技术工具是建立强收敛，其对象为自由群的均匀随机置换表示 $\mathbb{F}_r$。该结果的一个简短而初等的新证明最近由 Chen–Garza-Vargas–Tropp–van Handel 获得 [Che+25]。

1.6.2. 随机负曲率覆盖上拉普拉斯算子的特征值。关于肖特基曲面上拉普拉斯算子共振的首个谱隙结果由 Magee 与 Naud 得到 [MN20]。对于闭双曲曲面，Magee–Naud–Puder [MNP22] 得到了一个谱隙 $\frac{3}{16}-\varepsilon$，并使用了塞尔伯格迹公式。

随后，Hide–Magee 观察到 [HM23]，强收敛性质可用于获得非紧双曲曲面随机覆盖上拉普拉斯算子的近乎最优谱隙。Calderón、Magee 和 Naud[CMN24]超越了L^2-特征值，并获得了肖特基曲面随机覆盖上拉普拉斯共振的低频谱隙，这与我们的定理 1.7类似。强收敛技术使得无需使用迹公式即可直接研究算子范数。尽管在非紧曲面上的分析更加复杂，但其基本群的自由性使人们能够获得比闭情形更好的结果。Magee、Puder 和 van Handel 最近克服了这一局限，建立了曲面群的 Bordenave–Collins 结果的一个类似结论[MPvH25]（详见 §4.1），该结果蕴含闭情形下拉普拉斯算子的一个谱隙（$\frac{1}{4}-\varepsilon$）。Hide–Macera–Thomas[HMT25a] 在此结果的基础上，对某个正的常数$\frac{1}{4}-\mathcal{O}(n^{-b})$取得了多项式改进，其中 b，n 是覆盖的次数。

如果允许紧 $\mathcal{K}$ 以距离$\mathrm{Re}(z) = \delta_0$ 趋近于直线(n) ，当 $n \to \infty$时，获得定理1.7的类似改进将是很有意义的。与双曲曲面上的拉普拉斯算子情形相比，这里存在额外的困难，主要是因为我们缺乏显式公式，并且必须考虑长时间动力学。通过调整本文中的方法并运用[HMT25a], 中的思想，我们认为对于某个较小的常数 c，可以取 $\varepsilon(n) = {}^{c}\log n$ 。要获得多项式衰减率,~~无~~疑需要新的思想。

双曲曲面的随机覆盖模型无需修改即可推广到变负曲率情形。闭情形下，[HMN25] 获得了拉普拉斯算子的近乎最优谱隙；非紧情形下， [Moy25；BMP25] 也获得了近乎最优谱隙。

正如正则图的邻接谱与非回溯谱之间存在简单对应关系，双曲曲面的拉普拉斯谱与 Pollicott–Ruelle 谱之间也存在简单对应关系。这些对应关系在非正则图和变曲率曲面中不再成立。因此，我们的结果更应被视为 Bordenave 结果 [Bor20]的类比。更确切地说，命题 4.5是定理 1.7证明中的主要概率论输入，可视为定理 1.20的流形类比。

1.6.3. 随机曲面的其他模型。对于亏格为 g 的随机双曲曲面的 Weil–Petersson 模型，米尔扎哈尼 [Mir13] 首次得到了概率谱隙 $\lambda_1(X_g) > 0.002$ 。谱隙 $\lambda_1(X_g) \geq \frac{3}{16} - \varepsilon$ 由吴–薛 [WX22] 与利普诺夫斯基–赖特 [LW24] 独立得到。最优谱隙 $\frac{1}{4} - \varepsilon$ 最终由阿南塔拉曼与 Monk 在一系列工作 [AM24; AM25a; AM25b] 中得到。最近，Hide、Macera 与 Thomas [HMT25b] 将 [MPvH25] 的方法应用于 Weil–Petersson 模型，对某个 $b > 0$ 得到了定量下界 $\lambda_1(X_g) \geq \frac{1}{4} - \mathcal{O}(g^{-b})$。

对于由粘合 $2n$ 个理想双曲三角形得到的随机曲面的 Brooks–Makover 模型，一个最初的非显式概率谱隙 $\lambda_1（X_n） \geq c > 0$在原始论文 [BM04] 中得到证明。在沈与吴的近期工作之前，尚无进一步改进； [SW25], 他们证明了最优下界 $\lambda_1（X_n） \geq \frac{1}{4} - \varepsilon$，所用方法受 [MPvH25] 启发。

1.7. **证明概述**。 为证明定理 1.11，我们使用 Faure–Sjöstrand 引入的分布 各向异性 *Sobolev* 空间 [FS11]。对于任意平坦丛 $E \to \mathcal{M}$，都有一列希尔伯特空间 $\mathcal{H}^s_h(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ ，它依赖于半经典参数h 和参数 $s \in \mathbb{R}$，满足

$$C^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{E}) \subset \mathcal{H}^s_h(\mathcal{M}, \mathcal{E}) \subset \mathcal{D}'(\mathcal{M}, \mathcal{E}),$$

且这些嵌入是稠密且连续的。这些空间在 §5.1 中定义，所用方法是平坦丛上的半经典量子化（见附录），以及 [FS11]中的逃逸函数。使用这些空间的优势在于，传播子 $\mathrm{e}^{-t\mathbf{X}_\mathcal{E}}$ 作用于 $\mathcal{H}^s_h(\mathcal{M}, E)$ 时，比作用于 $L^2(\mathcal{M}, \mathcal{E})$时具有更好的性质。

注 1.21. 尽管我们研究的是低频共振，但采用半经典量子化很实用，因为我们的目标是构造算子 $\mathbf{X}_\mathcal{E} + z$ 的精确逆，而不只是通过参数子构造得到一个模紧余项意义下的逆。半经典演算中的余项通常

在范数意义下很小（例如 $\mathcal{O}(h)$），而标准伪微分演算中的余项则只是阶数较低。

设 χ 是定义在 $[-1,2]$上的紧支撑光滑函数，使得 $\chi \equiv 1$ 在$[0,1]$上成立。受表达式（1.2）的启发，我们引入一个近似预解式

$$\mathbf{Q}(z) := \int_0^{+\infty} \chi(t/T)\mathrm{e}^{-zt}\mathrm{e}^{-t\mathbf{X}_\mathcal{E}}\,\mathrm{d}t.$$

于是，有

$$\mathbf{Q}(z)(\mathbf{X}_\mathcal{E}+z) = (\mathbf{X}_\mathcal{E}+z)\mathbf{Q}(z) = \mathrm{Id} + \mathbf{R}(z),$$

其中余项为

$$\mathbf{R}(z) = \frac{1}{T}\int_0^{+\infty} \chi'(t/T)\mathrm{e}^{-zt}\mathrm{e}^{-t\mathbf{X}_\mathcal{E}}\,\mathrm{d}t.$$

其优势在于，$\mathbf{R}(z)$仅涉及大时间 $t \in [T,2T]$ 的传播。如果能够证明 $\|\mathbf{R}(z)\|_{\mathcal{H}_h^s} < \frac{1}{2}$，那么通过诺伊曼级数论证即可得到（$\mathbf{X}_\mathcal{E}+z$）的可逆性。

证明 $\|\mathbf{R}(z)\|_{\mathcal{H}_h^s} \leq \frac{1}{2}$ 需要理解传播子 $\mathrm{e}^{-t\mathbf{X}_\mathcal{E}}$ 在各向异性 Sobolev 空间 $\mathcal{H}_h^s(\mathcal{M},\mathcal{E})$ 上的作用。为此，我们引入相空间 $T^*\mathcal{M}$ 的一个光滑划分$1 = a_1+a_2+a_3$，由此得到作用于 $\mathcal{E}$ 的截面上的伪微分算子 $\mathrm{Op}_h^\mathcal{E}(a_i)$，其中 $i \in \{1,2,3\}$。

步骤 *1.* 概率低频估计。函数 a_1 的支集位于 $\{(x,\xi) \in T^*\mathcal{M} : |\xi| \leq 2\}$。我们证明，若随机表示序列 (ρ_n, V_n) 几乎必然强收敛，则对于任意 $\varepsilon > 0$，我们几乎必然有。

$$\left\| \mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}_{\rho_n}}(a_1)\mathrm{e}^{-t\mathbf{X}_{\mathcal{E}_{\rho_n}}}\,\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}_{\rho_n}}(a_1)\right\|_{L^2(\mathcal{M},\mathcal{E}_{\rho_n})} \leq C_\varepsilon h^{-(d-1)}\mathrm{e}^{(\delta_0+\varepsilon)t}, \tag{1.8}$$

其中 $\delta_0 = \Pr(-2\psi^u)/2$ 且 d 是 M的维数。仅当 $t \geq K|\log\, h|$ 对于某个充分大的常数 K时，此估计才有意义。为证明（1.8），我们使用强收敛技术，将（1.8）中的算子范数与一个极限算子的算子范数联系起来。该极限算子作用于 M的万有覆盖的单位切丛上，称为球面平均算子。

步骤 *2.* 沿流方向的估计。函数 a_2 的支集位于捕获集 E_0^* 的一个小锥形邻域内（定义见 §5.1 ），该邻域避开低能量，也就是说

$$\mathrm{Supp}\, a_2 \subset \left\{(x,\xi) \in T^*\mathcal{M} \;:\; \xi(X) \geq \frac{|\xi|}{2} \geq \frac{1}{2}\right\}.$$

来自支集(a_2) 的贡献会因沿流方向积分而衰减。这主要依赖于半经典算子 $-\mathrm{i}h\mathbf{X}_\mathcal{E}$ 在支集(a_2)上的椭圆性。此过程在 §5.4中完成。

步骤 *3*：远离捕获集的估计。设 a_3 是一个支集位于与 E_0^* 不相交的锥形子集上的光滑函数，能量取值为 $|\xi| \geq 1$。我们证明存在一个绝对常数 $C > 0$，使得对于任意固定的 $t_0 > 0$，都存在一个依赖于 t_0 的常数 $C_0 > 0$，从而对于任意平坦丛 $\mathcal{E} \to \mathcal{M}$，有

$$\left\|\mathrm{e}^{-t_0\mathbf{X}_\mathcal{E}} \operatorname{Op}_h^\mathcal{E}(a_3)\right\|_{\mathcal{H}_h^s} \leq C\mathrm{e}^{-C_0 s}, \quad \left\|\operatorname{Op}_h^\mathcal{E}(a_3)\mathrm{e}^{-t_0\mathbf{X}_\mathcal{E}}\right\|_{\mathcal{H}_h^s} \leq C\mathrm{e}^{-C_0 s}. \tag{1.9}$$

这些估计源自埃戈罗夫定理，其中的估计在 $\mathcal{E}$中是一致的，并依赖于[FS11]中的逃逸函数性质。

步骤 4：汇总所有贡献。我们结合估计 (1.8)、(1.9)。首先取 $\varepsilon > 0$ 足够小、 s 足够大，然后取 $T = K|\log\ h|$，使 $K = K(s, \varepsilon, \mathcal{K})$ 足够大；接着取 $h = h(\varepsilon, K, s, \mathcal{K})$ 足够小，从而证明对所有 $z \in \mathcal{K}$，几乎必然有 $\|\mathbf{R}(z)\|_{\mathcal{H}_h^s} < \frac{1}{2}$。

备注 1.22 (与高频谱隙的关系)。 我们研究的是这样一种情形：z 保持在一个紧集内，并如下得到关于 $\|\mathbf{R}(z)\|_{\mathcal{H}_h^s}$ 的估计。低频贡献通过概率方法控制，这是步骤 1。远离捕获集的高频贡献在步骤 3 中通过使用各向异性空间加以控制，而来自捕获集的贡献 E_0^* 则通过沿流方向积分来抑制（这是步骤 2；此处 $h|z| \ll 1$ 至关重要）。

相比之下，为了获得渐近谱隙， [NZ15] 考虑参数范围 $h|z| \sim 1$。在这种情况下，低频贡献会因沿流积分而（确定性地）衰减。然而，捕获集附近的分析变得精细得多，也是 [NZ15]中的主要难点。尽管捕获集以外的贡献处理起来技术性更强，但与本文的做法相同，借助更复杂的逃逸函数即可对其加以控制。

记号。我们写作 $f \lesssim g$ 或 $f = \mathcal{O}(g)$，表示存在一致常数 C 使得$f \leq Cg$。如果 C 依赖于某些相关参数集 $\bullet$，我们可以写作 $f \lesssim_\bullet g$ 或$f = \mathcal{O}_\bullet(g)$。当 $f \lesssim g$ 且 $g \lesssim f$ 时，我们写作 $f \asymp g$，即存在常数 $C > 0$使得 $C^{-1}f \leq g \leq Cf$。

连续算子 $A\colon H \to H'$ 的范数可记作 $\|A\|_{H\to H'}$，也可简记为 $\|A\|_H$ （当 $H = H'$时）。记号 $\mathcal{O}_\bullet(g)_{H\to H'}$ 用于表示一个连续算子 $R\colon H \to H'$，其范数为 $\|R\|_{H\to H'} = \mathcal{O}_\bullet(g)$。

若 χ、χ' 是两个紧支撑函数，我们记作 $\chi \prec \chi'$，若支集 $\chi \subset \{\chi' \equiv 1\}$。我们用 $d(\cdot,\cdot)$ 表示黎曼距离。以 x 为中心、半径为 r 的球和球面分别记作 $B(x, r)$ 和 $S(x, r)$。此外，我们用 $A(x, r, c)$ 表示环域 $B(x, r + c)\backslash B(x, r - c)$。

M 上的平坦丛统一用字母 E 表示，而 SM 上的平坦丛则用字母 $\mathcal{E}$ 表示。

致谢。感谢 Michael Magee 提出这个问题。感谢 Yann Chaubet 对雅可比场所作的讲解，也感谢 Frédéric Paulin 提醒我关注论文 [Rug94]。此外，感谢 Frédéric Faure 和 Frédéric Naud 与我进行了富有启发性的讨论。最后，感谢 Stéphane Nonnenmacher 在撰写本文期间给予我的指导，以及对稿件提出的细致反馈。

2. 几何预备知识

设 (M,g) 是一个闭黎曼流形。我们回顾一些关于 SM 几何的基本事实，以及阿诺索夫性质的一些推论。一个重要事实是$\widetilde{\text{闭阿诺索夫流形的万有覆盖}}$ $M\to M$ 是一个格罗莫夫双曲空间。这一性质在下一节中被广泛用于控制所引入的球面平均算子的算子范数。

接下来两个小节的材料可见于 [Lef25，§13。1]。

2.1. 的几何 SM。设 (M,g) 是一个维数为 d 的闭流形，配备黎曼体积形式。我们用 $\pi:\mathcal{M}\to M$ 表示 M 的单位切丛。测地向量场记为 X，并记 $\mathbb{V}:=\ker \mathrm{d}\pi$ 为垂直子丛。水平子丛 $\mathbb{H}$ 定义如下。对于 $(x,v)\in\mathcal{M}$，令

$$v^\perp=\{w\in T_xM\ :\ g_x(v,w)=0\}.$$

给定 $w\in v^\perp$，令 $\gamma_{(x,w)}(t)=\pi(\varphi_t(x,w))$ 为从 x 出发、速度为 w 的单位速率测地线，并令 $\tau_{x,\ w}(t)$ 表示平行移动映射 $T_xM\to T_{\gamma_{x,\ w}(t)}M$。设

$$\mathbb{H}(x,v)=\Big\{\partial_t\big(\gamma_{x,w}(t),\tau_{x,w}(t)v\big)_{|t=0}\ :\ w\in v^\perp\Big\}.$$

于是，有如下光滑分裂

$$T\mathcal{M}=\mathbb{R}X\oplus\mathbb{H}\oplus\mathbb{V}.$$

引理 2.1. 对任意 $(x,v)\in SM$,

$$\mathrm{d}\pi\cdot X(x,v)=v,\qquad \mathrm{d}\pi\cdot\mathbb{H}(x,v)=v^\perp,\qquad \mathrm{d}\pi\cdot\mathbb{V}(x,v)=\{0\},$$

2.1.1. 佐佐木度量与刘维尔测度。存在唯一的度量，称为佐佐木度量，记为 G，使得 $\mathbb{R}X\oplus\mathbb{H}\oplus\mathbb{V}$ 在任意一点处是$T\mathcal{M}$ 的正交分解，并且使得

- $\mathrm{d}\pi:\mathbb{R}X(x,v)\oplus\mathbb{H}(x,v)\to T_xM$ is an isometry.
- The natural identification $\mathbb{V}(x,v)\simeq v^\top\subset T_xM$ is an isometry.

对每个 $x\in M$，该度量 g_x在向量空间 T_xM 上诱导出一个体积形式，它可与径向向量场缩并，从而给出一个 $(d-1)$ 形式，其限制到 S_xM 给出一个测度 μ_{x}。注意 $\mu_x(S_xM)=\mathrm{Vol}(S^{d-1})$。于是有（见[GM25，引理 1.30]）：

Lemma 2.2（佐佐木测度的析取）。对任意 $F(x,v)\in C^\infty_{\mathrm{comp}}(SM)$，

$$\int_{\mathcal{M}}F(x,v)\mathrm{d}\mu_G(x,v)=\int_M\Big(\int_{S_xM}F(x,v)\mathrm{d}\mu_x(v)\Big)\mathrm{d}\mu_g(x).$$

规范化佐佐木测度称为刘维尔测度，记作 μ_{L}。刘维尔测度在测地流下保持不变，即对于任意 $t\in\mathbb{R}$，$(\varphi_t)_*\mu_{\mathrm{L}}=\mu_{\mathrm{L}}$。

2.2. **阿诺索夫性质**。

定义 2.3。若测地流 $\varphi_t:\ \mathcal{M}\to\mathcal{M}$ 是阿诺索夫的，或称一致双曲的，则切丛 $T\mathcal{M}$ 具有一个连续的流不变分解

$$T\mathcal{M}=\mathbb{R}X\oplus E_s\oplus E_u, \tag{2.1}$$

以及常数 $C,\lambda>0$，使得对所有 $t\geq 0$，都有

$$\forall v\in E_s,\ |\mathrm{d}\varphi_t\cdot v|\leq C\mathrm{e}^{-\lambda t}|v|,$$

and

$$\forall v\in E_u,\ |\mathrm{d}\varphi_{-t}\cdot v|\leq C\mathrm{e}^{-\lambda t}|v|,$$

其中范数是相对于 $\mathcal{M}$ 上任意连续度量取的。我们还记作$E_0:=\mathbb{R}X$。丛 E_s,E_u 分别称为稳定和不稳定方向。如果测地流是阿诺索夫的，我们称 M 为阿诺索夫流形。

丛 E_s,E_u 的维数均为（$d-1$），且 $E_s\cap E_u=\{0\}$。此外 r,

$$E_s\oplus E_u=\mathbb{H}\oplus\mathbb{V}=(\mathbb{R}X)^{\perp},$$

其中（$\mathbb{R}X$）$^{\perp}$ 是相对于佐佐木度量而言的 $\mathbb{R}X$ 的正交补。因此我们可以定义投影映射

$$p_{E_u},p_{E_s}:(\mathbb{R}X)^{\perp}\to(\mathbb{R}X)^{\perp},\qquad p_{\mathbb{H}},p_{\mathbb{V}}:(\mathbb{R}X)^{\perp}\to(\mathbb{R}X)^{\perp}.$$

由于 $E_s\cap\mathbb{V}=E_u\cap\mathbb{V}=\{0\}$，我们知道这些映射

$$p_{E_u}:\mathbb{V}\to E_u,\quad p_{\mathbb{H}}:E_u\to\mathbb{H},\quad p_{E_s}:\mathbb{V}\to E_s,\quad p_{\mathbb{H}}:E_s\to\mathbb{H} \tag{2.2}$$

是可逆的。

定义 2.4. 流的最小膨胀率定义为

$$\gamma_{\min}:=\lim_{t\to+\infty}\inf_{z\in\mathcal{M}}-\frac{1}{t}\log\left\|\mathrm{d}\varphi_t(z)_{|E_s}\right\|=\lim_{t\to+\infty}\inf_{z\in\mathcal{M}}-\frac{1}{t}\log\left\|\mathrm{d}\varphi_{-t}(z)_{|E_u}\right\|. \tag{2.3}$$

我们还定义不稳定雅可比的指数增长率

$$\gamma_0:=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\inf_{x\in\mathcal{M}}\log\det\left(\mathrm{d}\varphi_t|_{E_u(x)\to E_u(\varphi_t(x))}\right), \tag{2.4}$$

其中，行列式是相对于任意连续度量计算的。

阿诺索夫性质意味着 $\gamma_0>0$，但当 γ_0 具有夹挤负曲率时，我们可以对 γ_0 给出一些定量估计。更确切地说，如果 M 满足双侧曲率界 $-\kappa_{\max}^2\leq -K\leq -\kappa_{\min}^2$，且 d 表示 M的维数，那么

$$(d-1)\kappa_{\min}\leq\gamma_0\leq(d-1)\kappa_{\max}.$$

2.3. M的几何。假设（M，g）是阿诺索夫流形。那么，根据 Klingenberg 的一个著名结果 [Kli74]，M 没有共轭点，因此其万有覆盖 $(\tilde{M}, \tilde{g})$ 是单连通的，并且对于任意 $x \in M$，指数映射 $\exp_x : T_xM \to M$ 都是全局微分同胚（另见 [Lef25，定理 13.3.10] 以及 [Lef25，引理 13.2.5]）。

当 M 处处具有曲率 $\leq -\kappa^2 < 0$ 时，根据卡当–哈达玛定理，我们知道 M 是一个 $\mathrm{CAT}(-\kappa^2)$-空间，特别是它满足与常曲率 $-\kappa^2$的模型空间相关的标准几何比较定理。然而，阿诺索夫流形可能含有一些正曲率区域，因此 M 甚至可能不满足 $\mathrm{CAT}(0)$。尽管如此，M 在大尺度上表现得像负曲率空间。事实上，Ruggiero 最早证明了 [Rug94] 闭 Anosov 流形的万有覆盖是格罗莫夫双曲的。Knieper 对这一结论给出了另一种证明 [Kni12，定理 4。8]，该证明依赖于 [BH99第三章 H.1 节命题 1 中的刻画。26]。为方便起见，我们在下文给出一个简短的证明。首先回顾格罗莫夫双曲性的定义。

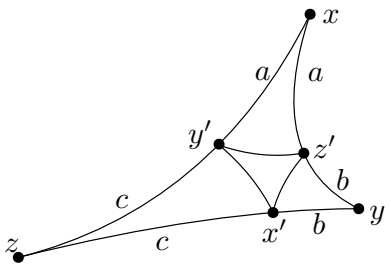
设 $\triangle = xyz$ 是 M中的一个测地三角形。存在唯一的一组三个非负数（a, b, c），使得

$$d(x,y) = a + b, \quad d(y,z) = b + c, \quad d(z,x) = c + a.$$

于是可以定义一个内接三角形 $\triangle' = x'y'z'$，其中 x' 位于 $[yz]$上，等等，使得

$$a = d(x,z') = d(x,y'), \quad b = d(y,z') = d(y,x'),$$

且 $c = d(z,y') = d(z,x')$。



定义 2.5. 若存在常数$\delta > 0$，使得对于 M中的任意测地三角形 $\triangle = xyz$，按上述方式定义的内接三角形 $\triangle' = x'y'z'$ 的直径为 $\leq \delta$，则流形（$M, \tilde{g}$）称为格罗莫夫双曲的。

由于定义 δ 中的常数 2.5 可能非常大，格罗莫夫双曲性并未提供关于流形局部几何的信息，因此不排除存在具有正曲率的区域。

定义 2.6. 函数 $e : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 是 M 的发散函数，如果对于任意测地线 $c_1, c_2 : [0, +\infty) \to M$，满足 $c_1(0) = c_2(0) = x$，对于任意 $R, r \in \mathbb{N}$满足$d(c_1(R)\ c_2(R)) > e(0)$，任意连接 $c_1(R+r)$与 $c_2(R+r)$且位于球 $B(x, R+r)$之外的 γ连续路径，都满足

$$\mathrm{length}(\gamma) \geq e(r).$$

命题 1.26 见 [BH99，第 III.H 章。1]指出，若 M 具有一个发散函数 e 满足 $e(n)/n \to +\infty$，则 M 是格罗莫夫双曲的。剩下要证明的是

命题 2.7。 假设 M 是一个阿诺索夫流形的万有覆盖。那么 M 具有一个指数发散函数。特别地，M 是格罗莫夫双曲的。

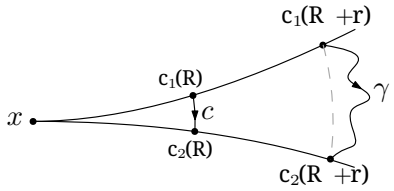
证明。令 $e(0) > 0$在下文中固定。考虑定义 2.6 中的两条测地线，并令 $R \in \mathbb{N}$满足 $d(c_1(R)\ c_2(R)) > e(0)$。令 $\gamma : [0,1] \to M$为连接以下两点的路径

$c_1(R+r)$ 到 $c_2(R+r)$，且位于球 $B(x,R+r)$ 之外。在证明中，g 是 M 上的黎曼度量，G 是 SM 上的佐佐木度量。这个思路归功于 Yann Chaubet。

通过逼近，我们总可以假设 γ 是光滑的，并且由于 $\exp_x : T_x\widetilde{M} \to \widetilde{M}$ 是一个微分同胚，我们可以将其参数化为

$$\gamma(t) = \pi\big(\varphi_{\ell(t)}(x,v(t))\big), \qquad t\in[0,1], \tag{2.5}$$

对于某些函数 $\ell(t)\geq R+r$ 和 $v(t)\in S_xM$。我们还考虑



$$c(t) := \pi\big(\varphi_R(x,v(t))\big).$$

于是 c 是一条从 $c_1(R)$ 到 $c_2(R)$ 的光滑路径，特别地，

$$\mathrm{length}(c)\geq d(c_1(R),c_2(R)) > e(0).$$

注意，若 $r=0$，则 γ 连接 $c_1(R)$ 与 $c_2(R)$，因此 $\mathrm{length}(\gamma)\geq d(c_1(R)\ c_2(R)) > e(0)$，正如我们所希望的那样。因此，从现在起我们可以假设 $r\geq 1$。γ 的长度为

$$\mathrm{length}(\gamma)=\int_0^1 |\dot\gamma(t)|_g \mathrm{d}t.$$

对（2.5）求导，并应用链式法则可得

$$\dot\gamma(t)=\mathrm{d}\pi\cdot\big(\dot\ell(t)X(\varphi_{\ell(t)}(x,v(t))+\mathrm{d}\varphi_{\ell(t)}(x,v(t))\cdot\dot v(t)\big).$$

由于 $\mathrm{d}\pi\cdot\mathbb{R}X$ 和 $\mathrm{d}\pi\cdot(\mathbb{H}\oplus\mathbb{V})$ 是 TM 的正交子空间，因此有

$$|\dot\gamma(t)|_g\geq|\mathrm{d}\pi\cdot\mathrm{d}\varphi_{\ell(t)}(x,v(t))\cdot\dot v(t)|_g=|p_{\mathbb{H}}\cdot\mathrm{d}\varphi_{\ell(t)}(x,v(t))\cdot\dot v(t)|_G.$$

同理，

$$|\dot c(t)|_g=|p_{\mathbb{H}}\cdot\mathrm{d}\varphi_R(x,v(t))\dot v(t)|_G.$$

记

$$\mathrm{d}\varphi_{\ell(t)}(x,v(t))\cdot\dot v(t)=\mathrm{d}\varphi_{\ell(t)-R}\cdot(p_{E_u}+p_{E_s})\mathrm{d}\varphi_R\dot v(t),$$

并由三角不等式可得

$$\begin{aligned}|\dot\gamma(t)|_g &\geq |p_{\mathbb{H}}\cdot\mathrm{d}\varphi_{\ell(t)-R}\cdot p_{E_u}\mathrm{d}\varphi_R\dot v(t)|-|p_{\mathbb{H}}\cdot\mathrm{d}\varphi_{\ell(t)-R}\cdot p_{E_s}\mathrm{d}\varphi_R\dot v(t)|\\ &\geq \|(p_{\mathbb{H}}\cdot\mathrm{d}\varphi_{\ell(t)-R}\cdot p_{E_u})^{-1}\|^{-1}\cdot\|p_{E_u}\mathrm{d}\varphi_R\dot v(t)\|-\|p_{\mathbb{H}}\cdot\mathrm{d}\varphi_{\ell(t)-R}\cdot p_{E_s}\|\cdot|\mathrm{d}\varphi_R\dot v(t)|_G.\end{aligned}$$

现在，由流的阿诺索夫性质以及（2.2）中的映射可逆这一事实，存在一个常数 $C>0$ 使得

$$|p_{E_u}\mathrm{d}\varphi_R\dot v(t)|_G\geq\frac{1}{C}|p_{\mathbb{H}}\mathrm{d}\varphi_R\dot v(t)|_G=\frac{1}{C}|\dot c(t)|_g,$$

and

$$|p_{E_s}\mathrm{d}\varphi_R\dot v(t)|_G\leq C|p_{\mathbb{H}}\mathrm{d}\varphi_R\dot v(t)|_G=C|\dot c(t)|_g.$$

同理，由于 $\ell(t)-R\geq r$，我们有

$$\|(p_{\mathbb{H}}\cdot\mathrm{d}\varphi_{\ell(t)-R}\cdot p_{E_u})^{-1}\|^{-1}\geq C_\varepsilon\mathrm{e}^{(\gamma_0-\varepsilon)r},\quad \|p_{\mathbb{H}}\cdot\mathrm{d}\varphi_{\ell(t)-R}\cdot p_{E_s}\|\leq C_\varepsilon\mathrm{e}^{-(\gamma_0-\varepsilon)r}.$$

We deduce

$$|\dot\gamma(t)|_g\geq\big(c_\varepsilon\mathrm{e}^{(\gamma_0-\varepsilon)r}-C_\varepsilon\big)|\dot c(t)|_g.$$

对 $[0,1]$ 积分可得

$$\mathrm{Length}(\gamma) \geq \big(c_\varepsilon \mathrm{e}^{(\gamma_0-\varepsilon)r} - C_\varepsilon\big)\,\mathrm{Length}(c) \geq e(0)\big(c_\varepsilon \mathrm{e}^{(\gamma_0-\varepsilon)r} - C_\varepsilon\big),$$

其中，最后一个不等式在 $r \geq r_\varepsilon$ 足够大时成立。因此，我们可以令 $e(0) = 1$,$e(r) = 0$，其中 $1 \leq r \leq r_\varepsilon$，并且对 $r > r_\varepsilon$，令

$$e(r) = \big(c_\varepsilon \mathrm{e}^{(\gamma_0-\varepsilon)r} - C_\varepsilon\big).$$

□

上述证明的一个附带结果是关于测地线发散的以下估计，$\widetilde{\ }$它大致表明，若 $x, y, z \in M$ 且 y 接近 z，那么连接 x 与 y、以及连接 x 与 z 的测地线在整个轨迹上（于单位切丛中）始终彼此接近。

引理 2.8. 假设(M,g) 是一个闭 *Anosov* 流形。对于任意 $\eta > 0$，存在一个常数 $C_\eta > 0$，使得若 $x \in M$ 和 $v, w \in S_xM$ 满足 $d_{\widetilde{M}}(\exp x(rv), \exp x(rw)) \leq \eta$，则对所有 $0 \leq t \leq r$，有

$$d_{S\widetilde{M}}\big(\varphi_t(x,v), \varphi_t(x,w)\big) \leq C_\eta \mathrm{e}^{-c(r-t)}.$$

2.4. 纤维上的傅里叶分析。 单位切丛 $SM \to M$ 的每个纤维都与 $(d-1)$-球面 S^{d-1}等距。通过对 $(d-1)$-球面上的拉普拉斯算子进行对角化，可以将任意函数 $f \in L^2(SM)$ 分解为所谓的球谐函数。借助这一分解，我们可以在下一节中轻松计算一些算子范数。

关于此处介绍的内容，参见 [Lef25，第 14]章。回顾一下，我们有一个正交分解

$$T(SM) = \mathbb{R}X \oplus \mathbb{H} \oplus \mathbb{V}.$$

于是，我们可以定义函数 $f \in C^\infty(SM)$的垂直梯度 $\nabla_{\mathbb{V}} f$ 以及对偶算子 $\nabla_{\mathbb{V}}^*\colon C^\infty(T(SM)) \to C^\infty(SM)$。垂直拉普拉斯算子 定义为

$$\Delta_{\mathbb{V}} := \nabla_{\mathbb{V}}^* \nabla_{\mathbb{V}} : C^\infty(SM) \to C^\infty(SM).$$

给定一个等距识别 $S_xM \simeq S^{d-1}$，有

$$\Delta_{\mathbb{V}} f(x,v) = \Delta_{S^{d-1}} f(x,\cdot)\big|_v.$$

下面讨论平坦丛的情形。设 $E \to M$ 是 M上的一个平坦丛；它可提升为 SM上的一个平坦丛 $\mathcal{E} := \pi^* E$。若 $f(x,v)$是 $\mathcal{E} \to SM$的一个光滑截面，则对每个 $x \in M$，可以将 $f(x,\cdot)$视为 $C^\infty(S_xM, E_x)$中的一个元素，其中 E_x是投影 $E \to M$在 x 处的纤维。与上文一样，固定一个等距识别$S_xM \simeq S^{d-1}$后，有：

$$\Delta_{\mathbb{V}}^E f(x,v) = \Delta_{S^{d-1}} f(x,\cdot)\big|_v.$$

垂直拉普拉斯算子 $\Delta_{\mathbb{V}}^E$ 在 $L^2(SM,\mathcal{E})$ 上本质自伴，因此可以定义其函数演算。

2.4.1. 关于 SM 的傅里叶分析。 现在我们讨论万有覆盖 M 的情形，其中$\widetilde{\ }$有平凡丛 $\mathbb{C} \to M$。由于 M 是单连通的，存在同构 $S\widetilde{M} \simeq \widetilde{M} \times S^{d-1}$，使得对每个 x，限制映射 $S_x\widetilde{M} \to S^{d-1}$ 是等距映射。我们用 $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ 表示 $\Delta_{S^{d-1}}$ 的特征值有序序列，并考虑球面拉普拉斯算子的特征函数标准正交基 $(\omega_n)_{n\geq 0}$，即 $\|\omega_n\|_{L^2(S^{d-1})} = 1$ 且 $\Delta_{S^{d-1}}\omega_n = \lambda_n\omega_n$。这些函数拉回后成为$\sim SM$ 上的函数，仍记作 ω_n，并满足

$$\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}}\omega_n = \lambda_n\omega_n.$$

于是，任意 $u \in L^2(S\widetilde{M})$ 均可分解为

$$u(x,v) = \sum_{n\geq 0} u_n(x)\omega_n(x,v), \qquad \|u\|^2_{L^2(S\widetilde{M})} = \sum_{n\geq 0}\|u_n\|^2_{L^2(\widetilde{M})}.$$

2.4.2. 傅里叶投影算子。 现在我们引入纤维上的傅里叶投影算子，并研究它们作为半经典伪微分算子如何作用。设 g 是光滑紧支撑函数，且等于 1 于 $[-2,2]$。我们需要阐明 $g(h^2\Delta_{\mathbb{V}}^E)$ 在与伪微分算子复合时的行为。我们参阅附录 B 以了解此处所用的半经典演算概念。我们首先考虑平凡丛 $\mathbb{C} \to SM$ 的情形。我们证明 $g(h^2\Delta_{\mathbb{V}})$ 在微局部意义下如同恒等算子作用于 $\{|\xi| \leq 2\}$。

命题 2.9. 对任意 $a \in C^\infty(T^*\mathcal{M})$，若其支集在 $|\xi| \leq 1$ 上，则有

$$\mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(a)g(h^2\Delta_{\mathbb{V}}) = \mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(a) + \mathcal{O}(h^\infty), \qquad g(h^2\Delta_{\mathbb{V}})\,\mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(a) = \mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(a) + \mathcal{O}(h^\infty).$$

证明。**1.** 由赫尔弗–舍斯特兰公式（见 [Zwo12，定理 14.18]），可以表示

$$g(h^2\Delta_{\mathbb{V}}) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\mathbb{C}} \bar\partial\tilde g(z)(z - h^2\Delta_{\mathbb{V}})^{-1}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar z.$$

其中，$\tilde g$ 是 g的几乎解析延拓，即 $\mathbb{C}$上的一个紧支撑函数，满足 $\tilde g_{|\mathbb{R}} = g$，并且

$$|\bar\partial\tilde g(z)| = \mathcal{O}(|\operatorname{Im}(z)|^\infty).$$

谱理论估计保证了该积分在算子范数意义下收敛

$$\|(z - h^2\Delta_{\mathbb{V}})^{-1}\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im}(z)|},$$

这可由 $\Delta_{\mathbb{V}}$的自伴性推出。

2. 由于 $\Delta_{\mathbb{V}}$ 是微分算子，我们知道 $h^2\Delta_{\mathbb{V}} = \mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(p) + \mathcal{O}_{L^2\to L^2}(h^\infty)$，对某个光滑的、依赖于 h的符号 p成立，满足 $p = |\xi|^2_{\mathbb{V}} + hr$，并带有某个余项 $r \in S^1(T^*\mathcal{M})$。注意，$p$ 依赖于量子化$\mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(\cdot)$的选择。利用参数子构造，我们可以构造一个符号 $b(z)$，其支集在 $\{(x,\xi) \in T^*(SM)$上：$|\xi| \leq 2\}$，并具有受控估计，使得

$$(z - \mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(p))\,\mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(b(z))\,\mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(a) = \mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(a) + \mathcal{O}\Big(\frac{h^N}{|\operatorname{Im}(z)|^N}\Big)_{L^2\to L^2}, \tag{2.6}$$

其中 a 如命题2.9 所述，与 z无关。更确切地说，令 $\chi \equiv 1$ 在 $\{|\xi| \leq 2\}$上，则可取 b 具有如下形式

$$b(z) = \frac{\chi}{z-p} + \chi \sum_{n=2}^{N} h^n \sum_{2 \leq k \leq 2n+1} \frac{Q_{n,k}}{(z-p)^k}. \tag{2.7}$$

此处 $Q_{n,\,k}$ 是关于 p的各阶导数的一个多项式，其精确表达式取决于量子化的选择，但对我们无关紧要。重要的是 $Q_{n,\,k}$ 与 z无关。类似计算中会出现形如（2.7）的表达式，例如可见于 [Non20]——请注意，我们的表达式略有不同，因为我们不希望 z 出现在分子中。在流形上，可利用 [DJN22] 的附录中所发展的演算来得到（2.6）。尽管 [DJN22]采用右量子化，其表述仍可加以改写，以处理 Weyl 量子化。

Le让我们回到这一证明。由（2.6）以及 L^2-连续性定理，我们得到

$$(z - h^2\Delta_{\mathbb{V}}) \operatorname{Op}_h^{\mathcal{M}}(b(z)) \operatorname{Op}_h^{\mathcal{M}}(a) = \operatorname{Op}_h^{\mathcal{M}}(a) + \mathcal{O}_{L^2 \to L^2}\left(\frac{h^N}{|\operatorname{Im}(z)|^N}\right). \tag{2.8}$$

回顾 $\|(z - h^2\Delta_{\mathbb{V}})^{-1}\| \leq |\operatorname{Im}(z)|^{-1}$。由（2.8），可得

$$\operatorname{Op}_h^{\mathcal{M}}(b(z)) \operatorname{Op}_h^{\mathcal{M}}(a) = (z - h^2\Delta_{\mathbb{V}})^{-1} \operatorname{Op}_h^{\mathcal{M}}(a) + \mathcal{O}\left(\frac{h^N}{|\operatorname{Im}(z)|^{N+1}}\right)_{L^2 \to L^2}. \tag{2.9}$$

3. 现在我们对 $\mathbb{C}$ 进行积分。我们利用如下事实：

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{\bar{\partial}\tilde{g}(z)}{(z-p)^k} \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} = \frac{2\pi \mathrm{i}}{(k-1)!} g^{(k-1)}(p).$$

由（2.7），我们有

$$\int_{\mathbb{C}} \bar{\partial}\tilde{g}(z) b(z) \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} = \chi\Big(g(p) + \sum_{n=2}^{N} h^n \sum_{2 \leq k \leq 2n+1} g^{(k-1)}(p) Q_{2n,k}\Big) + \mathcal{O}(h^N). \tag{2.10}$$

我们利用 $\tilde{g}$ 的几乎解析性来控制余项。由于 $g \equiv 1$ 在 $[-2, 2]$上，我们有 $g^{(k)} \equiv 0$ 在该区间上对所有 $k \geq 1$成立。因为 χ 的支集包含于 $|\xi| \leq 1$，故我们有 $|p| \leq 1 + \mathcal{O}(h)$ 在该处成立，因此当 h 足够小时，我们有 $\chi g^{(k)}(p) \equiv 0$。因此（2.10）可简化为

$$\int \bar{\partial}\tilde{g}(z) b(z) \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} = \chi g(p) + \mathcal{O}(h^N).$$

综合起来，我们得到

$$g(h^2\Delta_{\mathbb{V}}) \operatorname{Op}_h^{\mathcal{M}}(a) = \operatorname{Op}_h^{\mathcal{M}}(\chi g(p)) \operatorname{Op}_h^{\mathcal{M}}(a) + \mathcal{O}(h^\infty).$$

由于 $\chi g(p) \equiv 1$ 在 a的支集上，我们得出

$$g(h^2\Delta_{\mathbb{V}}) \operatorname{Op}_h^{\mathcal{M}}(a) = \operatorname{Op}_h^{\mathcal{M}}(a) + \mathcal{O}(h^\infty),$$

正如我们所愿。 □

现在我们讨论通过提升 $\mathcal{E} \to \mathcal{S}M$ 得到的平坦丛 $E \to M$，并将命题 2.9 推广到这一情形。本文所用的记号见附录 B 。

命题 2.10。设 $\mathcal{E} \to \mathcal{M}$ 是通过提升 $E \to M$得到的酉平坦丛。对于任意支集在 $|\xi| \le 1$ 上的 $a \in C^\infty(T^*\mathcal{M})$，有

$$\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(a) g(h^2\Delta_{\mathbb{V}}^E) = \mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(a) + \mathcal{O}(h^\infty), \qquad g(h^2\Delta_{\mathbb{V}}^E)\,\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(a) = \mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(a) + \mathcal{O}(h^\infty).$$

误差关于 $\mathcal{E}$ 一致。

证明。我们只处理第一个恒等式，第二个恒等式的证明类似。根据 $\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(\cdot)$ 的定义，我们有

$$\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(a) g(h^2\Delta_{\mathbb{V}}^E) = \sum_j R_j^* \chi_j \,\mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(\eta_j a) R_j \chi_j g(h^2\Delta_{\mathbb{V}}^E).$$

根据我们对局部平凡化的选择，我们有

$$R_j g(h^2\Delta_{\mathbb{V}}^E) = g(h^2\Delta_{\mathbb{V}}) R_j,$$

由此得到：

$$\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(a) g(h^2\Delta_{\mathbb{V}}^E) = \sum_j R_j^* \chi_j \,\mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(\eta_j a) \chi_j g(h^2\Delta_{\mathbb{V}}) R_j \eta_j.$$

根据命题 2.9 对每个 j：

$$\mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(\eta_j a)\chi_j g(h^2\Delta_{\mathbb{V}}) = \mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(\eta_j a)\chi_j + \mathcal{O}(h^\infty).$$

最后，利用 $\chi_j \prec \eta_j$：

$$\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(a) g(h^2\Delta_{\mathbb{V}}^E) = \sum_j R_j^* \chi_j \,\mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(\eta_j a) R_j \chi_j + \mathcal{O}(h^\infty) = \mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(a) + \mathcal{O}(h^\infty),$$

由此完成证明。

□

3. $\widetilde{M}$ 上的低频传播

本节研究函数 $f \in L^2(S\widetilde{M})$ 在垂直方向以 $\lesssim h^{-1}$ 为尺度振荡时，沿测地流演化的情形。下面的命题 3.6 对以下启发式观点给出了定量表述：在测地流的传播作用下，L^2-质量倾向于逃逸至纤维中的高阶傅里叶模态。更确切地说，我们证明，若 f 集中在阶数为 $\lesssim h^{-1}$的傅里叶模态上，则 L^2将 $f \circ \varphi_t$ 投影到阶数为 $\lesssim h^{-1}$ 的模态所得的质量按 $h^{-(d-1)}\mathrm{e}^{\delta_0 t}$的速率衰减，其中 δ_0 是势函数 $-2\psi^u$的压力的一半。此估计是定理 5.6证明中的主要分析工具，也可能具有独立的研究价值。

3.1. 球面平均算子

。我们首先研究沿垂直方向不振荡的函数的传播。我们有一个拉回算子

$$\pi^* : L^2(\widetilde{M}) \to L^2(S\widetilde{M}),\ f \mapsto f \circ \pi.$$

我们还定义 π_*： $L^2(S\widetilde{M}) \to L^2(\widetilde{M})$ 如下：

$$\pi_* F(x) = \frac{1}{\mathrm{vol}(S^{d-1})} \int_{S_x\widetilde{M}} F(x,v)\mathrm{d}\mu_x(v).$$

定义 3.1。 球面平均算子 $\mathcal{L}_t$: $L^2(\widetilde{M}) \to L^2(\widetilde{M})$ 定义如下:

$$\mathcal{L}_t f := \pi_* \mathrm{e}^{-t\widetilde{X}} \pi^*. \tag{3.1}$$

更明确地说，有

$$\mathcal{L}_t f(x) = \frac{1}{\mathrm{vol}(S^{d-1})} \int_{S_x \widetilde{M}} f(\pi(\varphi_t(x,v))) \mathrm{d}\mu_x(v).$$

我们可以给出 $\mathcal{L}_t$ 的另一种表达式。若对某个 $v \in S_x M$ 有 $y = \exp_x(tv)$，则定义以 x 为中心的正规坐标中观察到的 y 处的体积密度:

$$J(x,y) := \det \mathrm{d}_v \exp_x(t\,\cdot), \tag{3.2}$$

其中，行列式是相对于 $T(S_x M)$ 和 $T_y S(x,t)$ 的任意正交归一基计算的。注意，当 $d(x,y) \to 0$ 时， $J(x,y) \sim d(x,y)^{d-1}$。另外，令 $\mathrm{d}^{\sigma_{S(x,t)}}$ 为 $S(x,t)$ 上的黎曼曲面测度。那么，对任意 $f \in C^\infty(M)$，有:

$$\mathcal{L}_t f(x) = \int_{S(x,t)} J(x,y)^{-1} f(y) \mathrm{d}\sigma_{S(x,t)}(y). \tag{3.3}$$

注 3.2。 定义于 (3.1) 的球面平均算子，不应与相对于半径为 t 的黎曼球面测度的平均算子混淆，后者记作 $\mathcal{A}_t$，由 Knieper [Kni94] 研究过。事实上，应将权重 $J(x,y)^{-1}$ 替换为 1 体积 $S(x,t)$，见 (3.3)。不过，值得注意的是，这两个算子在常曲率情形下相同。

3.2. **拓扑压力**。 我们回顾连续势函数 $F \in C^0(SM)$ 的各种定义。任意此类势函数都可提升为一个 Γ-不变势函数 $\widetilde{F} \in C^0(S\widetilde{M})$。一些特别有趣的势函数是不稳定雅可比的标量倍数，其定义如下。

定义 3.3 （不稳定雅可比）。 不稳定雅可比 ψ_u 定义为

$$\psi_u(x,v) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \log\det(\mathrm{d}\varphi_t)_{|E_u(x,v)\to E_u(\varphi_t(x,v))}, \tag{3.4}$$

其中，行列式是相对于佐佐木度量计算的。这是 SM 上的一个赫尔德连续函数。

我们定义 对于满足 $y = \exp_x(tv)$ 且 $v \in S_x M$ 的 x、 $y \in M$,

$$\int_x^y \widetilde{F} := \int_0^t \widetilde{F}(\varphi_s(x,v)) \mathrm{d}s.$$

注意，若 $F(x,v) = F(x,-v)$，则

$$\int_x^y \widetilde{F} = \int_y^x \widetilde{F}.$$

定义 3.4。若子集 $S \subset SM$ 对于 (ε,t)-分离，则对任意 $x,y \in S$，都存在某个$s \in [0,t]$ 使得 $d(\varphi_s(x)\ \varphi_s(y)) > \varepsilon$。若子集 $S \subset SM$ 对于 (ε,t)-覆盖，则对每个$y \in SM$，都存在某个 $x \in S$，使得对所有 $s \in [0,t]$， $d(\varphi_s(x)\ \varphi_s(y)) < \varepsilon$。

令 $F\colon SM \to \mathbb{R}$ 为一个连续势函数。遵循 Ruelle [Rue81], ，我们定义

$$Z_t^+(F,\varepsilon) := \sup\Big\{ \sum_{x\in S} \exp \int_0^t F(\varphi_s(x))\mathrm{d}t \ : \ S \text{ is } (\varepsilon,t)\text{-separated}\Big\},$$

and

$$Z_t^-(F,\varepsilon) := \inf\Big\{ \sum_{x\in S} \exp \int_0^t F(\varphi_s(x))\mathrm{d}t \ : \ S \text{ is } (\varepsilon,t)\text{-spanning}\Big\}.$$

定义

$$P^{\pm}(F,\varepsilon) = \limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log Z_t^{\pm}(F,\varepsilon).$$

定义 3.5。 拓扑压力 $\mathrm{Pr}(F)$ 定义为

$$\mathrm{Pr}(F) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} P^{\pm}(F,\varepsilon),$$

其中两个极限相等。

关于 $\lim\ P^+(F,\varepsilon)\ = \lim\ P^-(F,\varepsilon)$ 的证明，参见沃尔特斯 [Wal75]。当 $F = 0$ 时，可得到流的 拓扑熵 h_{top}。曼宁 [Man79]证明了，当 (M,g) 具有负曲率时，拓扑熵与体积$\widetilde{\ }$熵相等：对任意 $x \in M$，有

$$h_{\mathrm{top}} = \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{r} \log \mathrm{vol}\, B(x,r).$$

这一结果沿两个方向得到了推广。首先，Ruelle [Rue81] 将曼宁的结果推广到任意连续势函数，并证明对任意 $c > 0$，记$A(x,r,c)$ 环域 $\{y\colon \ \ |d(x,y)$，有

$$\mathrm{Pr}(F) = \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{r} \log \int_{A(x,r,c)} \exp(\int_x^y \widetilde{F})\mathrm{dvol(y)}. \tag{3.5}$$

其次，弗雷雷和马涅 [FM82] 证明，即使在假设 (M,g) 没有共轭点的情况下，曼宁的结果仍然成立；特别是，当 (M,g) 为阿诺索夫时亦然。尽管 [FM82]中的证明在概念上不同于 [Man79], 中的证明，作者指出，曼宁的证明可以毫无障碍地推广到阿诺索夫流形的情形；事实上，Ruelle 的证明也同样如此。确实， [Man79; Rue81] 中的非负曲率假设仅用于得到引理 2.8 的一个较弱版本，而我们已经为阿诺索夫流形证明了该引理。由此可见，仅需假设 (M,g) 是阿诺索夫的，(3.5) 就成立。压力 $\mathrm{Pr}(F)$ 也是与势函数 F 相关的庞加莱级数的临界指数。对于任意$\sim x,y \in M$ 我们有

$$\mathrm{Pr}(F) = \inf\Big\{ s\in\mathbb{R} \ : \ \sum_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{e}^{-sd(x,\gamma y)+\int_x^{\gamma y}\widetilde{F}} < +\infty\Big\}.$$

3.3. 的算子范数 $\mathcal{L}_t$。 $\mathcal{L}_t$：$L^2(\widetilde{M}) \to L^2(\widetilde{M})$ 的范数估计如下。回顾一下，ψ_u 表示不稳定雅可比。

命题 3.6。 设 $\delta_0 = \Pr(-2\psi^u)/2$。则 $\delta_0 < 0$ 且

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log \|\mathcal{L}_t\|_{L^2(\widetilde{M})} = \delta_0. \tag{3.6}$$

我们的方法可以计算更一般算子的范数。设 $F \in C^\alpha(SM)^\sim$ 是满足条件 $F(x,v) = F(x,-v)$ 的赫尔德连续势函数，并将其在 SM 上的提升记为 $F^\sim$。则，

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log \left\|\pi_* \mathrm{e}^{-t(\widetilde{X}+\widetilde{F})} \pi^*\right\|_{L^2(\widetilde{M})} = \frac{1}{2} \Pr(2(F-\psi_u)),$$

球面平均算子 $\mathcal{L}_t$ 对应于 $F \equiv 0$。取 $F = \psi_u$，即可计算黎曼球面上平均算子 $\mathcal{A}_t$ 在半径为 t 的情形下的范数，该情形在 [Kni94] 中研究过。由于 $\mathcal{A}_t$ 可由 $\mathrm{e}^{-\Pr(0)t}\pi_*\mathrm{e}^{-t(X+\psi^u)}\pi^*$ 很好地近似，因此可得

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log \|\mathcal{A}_t\|_{L^2(\widetilde{M})} = \frac{1}{2}\Pr(0) - \Pr(0) = -\frac{1}{2} h_{\mathrm{top}}.$$

3.3.1. 相关结果。 Nica 研究了非初等双曲群上的球面平均算子 [Nic17; Nic24]（此处固定一个相对于某个有限生成元子集的字长度度量）。给定一个双曲群 Γ，其正则表示为 $(\lambda_\Gamma, \ell^2(\Gamma))$，他证明了

$$\|\lambda_\Gamma(\mathbf{1}_{S(n)})\|_{\ell^2(\Gamma)\to\ell^2(\Gamma)} \asymp n|S(n)|^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.7}$$

这与对半径为 t 的黎曼球面上的平均算子所作的估计相呼应。正如我们在注 3.2 中提到的，我们不考虑半径为 t 的黎曼球面上的平均算子，因为球面上的不同点被赋予了不同的权重——具体而言，我们使用权重 $J(x,y)^{-1}$，而不是 $1/\mathrm{vol}\ S(t)$。然而，由于函数 $J(x,y)$ 的特殊性质（见 §3.4），借助 [Nic24, §3] 中的余循环界，可以调整 Nica 的方法，以估计双曲群上某些类似算子的范数。最终，尽管连续情形需要做一些额外工作，我们的总体策略仍遵循与 [Nic24]，相同的原则；这并不令人意外，因为二者都高度依赖于格罗莫夫双曲性。

3.3.2. 加强命题 *3.6*。 当 M 具有负曲率时，通过修改下面的证明可以证明

$$\|\mathcal{L}_t\|_{L^2(\widetilde{M})} \le Ct\mathrm{e}^{\delta_0 t}, \tag{3.8}$$

这比（3.6）更为精确。事实上，在这种情况下，根据 [PPS15]，我们知道，对于任意赫尔德势 F，都有

$$\int_{A(x,t,c)} \exp\Big(\int_x^y \widetilde{F}\Big)\mathrm{dvol}(y) \le C\mathrm{e}^{\Pr(F)t}, \tag{3.9}$$

而这反过来比（3.5）更强。尽管当 M 仅为阿诺索夫时，应当可以期待（3.9）成立，但这一结果似乎尚未见于文献。改进后的估计

（3.8）对于改进定理1.11 将十分重要，从而允许紧 K 趋近于直线$\mathrm{Re}(z) = \delta_0$，当 $n \to +\infty$时。

3.4. 关于函数 J 的初步估计。首先，注意到我们具有对称性

$$J(x,y) = J(y,x).$$

雅可比矩阵 $J(x,\ y)$ 可以用势函数 ψ_u 来表示，该势函数定义于（3.4）中。

引理 3.7。若 $\varphi_t(x,\ v) = (y,\ w)$ 且 $t \geq 1$，则有

$$J(x,y) \asymp \exp\left(\int_0^t \psi_u(\varphi_s(x,v))\mathrm{d}s\right) = \det(\mathrm{d}\varphi_t)_{E_u(x,v)\to E_u(y,w)}.$$

若 $d(x,\ y) \leq 1$，则 $J(x,\ y) \asymp d(x,\ y)^{d-1}$。

证明。**1.** 若 $(y,w) = \varphi_t(x,v)$，我们可以表示为

$$J(x,y) = \det \mathrm{d}\pi \circ \mathrm{d}\varphi_t : \mathbb{V}(x,v) \to w^\perp \subset T_y\widetilde{M}.$$

回顾一下，$\mathbb{V} \subset E_u \oplus E_s$ 与 $\mathbb{V} \cap E_u = \mathbb{V} \cap E_s = \{0\}$。限制在 $\mathbb{V}$上，我们可以写成

$$\mathrm{d}\varphi_t = \mathrm{d}\varphi_t \circ p_{E_u} + \mathrm{d}\varphi_t \circ p_{E_s},$$

其中映射p_{E_u}：$\mathbb{V} \to E_u$ 与p_{E_s}：$\mathbb{V} \to E_s$ 均为可逆的。根据阿诺索夫性质，当 $r \to +\infty$时，$\mathrm{d}^{\varphi_t|E_s}$ 呈指数收缩，而$\mathrm{d}^{\varphi_t|E_u}$ 呈指数扩张。此外，E_u 与 E_s 被该流保持不变，并且二者都经由映射$\mathrm{d}\pi(y,w)$：$T_{(y,w)}(SM) \to T_yM$微分同胚地投影到$(\mathbb{R}w)^\perp$上（见 [Lef25，引理13.3.8]）。由此可得

$$\det(\mathrm{d}\pi \circ \mathrm{d}\varphi_t)_{\mathbb{V}\to w^\perp} \asymp \det(\mathrm{d}\varphi_t)_{E_u\to E_u}.$$

2. 若 $t = d(x,y) \leq 1$ 则利用（3.2），我们可以写成

$$J(x,y) = t^{d-1} \det \mathrm{d}_{tv} \exp_x(\cdot).$$

由于$\mathrm{d}_0 \exp_x(\cdot)$是恒等映射，我们推出，当 $d(x,y) \to 0$时，$J(x,y) \sim d(x,y)^{d-1}$。 □

A di引理 3.7 的直接推论是以下近似乘法性

引理 3.8。假设 x,y,z 按此顺序位于一条测地线上，且 $d(x,y)\ d(y,z) \geq 1$。那么

$$J(x,z) \asymp J(x,y)J(y,z),$$

其中隐含常数是一致的。

我们有如下比较性质：

引理 3.9。存在一个常数 $C > 0$，使得对于任意 x,y,z，满足 $d(x,y) \geq 1$ 且$d(x,z) \geq 1$:

$$C^{-1}\mathrm{e}^{-Cd(y,z)}J(x,z) \leq J(x,y) \leq C\mathrm{e}^{Cd(y,z)}J(x,z).$$

证明。只需证明 $d(y,z) \leq 1$ 的情形。此外，我们可以假设$d(x,y)\ d(x,z) \geq 1$，因为否则，由于当距离趋于 0 时 $J(x,y) \sim d(x,y)^{d-1}$，即可得出结论。证明依赖于关于测地线发散的引理 2.8。

1. 我们首先假设 y 和 z 都位于球面 $S(x,r)$ 上，记 $y=\exp_x(rv)$ 和 $z=\exp_x(rw)$，其中 $v,w\in S_xM$。于是，

$$J(x,y)\asymp\exp\Big(\int_0^r\psi^u(\varphi_t(x,v))\mathrm{d}t\Big),\quad J(x,z)\asymp\exp\Big(\int_0^r\psi^u(\varphi_t(x,w))\mathrm{d}t\Big).$$

由引理 2.8，我们有 $d(\varphi_t(x,v)\ \varphi_t(x,w))\leq C\mathrm{e}^{-c(r-t)}$，且由于 ψ^u 是赫尔德连续的，我们有

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^r\psi_u(\varphi_t(x,v))\mathrm{d}t-\int_0^t\psi_u(\varphi_t(x,w))\mathrm{d}t\Big|&\lesssim\int_0^r d_{\mathrm{Sas}}(c(0,t);c(1,t))^\alpha\mathrm{d}t\\&\lesssim\int_0^r\mathrm{e}^{-c\alpha(r-t)}\mathrm{d}t\lesssim 1.\end{aligned}$$

两边取指数可得

$$\frac{J(x,z)}{J(x,y)}\asymp 1.$$

2. 如果 y,z 到 x 的距离分别为 r,r'（其中 $|r-r'|\leq 1$），我们将 $y=:\exp_x(rv)$ 替换为 $y':=\exp_x(r'v)$。于是，我们很容易得到 $J(x,y')\asymp J(x,y)$，因为 y 和 y' 位于从 x 出发的同一条测地线上，并且 $d(y,y')\leq 1$。现在，由前一种情形可得$J(x,y')\asymp J(x,z)$，因此 $J(x,y)\asymp J(x,z)$。证明至此完成。□

引入 J 的一个略作修改的版本是方便的，它具有更好的性质。

定义 3.10. 我们设

$$\widetilde{J}(x,y):=\begin{cases}1 & \text{if } d(x,y)\leq 1\\ J(x,y) & \text{otherwise}\end{cases}.$$

则有如下结论

引理 3.11. 对于沿同一条测地线排列的任意 x,y,z，有

$$\widetilde{J}(x,z)\asymp\widetilde{J}(x,y)\widetilde{J}(y,z).$$

对于任意 $x,y,z\in M$，有

$$C^{-1}\mathrm{e}^{-Cd(y,z)}\widetilde{J}(x,z)\leq\widetilde{J}(x,y)\leq C\mathrm{e}^{Cd(y,z)}\widetilde{J}(x,z).$$

定义 3.12. 固定 $o\in M$。设 $x=\exp_o(r_xv)$ $y=\exp_o(r_yw)\in M$满足 $d(x,y)=t$。设 $j\in[-t,t]$ 使得 $d(o,y)-d(o,x)\in[j,j+1]$。我们定义 $r_j:=\frac{t-j}{2}$以及

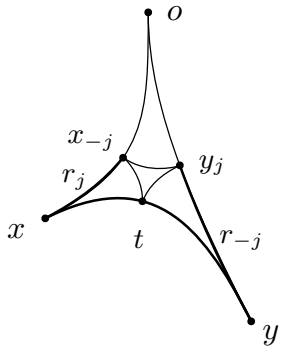
$$x_{-j}:=\exp_o\big((r_x-r_j)v\big),\qquad y_j=\exp_o\big((r_y-r_{-j})w\big).\tag{3.10}$$

格罗莫夫双曲性带来如下推论。

引理 3.13. 采用定义 *3.10*中的记号，我们有

$$d(x_{-j},y_{+j})=\mathcal{O}(1).$$

此外，x_{-j} 和y_j 到测地线段 $[xy]$ 的距离有界。



当 x 和 y 符合定义 3.12时，结合引理 3.11 与引理 3.13，我们得到

$$\widetilde{J}(x,x_{-j}) \asymp \widetilde{J}(x,y_j), \quad \widetilde{J}(x_{-j},y) \asymp \widetilde{J}(y_j,y).$$

此外，

$$\widetilde{J}(x,y) \asymp \widetilde{J}(x,x_{-j})\widetilde{J}(x_{-j},y)$$

并且

$$\widetilde{J}(x,y) \asymp \widetilde{J}(x,y_j)\widetilde{J}(y_j,y).$$

我们以如下引理结束本小节。

引理 3.14。 对于 $h(x,y)$ 上的任意可积函数 $M \times M$，有

$$\int_{\widetilde{M}} \int_{S(x,t)} h(x,y) \mathrm{d}\sigma_{S(x,t)}(y) \mathrm{dvol}(x) = \int_{\widetilde{M}} \int_{S(y,t)} h(x,y) \mathrm{d}\sigma_{S(y,t)}(x) \mathrm{dvol}(x).$$

证明。 在正规坐标中进行，并利用刘维尔测度在测地流下保持不变这一事实。此外，利用对称性 $J(x,y) = J(y,x)$。或者，也可以将该量视为 h 在子流形 $\sim \quad \sim N = \{(x,y) \in M \times M$ 上关于诱导测度的积分：$d(x,y) = t\}$，并以两种不同方式计算。Louis-Brahim Beaufort 曾向我们指出这一点。□

3.5. **命题 3.6 的证明。** 下文中，我们用 $A(x, r, d)$ 表示环域$\{y : |d(x, y) - r| \le d\}$。

证明。 **1.** 我们首先证明 $\limsup \frac{1}{t} \log \|\mathcal{L}_t\| \le \delta_0$。假设 $t \ge 1$，并固定 $\varepsilon > 0$。根据定义，

$$\|\mathcal{L}_t\| = \sup_{\|f\|=\|g\|=1} \langle \mathcal{L}_t f, g \rangle.$$

取 $f, g \in L^2(\widetilde{M})$。由于 $t \ge 1$，我们对满足 $d(x,y) \ge 1$ 的点对 (x,y) 积分，尤其是对 $\widetilde{J}(x,y) = J(x,y)$ 积分。因此，回顾 (3.3)，可得

$$\langle \mathcal{L}_t f, g \rangle = \int_{\widetilde{M}} \int_{S(x,t)} \widetilde{J}(x,y)^{-1} g(x) f(y) \mathrm{d}\sigma_{S(x,t)}(y).$$

固定一点 $o \in M$，如引理 3.13 所示。我们的思路是根据 (x,y) 到点 x 和 y 的相对距离，对这些点对进行分类。我们定义 $\chi_j(x,y) = \mathbf{1}_{d(y,o)-d(x,o)\in[j,j+1]}$。于是 $1 = \sum_{|j|\le t} \chi_j(x,y)$ 并且可以用以下表达式给出上述量的上界：

$$\langle \mathcal{L}_t f, g \rangle \le \sum_{|j|\le t} \int_{\widetilde{M}} \int_{S(x,t)} \widetilde{J}(x,y)^{-1} \chi_j(x,y) g(x) f(y) \mathrm{d}\sigma_{S(x,t)}(y).$$

对于 $|j| \leq t$，令 $a_j(x,y)$ 为定义在 $M \times M$ 上的光滑正函数，稍后将确定其取值。利用初等不等式 $uv \leq a_j u^2 + \frac{1}{a_j} v^2$ 和引理 3.14，可得

$$\langle \mathcal{L}_t f, g \rangle \leq \sum_{|j| \leq t} \int_{\widetilde{M}} \int_{S(x,t)} \frac{1}{a_j(x,y)} \chi_j(x,y) \widetilde{J}(x,y)^{-1} g(x)^2 \mathrm{d}\sigma_{S(x,t)}(y) \mathrm{dvol}(x)$$
$$+ \int_{\widetilde{M}} \int_{S(y,t)} a_j(x,y) \chi_j(x,y) \widetilde{J}(x,y)^{-1} f(y)^2 \mathrm{d}\sigma_{S(y,t)}(x) \mathrm{dvol}(y). \quad (3.11)$$

我们设

$$U(x,j) := \int_{S(x,t)} \frac{1}{a_j(x,y)} \chi_j(x,y) \widetilde{J}(x,y)^{-1} \mathrm{d}\sigma_{S(x,t)}(y),$$

and

$$V(y,j) := \int_{S(y,t)} a_j(x,y) \chi_j(x,y) \widetilde{J}(x,y)^{-1} \mathrm{d}\sigma_{S(y,t)}(x).$$

对 $\|f\| = \|g\| = 1$ 在（3.11）中取上确界，得到

$$\|\mathcal{L}_t\| \leq \sum_{|j| \leq t} \Big(\sup_{x \in \widetilde{M}} U(x,j) + \sup_{y \in \widetilde{M}} V(y,j) \Big). \quad (3.12)$$

现在我们选择

$$a_j(x,y) = \alpha_j \frac{\widetilde{J}(x_{-j},y)}{\widetilde{J}(x,x_{-j})},$$

其中 $\alpha_j = \exp(-j\delta_0)$。现在我们估计 $U(x,j)$ 和 $V(x,j)$。

估计 $U(x,j)$。根据引理 3.9，我们可以用环域上的积分替代球面上的积分。令 $\tilde{\chi}_j(x,y) = \mathbf{1}_{d(o,y)-d(o,x) \in [j-1,j+2]}$，则有

$$U(x,j) \lesssim \int_{A(x,t,1)} \frac{1}{a_j(x,y)} \tilde{\chi}_j(x,y) \widetilde{J}(x,y)^{-1} \mathrm{dvol}(y).$$

此外，根据引理 3.13，存在一个一致常数 $C > 0$ 使得

$$A(x,t,1) \cap \{y \ : \ d(x,o) - d(x,y) \in [j-1, j+2]\} \subset A(x_{-j}, r_j, C),$$

这里回顾一下，r_j 和 x_{-j} 已在（3.12）中定义。因此 $U(x,j)$ 还可进一步估计为

$$U(x,j) \lesssim \int_{A(x_{-j},r_j,C)} \frac{1}{a_j(x,y)} \tilde{\chi}_j(x,y) \widetilde{J}(x,y)^{-1} \mathrm{dvol}(y).$$

根据 $a_j(x,y)$ 的定义，我们有

$$\frac{1}{a_j(x,y)} \widetilde{J}(x,y)^{-1} = \alpha_j^{-1} \frac{\widetilde{J}(x,x_{-j})}{\widetilde{J}(x_{-j},y)\widetilde{J}(x,y)}.$$

由于 x_{-j} 与测地线段 $[xy]$ 的距离有界（对于 y 处于被积函数支集中的情形），引理 3.11 推出

$$\widetilde{J}(x,y) \asymp \widetilde{J}(x,x_{-j}) \widetilde{J}(x_{-j},y).$$

我们得到

$$\frac{1}{a_j(x,y)} \widetilde{J}(x,y)^{-1} \lesssim \alpha_j^{-1} \frac{1}{\widetilde{J}(x_{-j},y)^2}.$$

进而，由（3.5），

$$U(x,j) \lesssim \alpha_j^{-1} \int_{A(x_{-j},r_j,C)} \widetilde{J}(x_{-j},y)^{-2} \mathrm{dvol}(y) \leq C_\varepsilon \alpha_j^{-1} \mathrm{e}^{(2\delta_0+\varepsilon)r_j},$$

这里回顾一下，$2\delta_0 = \mathbf{Pr}(-2\psi^u)$。由于 $\alpha_j = \mathrm{e}^{-j\delta_0}$ 且 $r_j = \frac{t-j}{2}$，最终可得

$$U(x,j) \leq C_\varepsilon \mathrm{e}^{(\delta_0+\varepsilon)t}. \tag{3.13}$$

估计 $V(y,j)$。推导过程与上文相同，但我们使用另一种表达式

$$a_j(x,y) \asymp \alpha_j \frac{\widetilde{J}(y_{+j},y)}{\widetilde{J}(x,y_{+j})},$$

这由引理 3.9 以及以下事实 $d(x_{-j},y_{+j}) = \mathcal{O}(1)$推出

$$\begin{aligned} V(y,j) &\lesssim \alpha_j \int_{S(y_{+j},r_{-j})} \widetilde{J}(y_{+j},x)^{-2} \mathrm{d}\sigma_{S(y_{+j},r_{-j})}(x) \\ &\lesssim \mathrm{e}^{\delta_0 j} \mathrm{e}^{(2\delta_0+\varepsilon)r_{-j}} \lesssim \mathrm{e}^{(\delta_0+\varepsilon)t}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

将（3.13）、（3.14）代入（3.12）可得

$$\|\mathcal{L}_t\| \leq C_\varepsilon t \mathrm{e}^{(\delta_0+\varepsilon)t},$$

对于 $t \geq 1$，这对任意 $\varepsilon > 0$ 都成立，因此

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log \|\mathcal{L}_t\| \leq \delta_0. \tag{3.15}$$

2. 我们转而讨论 $\|\mathcal{L}_t\|$的下界。只需给出一个单位范数的函数 $f \in L^2(\widetilde{M})^\sim$，使得 $\|\mathcal{L}_t f\|$ 足够大。固定 $x_0 \in M$，并令

$$f(x) = \mathbf{1}_{d(x_0,x)\in[t-1,t+1]} J(x_0,x)^{-1}.$$

于是，由（3.5），

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int \mathbf{1}_{d(x_0,x)\in[t-1,t+1]} J(x_0,x)^{-2} \mathrm{dvol}(x) \leq C_\varepsilon \mathrm{e}^{(2\delta_0+\varepsilon)t}. \tag{3.16}$$

此外，对于 $x \in B(x_0,1)$，有

$$\mathcal{L}_t f(x) = \int_{S(x,t)} J(x_0,y)^{-1} J(x,y)^{-1} \mathrm{d}\sigma_{S(x,t)}(y).$$

由引理 3.9，由于 $d(x,x_0) \leq 1$ 对所有 $y \in S(x,t)$，我们有

$$J(x_0,y)^{-1} \gtrsim J(x,y)^{-1},$$

从而

$$\mathcal{L}_t f(x) \gtrsim \int_{S(x,t)} J(x,y)^{-2} \mathrm{d}\sigma_{S(x,t)}(y) \gtrsim \mathrm{e}^{(2\delta_0-\varepsilon)t}.$$

这对所有 $x \in B(x_0,1)$ 都成立，因此当 t 足够大时，我们有

$$\|\mathcal{L}_t f\|_{L^2} \gtrsim \mathrm{e}^{(2\delta_0-\varepsilon)t}. \tag{3.17}$$

将（3.16）与（3.17）结合可得

$$\|\mathcal{L}_t\| \geq \frac{\|\mathcal{L}_t f\|_{L^2}}{\|f\|_{L^2}} \geq c_\varepsilon \mathrm{e}^{(\delta_0-\varepsilon)t}.$$

这对任意 $\varepsilon > 0$ 均成立，因此

$$\liminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log \|\mathcal{L}_t\| \geq \delta_0. \tag{3.18}$$

结合 (3.15) 和 (3.18) 即可得证。 □

3.5.1. 双曲空间的情形。 当 M 具有常曲率 -1时，其万有覆盖空间是双曲 d-空间，在该空间上， $\mathcal{L}_t$ 与半波算子之间存在显式联系。根据 [Hel84，第二章，习题 F1-F2]（参见书末的习题解答，特别是第 540 页的等式 (4)），在双曲空间 $\mathbb{H}^d$上，存在一个维数相关的常数 c_d 使得

$$\mathcal{L}_t = c_d \frac{\sinh(t)}{\sinh^{d-1}(t)} \int_0^t \cos\left(s(\Delta_{\mathbb{H}^d} - (\tfrac{d-1}{2})^2)^{\frac{1}{2}}\right)(\cosh(t)-\cosh(s))^{\frac{d-3}{2}} \mathrm{d}s. \tag{3.19}$$

由于 $\Delta_{\mathbb{H}^d}$ 的谱为半直线 $[(\frac{d-1}{2})^2, +\infty)$，由谱定理可得：

$$\|\mathcal{L}_t\|_{L^2(\mathbb{H}^d)} = c_d \frac{\sinh(t)}{\sinh^{d-1}(t)} \int_0^t (\cosh(t)-\cosh(s))^{\frac{d-3}{2}} \mathrm{d}s.$$

接着，经过简短计算可得

$$\|\mathcal{L}_t\|_{L^2(\mathbb{H}^d)} \underset{t\to+\infty}{\sim} c_d t \exp(-(\tfrac{d-1}{2})t), \tag{3.20}$$

对于某个其他维数常数 c_d。这是 Nica估计（3.7）的连续类比。若要为 $\pi_* \mathrm{e}^{-t(\widetilde{X}+\widetilde{F})}\pi^*$ 的算子范数获得类似的渐近结果，将会很有意思：当 M仅假设为阿诺索夫，且 $\widetilde{F}$是某个赫尔德连续势函数 $F \in C^\alpha(SM)$ 的提升时。

3.6. 阶数为$\lesssim h^{-1}$的模态传播。算子 $\mathcal{L}_t$ 涉及对整个纤维 S_xM上的$\widetilde{\ }$函数取平均，换句话说，就是将函数投影到纤维上的 0阶模态空间。现在，我们将函数投影到纤维上以 $\gtrsim h$ 为尺度振荡的函数空间。

我们考虑算子 $g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}})\mathrm{e}^{-t\widetilde{X}}g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}})$ 作用于 $L^2(S\widetilde{M})$，其中 g 为紧支撑函数。该算子先滤除纤维中的高阶傅里叶模态（阶为$\gtrsim 1/h$），再由流进行传播，最后再次施加滤波器~。该算子在思想上类似于 $\mathrm{Op}_h(\mathbf{1}_{|\xi|_{\widetilde{\mathbb{V}}}\leq 1})\mathrm{e}^{-tX}\mathrm{Op}_h(\mathbf{1}_{|\xi|_{\widetilde{\mathbb{V}}}\leq 1})$，但其优点在于具有简单的几何定义，而无需求助于半经典量子化。此外， $L^2(S\widetilde{M})$ 中函数的球面平均分解使得能够~无缝地用球面平均算子的算子范数来估计 $g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}})\mathrm{e}^{-tX}g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}})$ 的算子范数。

~3.6.1. 算子范数： $g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}})\mathrm{e}^{-tX}g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}})$。 下列命题使如下直观想法精确化：傅里叶模态在演化过程中逃逸至无穷远。

命题 3.15。 设 $d=\dim(M)$。那么，对于任意 *Schwartz*函数 g，有

$$\left\|g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}})\mathrm{e}^{-t\widetilde{X}}g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}})\right\|_{L^2(S\widetilde{M})}\lesssim(1+h^{-(d-1)})\|\mathcal{L}_t\|_{L^2(\widetilde{M})}.$$

此外，根据命题 *3.6*，右端小于 $C_\varepsilon(1+h^{-(d-1)})\mathrm{e}^{(\delta_0+\varepsilon)t}$。

注记3.16。 估计需要达到时间 $t\gtrsim|\log\,h|$ 才会变得非平凡，这并不令人意外。事实上，如果 u 的振荡很弱，那么 $\mathrm{e}^{-tX}u$ 会集中在阶数为 $\mathrm{e}^{\gamma_{\max}t}$ 的垂直傅里叶模态上，其中 $\gamma_{\max}$ 是流的最大膨胀率。因此，当 $\mathrm{e}^{\gamma_{\max}t}\ll h^{-1}$ 时，我们不应观察到范数衰减。

证明。 证明依赖于 § L^2-函数按球谐函数展开的分解（见 §2.4.1），以及对特征函数的逐点估计。我们默认将$\widetilde{\ }$在 M 上的函数视为 SM 上的函数，即在投影$\sim$ $SM\to M$的纤维上为常数的函数，反之亦然。根据定义，由于 $g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}})$ 是自伴的，我们有

$$\left\|g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}})\mathrm{e}^{-t\widetilde{X}}g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}})\right\|_{L^2(S\widetilde{M})}=\sup_{\|u\|=\|v\|=1}\langle\mathrm{e}^{-t\widetilde{X}}g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}})u,g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}})v\rangle.$$

令 $u,w\in L^2(S\widetilde{M})$ 满足 $\|u\|_{L^2}=\|w\|_{L^2}=1$。如 §2.4中所示，我们展开

$$u(x,v)=\sum_{m\geq0}u_m(x)\omega_m(x,v),\qquad w(x,v)=\sum_{n\geq0}w_n(x)\omega_n(x,v).$$

于是，

$$g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}})u=\sum_{m\geq0}g(h^2\lambda_m)u_m\omega_m,\qquad g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}})w=\sum_{n\geq0}g(h^2\lambda_n)w_n\omega_n.$$

我们定义

$$U(x):=\Big(\sum_{m\geq0}|u_m(x)|^2\Big)^{\frac12},\qquad W(x):=\Big(\sum_{n\geq0}|w_n(x)|^2\Big)^{\frac12}.$$

注意到 $\|U\|_{L^2}=\|W\|_{L^2}=1$。由柯西–施瓦茨不等式可得

$$\left|g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}})u(x,v)\right|\leq\Big\|\sum_{m\geq0}g(h^2\lambda_m)^2|\omega_m|^2\Big\|^{\frac12}_{L^\infty(S^{d-1})}\cdot U(x),$$

对于 w，同理可得。于是，

$$\langle\mathrm{e}^{-t\widetilde{X}}g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}})u,g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}})w\rangle\leq\Big\|\sum_{m\geq0}g(h^2\lambda_m)^2|\omega_m|^2\Big\|_{L^\infty(S^{d-1})}\cdot\langle\mathrm{e}^{-t\widetilde{X}}U,W\rangle.$$

$\widetilde{\ }$由于函数 U,W在 $SM\to M$和 $\|U\|_{L^2}=\|W\|_{L^2}=1$的纤维上为常数，因此有

$$\langle\mathrm{e}^{-t\widetilde{X}}U,W\rangle=\langle\mathcal{L}_tU,W\rangle\leq\|\mathcal{L}_t\|_{L^2(\widetilde{M})}.$$

最终，

$$\left\|g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}})\mathrm{e}^{-t\widetilde{X}}g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}})\right\|_{L^2(S\widetilde{M})}\leq\|\mathcal{L}_t\|\cdot\Big\|\sum_{m\geq0}g(h^2\lambda_m)^2|\omega_m|^2\Big\|_{L^\infty(S^{d-1})}.$$

为了控制右端项，我们回顾 Avakumović 的魏尔定律逐点形式 [Ava56]:

$$\sum_{\lambda_m \leq \lambda} |\omega_m(x,v)|^2 \lesssim 1 + \lambda^{\frac{d-1}{2}}.$$

对求和进行分部求和后可得

$$\sum_{m\geq 0} g(h^2\lambda_m)^2 |\omega_m(x,v)|^2 = -\int_0^{+\infty} \Big(\sum_{\lambda_m \leq \lambda} |\omega_m(x,v)|^2 \Big) \partial_\lambda \big[g(h^2\lambda)^2 \big] \mathrm{d}\lambda,$$

进而可将其界定为某个常数乘以

$$\int_0^{+\infty} (1+\lambda^{\frac{d-1}{2}}) h^2 |(g^2)'|(h^2\lambda) \mathrm{d}\lambda \lesssim 1 + h^{-(d-1)}.$$

证明至此完成。 □

4. 概率低频估计

4.1. **表示的强收敛**。 关于强收敛及其在谱隙中的应用，我们推荐参阅近期综述 [Mag25；vH25] ，其中对相关内容作了流畅的介绍。

定义 4.1。 设 Γ 是一个离散群。 Γ 的正则表示 是酉表示 $\lambda_\Gamma : \Gamma \to U(\ell^2(\Gamma))$，定义如下

$$\lambda_\Gamma(\gamma)(x_g)_{g\in\Gamma} = (x_{\gamma^{-1}g})_{g\in\Gamma}.$$

换言之，函数 $f : g \mapsto f(g)$ 映射为 $\lambda_\Gamma(\gamma)f : g \mapsto f(\gamma^{-1}g)$。

定义 4.2。 离散群 Γ 的酉表示序列 (ρ_n, V_n) 若强收敛 到正则表示 $(\lambda_\Gamma, \ell^2(\Gamma))$，则对所有 $w \in \mathbb{C}[\Gamma]$,

$$\|\rho_n(w)\|_{V_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|\lambda_\Gamma(w)\|_{\ell^2(\Gamma)}, \tag{4.1}$$

其中范数均为算子范数。如果序列 (ρ_n) 是随机的，我们称 (ρ_n)渐近几乎必然强收敛 （或 *a.a.s.*），若（4.1）依概率成立。

Equa条件（4.1）仅表示：对于任意有限支撑映射 $\gamma \in \Gamma \mapsto a_\gamma \in \mathbb{C}$, 有

$$\Big\| \sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma \rho_n(\gamma) \Big\|_{V_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Big\| \sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma \lambda_\Gamma(\gamma) \Big\|_{\ell^2(\Gamma)}. \tag{4.2}$$

以下定理最近由 Magee–Puder–van Handel 证明。

定理 4.3 ([MPvH25，定理 1。1])。 设 Γ 是一个亏格为 ≥ 2 的闭曲面的基本群。若 $\phi_n \in \mathrm{Hom}(\Gamma, S_n)$ 是均匀随机选取的，则表示序列 $\rho_n := \mathrm{std}_{n-1} \circ \phi_n$ 几乎必然强收敛到正则表示。这里 std_{n-1} 是 $(n-1)$ 维的标准不可约表示 S_n。

通过矩阵放大（例如参见 [Mag25，§3]），可以将（a_γ 式（4.2）中的标量系数替换为矩阵；再通过用有限秩算子逼近紧算子，可以将（4.2）改进为

命题 4.4 ([Mag25，命题 3.3])。 假设 (ρ_n, V_n) 强收敛到正则表示（几乎必然渐近地）。设 $\mathcal{H}$ 是一个可分希尔伯特空间，并记$\mathcal{K}(\mathcal{H})$ 为作用于 $\mathcal{H}$上的紧算子空间。设 $\varepsilon > 0$。那么，对于任意有限支撑映射 $\gamma \in \Gamma \mapsto a_\gamma \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$，几乎必然渐近地有

$$\Big\| \sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma \otimes \rho_n(\gamma) \Big\|_{\mathcal{H}\otimes V_n} \leq \Big\| \sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma \otimes \lambda_\Gamma(\gamma) \Big\|_{\mathcal{H}\otimes V_n} + \varepsilon. \tag{4.3}$$

命题 4.4 的意义在于，在许多情况下，等式（4.3）右侧出现的极限算子更容易理解。我们将利用命题 4.4 证明以下结果。回顾一下，

$$\widehat{f}(-\mathrm{i}\mathbf{X}_{\mathcal{E}}) = \int f(t)\mathrm{e}^{-t\mathbf{X}_{\mathcal{E}}}\,\mathrm{d}t.$$

命题 4.5。 假设序列 (ρ_n, V_n) 几乎必然强收敛。那么，对于任意在 f 附近为零的光滑实值紧支撑函数，以及任意 $\varepsilon > 0$，几乎必然地，对 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\rho_n}$，有：

$$\big\|g(h^2\Delta_{\mathbb{V}}^E)\widehat{f}(-\mathrm{i}\mathbf{X}_{\mathcal{E}})g(h^2\Delta_{\mathbb{V}}^E)\big\|_{L^2(SM,\mathcal{E})} \leq \big\|g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}})\widehat{f}(-\mathrm{i}\widetilde{X})g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}})\big\|_{L^2(S\widetilde{M})} + \varepsilon.$$

命题 4.5 将在下文 §4.4 中经过一些预备工作后证明。利用命题 3.15、命题 3.6 和命题 3.15，我们得到以下推论。

推论 4.6。 假设序列 (ρ_n, V_n) 几乎必然强收敛到正则表示。令 f_T 在 $[T, T+1]$上紧支撑，且令 $h \leq 1$。那么，对于任意 $\varepsilon > 0$，几乎必然地，对 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\rho_n}$，有：

$$\big\|g(h^2\Delta_{\mathbb{V}}^E)\widehat{f_T}(-\mathrm{i}\mathbf{X}_{\mathcal{E}})g(h^2\Delta_{\mathbb{V}}^E)\big\|_{L^2(SM,\mathcal{E})} \leq C_\varepsilon h^{-(d-1)}\mathrm{e}^{(\delta_0+\varepsilon)T}\|f_T\|_\infty.$$

4.2.**黎曼覆盖、 Γ 的置换表示与酉平坦丛**。令 $M_n \to M$ 为有限次覆盖。回顾一下，存在一个光滑分裂

$$C^\infty(M_n) = C^\infty(M) \oplus C^\infty_{\mathrm{new}}(M_n).$$

如引言中所述，覆盖 M_n 与同态$\phi_n \in \mathrm{Hom}(\Gamma, S_n)$相关联。将 ϕ_n 与 S_n的标准不可约（$n-1$维）表示复合，可得到一个表示 $\rho_n\colon \Gamma \to U(V_n^0)$，其中 $V_n^0 = \mathbf{1}^\perp \subset \mathbb{C}^n$是均值为 0 的向量所构成的子空间，即

$$V_n^0 = \Big\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{C}^n \ :\ \sum x_i = 0\Big\}.$$

关键在于，表示 ρ_n 导出一个同构

$$C^\infty_{\mathrm{new}}(M_n) \simeq C^\infty(M, E_{\rho_n}), \tag{4.4}$$

其中E_{ρ_n} 是 M 上与 ρ_n相关联的酉平坦丛，定义为商

$$E_{\rho_n} := \Gamma\backslash(\widetilde{M} \times V_n^0), \qquad \gamma.(x, z) = (\gamma.x, \rho_n(\gamma)z). \tag{4.5}$$

丛$E_{\rho_n} \to M$ 提升为丛$\mathcal{E}_{\rho_n} \to SM$，其光滑截面对应于 $C^\infty(SM_n)$中在投影 $SM_n \to SM$的纤维上平均值为0的函数。由于 Γ 通过 $\gamma.(x,v) = (\gamma x, \mathrm{d}\gamma(x)v)$作用于 SM，我们有一个自然等同

$$\mathcal{E}_{\rho_n} = \Gamma \backslash (\widetilde{SM} \times V_n^0).$$

4.3. **平坦丛在 SM 上的截面作为等变函数**。从现在起，我们在以下抽象框架下工作：(ρ_n, V_n) 是 Γ 的一列随机表示，并且几乎必然强收敛到正则表示，其含义见定义 4.2。我们关注的主要例子由定理 4.3给出。对于 ρ_n 的任意表示 Γ，记 E_{ρ_n} 为 M 上的酉平坦丛，定义方式如（4.5）所示；记 $\mathcal{E}_{\rho_n}$ 为该丛在 SM上的提升。

4.3.1. 函数空间。这里，我们用 $\mathbf{x} = (x,v)$ 表示 SM中的点。$\mathcal{E}_{\rho_n}$ 的任意光滑截面都对应于一个光滑函数 $f\colon SM \to V_n$，该函数满足等变性

$$f(\gamma \mathbf{x}) = \rho_n(\gamma) f(\mathbf{x}).$$

这类光滑函数构成的空间记为 $C^\infty_{\rho_n}(SM, V_n)$。令 F为 SM 上 Γ 作用的一个基本域（可通过提升 M上 Γ 作用的一个基本域得到）。我们定义一个范数

$$\|f\|_{L^2_{\rho_n}(\widetilde{SM}, V_n)} := \int_F \|f(\mathbf{x})\|^2_{V_n} \mathrm{d}\mathbf{x},$$

并令 $L^2_{\rho_n}(\widetilde{SM}, V_n)$ 为 $C^\infty_{\rho_n}(\widetilde{SM}, V_n)$ 关于此范数的完备化。同构 $C^\infty(SM, \mathcal{E}_{\rho_n}) \simeq C^\infty_{\rho_n}(SM, V_n)$ 可扩张为希尔伯特空间之间的同构

$$L^2(SM, \mathcal{E}_{\rho_n}) \simeq L^2_{\rho_n}(\widetilde{SM}, V_n). \tag{4.6}$$

4.4. **命题 4.5 的证明**。从现在起，为了简化记号，我们在某些地方省略 ρ_n下标。在同构（4.6）下，算子 $\mathrm{e}^{-t\mathbf{X}_\mathcal{E}}$ 对应于$_\sim \mathrm{e}^{-tX}$。类似地，$\Delta^E_\mathbb{V}$ 对应于 $\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}}$。因此，在此同构下，算子

$$g(h^2\Delta^E_\mathbb{V}) \widehat{f}(-\mathrm{i}\mathbf{X}_\mathcal{E}) g(h^2\Delta^E_\mathbb{V}) : L^2(SM, E_{\rho_n}) \to L^2(SM, E_{\rho_n})$$

对应于算子

$$g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}}) \widehat{f}(-\mathrm{i}\widetilde{X}) g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}}) : L^2_{\rho_n}(\widetilde{M}, V_n) \to L^2_{\rho_n}(\widetilde{M}, V_n). \tag{4.7}$$

请注意，我们还没有完成，因为我们需要一个作用于 $L^2(\widetilde{M}, \mathbb{C})$ 上的算子。为了应用强收敛技术，处理紧算子至关重要，而下面的引理将确保这一点。

引理 4.7。假设 f 具有紧支撑，并且在 $t = 0$附近为零。则算子 (4.7) 具有光滑核。

证明。证明依赖于波前集论证；关于相关介绍，请参阅 [Lef25的第 4] 章。注意， h 是固定的，并且我们使用经典波前集。

限制在 S_xM 上时，算子 $g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}})$ 作为 $g(h^2\Delta_{S^{d-1}})$ 作用。由于 $\Delta_{S^{d-1}}$ 是 S^{d-1} 上的椭圆算子，且 g 是紧支撑的，我们知道算子 $g(h^2\Delta_{S^{d-1}})$ 是光滑化的，将其视为作用于 $\mathcal{D}'(S^{d-1})$ 的算子。这例如可由参数子构造得到。因此，概略地说，算子 $g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}})$ 的核为

$$K((x,v);(y,w)) = \delta(x-y)\varphi(v,w),$$

其中， φ 是 $g(h^2\Delta_{S^{d-1}})$ 的核，它是一个光滑函数。这里的意思是，对于任意 u_1, $u_2 \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(SM)$，我们都有

$$\langle g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}})u_1, u_2\rangle = \int_{\widetilde{M}} \Big(\int_{S_x\widetilde{M}\times S_x\widetilde{M}} \varphi(v_1,v_2)u_1(x,v_1)u_2(x,v_2)\mathrm{d}v_1\mathrm{d}v_2\Big)\mathrm{dvol}(x),$$

其中我们将 $S_x\widetilde{M} \simeq S^{d-1}$ 视为用于计算 $\varphi(v_1,v_2)$。因此，对于任意 $u \in \mathcal{E}'(S\widetilde{M})$（紧支集分布的空间），我们都有

$$\mathrm{WF}\left(g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}})u\right) \subset \big\{(\mathbf{x},\xi) \in \mathrm{WF}(u) \ : \ \xi(\mathbb{V}) = \{0\}\big\}. \tag{4.8}$$

现在，根据 [Lef25，引理 4.3。4] （另见 [Lef25，习题 6.2。10]），对任意 $u \in \mathcal{E}'(SM)$，我们有：

$$\mathrm{WF}\left(\widehat{f}(-\mathrm{i}\widetilde{X})u\right) \subset \left\{(\mathbf{x},\xi) \ : \ \begin{array}{l} \xi(X(\mathbf{x})) = 0, \exists t \in \mathrm{Supp}(f), \\ (\varphi_{-t}(\mathbf{x}), \mathrm{d}\varphi_{-t}^{-\top}\xi) \in \mathrm{WF}(u) \end{array} \right\}. \tag{4.9}$$

将（4.8）与（4.9）结合起来，可得对任意 $u \in \mathcal{E}'(SM)$，有

$$\mathrm{WF}\left(g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}})\widehat{f}(-\mathrm{i}\widetilde{X})g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}})u\right) \subset \left\{(\mathbf{x},\xi) \ : \ \begin{array}{l} \exists t \neq 0, \xi(\mathbb{V}) = \{0\}, \\ \xi(X(\mathbf{x})) = 0, \mathrm{d}\varphi_{-t}^{-\top}\xi(\mathbb{V}) = \{0\} \end{array} \right\}.$$

现在，任何满足 $\xi(\mathbb{V}) = \xi(\mathbb{R}X) = \xi(\mathrm{d}\varphi_{-t}\mathbb{V}) = \{0\}$ 的 ξ 都必为零，因为

$$\mathbb{R}X \oplus \mathbb{V} \oplus \mathrm{d}\varphi_{-t}\mathbb{V} = T(SM).$$

根据维数的考虑，只需证明对于 $t \neq 0$， $v \in (\mathbb{R}X \oplus \mathbb{V}) \cap \mathrm{d}\varphi_{-t}\mathbb{V}$ 蕴含 $v = 0$。考虑这样一个 v。由于流保持总和 $\mathbb{H} \oplus \mathbb{V}$，我们有 $v \in (\mathbb{R}X \oplus \mathbb{V}) \cap (\mathbb{H} \oplus \mathbb{V})$，进而有 $v \in \mathbb{V}$，因为 $\mathbb{R}X \oplus \mathbb{H} \oplus \mathbb{V} = T(SM)$。这表明 $v = 0$，因为对于 $t \neq 0$， $\mathbb{V} \cap (\mathrm{d}\varphi_{-t}\mathbb{V}) = \{0\}$，根据 Klingenberg 结果 [Kli74]。由此可得一个连续算子

$$g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}})\widehat{f}(-\mathrm{i}\widetilde{X})g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}}) : \mathcal{E}'(S\widetilde{M}) \to C^\infty(S\widetilde{M}).$$

根据 [Lef25，引理 3.2。3], 该算子的核是光滑的。 □

命题 4.5 的证明结束。记 $K(\mathrm{x}, \mathrm{x}')$ 为算子 $g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}})\,\widehat{f}\,(-\mathrm{i}\,\widetilde{X})g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}})$ 的核。根据引理 4.7，该核是光滑的。记 ${}^a\gamma$ 为算子 $L^2(F) \to L^2(F)$，其核为 ${}^a\gamma(\mathrm{x}, \mathrm{x}') := K(\mathrm{x}\ \gamma\mathrm{x}')$。注意，还存在另一个希尔伯特空间的同构

$$L^2_{\rho_n}(S\widetilde{M}, V_n) \simeq L^2(F, V_n) \simeq L^2(F) \otimes V_n, \tag{4.10}$$

其中第一个同构是限制映射 $f \mapsto f_{|F}$，其逆映射为

$$s \mapsto \sum_{\gamma\in\Gamma} \rho_n(\gamma) s(\gamma^{-1}\bullet)\mathbf{1}_{\gamma F}.$$

在同构（4.10）下，算子（4.7）酉共轭为

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma \otimes \rho_n(\gamma) : L^2(F)\otimes V_n \to L^2(F)\otimes V_n.$$

由于 $K(\mathbf{x},\mathbf{x}')$ 连续且 F 有界，因此算子 a_γ 是希尔伯特–施密特算子，故在 $L^2(F)$上是紧的。由于测地流具有有限传播速度，只有有限多个 $\gamma\in\Gamma$满足 $a_\gamma \neq 0$。因此，我们可以应用命题 4.4 ，推出对任意 $\varepsilon>0$，几乎必然有

$$\Big\| \sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma \otimes \rho_n(\gamma) \Big\|_{L^2(F)\otimes V_n} \leq \Big\| \sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma \otimes \lambda_\Gamma(\gamma) \Big\|_{L^2(F)\otimes \ell^2(\Gamma)} + \varepsilon. \tag{4.11}$$

这里 $(\lambda_\Gamma, \ell^2(\Gamma))$ 是 Γ的正则表示。最后，存在一个同构$\frown L^2(F)\otimes\ell^2(\Gamma)\simeq L^2(SM)$，它将 $u\otimes\delta_\gamma$映射为函数 $u(\gamma^{-1}\bullet)\cdot\mathbf{1}_{\gamma F}$。在此同构下，等式（4.11）右端的算子对应于

$$g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}})\widehat{f}(-\mathrm{i}\widetilde{X})g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}}) : L^2(\widetilde{SM}) \to L^2(\widetilde{SM}).$$

因此，我们可以将（4.11）改写为

$$\|g(h^2\Delta^E_{\mathbb{V}})\widehat{f}(-\mathrm{i}\mathbf{X}_{\mathcal{E}})g(h^2\Delta^E_{\mathbb{V}})\|_{L^2(SM,\mathcal{E}_{\rho_n})} \leq \big\|g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}})\widehat{f}(-\mathrm{i}\widetilde{X})g(h^2\Delta_{\widetilde{\mathbb{V}}})\big\|_{L^2(\widetilde{SM})} + \varepsilon,$$

渐近几乎必然。至此，证明完毕。 □

5. 主定理的证明

从现在起，我们只在 $\mathcal{M}=SM$ 上进行研究，其中的点用字母x表示。

5.1. **各向异性 Sobolev 空间**。 我们回顾 Faure 和 Sjöstrand 在 [FS11] 中引入的各向异性 Sobolev 空间的构造。出发点是观察到，对于 $f\in C^\infty(\mathcal{M})$，反向演化 $\mathrm{e}^{-tX}f = f\circ\varphi_{-t}$ 会在稳定方向上产生快速振荡，而在不稳定方向上产生缓慢振荡。这促使我们考虑一种各向异性 范数，它允许稳定方向上的不规则性，同时惩罚不稳定方向上的不规则性。

回顾（ $T\mathcal{M} = E_0\oplus E_u\oplus E_s$ 中的阿诺索夫分裂（2.1）。考虑对偶分布

$$T^*\mathcal{M} = E_0^*\oplus E_s^*\oplus E_u^*,$$

由 $E_0^*(E_s\oplus E_u)=0$、$E_s^*(E_s\oplus E_0)=0$ 和 $E_u^*(E_u\oplus E_0)=0$ 定义。那么，对于所有 $t\geq 0$,

$$\forall \xi\in E_s^*,\ |(\mathrm{d}\varphi_t)^{-\top}\cdot\xi| \leq C\mathrm{e}^{-ct}|\xi|, \qquad \forall\xi\in E_u^*,\ |(\mathrm{d}\varphi_{-t})^{-\top}\cdot\xi| \leq C\mathrm{e}^{-ct}|\xi|.$$

子丛 E_0^* 称为捕获集。我们用 H 表示与哈密顿量 $p(x,\xi)=\xi(X(x))$ 相关联的哈密顿向量场。于是， H 生成流

$$\Phi_t(x,\xi) = \big(\varphi_t(x), (\mathrm{d}\varphi_t(x))^{-\top}\xi\big),$$

它是 φ_t 到 $T^*\mathcal{M}$的辛提升。

对于下一个命题，我们引用 [Lef25]。符号的 Hörmander 类 $S^s_{1-}(T^*\mathcal{M})$在附录 B中引入。

命题 5.1 (逃逸函数的构造，[Lef25，引理 9.1。9])。 设 N_0是 捕获集 $E_0^* \subset T^*\mathcal{M}$的一个锥形邻域。存在一个光滑度量 g在 $T^*\mathcal{M}$上，一个常数 $C > 0$以及一个阶函数 $m \in C^\infty(T^*\mathcal{M},\ [-1,1])$，使得在零截面之外， $m \equiv 1$ 在 E_s^*的一个锥形邻域内，$m \equiv -1$ 在 E_u^*的一个锥形邻域内；并且函数

$$G_m := m(x,\xi)\log|\xi|_g,$$

满足 $\mathrm{e}^{sG_m} \in S^s_{1-}(T^*\mathcal{M})$ 对所有 $s \in \mathbb{R}$ 都成立，并且 G_m 沿着 Φ_t 的流线递减：

- $HG_m(x,\ \xi) \le 0$ 当 $|\xi|_g \ge 1$。
- $HG_m(x,\ \xi) \le -C$ 当 $|\xi|_g \ge 1$ 位于 E_0^* 的锥形邻域 N_0 之外时。

函数 G_m 称为逃逸函数。

设 $\mathcal{E} \to \mathcal{M}$ 为一个酉平坦丛。在附录 B中，我们引入半经典量子化过程 $\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}$，将符号 $a \in C^\infty(T^*\mathcal{M})$ 映射为作用于 $\mathcal{E}$的截面上的算子。有关 $\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}$演算的性质，请参阅附录。

命题 5.2 (各向异性 Sobolev 空间)。 对于任意 $s \in \mathbb{R}$，存在一个常数$h_0 = h_0(s) > 0$，使得对于任意 $0 < h < h_0$，以及任意酉平坦丛 $\mathcal{E} \to \mathcal{M}$，算子 $\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(\mathrm{e}^{sG_m})\colon C^\infty(\mathcal{M},\ \mathcal{E}) \to C^\infty(\mathcal{M},\ \mathcal{E})$ 可逆。令

$$\|u\|_{\mathcal{H}_h^s} := \left\|\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(\mathrm{e}^{sG_m})u\right\|_{L^2(\mathcal{M},\mathcal{E})}.$$

空间 $\mathcal{H}_h^s(\mathcal{M},\mathcal{E})$ 随后定义为.....的闭包

$$\mathcal{H}_h^s(\mathcal{M},\mathcal{E}) := \overline{C^\infty(\mathcal{M},\mathcal{E})}^{\|\bullet\|_{\mathcal{H}_h^s}}.$$

注意， $C^\infty(\mathcal{M},\mathcal{E}) \subset \mathcal{H}_h^s(\mathcal{M},\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}'(\mathcal{M},\mathcal{E})$，且嵌入稠密且连续。

证明。 由附录 B.16 中的推论 B可得。 □

无界算子 $\mathrm{X}_{\mathcal{E}}\colon \mathcal{H}_h^s(\mathcal{M},\mathcal{E}) \to \mathcal{H}_h^s(\mathcal{M},\mathcal{E})$ 的定义域为

$$\mathcal{D}(\mathbf{X}_{\mathcal{E}}) = \left\{u \in \mathcal{H}_h^s(\mathcal{M},\mathcal{E}) \ :\ \mathbf{X}_{\mathcal{E}}u \in \mathcal{H}_h^s(\mathcal{M},\mathcal{E})\right\},$$

其中，$\mathrm{X}_{\mathcal{E}}u$ 按分布的意义理解。

命题 5.3 ($\mathrm{e}^{-t\mathbf{X}_{\mathcal{E}}}$的强连续性)。 传播子 $\mathrm{e}^{-t\mathbf{X}_{\mathcal{E}}}$ 可扩张为 $\mathcal{H}_h^s(\mathcal{M},\mathcal{E})$ 上的强连续半群，其中 $t \ge 0$。存在常数 $C_s, \nu_s, h_0(s) >0$，它们仅取决于 s，使得对于 $0 < h < h_0(s)$，有

$$\left\|\mathrm{e}^{-t\mathbf{X}_{\mathcal{E}}}\right\|_{\mathcal{H}_h^s(\mathcal{M},\mathcal{E})} \le C_s\mathrm{e}^{\nu_s t}, \qquad \forall t \ge 0$$

证明。根据半群性质，只需证明当 $0 \le t \le t_0$ 对某个 $t_0 > 0$ 时结论成立。由于 $\mathbf{e}^{t\mathbf{X}_{\mathcal{E}}}$ 在 $L^2(\mathcal{M},\mathcal{E})$ 上是酉的，因此等价地，我们需要证明存在一个常数 C，使得对所有 $0 \le t \le t_0$,

$$\|\mathrm{e}^{t\mathbf{X}_{\mathcal{E}}}\,\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(\mathrm{e}^{sG_m})\mathrm{e}^{-t\mathbf{X}_{\mathcal{E}}}\,\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(\mathrm{e}^{sG_m})^{-1}\|_{L^2(\mathcal{M},\mathcal{E})} \le C.$$

上面的算子范数有如下界

$$\|\mathrm{e}^{t\mathbf{X}_{\mathcal{E}}}\operatorname{Op}_h^{\mathcal{E}}(\mathrm{e}^{sG_m})\mathrm{e}^{-t\mathbf{X}_{\mathcal{E}}}\operatorname{Op}_h^{\mathcal{E}}(\mathrm{e}^{-sG_m})\|\cdot\|\operatorname{Op}_h^{\mathcal{E}}(\mathrm{e}^{-sG_m})^{-1}\operatorname{Op}_h^{\mathcal{E}}(\mathrm{e}^{sG_m})^{-1}\|.$$

由此可得推论 B.16 和命题 B.17。

□

各向异性 Sobolev 空间 $\mathcal{H}_h^s(\mathcal{M},\mathcal{E})$ 可按 [FS11] 中的方法使用，从而得到以下结果

命题 *5.4*（预解的亚纯延拓，[*FS11*，定理 *1.5*]）。设 $\mathcal{E}\to\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{M}$上的一个酉平坦丛。那么，算子族 $(X_{\mathcal{E}}+z)^{-1}:C^\infty(\mathcal{M},\mathcal{E})\to\mathcal{D}'(\mathcal{M},\mathcal{E})$，最初由公式 *(1.2)* 在 $\mathrm{Re}(z)>0$ 时定义，可亚纯延拓至 $\mathbb{C}$。其极点均为有限秩，称为 *Pollicott–Ruelle* 共振。

$\mathrm{X}_{\mathcal{E}}$ 的 Pollicott–Ruelle 共振集合记为 $\mathrm{Res}(\mathrm{X}_{\mathcal{E}})$。给定一个光滑分裂 $\mathcal{E}=\mathcal{E}_1\oplus\mathcal{E}_2$，有

$$\mathrm{Res}(\mathbf{X}_{\mathcal{E}})=\mathrm{Res}(\mathbf{X}_{\mathcal{E}_1})\cup\mathrm{Res}(\mathbf{X}_{\mathcal{E}_2}),$$

其中并集按重数计算。

注 5.5. 有些作者倾向于研究算子族 $(-\mathrm{X}_{\mathcal{E}}+z)^{-1}$ 的亚纯延拓，该延拓定义在 $\mathrm{Re}(z)>0$ 时为

$$(-\mathbf{X}_{\mathcal{E}}+z)^{-1}=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-zt}\mathrm{e}^{t\mathbf{X}_{\mathcal{E}}}\,\mathrm{d}t.$$

在我们的情形中，由于 $-\mathrm{i}\mathrm{X}_{\mathcal{E}}$ 在 $L^2(\mathcal{M},\mathcal{E})$ 上是自伴的，因此对任意 $f,g\in C^\infty(\mathcal{M},\mathcal{E})$，有：

$$\big\langle(-\mathbf{X}_{\mathcal{E}}+z)^{-1}f,g\big\rangle_{\mathcal{D}'(\mathcal{M},\mathcal{E}),C^\infty(\mathcal{M},\mathcal{E})}=\big\langle(\mathbf{X}_{\mathcal{E}}+\bar z)^{-1}g,f\big\rangle^*_{\mathcal{D}'(\mathcal{M},\mathcal{E}),C^\infty(\mathcal{M},\mathcal{E})},$$

其中 $*$ 表示复共轭。因此，与这两个算子相关联的共振集通过复共轭彼此对应。若 $\mathcal{E}\to\mathcal{M}$ 来自一个实表示（例如当 $\mathcal{E}$ 与一个覆盖 $M'\to M$ 相关联时），则共振集在复共轭下实际上是不变的，因此这种区别无关紧要。

定理 1.11 可由以下更精确的结果推出：

定理 *5.6.* 设 (M,g) 是一个闭 *Anosov* 流形，其基本群为 Γ。设 $\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 是 Γ 的一列随机酉表示，它们几乎必然强收敛到 $(\lambda_\Gamma,\ell^2(\Gamma))$。令 $\mathcal{E}_n:=\mathcal{E}_{\rho_n}$ 表示 $\mathcal{M}$ 上相应的酉平坦丛。那么，对任意紧子集 $\mathcal{K}\subset\{\mathrm{Re}(z)>\delta_0\}$，存在常数 $h=h(\mathcal{K})>0$ 和 $C(\mathcal{K})>0$，使得几乎必然地，对所有 $z\in\mathcal{K}$，算子 $(X_{\mathcal{E}_n}+z):\mathcal{D}(X_{\mathcal{E}_n})\subset\mathcal{H}_h^s(\mathcal{M},\mathcal{E}_n)\to\mathcal{H}_h^s(\mathcal{M},\mathcal{E}_n)$ 可逆，且其逆有界：

$$\forall z\in\mathcal{K},\quad\big\|(\mathbf{X}_{\mathcal{E}_n}+z)^{-1}\big\|_{\mathcal{H}_h^s(\mathcal{M},\mathcal{E}_n)\to\mathcal{H}_h^s(\mathcal{M},\mathcal{E}_n)}\le C(\mathcal{K}).$$

注 5.7。 Faure 和 Tsujii [FT23; FT24] 引入了一些不同的各向异性 Sobolev 空间 $\mathcal{H}_W(\mathcal{M},\mathcal{E})$ 来研究 Ruelle 谱。这些空间依赖于某个逃逸函数 $W\in C^\infty(T^*\mathcal{M})$，并通过小波包变换来定义。这些空间能够得到更精细的结果；例如，当丛 $\mathcal{E}\to\mathcal{M}$ 固定时，可以得到一些

在虚轴左侧的某个垂直条带内（远离共振处）具有一致预解界——与 $|\mathrm{Im}(z)|$ 中利用空间 [NZ15]得到的多项式界 $\mathcal{H}_h^s(\mathcal{M},E)$相反。由于定理 5.6 仅涉及预解算子$(\mathbf{X}_\mathcal{E}+z)^{-1}$ 在 z 紧集中的情形，这一区别或许看似无关紧要；然而，若改用空间 5.6 ，未来的应用或许会需要获得定理 $\mathcal{H}_W(\mathcal{M},\mathcal{E})$ 的类似结果。该结果应可通过在本文中再次执行证明而得到，使用空间 $\mathcal{H}_W$，并采用基于波包而非 Weyl 量子化的半经典分析。

5.2. **近似预解式**。 设 χ 是一个光滑函数，且紧支撑于$[-1,2]$，使得 $\chi\equiv 1$在 $[0,1]$上成立。受表达式（1.2）的启发，我们引入一个近似预解式

$$\mathbf{Q}(z):=\int_0^{+\infty}\chi(t/T)\mathrm{e}^{-zt}\mathrm{e}^{-t\mathbf{X}_\mathcal{E}}\,\mathrm{d}t,$$

于是，$\mathbf{Q}(z)$ 关于 $\mathcal{H}_h^s(\mathcal{M},\ \mathcal{E})\ \to\mathcal{H}_h^s(\mathcal{M},\ \mathcal{E})$连续。事实上，由命题 5.3，

$$\|\mathbf{Q}(z)\|_{\mathcal{H}_h^s(\mathcal{M},\mathcal{E})}\le\int_0^{2T}\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(z)t}C_s\mathrm{e}^{\nu_s t}\mathrm{d}t\le C_s\mathrm{e}^{2(\nu_s-\mathrm{Re}(z))T}.\tag{5.1}$$

注意，$\|\mathbf{Q}(z)\|$ 的估计关于 $\mathcal{E}$是一致的。于是有

$$\mathbf{Q}(z)(\mathbf{X}_\mathcal{E}+z)=\mathrm{Id}+\mathbf{R}(z)\quad\text{on }\mathcal{D}(\mathbf{X}_\mathcal{E}),$$

and

$$(\mathbf{X}_\mathcal{E}+z)\mathbf{Q}(z)=\mathrm{Id}+\mathbf{R}(z)\quad\text{on }\mathcal{H}_h^s(\mathcal{M},\mathcal{E}),$$

其中 $\mathbf{R}(z):\ \mathcal{H}_h^s(\mathcal{M},\mathcal{E})\ \to\mathcal{H}_h^s(\mathcal{M},\mathcal{E})$ 是一个全纯算子族，由下式给出

$$\mathbf{R}(z)=\frac{1}{T}\int_0^{+\infty}\chi'(t/T)\mathrm{e}^{-zt}\mathrm{e}^{-t\mathbf{X}_\mathcal{E}}\,\mathrm{d}t.$$

其优势在于 $\chi'(\bullet/T)$ 支撑于 $[T,2T]$，其中 T取足够大；这对于应用第 §3 节和第 §4 节关于流的长时间传播的结果至关重要。若能证明对于所有 $\|\mathbf{R}(z)\|_{\mathcal{H}_h^s}\le\frac{1}{2}$ 均成立，则算子 $\mathrm{Id}+\mathbf{R}(z)$ 可用 Neumann 级数求逆，从而得到

$$(\mathrm{Id}+\mathbf{R}(z))^{-1}\mathbf{Q}(z)(\mathbf{X}_\mathcal{E}+z)=(\mathbf{X}_\mathcal{E}+z)\mathbf{Q}(z)(\mathrm{Id}+\mathbf{R}(z))^{-1}=\mathrm{Id}_{\mathcal{H}_h^s(\mathcal{M},\mathcal{E})}.$$

因此，我们的主定理将由此得出

命题 5.8。 给定一列随机表示$(\rho_n,\ V_n)$ ，它们在渐近几乎必然的意义下强收敛于正则表示，则渐近几乎必然有：

$$\forall z\in\mathcal{K},\quad\|\mathbf{R}(z)\|_{\mathcal{H}_h^s(\mathcal{M},\mathcal{E}_{\rho_n})}=\Big\|\frac{1}{T}\int_0^{+\infty}\chi'(t/T)\mathrm{e}^{-zt}\mathrm{e}^{-t\mathbf{X}_{\mathcal{E}_{\rho_n}}}\,\mathrm{d}t\Big\|_{\mathcal{H}_h^s(\mathcal{M},\mathcal{E}_{\rho_n})}\le\frac{1}{2}.$$

5.3. **将问题约化为有限个** z。 强收敛技术只能处理有限个 算子。我们证明，只需对有限个 $\|\mathbf{R}(z)\|_{\mathcal{H}_h^s} \leq \frac{1}{4}$ 证明 $z \in \mathcal{K}$ ，即可得到 $\|\mathbf{R}(z)\| < \frac{1}{2}$ 对所有 $z \in \mathcal{K}$成立。此过程类似于 [HM23；CMN24]中的做法。

引理 5.9. 存在一个常数 C_s，使得对于任意 z, z'，满足 $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Re}(z') \geq \delta_0$,

$$\|\mathbf{R}(z) - \mathbf{R}(z')\|_{\mathcal{H}_h^s} \leq |z - z'| \mathrm{e}^{C_s T}.$$

证明. 由于 $|\mathrm{e}^{-zt} - \mathrm{e}^{-z't}| \leq |z - z'| \mathrm{e}^{-\delta_0 t}$，由三角不等式可得

$$\|\mathbf{R}(z) - \mathbf{R}(z')\|_{\mathcal{H}_h^s} \leq |z - z'| \frac{1}{T} \int |\chi'(t/T)| \mathrm{e}^{-\delta_0 t} \|\mathrm{e}^{-t\mathbf{X}_\mathcal{E}}\| \mathrm{d}t.$$

由于 $\|\mathrm{e}^{-t\mathbf{X}_\mathcal{E}}\|_{\mathcal{H}_h^s} \leq C_s \mathrm{e}^{\nu_s t}$ (回顾命题 5.3) 且 χ 的支集包含于 $[1, 2]$，我们推得

$$\|\mathbf{R}(z) - \mathbf{R}(z')\|_{\mathcal{H}_h^s} \leq C_s |z - z'| \mathrm{e}^{2(\nu_s - \delta_0)T}.$$

□

因此，若 $\|\mathbf{R}(z)\|_{\mathcal{H}_h^s(\mathcal{M},\mathcal{E})} \leq \frac{1}{4}$，则对于 z'，在 z 的一个小邻域内有 $\|\mathbf{R}(z')\|_{\mathcal{H}_h^s(\mathcal{M},\mathcal{E})} \leq \frac{1}{2}$；该邻域与丛 $\mathcal{E}$ 无关，但取决于 T 和 s。由于 $\mathcal{K}$ 紧，因此只需证明对于属于一个有限 子集 $\mathcal{I} \subset \mathcal{K}$ 的 z，有 $\|\mathbf{R}(z)\| \leq \frac{1}{4}$。

因此，我们还需要证明：

命题 5.10. 存在（T， s， h）的一种选取，使得对任意有限子集 $\mathcal{I} \subset \mathcal{K}$，渐近几乎必然成立

$$\forall z \in \mathcal{I}, \ \|\mathbf{R}(z)\|_{\mathcal{H}_h^s} \leq \frac{1}{4}.$$

5.4. **沿流平均**。 在转向命题 5.10 的证明之前，我们证明沿流线积分会衰减那些在尺度 $\lesssim h$ 上沿流方向振荡的函数；这依赖于算子 $-\mathrm{i}h\mathbf{X}_\mathcal{E}$ 在流方向的一个锥形邻域中的微局部椭圆性。该性质将用于控制捕获集邻域中的点对预解算子的贡献。

命题 5.11. 设 f 是一个在0的充分小邻域上紧支撑的光滑函数。设 a， $b \in S^{m_1}(T^*\mathcal{M})$ 与 $b \in S^{m_2}(T^*\mathcal{M})$，其中 a 或 b 支撑于锥 $\{\xi : \ \xi(X) \geq \frac{|\xi|}{2} \geq \frac{1}{2}\}$。则对任意酉平坦丛 $\mathcal{E} \to \mathcal{M}$，有

$$\mathrm{Op}_h^\mathcal{E}(a) \widehat{f}(-\mathrm{i}\mathbf{X}_\mathcal{E}) \mathrm{Op}_h^\mathcal{E}(b) = \mathcal{O}_{a,b}(h^\infty)_{L^2 \to L^2}.$$

误差关于 $\mathcal{E}$ 是一致的。

证明。 我们进行与命题 2.10 的证明中类似的化简，从而将证明归结为 $\mathrm{Op}_h^\mathcal{M}$量子化的情形。进而，我们可以在局部坐标图中进行讨论，此时测地向量场表示为 ∂_{x_1}，我们只需证明：对于任意 $a \in S^{m_1}(T^*\mathbb{R}^d)$ 以及 $b \in S^{m_2}(T^*\mathbb{R}^d)$，若 a 或 b 的支集包含于锥 $\{\xi : \ \xi_1 \geq \frac{|\xi|}{2} \geq \frac{1}{2}\}$，则有

$$\mathrm{Op}_h^\mathrm{w}(a) \widehat{f}(-\mathrm{i}\partial_{x_1}) \mathrm{Op}_h^\mathrm{w}(b) = \mathcal{O}(h^\infty)_{L^2 \to L^2}.$$

假设例如 b 满足上述支撑条件（ a 的情形类似处理）。那么，

$$\widehat{f}(-\mathrm{i}\partial_{x_1})\operatorname{Op}_h^{\mathrm{w}}(b)u(x)=\frac{1}{(2\pi h)^n}\int f(t)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{h}\langle x-te_1-y,\xi\rangle}b\big(\frac{x-te_1+y}{2},\xi\big)u(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi\mathrm{d}t.$$

我们可以对 t 变量进行若干分部积分，因为 $(-\mathrm{i}\partial_t)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{h}t\xi_1}=-\frac{\xi_1}{h}$，由此对任意 N 可推得，

$$\int f(t)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{h}t\xi_1}b\big(\frac{x-te_1+y}{2},\xi\big)\mathrm{d}t=\int \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{h}t\xi_1}(-\frac{h}{\xi_1})^N(-\mathrm{i}\partial_t)^N\Big[f(t)b\big(\frac{x-te_1+y}{2},\xi\big)\Big]\mathrm{d}t.$$

由莱布尼茨公式，这可改写为：

$$(\frac{\mathrm{i}h}{\xi_1})^N\int \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{h}t\xi_1}\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}\frac{(-1)^k}{2^k}f^{(N-k)}(t)(\partial_{x_1}^k b)\big(\frac{x-te_1+y}{2},\xi\big)\mathrm{d}t.$$

我们引入

$$b_{N,k}:=\xi_1^{-N}\partial_{x_1}^k b,\qquad b_{N,k}^t:=b_{N,k}(x-te_1,\xi).$$

注意到 $b_{N,k}\in S^{m_2-N}(T^*\mathbb{R}^d)$，这是由于 b 上的支撑条件。由于

$$\mathrm{e}^{-t\partial_{x_1}}\operatorname{Op}_h^{\mathrm{w}}(b_{N,k})=\operatorname{Op}_h^{\mathrm{w}}(b_{N,k}^t)\mathrm{e}^{-t\partial_{x_1}},$$

我们由 Weyl 量子化的复合公式推得

$$\operatorname{Op}_h^{\mathrm{w}}(a)\operatorname{Op}_h^{\mathrm{w}}(b_{N,k}^t)=\operatorname{Op}_h^{\mathrm{w}}(a\#b_{N,k}^t),$$

满足 $a\#b_{N,\,k}^t\in S^{m_1+m_2-N}(T^*\mathbb{R}^d)$，特别是当 N足够大时，由 L^2-连续性定理可得

$$\big\|\operatorname{Op}_h^{\mathrm{w}}(a\#b_{N,k}^t)\big\|_{L^2\to L^2}=\mathcal{O}_{a,b,N,k}(1).$$

最终

$$\operatorname{Op}_h^{\mathrm{w}}(a)\widehat{f}(-\mathrm{i}\partial_{x_1})\operatorname{Op}_h^{\mathrm{w}}(b)=\sum_{k=0}^{N}c_{N,k}\int f^{(N-k)}(t)\operatorname{Op}_h^{\mathrm{w}}(a\#b_{N,k}^t)\mathrm{e}^{-t\partial_{x_1}}\mathrm{d}t,$$

其中 $c_{N,\,k}$ 为数值系数。由于 $\mathrm{e}^{-t\partial_{x_1}}$ 在 L^2 上是酉的，我们得到对于$N>m_1+m_2$，算子范数为

$$\Big\|\operatorname{Op}_h^{\mathrm{w}}(a)\widehat{f}(-\mathrm{i}\partial_{x_1})\operatorname{Op}_h^{\mathrm{w}}(b)\Big\|\le C_{N,a,b}\|f\|_{C^N}h^N.$$

常数 $C_{N,\,a,\,b}$ 取决于 a和 b的有限个半范数（其数量取决于 N）。□

由此我们得到以下结果

命题 5.12。固定 $K\ge 1$、$C_0>0$、$h\le 1$，并令 $T\le K|$对数 $h|$。设 f是一个支集位于 $[-T,T]$上的光滑函数，满足 $\|f\|_{C^N}=\mathcal{O}_N(\mathrm{e}^{C_0T})$。那么，若 a，$b\in S^0(T^*\mathcal{M})$，且 a 或 b 的支集位于锥 $\{\xi:\ \xi(X)\ge\frac{|\xi|}{2}\ge\frac{1}{2}\}$上，则有

$$\operatorname{Op}_h^{\mathcal{E}}(a\mathrm{e}^{sG_m})\widehat{f}(-\mathrm{i}\mathbf{X}_{\mathcal{E}})\operatorname{Op}_h^{\mathcal{E}}(b\mathrm{e}^{-sG_m})=\mathcal{O}_{K,C_0,s}(h^\infty)_{L^2\to L^2}.$$

如果估计式 $\|f\|_{C^N}=\mathcal{O}_N(\mathrm{e}^{C_0T})$中的隐含常数保持有界，则误差在 f 中是一致的。

证明。例如，假设 b 满足支撑条件。令 $\omega \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R})$ 满足 $\sum \omega(t-n) \equiv 1$。固定一个较小的 $t_0 > 0$。所考虑的算子可表示为

$$\sum_n \mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(a\mathrm{e}^{sG_m}) \Big[\int f(nt_0+t)\omega(\frac{t}{t_0})\mathrm{e}^{-(nt_0+t)\mathbf{X}_{\mathcal{E}}}\mathrm{d}t \Big] \mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(b\mathrm{e}^{-sG_m}).$$

每一项都可以写成

$$\big[\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(a\mathrm{e}^{sG_m})\mathrm{e}^{-nt_0\mathbf{X}_{\mathcal{E}}}\,\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(\mathrm{e}^{sG_m})^{-1}\big]\circ\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(\mathrm{e}^{sG_m}) \int f(nt_0+t)\omega(\frac{t}{t_0})\mathrm{e}^{-t\mathbf{X}_{\mathcal{E}}}\mathrm{d}t\,\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(b\mathrm{e}^{-sG_m}).$$

根据命题 5.3 和推论 B.16，第一个因子的范数由$\mathcal{O}(\mathrm{e}^{\nu_s nt_0})$控制；根据命题 5.11，第二个因子的范数为 $\mathcal{O}_{t_0,s,m}(\|f\|_{C^N}h^N)$（这里我们用到了 $\mathrm{e}^{\pm sG_m} \in S^{s+}(T^*\mathcal{M})$ 这一事实）。对所有满足 $|nt_0| \le T$ 的 n 求和，可得

$$\big\|\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(a\mathrm{e}^{sG_m})\widehat{f}(-\mathrm{i}\mathbf{X}_{\mathcal{E}})\,\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(b\mathrm{e}^{-sG_m})\big\|_{L^2\to L^2} \le C_{N,s,t_0}\|f\|_{C^N}T\mathrm{e}^{\nu_s T}h^N.$$

根据关于 f 和 T 的假设，我们有 $\|f\|_{C^N}T\mathrm{e}^{\nu_s T} = \mathcal{O}_{N,s}(h^{-C_{K,s}})$，因此只需取足够大的 N 即可得出结论。□

5.5. **命题 5.10 的证明。** 我们首先将时间区间 $[T,2T]$ 划分为若干个长度较小的子区间。固定一个足够小的 $t_0 > 0$，并令 $1 = \sum_{n\in\mathbf{Z}}\omega(t-n)$ 为一个光滑的单位分解，满足 $\omega \in C^\infty_{\mathrm{comp}}([-2,2],[0,1])$。定义

$$\varphi_{n,T}(t) = \omega(t/t_0)\chi'((t+nt_0)/T)\mathrm{e}^{zt}. \tag{5.2}$$

于是我们可以写成

$$\mathbf{R}(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{e}^{-znt_0}\int_{\mathbb{R}} \varphi_{n,T}(t)\mathrm{e}^{-(t+nt_0)\mathbf{X}_{\mathcal{E}}}\mathrm{d}t. \tag{5.3}$$

函数 $\varphi_{n,T}$ 的支集包含于 $[-2t_0,2t_0]$，且对于所有 ℓ，它们在 C^ℓ 范数下是一致有界的（与 n、$T \ge 1$ 无关），前提是 z 始终处于某个紧集内。因此，我们可以忽略对 n、T 的依赖，并证明

命题 5.13。 考虑函数的一个子集 $\mathcal{F} \subset C^\infty_{\mathrm{comp}}((-1,1)\ \mathbb{R})$，其中函数的导数一致有界，即

$$\forall \ell \ge 0, \quad \sup_{\varphi\in\mathcal{F}} \|\varphi\|_{C^\ell} < +\infty.$$

令 $\varepsilon > 0$ 足够小，且 $s > 0$ 足够大。可以依次选取足够大的 $K = K(s,\mathcal{F},\varepsilon)$ 和足够小的 $h = h(s,\mathcal{F},K,\varepsilon)$，使得以下结论成立。令log $h|$，并假设 $T \le nt_0 \le 2T$。令 $\varphi \in \mathcal{F}$。那么，当 $k \to +\infty$ 时，渐近几乎必然地，对于 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\rho_k}$，有：

$$\big\|\widehat{\varphi}(-\mathrm{i}\mathbf{X}_{\mathcal{E}})\mathrm{e}^{-nt_0\mathbf{X}_{\mathcal{E}}}\big\|_{\mathcal{H}_h^s(\mathcal{E}_{\rho_k})} \le \mathrm{e}^{(\delta_0+\varepsilon)nt_0}.$$

我们引入相空间 $T^*\mathcal{M}$的一个光滑划分 $1 = a_1 + a_2 + a_3$，其中：(1) a_1 的支集位于 $\{|\xi| \le 2\}$（低频区域）。

(2) a_2 的支集位于 $\{|\xi| \geq 1\} \cap E_0^*$ 的一个锥形邻域上（高频，靠近捕获集），例如

$$\operatorname{Supp} a_2 \subset \Big\{(x,\xi) \in T^*\mathcal{M} \ : \ |\xi(X(x))| \geq \frac{|\xi|}{2} \geq \frac{1}{2}\Big\}.$$

(3) a_3 支集位于 $\{|\xi| \geq 1\}$ 的一个锥形子集上，该子集远离捕获集（高频、远离捕获集），即

$$\operatorname{Supp} a_3 \subset \Big\{(x,\xi) \in T^*\mathcal{M} \ : \ |\xi(X(x))| \leq \frac{|\xi|}{4}, \ |\xi| \geq 1\Big\}.$$

此外，我们取 a_2、a_3 在 $\{|\xi| \geq 2\}$上为零次齐次。对于每个 i、$j \in \{1,2,3\}$，我们定义算子

$$\mathbf{A}_{i,j}(n) := \operatorname{Op}_h^{\mathcal{E}}(a_i \mathrm{e}^{sG_m}) \widehat{\varphi}(-\mathrm{i}\mathbf{X}_{\mathcal{E}}) \mathrm{e}^{-nt_0\mathbf{X}_{\mathcal{E}}} \operatorname{Op}_h^{\mathcal{E}}(a_j \mathrm{e}^{-sG_m}).$$

接下来，我们定义 $\mathbf{N}(n) := \sum_{(i,\,j)} \|\mathbf{A}_{i,\,j}(n)\|_{L^2 \to L^2}$，使得

$$\big\|\widehat{\varphi}(-\mathrm{i}\mathbf{X}_{\mathcal{E}}) \mathrm{e}^{-nt_0\mathbf{X}_{\mathcal{E}}}\big\|_{\mathcal{H}_h^s} \leq 3\mathbf{N}(n).$$

我们将根据对 $\mathbf{N}(n-1)$ 的估计获得关于 $\mathbf{N}(n)$ 的估计。这依赖于不同的引理。第一个是关于低频贡献的概率估计。

引理 5.14。存在一个函数 $(s,\ \varepsilon,\ K) \mapsto h_0(s,\ \varepsilon,\ K) > 0$，使得对于任意 $\varepsilon > 0$ 和 $T \leq K|\log h|$，以及任意 n，h，s，z 满足 $h < h_0(s,\ \varepsilon,\ K)$ 时，我们有几乎必然成立。

$$\|\mathbf{A}_{1,1}(n)\|_{L^2 \to L^2} \leq h^{-d} \mathrm{e}^{(\delta_0+\varepsilon)nt_0},$$

对 $T \leq nt_0 \leq 2T$ 一致。

证明。由命题 2.10，且由于 $\mathrm{e}^{-t\mathbf{X}_{\mathcal{E}}}$ 在 $L^2(\mathcal{M},\mathcal{E})$上是酉的，我们有

$$\mathbf{A}_{1,1}(n) = \operatorname{Op}_h^{\mathcal{E}}(\mathrm{e}^{sG_m}a_1) g(h^2\Delta_{\mathbb{V}}^E) \widehat{\varphi}(-\mathrm{i}\mathbf{X}_{\mathcal{E}}) \mathrm{e}^{-nt_0\mathbf{X}_{\mathcal{E}}} g(h^2\Delta_{\mathbb{V}}^E) \operatorname{Op}_h^{\mathcal{E}}(a_1 \mathrm{e}^{-sG_m}) + \mathcal{O}_s(h^\infty).$$

这里回顾一下，$g \equiv 1$ 在 0 附近，因此 $g(h^2\Delta_{\mathbb{V}}^E)$ 局限于垂直纤维中阶数为$\lesssim h^{-1}$的傅里叶模态。进而，由于 $\mathrm{e}^{\pm sG_m}a_1 \in C_{\mathrm{comp}}^\infty(T^*\mathcal{M}) \subset S_1^0(T^*\mathcal{M})$，由命题 B.13可得：

$$\|\mathbf{A}_{1,1}(n)\| \leq C_s \big\|g(h^2\Delta_{\mathbb{V}}^E) \widehat{\varphi}(-\mathrm{i}\mathbf{X}_{\mathcal{E}}) \mathrm{e}^{-nt_0\mathbf{X}_{\mathcal{E}}} g(h^2\Delta_{\mathbb{V}}^E)\big\|_{L^2 \to L^2} + \mathcal{O}_s(h^\infty).$$

现在我们应用命题 4.5。对任意 $\varepsilon > 0$，几乎必然有：

$$\big\|g(h^2\Delta_{\mathbb{V}}^E) \widehat{\varphi}(-\mathrm{i}\mathbf{X}_{\mathcal{E}}) \mathrm{e}^{-nt_0\mathbf{X}_{\mathcal{E}}} g(h^2\Delta_{\mathbb{V}}^E)\big\|_{L^2 \to L^2} \leq C_{s,\varepsilon} h^{-(d-1)} \mathrm{e}^{(\delta_0+\varepsilon)nt_0}.$$

剩下的只需令 h 足够小，以确保 $C_{s,\,\varepsilon} \leq h^{-1}$ 以及 $\mathcal{O}_s(h^\infty) \leq h^{-d}\mathrm{e}^{(\delta_0+\varepsilon)nt_0}$。

□

该 n 接下来的两个引理是确定性的，并且对 $\mathcal{M}$ 上的任意酉平坦丛都成立 .

引理 5.15。存在一个函数 $h \mapsto h_0(s,\ K,\ N,\ \mathcal{F})$，使得如果 $T = K|\log h|$ 且 $0 < h < h_0(s,\ K,\ N)$，则对 $n \leq 2T/t_0$ 一致地有：

$$\|\mathbf{A}_{i,2}(n)\| \leq h^N, \qquad \|\mathbf{A}_{2,i}(n)\| \leq h^N.$$

证明。这直接由命题 5.12 得出。 □

引理 5.16。 存在一个常数 $C_1 > 0$，它与 s 无关，使得对于所有$i \in \{1,2,3\}$ 和 $0 < h < h_0(s)$:

$$\max\big(\|\mathbf{A}_{i,3}(n)\|, \|\mathbf{A}_{3,i}(n)\|\big) \leq C_1 \mathrm{e}^{-C_0 s} \cdot \sum_{j=1}^{3} \|\mathbf{A}_{i,j}(n-1)\|.$$

证明。 我们来处理 $\mathbf{A}_{i,3}(n)$；$\mathbf{A}_{3,i}(n)$ 的情形类似。利用半群性质，我们得到

$$\|\mathbf{A}_{i,3}(n)\| \leq \Big\| \mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(\mathrm{e}^{sG_m} a_i) \widehat{\varphi}(-\mathrm{i}\mathbf{X}_{\mathcal{E}}) \mathrm{e}^{-(n-1)t_0 \mathbf{X}_{\mathcal{E}}} \mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(\mathrm{e}^{sG_m})^{-1} \Big\|$$
$$\times \big\| \mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(\mathrm{e}^{sG_m}) \mathrm{e}^{-t_0 \mathbf{X}_{\mathcal{E}}} \mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(a_3 \mathrm{e}^{-sG_m}) \big\|.$$

由推论 B.16，第一个范数可由下式控制

$$\Big\| \mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(\mathrm{e}^{sG_m} a_i) \widehat{\varphi}(-\mathrm{i}\mathbf{X}_{\mathcal{E}}) \mathrm{e}^{-(n-1)t_0 \mathbf{X}_{\mathcal{E}}} \mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(\mathrm{e}^{sG_m})^{-1} \Big\| \leq (1 + \mathcal{O}_s(h)) \sum_{j=1}^{3} \|\mathbf{A}_{i,j}(n-1)\|$$

函数 G_m 在时间 $\leq t_0$ 内沿流线严格递减，前提是初始点位于 a_3 的支集内；由命题 5.1。由命题 B.17，第二个范数可由下式控制

$$\begin{aligned} \big\| \mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(\mathrm{e}^{sG_m}) \mathrm{e}^{-t_0 \mathbf{X}_{\mathcal{E}}} \mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(a_3 \mathrm{e}^{-sG_m}) \big\| &\lesssim \|\mathrm{e}^{s(G_m \circ \Phi_t - G_m)}\|_{L^\infty(\mathrm{Supp}(a_2))} + \mathcal{O}_s(h) \\ &\leq C_1(1 + \mathcal{O}_s(h)) \mathrm{e}^{-C_0 s}. \end{aligned}$$

剩下的工作是令 h 足够小（取决于 s），以确保 $\mathcal{O}_s(h)$ 项是≤ 1。□

命题 *5.13* 的证明。 结合上述引理可知，对所有 (s, N, K, ε)，若满足 $T \leq K|\log h|$ 且 $0 < h < h_0(s, N, K, \varepsilon)$，则有

$$\mathbf{N}(n) \leq C_1 \big[h^{-d} \mathrm{e}^{(\delta_0 + \varepsilon) n t_0} + h^N + \mathrm{e}^{-C_0 s} \mathbf{N}(n-1) \big].$$

固定 $\varepsilon > 0$，并定义

$$n_0 := \left\lceil \frac{d}{\varepsilon t_0} |\log h| \right\rceil,$$

使得

$$h^{-d} \mathrm{e}^{(\delta_0 + \varepsilon) n t_0} \leq \mathrm{e}^{(\delta_0 + 2\varepsilon) n t_0}, \qquad \forall n \geq n_0.$$

我们取足够大的 $N \gg 1$（其大小取决于 K），以确保 $h^N \leq \mathrm{e}^{(\delta_0 + \varepsilon) 2T}$（回忆一下，$T = K|\log h|$）。由此可得

$$\mathbf{N}(n) \leq C_1 \big[\mathrm{e}^{(\delta_0 + 2\varepsilon) n t_0} + \mathrm{e}^{-C_0 s} \mathbf{N}(n-1) \big], \qquad \forall n \in \left[n_0, \frac{2T}{t_0} \right], \tag{5.4}$$

其中 C_1 可能会加倍。将（5.4）迭代至 $n - k_0 = n_0$ 可得

$$\mathbf{N}(n) \leq \Big(\sum_{k=0}^{k_0} C_1 \mathrm{e}^{(\delta_0 + 2\varepsilon)(n-k) t_0} (C_1 \mathrm{e}^{-C_0 s})^k \Big) + (C_1 \mathrm{e}^{-C_0 s})^{n - n_0} \mathbf{N}(n_0). \tag{5.5}$$

回顾命题 5.3 可知 $\mathbf{N}(n_0) \le C_3 \mathrm{e}^{C_3 n_0}$，其中 $C_3 = C_3(s,\ \mathcal{F})$。由（5.5）可得

$$\mathbf{N}(n) \le C_1 \mathrm{e}^{(\delta_0+2\varepsilon)nt_0}\Big(\sum_{k=0}^{k_1}(\mathrm{e}^{-(\delta_0+2\varepsilon)t_0}C_1\mathrm{e}^{-C_0 s})^k\Big) + (C_1\mathrm{e}^{-C_0 s})^n \cdot (C_1\mathrm{e}^{-C_0 s})^{-n_0} C_3 \mathrm{e}^{C_3 n_0}.$$

我们取 s 足够大，以确保$(\mathrm{e}^{-(\delta_0+2\varepsilon)t_0}C_1\mathrm{e}^{-C_0 s}) < \frac{1}{2}$，从而保证该级数收敛，于是我们得到

$$\mathbf{N}(n) \le C_1 \mathrm{e}^{(\delta_0+2\varepsilon)nt_0}\big[1 + C_4 \mathrm{e}^{C_4 n_0}\big],$$

其中 $C_4 = \max(C_3 + C_0 s, C_1 C_3)$再次依赖于 $s, \mathcal{F}$。由于 $n_0 \lesssim_\varepsilon |\log\ h|$，通过取依赖于 s, ε的足够大的 $T = K|\log\ h|$，我们可以假设 $C_4\mathrm{e}^{C_4 n_0} \le \mathrm{e}^{2\varepsilon T}$，特别地，对任意 $n \in [T/t_0, 2T/t_0]$，我们得到

$$\mathbf{N}(n) \le C_1 \mathrm{e}^{(\delta_0+3\varepsilon)nt_0}.$$

至此完成命题5.13的证明。 □

命题*5.10*证明的结尾。 选取 $\varepsilon > 0$ 使得 $\mathcal{K} \subset \{z \in \mathbb{C}:\ \mathrm{Re}(z)\ > \delta_0 + 2\varepsilon\}$。考虑函数集合

$$\mathcal{F} = \{\varphi_{n',T'}\ :\ n' \ge 1, T' \ge 1\},$$

其中 $\varphi_{n',\ T'}$ 已在（5.2）中定义。令 s，K，h 如命题 5.13所述。那么，对于任意 $\varphi \in \mathcal{F}$，由命题 5.13，我们有渐近必然成立的结论，其中 $T = K|\log\ h|$:

$$\forall n \in \Big[\frac{T}{t_0}, \frac{2T}{t_0}\Big], \quad \|\widehat{\varphi}(-\mathrm{i}\mathbf{X}_{\mathcal{E}})\mathrm{e}^{-nt_0\mathbf{X}_{\mathcal{E}}}\|_{\mathcal{H}_h^s} \le \mathrm{e}^{(\delta_0+\varepsilon)nt_0}.$$

取 $\varphi = \varphi_{n',\ T'}$，使得 $(n', T') = (n, T)$，我们便得到渐近必然成立的结论。

$$\forall n \in \Big[\frac{T}{t_0}, \frac{2T}{t_0}\Big], \quad \|\widehat{\varphi}_{n,T}(-\mathrm{i}\mathbf{X}_{\mathcal{E}})\mathrm{e}^{-nt_0\mathbf{X}_{\mathcal{E}}}\|_{\mathcal{H}_h^s} \le \mathrm{e}^{(\delta_0+\varepsilon)nt_0}.$$

回顾（5.3），我们推得

$$\|\mathbf{R}(z)\|_{\mathcal{H}_h^s \to \mathcal{H}_h^s} \lesssim \sum_{T/t_0 \le n \le 2T/t_0} \mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(z)nt_0}\mathrm{e}^{(\delta_0+\varepsilon)nt_0} \lesssim \sum_{T/t_0 \le n \le 2T/t_0} \mathrm{e}^{-\varepsilon nt_0} \lesssim \frac{T}{t_0}\mathrm{e}^{-\varepsilon T}. \tag{5.6}$$

当 T 足够大（取决于 ε）时，我们得到 $\|\mathbf{R}(z)\| < \frac{1}{4}$，这正是我们想要的。 □

注 5.17 （关于常数选择顺序的说明）。 我们选取一个紧集$\mathcal{K} \subset \{z \in \mathbb{C}:\ \mathrm{Re}(z)\ \ge \delta_0 + 2\varepsilon\}$，其中某个 $\varepsilon > 0$。我们先取 $s \gg 1$，接着依次将 $K = K(s, \mathcal{K}, \varepsilon)$ 和 $N = N(K, s, \varepsilon)$ 取足够大，最后选取 $h = h(\mathcal{K}, \varepsilon, s, K, N)$，使其足够小，且取值取决于所有先前的参数。

5.6. **定理 5.6 的证明收尾**。 还需证明，几乎必然地，对于 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\rho_n}$，我们有

$$\big\|(\mathbf{X}_{\mathcal{E}} + z)^{-1}\big\|_{\mathcal{H}_h^s(\mathcal{M},\mathcal{E}) \to \mathcal{H}_h^s(\mathcal{M},\mathcal{E})} \le C(\mathcal{K}).$$

这由近似逆 $\|\mathbf{Q}(z)\|$上的估计式（5.1）得出，因为几乎必然地，对于所有 $z \in \mathcal{K}$，我们有

$$\big\|(\mathbf{X}_{\mathcal{E}} + z)^{-1}\big\| = \|\mathbf{Q}(z)(\mathrm{Id} + \mathbf{R}(z))^{-1}\| \le 2\|\mathbf{Q}(z)\| \lesssim \mathrm{e}^{\nu_s T} =: C(\mathcal{K}).$$

注意，我们得到的常数 $C(\mathcal{K})$ 取决于 $T = K|\log h|$，并且我们需要处于 $h|z| \ll 1$ 的范围内，因此对于某个足够大的常数 N_0，我们当然可以取 $C(\mathcal{K}) = C_\varepsilon(1 + \sup_{z\in\mathcal{K}} |z|^{N_0})$。

5.7. **关于结果的最优性。** Faure–Weich 曾猜想 [FW17, Conjecture C.6] 以及 Dolgopyat–Pollicott [DP98]，数值 $\frac{1}{2}\Pr(-2\psi^u)$ 是 Anosov 测地流的 Pollicott–Ruelle 共振的本质谱隙。更准确地说，该猜想指出，对于固定的阿诺索夫流形 M，有

$$\frac{1}{2}\Pr(-2\psi^u) = \inf\left\{\kappa \in \mathbb{R} \ : \ \begin{array}{l}\text{there are finitely many resonances}\\ \text{in the half-space } \mathrm{Re}(z) > \kappa\end{array}\right\}.$$

Jakobson 和 Naud 也提出了关于肖特基曲面上拉普拉斯算子共振的类似猜想 [JN12]。

本质谱隙的猜想值与定理 1.11中得到的概率低频谱隙一致。虽然我们无法证明常数 $\delta_0 = \frac{1}{2}\Pr(-2\psi^u)$ 在定理 1.11中是最优的，但我们可以证明，在猜想 1.13的完整版本中，若假设预解算子满足一致的多项式界，则该常数是可能的最佳值。事实上，在一个温和的假设下，即覆盖空间中存在一些单射半径不断增大的区域，谱隙 δ_0 是最优的。的确，在 M_n 上，混合——或者更确切地说，弥散——不可能比在$\widetilde{\ }$万有覆盖 M 上发生得更快，前提是时间短于最大单射半径。

命题 5.18。 设 $(M_n \to M)$ 是 M 的一列有限次数黎曼覆盖，且对任意 $R > 0$，都有

$$\mathrm{vol}\left(\{x \in M_n \ : \ \mathrm{inj}(x) \geq R\}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty, \tag{5.7}$$

其中，$\mathrm{inj}(x)$ 表示 x 的单射半径。设 $(\mathcal{E}_n) := (\mathcal{E}_{\rho_n})$ 是 SM 上相应的一列向量丛。假设存在某个 $s > 0$，使得对所有 $n \geq n_0$，预解算子 $(\mathbf{X}_{\mathcal{E}_n} + z)^{-1}$ 都可以解析延拓至半平面 $\{\mathrm{Re}(z) > \kappa\}$，并且满足一致的多项式预解算子界

$$\left\|(\mathbf{X}_{\mathcal{E}_n} + z)^{-1}\right\|_{\mathcal{H}^s(\mathcal{M},\mathcal{E}_n)} \leq C_\kappa(1 + |\mathrm{Im}(z)|)^{N_\kappa}, \tag{5.8}$$

其中某些常数为 C_κ, N_κ，且与 n 无关。于是 $\kappa \geq \delta_0$。

注记 5.19。 假设 (5.7) 等价于存在一列点 $x_n \in M_n$ 使得 $\mathrm{inj}(x_n) \to +\infty$。请注意，这一条件的限制宽松得多，不像$\widetilde{\ }$到 M 的 Benjamini–Schramm 收敛，它要求

$$\forall R \geq 0, \qquad \frac{\mathrm{vol}\left(\{x \in M_n \ : \ \mathrm{inj}(x) \geq R\}\right)}{\mathrm{vol}(M_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

$\widetilde{\ }$证明。 **1.** 回顾命题 3.6 的证明可知，对于 $x_0 \in M$，函数 $f\colon x \mapsto \mathbf{1}_{t-1\leq d(x_0,x)\leq t+1} J(x_0,x)^{-1}$ 满足

$$\langle \mathcal{L}_t f, \mathbf{1}_{B(x_0,1)}\rangle_{L^2(\widetilde{M})} \geq c_\varepsilon \mathrm{e}^{(2\delta_0-\varepsilon)t}, \qquad \|f\|_{L^2(\widetilde{M})} \leq C_\varepsilon \mathrm{e}^{(\delta_0+\varepsilon)t}.$$

我们引入 f 的一个平滑版本，它具有更好的正则性。令 D 表示 M 的直径，并令 χ 为一个光滑截断函数，该函数在

$\widetilde{M}$ 上等于 1，其中 $B(x_0, D+1) \subset M$。定义

$$\tilde{f}(x) := \sum_{t-D\le d(x_0,\gamma x_0)\le t+D} J(x_0,\gamma x_0)^{-1}\chi(\gamma^{-1}x). \tag{5.9}$$

于是，利用函数 J 的性质（即引理 3.9），可以证明

$$\langle \mathcal{L}_t\tilde{f},\chi\rangle_{L^2(\widetilde{M})} \gtrsim \mathrm{e}^{2(\delta_0-\varepsilon)t}, \tag{5.10}$$

而

$$\|\tilde{f}\|_{H^k(\widetilde{M})} \lesssim \mathrm{e}^{(\delta_0+\varepsilon)t}, \qquad \|\chi\|_{H^k(\widetilde{M})} \lesssim 1, \qquad \forall k\ge 0.$$

2. 现在，设 $(M_n \to M)$ 为一列满足命题 5.18之假设的覆盖。如同 [NZ15，§9], 中的论证，预解式界（5.8）蕴含存在某个整数 k，它依赖于 κ，使得对所有 f，$g \in C^\infty_{\mathrm{new}}(SM_n)$，有

$$\int_{SM_n}(f\circ\varphi_t)g = \mathcal{O}_\kappa(\|f\|_{H^k(SM_n)}\|g\|_{H^k(SM_n)}\mathrm{e}^{\kappa t}). \tag{5.11}$$

我们现在对 f、g 作一个方便的选取。固定某个 $R>0$。然后，当 n 充分大时，我们可以找到 $x_0\in M$，使得 M_n 包含 $B(x_0,R)$ 的两个互不相交的嵌入副本 $\subset \widetilde{M}$，它们彼此相距 $\ge R$。对于 $t\le R$，我们可以利用函数 f（来自(5.9)）来构造函数 $f_n \in C^\infty_{\mathrm{new}}(M_n)$，使得 $f_n \equiv f$ 在 $B(x_0,R)$ 的第一个副本中，且 $f_n\equiv -f$ 在第二个副本中。类似地，我们构造 $\chi_n\in C^\infty_{\mathrm{new}}(M_n)$，使得 $\chi_n\equiv\chi$ 在 $B(x_0,R)$ 的第一个副本中，且 $\chi_n\equiv-\chi$ 在第二个副本中。设 $\pi: SM_n\to M_n$ 表示投影；函数 f_n、χ_n 提升为函数 π^*f_n、$\pi^*\chi_n\in C^\infty_{\mathrm{new}}(SM_n)$。此外，由 (5.10)，对所有 $t\le R$，我们有

$$\langle \mathrm{e}^{-tX}(\pi^*f_n),\pi^*\chi_n\rangle_{L^2(SM_n)} = \langle \mathcal{L}_t f_n,\chi_n\rangle_{L^2(M_n)} = 2\langle \mathcal{L}_t\tilde{f},\chi\rangle_{L^2(\widetilde{M})} \gtrsim \mathrm{e}^{(2\delta_0-\varepsilon)t}, \tag{5.12}$$

并且$\|\pi^*f_n\|_{H^k(SM_n)} \lesssim \mathrm{e}^{(\delta_0+\varepsilon)t}$，$\|\pi^*\chi_n\|_{H^k}\lesssim 1$。结合（5.11），这意味着

$$\mathrm{e}^{2(\delta_0-\varepsilon)t} \lesssim \mathrm{e}^{(\delta_0+\varepsilon)t}\mathrm{e}^{\kappa t}.$$

令 $t=R$ 趋于 $+\infty$，可得 $\delta_0\le\kappa+3\varepsilon$。由于这对任意 $\varepsilon>0$ 都成立，我们推知 $\kappa\ge\delta_0$。

□

Appendix A. A short proof that $\delta_0 < -\gamma_0$.

我们证明，定理 1.7中得到的低频间隙 $\delta_0/2 = \mathrm{Pr}(-2\psi^u)/2$ 相较于定理 1.2中的渐近间隙 $-\gamma_0/2$，有严格改进，条件是不稳定雅可比 ψ^u 不同调于常数。特别地，当 $(M,\ g)$ 是具有非常值负曲率的闭曲面时，此结论适用。回顾一下，若存在函数 u 和常数 c，使得对任意 $x\in SM$ 和 $t\in\mathbb{R}$，都有 $F\in C(SM)$，则称赫尔德连续势

$$\int_0^t F(\varphi_s(x))\mathrm{d}s = u(\varphi_t(x)) - u(x) + ct.$$

命题 A.1. 设 (M,g) 为闭 *Anosov* 流形。假设不稳定雅可比不上同调于常数。则，

$$\forall q>1,\ \mathrm{Pr}(-q\psi^u) < -(q-1)\gamma_0.$$

已知 $-\psi^u$ 在如下情形上同调于常数：当 (M,g) 为负曲率的局部对称空间时。Katok猜想断言，这是唯一出现该情形的情况。该猜想在开创性论文 [Kat82] 中对负曲率曲面得到证明，而在高维中仍未解决。

以下结果可见于 [Rat73；PP90]。

引理 A.2 (Ratner，Parry–Pollicott)。设 F 是定义在 SM 上的赫尔德连续势函数。则压力 $t \mapsto \mathrm{Pr}(tF)$ 是一个凸实解析函数。此外，除非 F 上同调于常数，否则它是严格凸的。

命题 A.1 将由下面的引理推出。

引理 A.3。定义 $\beta(q)$：$= \mathrm{Pr}(-q\psi^u)$。假设 ψ^u 不上同调于常数。则对所有 $q \in \mathbb{R}$，都有 $\beta'(q) < -\gamma_0$。

证明。假设存在某个 $q_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $\beta'(q_0) \geq -\gamma_0$。由于 ψ^u 不上同调于常数，根据引理 A.2 可知 β' 严格递增，因此我们可以找到 $\varepsilon > 0$ 和 $q_1 > q_0$ 使得 $\beta'(q_1) > -\gamma_0 + \varepsilon$。由此可知，存在一个常数 $C_\varepsilon > 0$ 使得

$$\beta(q) \geq (-\gamma_0 + \varepsilon)q + C_\varepsilon, \tag{A.1}$$

对 $q \geq 1$一致地。现在回顾一下，对于任意固定的 q，我们有

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \log \sum_{\ell(\gamma)\in[T,T+1]} \frac{1}{|I - P_\gamma|^q} = \beta(q),$$

其中，P_γ是该周期轨道的线性化庞加莱映射，且 $|I - P_\gamma| := |\det(I - P_\gamma)|$。根据 γ_0的定义，对于任意 $\delta > 0$，存在一个常数 $C_\delta > 0$，使得对于长度为 $\ell(\gamma)$ 且足够大的任意闭测地线，我们有

$$|I - P_\gamma| \geq C_\delta \mathrm{e}^{(\gamma_0-\delta)\ell(\gamma)}.$$

由于长度为 $\leq T$ 的周期轨道数量至多呈指数增长，我们有

$$\sum_{\ell(\gamma)\in[T,T+1]} \frac{1}{|I - P_\gamma|^q} \leq C_{\delta,q} \exp\big(T((-\gamma_0 + \delta)q + C)\big), \tag{A.2}$$

对于某个常数 $C > 0$成立。取对数后，再将两边除以 T，令 $T \to +\infty$，即可得到：

$$\beta(q) \leq (-\gamma_0 + \delta)q + C. \tag{A.3}$$

将（A.1）与（A.3）结合，并令 $q \to +\infty$，我们得到

$$-\gamma_0 + \varepsilon \leq -\gamma_0 + \delta.$$

由于 δ 的选取与 ε无关，我们取$\delta = \varepsilon/2$便得到矛盾。□

命题的证明 *A.1*。由引理可得 $\beta'(q) < -\gamma_0$ 对所有 $q \geq 1$。由于$\beta(1) = \mathrm{Pr}(-\psi^u) = 0$，我们推得对任意 $q > 1$:

$$\mathrm{Pr}(-q\psi^u) = \beta(q) = \int_1^q \beta'(q')\mathrm{d}q' < -\gamma_0(q-1).$$

□

附录 B. 酉平坦丛上的半经典量子化

设 $\mathcal{M}$ 是一个维数为 d 的闭黎曼流形，$\mathcal{E} \to \mathcal{M}$ 是 $\mathcal{M}$上的酉平坦向量丛。我们定义一个半经典量子化过程，将符号 $a \in C^\infty(T^*\mathcal{M})$ 映射为线性算子 $\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(a) : C^\infty(\mathcal{M}) \to \mathcal{D}'(\mathcal{M}, \mathcal{E})$。我们的目的并非面面俱到，也不是证明最优结果，而是专注于实现我们目标所需的工具。这并非首次需要使用半经典量子化过程来同时处理无穷多个丛，参见 [MM24; CL24]。我们使用记号 $\langle \xi \rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2}$。

B.1. **阶函数与符号空间。**

定义 B.1. 在本附录中，满足$m(x, \lambda\xi) = m(x, \xi)$的有界函数 $m \in S^0(T^*\mathcal{M})$（对所有 $\lambda > 1$ 和 $|\xi| \geq 1$ 均成立）称为阶函数。

定义 B.2. 设 m 为一个阶函数，且 $\rho \in (1/2, 1]$。若函数 $a \in C^\infty(T^*\mathcal{M})$对于任意多重指标 $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$，均存在常数$C_{\alpha,\beta} > 0$ 使得

$$\forall (x, \xi) \in T^*\mathcal{M}, \quad |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a| \leq C_{\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{m(x,\xi) - \rho|\alpha| + (1-\rho)|\beta|}.$$

其中 th 这些不等式均在坐标图中理解。这是一个带有半范数的弗雷歇空间 s

$$p_{\alpha,\beta}(a) := \sup_{(x,\xi) \in T^*\mathcal{M}} \left| \langle \xi \rangle^{-m(x,\xi) + \rho|\alpha| - (1-\rho)|\beta|} \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a \right|.$$

当 m 为常数时，我们得到标准的霍尔曼德符号类，简记为 S^m_ρ。

例 B.3. 如果 m 是阶函数，那么对任意 $\rho < 1$，符号 $\langle \xi \rangle^{m(x,\xi)}$ 都属于 $S_\rho^{m(\bullet)}(T^*\mathcal{M})$。当 m 非常数时，由于求导时 $\langle \xi \rangle$ 中会出现对数项，符号 $\langle \xi \rangle^m$ 不属于更理想的类 $S_1^{m(\bullet)}(T^*\mathcal{M})$。

定义 B.4. 如果 m 是阶函数，我们定义

$$S_{1^-}^{m(\bullet)} := \bigcap_{\rho < 1} S_\rho^{m(\bullet)}.$$

引理 B.5. 对于任意 $s \in \mathbb{R}$ 和 $\varepsilon > 0$，包含关系 $S^s_{1^-} \subset S_1^{s+\varepsilon}$ 是连续的。

于是，得到以下结果：

命题 B.6. 假设 $m \leq m'$ 是两个阶函数。则 $S_\rho^{m(\bullet)} \subset S_\rho^{m'}(\bullet)$且该包含是连续的。特别地，

$$S_\rho^{\inf m}(T^*\mathcal{M}) \subset S_\rho^{m(\bullet)}(T^*\mathcal{M}) \subset S_\rho^{\sup m}(T^*\mathcal{M}).$$

B.2. **关于 $C^\infty(\mathcal{M})$ 的半经典演算。** 我们先考虑平凡丛 $\mathbb{C} \to \mathcal{M}$，一般酉平坦丛 $\mathcal{E} \to \mathcal{M}$ 的情形将在下一节讨论。Guedes Bonthonneau 的笔记 [GB]简要总结了紧支撑符号的演算。关于 C^∞_{comp}-演算的另一篇参考文献是 [DJN22] 的附录，其中给出了非常明确的估计——他们使用右量子化，但证明可直接应用于 Weyl 量子化。

考虑 $\mathcal{M}$ 的一个图册 $\{(\mathcal{U}_i,\varphi_i)\}$，其中 $\varphi_i\colon \mathcal{U}_i\to\mathcal{V}_i\subset\mathbb{R}^d$。按照[GB]，，我们可以假设这些坐标图是保体积的，即 φ_i 将 $\mathcal{M}$上的黎曼测度映到 $\mathbb{R}^d$ 上的勒贝格测度（关于此类坐标图的存在性，参见 [Mos65]）。设$\{\chi_i\}$、$\{\eta_i\}$是两族光滑函数，其中 $\chi_i,\eta_i\in C^\infty_{\mathrm{comp}}(\mathcal{U}_i,[0,1])$，满足$\chi_i\prec\eta_i$（即在支集$\chi_i$上 $\eta_i\equiv 1$）、$\sum\chi_i^2=1$和 $\sum\eta_i\le 2$。我们引入以下简写

$$\chi^i:=\chi_i\circ\varphi_i^{-1},\qquad \eta^i:=\eta_i\circ\varphi_i^{-1}.$$

我们将 $\widetilde{\varphi}_i\colon T^*\mathcal{U}_i\to T^*V_i$ φ_i的辛提升记为。

$\mathbb{R}^d$ 上的 Weyl 量子化记为 $\mathrm{Op}_h^{\mathrm{w}}(\cdot)$。回顾其定义为

$$\mathrm{Op}_h^{\mathrm{w}}(a)u(x)=\frac{1}{(2\pi h)^d}\int \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{h}\langle x-y,\xi\rangle}a\Big(\frac{x+y}{2},\xi\Big)u(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi,$$

对于任意合适的符号 $a\in C^\infty(T^*\mathbb{R}^d)$。我们还可以令 $\mathrm{Op}_h^{\mathrm{w}}(a)$ 作用于 $\mathbb{C}^n$值函数，即在每个坐标上按照 $\mathrm{Op}_h^{\mathrm{w}}(a)$ 作用。给定两个合理的符号 a、b，存在一个依赖于 a h的符号 $a\#b$，称为*Moyal*乘积 a 和 b的 Moyal 乘积，使得

$$\mathrm{Op}_h^{\mathrm{w}}(a)\mathrm{Op}_h^{\mathrm{w}}(b)=\mathrm{Op}_h^{\mathrm{w}}(a\#b),$$

见 [Zwo12，定理 4。11]。

定义 B.7（流形上的 Weyl 量子化）。令 m 为一个阶函数，且$\rho\in(1/2,1]$。对于实符号 $a\in S^{m(\bullet)}_\rho(T^*\mathcal{M})$，定义 $a_i:=(\eta_i a)\circ\widetilde{\varphi}_i^{-1}\in C^\infty_{\mathrm{comp}}(V_i)$，然后令

$$\mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(a):=\sum_{i\in I}(\varphi_i)^*\chi^i\mathrm{Op}_h^{\mathrm{w}}(a_i)(\varphi_i)_*\chi_i.$$

算子 $\mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(a)$ 在 $C^\infty(\mathcal{M})$ 上形式上是自伴的。

备注 B.8. 考虑映射

$$T:C^\infty(\mathcal{M})\to\bigoplus_{i\in I}C^\infty(V_i),\qquad u\mapsto\big((\varphi_i)_*(\chi_i u)\big)_{i\in I}.\tag{B.1}$$

由于坐标图是保体积的，T 诱导出一个等距映射 $T\colon L^2(\mathcal{M})\to\bigoplus_{i\in I}L^2(V_i)$，其伴随算子为

$$T^*(v_i)_{i\in I}=\sum_{i\in I}\chi_i\varphi_i^*v_i.$$

于是，有 $T^*T=\mathrm{Id}_{L^2(\mathcal{M})}$，我们可以写成

$$\mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(a)=T^*\,\mathrm{Diag}_{i\in I}\big(\mathrm{Op}_h^{\mathrm{w}}(a_i)\big)T,\tag{B.2}$$

其中 $\mathrm{Diag}_{i\in I}(A_i)(v_i)_{i\in I}:=(A_iv_i)_{i\in I}$，对于任意算子族 $A_i\colon C^\infty(V_i)\to C^\infty(V_i)$。

下面的命题描述坐标图变换对伪微分算子的作用。

命题 B.9（$\mathbb{R}^d$中的埃戈罗夫定理）。设 $f\colon U\subset\mathbb{R}^d\to V\subset\mathbb{R}^d$ 为一个光滑微分同胚。设 $\chi\in C^\infty_{\mathrm{comp}}(U)$ 以及 $\psi\in C^\infty_{\mathrm{comp}}(V)$。那么，对于所有 $a\in S^m_\rho(T^*\mathbb{R}^d)$，存在一个符号 $(T^*\mathbb{R}^d)$，使得

$$f^*\psi\mathrm{Op}_h^{\mathrm{w}}(a)f_*\chi=\mathrm{Op}_h^{\mathrm{w}}(b)+\mathcal{O}(h^\infty)_{L^2\to L^2}.$$

此外，符号 b 具有如下渐近展开：对于所有 N，有

$$b = \sum_{k \le N-1} h^k \mathbf{D}^{2k}(a \circ \tilde{f}) + h^N r_N,$$

其中 $r_N \in S_\rho^{m-N(2\rho-1)}(T^*\mathbb{R}^d)$ 的半范数仅依赖于 a 的半范数和微分同胚 f。这里，$\mathbf{D}^{2k}$ 表示一个 $2k$ 阶微分算子，至少有 k 个导数作用于 ξ变量。其首项为

$$\mathbf{D}^0(a \circ \tilde{f}) = \psi(f(x))a(f(x), \mathrm{d}f(x)^{-\top}\xi)\chi(x).$$

证明。 这是对例如[Lef25，引理 5.27] 在半经典情形下的直接推广。□

命题 B.10。 以下性质对 $\mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}$成立。

(1) L^2**-连续性，适用于** $S_1^0(T^*\mathcal{M})$**中的符号**。设 $a \in S_1^0(T^*\mathcal{M})$。那么，

$$\left\| \mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(a) \right\|_{L^2 \to L^2} \le \|a\|_\infty + \mathcal{O}_a(h).$$

(2) L^2**-连续性，适用于** $S_\rho^0(T^*\mathcal{M})$**中的符号**。设 $a \in S_\rho^0(T^*\mathcal{M})$。那么，

$$\left\| \mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(a) \right\|_{L^2 \to L^2} \le C(a), \tag{B.3}$$

其中常数 $C(a)$ 是 $S_\rho^m(T^*\mathcal{M})$上的连续半范数。

***(3)* 伪局部性**。 假设 $a \in S_\rho^m(T^*\mathcal{M})$。那么，对于任意与 h 无关的 $\chi, \psi \in C^\infty(\mathcal{M})$，只要 χ) 的支集与 ψ) 的支集 $= \varnothing$，就有

$$\chi \, \mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(a) \psi = \mathcal{O}(h^\infty)_{\mathcal{D}'(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M})}.$$

***(4)* 复合**。 设 m_1, m_2 是两个阶函数，使得 $m_1 + m_2 \le 0$ 在紧集之外成立。对于任意 $a \in S^{m_1}{}^{(\bullet)\,1^-}$ 和 $b \in S^{m_2}{}^{(\bullet)\,1^-}$，有

$$\mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(a) \, \mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(b) = \mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(ab) + \mathcal{O}(h)_{L^2 \to L^2}.$$

证明。 回忆一下，$\mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(a) = T^* \, \mathrm{Diag}_{i \in I} \left(\mathrm{Op}_h^{\mathrm{w}}(a_i) \right) T$，且 T 是一个等距映射 $L^2(\mathcal{M}) \to \bigoplus L^2(V_i, \mathbb{C}^n)$。由于 $\mathrm{Diag}_{i \in I}(\mathrm{Op}_h^{\mathrm{w}}(a_i))$ 保持直和 $\bigoplus_{i \in I} L^2(V_i, \mathbb{C}^n)$，因此有

$$\left\| \mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(a) \right\|_{L^2(\mathcal{M})} \le \sup_{i \in I} \left\| \mathrm{Op}_h^{\mathrm{w}}(a_i) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

(1) 假设 $a \in S_1^0(T^*\mathcal{M})$。则 $a_i \in S_1^0(T^*\mathbb{R}^d)$。根据 [Zwo12，定理 13。13],我们得到，对每个 $i \in I$:

$$\left\| \mathrm{Op}_h^{\mathrm{w}}(a_i) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le \|\eta_i a\|_\infty + \mathcal{O}(h) \le \|a\|_\infty + \mathcal{O}(h).$$

(2) 假设 $a \in S_\rho^0(T^*\mathcal{M})$。我们先回顾一个关于 $h = 1$ 量子化的结果。对于任意 $b \in S_\rho^0(T^*\mathbb{R}^d)$，根据 [Hör07, Theorem 18.6.3]，应用于 [Hör07, (18.4.1)'] 中的度量（另见 [Hör07, Theorem 18.1.13] 以及 [Hör07, (18.1.1)"]附近的注释），算子 $\mathrm{Op}_1^{\mathrm{w}}(b) : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ 是连续的；此外，存在一个常数$C > 0$，它依赖于维数 d 和 ρ，使得

$$\| \mathrm{Op}_1^{\mathrm{w}}(b) \|_{L^2 \to L^2} \le C \sum_{|\alpha| + |\beta| \le C} p_{\alpha,\beta}(b).$$

现在，对于一般的符号 $b \in S^0_\rho(T^*\mathbb{R}^d)$，由标准的重缩放论证可知，对于 $b_h(x,\xi) = b(h^{\frac{1}{2}}x, h^{\frac{1}{2}}\xi)$，有

$$\|\operatorname{Op}^{\mathrm{w}}_h(b)\|_{L^2\to L^2} = \|\operatorname{Op}^{\mathrm{w}}_1(b_h)\|_{L^2\to L^2}.$$

可以验证，对于所有多重指标 α,β，$p_{\alpha,\beta}(b_h) \leq p_{\alpha,\beta}(b)$，由此得到

$$\|\operatorname{Op}^{\mathrm{w}}_h(b)\|_{L^2\to L^2} \leq C \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq C} p_{\alpha,\beta}(b).$$

只需对每个 $b = a_i$ 应用此结果 $i \in I$，即可得到（B.3）。

（3）这是由 $\mathbb{R}^d$ 上关于 Weyl 量子化的结果得出的。

（4）我们有

$$\operatorname{Op}^{\mathcal{M}}_h(a)\operatorname{Op}^{\mathcal{M}}_h(b) = \sum_{i\in I}\varphi_i^*\chi_i \sum_{j\in I}\operatorname{Op}^{\mathrm{w}}_h(a_i)\chi_i(\varphi_i)_*\varphi_j^*\chi_j \operatorname{Op}^{\mathrm{w}}_h(b_j)(\varphi_j)_*\chi_j.$$

根据伪局部性，在不计一个误差项 $\mathcal{O}(h^\infty)$ 的情况下，我们可以在乘积右侧插入因子 η_i：

$$\operatorname{Op}^{\mathrm{w}}_h(a_i)\chi_i(\varphi_i)_*\varphi_j^*\chi_j \operatorname{Op}^{\mathrm{w}}_h(b_j) = \operatorname{Op}^{\mathrm{w}}_h(a_i)\chi_i(\varphi_i)_*\varphi_j^*\chi_j \operatorname{Op}^{\mathrm{w}}_h(b_j)\eta_i + \mathcal{O}(h^\infty)_{L^2\to L},$$

然后用 $\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ 改写：

$$\operatorname{Op}^{\mathcal{M}}_h(a)\operatorname{Op}^{\mathcal{M}}_h(b) = \sum_{i\in I}\varphi_i^*\chi_i\Big(\sum_{j\in I}\operatorname{Op}^{\mathrm{w}}_h(a_i)\chi_i(\varphi_{ij})^*\chi_j \operatorname{Op}^{\mathrm{w}}_h(b_j)(\varphi_{ij})_*\chi_j\Big)(\varphi_i)_*\eta_i + \mathcal{O}(h^\infty)_{L^2\to L^2}.$$

由于 $b_j \in S^{m_2\circ\widetilde{\varphi}_j^{-1}}_\rho(T^*\mathbb{R}^d)$，根据变量替换公式，首先有

$$(\varphi_{ij})^*\chi_j \operatorname{Op}^{\mathrm{w}}_h(b_j)(\varphi_{ij})_*\eta_i\chi_j = \operatorname{Op}^{\mathrm{w}}_h(\chi_j^2\eta_i b_j\circ\widetilde{\varphi}_{ij} + hr),$$

其中 $r \in hS^{m_2\circ\widetilde{\varphi}_i^{-1}-(2\rho-1)\rho}_{(2\rho-1)\rho}(T^*\mathbb{R}^d)$。由于 $a_i \in S^{m_1\circ\widetilde{\varphi}_i^{-1}}_\rho(T^*\mathbb{R}^d)$ 且 $m_1+m_2\leq 0$ 在某个紧集之外，我们有 $a_i\#r \in hS^{-(2\rho-1)}_\rho$；由于这对任意 $\rho\in(1/2,1)$ 都成立，因此可得 $a_i\#r \in hS^0_1$。通过运用复合规则和 L^2- 连续性定理，我们得到

$$\operatorname{Op}^{\mathrm{w}}_h(a_i)\chi_i(\varphi_{ij})^*\chi_j \operatorname{Op}^{\mathrm{w}}_h(b_j)(\varphi_{ij})_*\eta_i\chi_j = \operatorname{Op}^{\mathrm{w}}_h(\chi_i a_i(\chi_j)^2 b_i) + \mathcal{O}(h)_{L^2\to L^2},$$

再次运用复合规则可得：

$$\operatorname{Op}^{\mathrm{w}}_h(a_i)\chi_i(\varphi_{ij})^*\chi_j \operatorname{Op}^{\mathrm{w}}_h(b_j)(\varphi_{ij})_*\eta_i\chi_j = \operatorname{Op}^{\mathrm{w}}_h((ab)_i\chi_j^2)\chi_i + \mathcal{O}(h)_{L^2\to L^2}.$$

由于 $\sum_{j\in I}\chi_j^2 = 1$，这给出

$$\operatorname{Op}^{\mathcal{M}}_h(a)\operatorname{Op}^{\mathcal{M}}_h(b) = \sum_{i\in I}\varphi_i^*\chi_i \operatorname{Op}^{\mathrm{w}}_h((ab)_i)\chi_i(\varphi_i)_* + \mathcal{O}(h)_{L^2\to L^2}.$$

根据 $\operatorname{Op}^{\mathcal{M}}_h$ 的定义，这恰好意味着

$$\operatorname{Op}^{\mathcal{M}}_h(a)\operatorname{Op}^{\mathcal{M}}_h(b) = \operatorname{Op}^{\mathcal{M}}_h(ab) + \mathcal{O}(h)_{L^2\to L^2}.$$

□

现在我们转而讨论一个埃戈罗夫型引理，采用一种相当特设的设定，这足以满足我们的目的。

引理 *B.11.* 设 $a \in S^{m_1}(\bullet)_{1-}(T^*\mathcal{M})$, $b \in S^{m_2}(\bullet)_{1-}(T^*\mathcal{M})$, 并设 f 是 $\mathcal{M}$ 上保体积的微分同胚。令 $\tilde{f}(x,\xi) = (f(x), df(x)^{-\top}\xi)$ 表示 f 到 $T^*\mathcal{M}$ 的辛提升，并假设其在一个紧集之外成立 $m_1 \circ f + m_2 \le 0$。则有以下结论。

- *The operator* $\operatorname{Op}_h^{\mathcal{M}}(a) f_* \operatorname{Op}_h^{\mathcal{M}}(b)$ *is continuous* $L^2 \to L^2$, *i.e.*
$$\left\| \operatorname{Op}_h^{\mathcal{M}}(a) f_* \operatorname{Op}_h^{\mathcal{M}}(b) \right\| = \mathcal{O}_{a,b}(1).$$
- *If* $m_1 \circ \widetilde{f} + m_2 \le -c < 0$ *on* $\operatorname{Supp}(b) \cap \widetilde{f}^{-1}(\operatorname{Supp}(a))$ *then,*
$$\left\| \operatorname{Op}_h^{\mathcal{M}}(a) f_* \operatorname{Op}_h^{\mathcal{M}}(b) \right\| \lesssim \|(a \circ \widetilde{f}) b\|_\infty + \mathcal{O}_{a,b}(h).$$

证明。 由于 f 保持体积，我们有
$$\left\| \operatorname{Op}_h^{\mathcal{M}}(a) f_* \operatorname{Op}_h^{\mathcal{M}}(b) \right\|_{L^2 \to L^2} = \left\| f^* \operatorname{Op}_h^{\mathcal{M}}(a) f_* \operatorname{Op}_h^{\mathcal{M}}(b) \right\|_{L^2 \to L^2}.$$
因此，为了得到所需结果，只需对图册中的每个坐标图 $(\varphi_\ell, \chi_\ell)$，估计范数
$$\left\| f^* \operatorname{Op}_h^{\mathcal{M}}(a) f_* \operatorname{Op}_h^{\mathcal{M}}(b) \varphi_\ell^* \chi_\ell \right\|_{L^2 \to L^2},$$
进而，由伪局部性，只需估计（此处取一个满足$\chi_\ell \prec \chi_\ell'$的截断函数 χ_ℓ'）
$$\left\| \left[(\varphi_\ell)_* \chi_\ell' f^* \operatorname{Op}_h^{\mathcal{M}}(a) f_* \varphi_\ell^*(\chi_\ell') \right] \circ \left[(\varphi_\ell)_* \chi_\ell' \operatorname{Op}_h^{\mathcal{M}}(b) (\varphi_\ell)^* \chi_\ell \right] \right\|_{L^2 \to L^2}. \tag{B.4}$$
利用命题 B.9 两次，我们得到
$$(\varphi_\ell)_* \chi_\ell' f^* \operatorname{Op}_h^{\mathcal{M}}(a) f_* \varphi_\ell^*(\chi_\ell') = \operatorname{Op}_h^{\mathrm{w}}((\chi_\ell')^2 a \circ \widetilde{f} \circ \widetilde{\varphi}_\ell^{-1} + h r_1),$$
其中 $r_1 \in S^{m_1 \circ \widetilde{f} \circ \widetilde{\varphi}_\ell^{-1}}{}_{(\bullet)-(2\rho-1)\rho}(T^*\mathbb{R}^d)$ 对所有 $\rho \in (1/2, 1)$ 均成立，并且
$$(\varphi_\ell)_* \chi_\ell' \operatorname{Op}_h^{\mathcal{M}}(b) (\varphi_\ell)^* \chi_\ell = \operatorname{Op}_h^{\mathrm{w}}(\chi_\ell b \circ \varphi_\ell^{-1} + h r_2),$$
与 $r_2 \in S^{m_2 \circ \widetilde{\varphi}_\ell^{-1}}{}_{(\bullet)-(2\rho-1)\rho}(T^*\mathbb{R}^d)$ 对所有 $\rho \in (1/2, 1)$。由于 $m_1 \circ \widetilde{f} + m_2 \le 0$ 在某个紧集之外，根据命题 B.10的第 (B.4) 项，算子可表示为
$$\operatorname{Op}_h^{\mathrm{w}}([\chi_\ell (a \circ \tilde{f}) b] \circ \widetilde{\varphi}_\ell^{-1}) + \mathcal{O}(h)_{L^2 \to L^2}.$$
这里用到了如下事实：Moyal乘积 $(\varphi_\ell)_* a \# r_2$ 属于 $S_1^0(T^*\mathbb{R}^d)$，其中 $(\varphi_\ell)_* a \in S_\rho^{m_1 \circ \tilde{f} \circ \widetilde{\varphi}_\ell^{-1}}(T^*\mathbb{R}^d)$ 且 $r_2 \in S^{m_2 \circ \widetilde{\varphi}_\ell^{-1}}{}_{(\bullet)-(2\rho-1)\rho}(T^*\mathbb{R}^d)$。

现在我们应用 L^2-连续性定理：

- 若在 $(a \circ \tilde{f}) b$ 的支集上有 $m_1 \circ \widetilde{f} + m_2 \le -c < 0$，则 $[\chi_\ell (a \circ \tilde{f}) b] \circ \widetilde{\varphi}_\ell^{-1}$ 属于 $S_1^0(T^*\mathbb{R}^d)$，因此
$$\|\operatorname{Op}_h^{\mathrm{w}}([\chi_\ell (a \circ \tilde{f}) b] \circ \widetilde{\varphi}_\ell^{-1})\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le \|(a \circ \tilde{f}) b\|_\infty + \mathcal{O}_{a,b}(h).$$
- 如果我们只在支集上有 $m_1 \circ f + m_2 \le 0$，那么
$$\|\operatorname{Op}_h^{\mathrm{w}}([\chi_\ell (a \circ \tilde{f}) b] \circ \widetilde{\varphi}_\ell^{-1})\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \mathcal{O}_{a,b}(1).$$

□

B.3. 酉平坦丛上的量子化。 现在讨论一般酉平坦丛 $\mathcal{E} \to \mathcal{M}$的情形。 x 上的纤维记作 $\mathcal{E}_x$。

B.3.1. 的局部平凡化 $\mathcal{E}$。 固定 $\mathcal{M}$的一个有限覆盖 $\{\mathcal{U}_j\}$ ，它不必与上一节中的覆盖相同——希望这不会造成混淆。我们考虑 $\mathcal{M}$ 上的如下形式的平坦丛

$$\mathcal{E} = \bigsqcup \mathcal{U}_j \times \mathbb{C}^n / \sim, \tag{B.5}$$

其中，对于任意 $x \in \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$我们将 $(x, v) \in \mathcal{V}_i \times \mathbb{C}^n$与 $(x, \kappa_{ij}(v)) \in \mathcal{U}_j \times \mathbb{C}^n$相对应，其中 κ_{ij}是某个酉矩阵。如果覆盖 $\{\mathcal{U}_j\}$的选取满足任意有限个 $\mathcal{U}_j$的交集要么可缩，要么为空，那么覆盖 $\mathcal{M}$ 上的任意平坦丛都可以表示为式（B.5）的形式。下一小节中，我们将介绍另一种更适用于覆盖 M 上丛的提升的选取方式。

我们考虑与覆盖 $\{\chi_j\}$ 相关联的二次单位分解 $\{\mathcal{U}_j\}$，即 支集 $\chi_j \subset \mathcal{U}_j$ 且 $\sum \chi_j^2 = 1$。利用式（B.5），我们引入一族局部平凡化

$$R_i : C^\infty_{\mathrm{comp}}(\mathcal{U}_i, \mathcal{E}) \to C^\infty_{\mathrm{comp}}(\mathcal{U}_i, \mathbb{C}^n).$$

此处， R_i 可延拓为从 $L^2(\mathcal{U}_i, \mathcal{E})$到 $L^2(\mathcal{U}_i, \mathbb{C}^n)$的等距映射。 R_i 的伴随算子记为 R_i^*。然后，我们定义一个整体映射

$$R : \begin{array}{ccc} C^\infty(M, E) & \longrightarrow & \bigoplus_{i\in I} C^\infty(\mathcal{U}_i, \mathbb{C}^n) \\ s & \longmapsto & (\chi_i R_i s)_{i\in I} \end{array}.$$

于是， R 诱导出一个等距映射 $L^2(\mathcal{M}, \mathcal{E}) \to \bigoplus_{i\in I} L^2(\mathcal{U}_i, \mathbb{C}^n)$，其伴随算子为

$$R^* : (s_i)_{i\in I} \longmapsto \sum_{i\in I} \chi_i R_i^* s_i,$$

由于 $R_i^* R_i = \mathrm{Id}$ 且 $\sum \chi_i^2 = 1$，我们有 $R^* R = \mathrm{Id}_{C^\infty(\mathcal{M},\ \mathcal{E})}$。算子 $R_{ij} := R_i R_j^*$将 $C^\infty(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j, \mathbb{C}^n)$ 映到其自身；它是由一个与点 $x \in \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ 无关的酉矩阵给出的乘法算子。

B.3.2. 提升丛的情形。当 $\mathcal{E} \to SM$ 是丛 $E \to M$ 的提升时，为了我们的目的，特别选择一个由开集构成的 SM 覆盖很有用。我们令 $\{U_j\}$ 为 M 的一个有限覆盖，使得其中任意有限个 U_j 的交要么为空，要么可缩。于是，我们有

$$E = \bigsqcup U_j \times \mathbb{C}^n / \sim,$$

其中，对于任意 $x \in U_i \cap U_j$，我们将 $(x, z) \in U_i \times \mathbb{C}^n$ 与 $(x, \kappa_{ij}(z)) \in U_j \times \mathbb{C}^n$ 视为相同。由于丛 $E \to M$ 是平坦且酉的，可以令 κ_{ij} 为一个常数酉矩阵。

我们考虑一个相伴的二次单位分解 ψ_j。令 $\pi : SM \to M$表示投影，我们定义

$$\mathcal{U}_j = \pi^{-1}(U_j), \qquad \chi_j = \pi^* \psi_j.$$

于是， SM 上的丛 $\mathcal{E} = \pi^* E$ 由下式给出

$$\mathcal{E} = \bigsqcup \mathcal{U}_j \times \mathbb{C}^n / \sim,$$

其中，对任意 $(x, v) \in \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$，我们将 $\big((x, v)\ z\big) \in \mathcal{U}_i \times \mathbb{C}^n$ 等同于 $\big((x, v)\, \kappa_{ij}(z)\big) \in \mathcal{U}_j \times \mathbb{C}^n$。

采用这一选择的好处在于，由于限制 $\mathcal{E}_{|S_x M} \to S_x M$ 是平凡丛 $(S_x M \times E_x) \to S_x M$，且 χ_j 沿垂直纤维保持常数，我们有

$$\big(g(\Delta_{\mathbb{V}}) \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}\big) R_j \chi_j = R_j \chi_j g(\Delta_{\mathbb{V}}^E).$$

B.3.3. 量子化算子。

定义 B.12。 设 m 为一个阶函数。对于 $a \in S^{m(\bullet)}_{\rho}(T^*\mathcal{M})$，我们定义

$$\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(a) := R^* \circ \mathrm{Diag}_{i\in I}\left(\mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(a)\right) \circ R.$$

其中 $\mathrm{Diag}_{i\in I}\left(\mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(a)\right)$ 在 $\bigoplus_{i\in I} C^\infty_{\mathrm{comp}}(\mathcal{U}_i,\mathbb{C}^n)$ 上按对角方式作用，其在第 i 个因子上的作用由 $\mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(a)$ 给出。

则下述结论成立。

命题 B.13 （L^2-连续性）。 设 $a \in S^0_1(T^*\mathcal{M})$。对于任意平坦丛 $\mathcal{E}\to\mathcal{M}$，有

$$\left\|\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(a)\right\|_{L^2(\mathcal{M},\mathcal{E})} \le \|a\|_\infty + \mathcal{O}_a(h),$$

其中误差关于 $\mathcal{E}$ 是一致的。

令 $a \in S^0_\rho(T^*\mathcal{M})$。对于任意平坦丛 $\mathcal{E}\to\mathcal{M}$，有

$$\left\|\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(a)\right\|_{L^2(\mathcal{M},\mathcal{E})} \le C(a),$$

其中误差与 $\mathcal{E}$ 无关；若 a 的半范数有界，则 $C(a)$ 有界。

证明。 由于 R 是等距映射 $L^2(\mathcal{M},\mathcal{E}) \to \bigoplus L^2(\mathcal{U}_i,\mathbb{C}^n)$，且 $\mathrm{Diag}(\mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(\eta_i a))$ 保持直和 $\bigoplus L^2(\mathcal{U}_i,\mathbb{C}^n)$，故有

$$\left\|\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(a)\right\|_{L^2(\mathcal{M},\mathcal{E})} \le \left\|\mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(a)\right\|_{L^2(\mathcal{M})}.$$

通过调用命题 B.10，即可得出结论。 □

命题 B.14。 设 $a,b \in S^{m_1(\bullet)1^-}, S^{m_2(\bullet)1^-}$，其中 $m_1+m_2\le 0$ 位于某个紧集之外。则，

$$\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(a)\,\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(b) = \mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(ab) + \mathcal{O}_{a,b}(h)_{L^2\to L^2}.$$

余项关于 $\mathcal{E}$ 一致。

证明。我们有

$$\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(a)\,\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(b) = \sum_{i\in I} R_i^*\chi_i \sum_{j\in I} \mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(a)\chi_i\chi_j R_{ij}\,\mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(b_j)\chi_j R_j.$$

由于 R_{ij} 是一个常数酉矩阵，我们可以交换$\mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(a)R_{ij} = R_{ij}\mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(a)$并写成

$$\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(a)\,\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(b) = \sum_{i\in I} R_i^*\chi_i \sum_{j\in I} R_{ij}\,\mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(a)\chi_i\chi_j\,\mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(b)\chi_j R_j.$$

借助命题 B.10 中的复合公式，我们得到

$$\mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(a)\chi_i\chi_j\,\mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(b)\chi_j = \mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(\chi_j^2 ab)\chi_i\eta_j + \mathcal{O}(h)_{L^2\to L^2}.$$

由于算子 R_i^*、R_j、R_{ij} 均为等距映射，我们可推出

$$\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(a)\,\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(b) = \sum_{i\in I} R_i^*\chi_i \sum_{j\in I} R_{ij}\,\mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(\chi_j^2 ab)\eta_j\chi_i R_j + \mathcal{O}(h)_{L^2\to L^2}.$$

现在我们利用 $\eta_j\chi_i R_j = \eta_j\chi_i R_{ji}R_i$ 和 $R_{ji}R_{ij} = \mathrm{Id}$ 得到

$$\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(a)\,\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(b) = \sum_{i\in I} R_i^*\chi_i\Big(\sum_{j\in I}\mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(\chi_j^2 ab)\eta_j\Big)\chi_i R_i + \mathcal{O}(h)_{L^2\to L^2}. \tag{B.6}$$

由于 $\sum_{j\in I}\chi_j^2 = 1$ 和 $\chi_j \prec \eta_j$，我们得到

$$\sum_j \mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(\chi_j^2 ab)\eta_j = \mathrm{Op}_h^{\mathcal{M}}(ab) + \mathcal{O}(h)_{L^2\to L^2}. \tag{B.7}$$

将（B.7）代入（B.6）最终得到

$$\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(a)\,\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(b) = \mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(ab) + \mathcal{O}(h)_{L^2\to L^2},$$

正如我们所希望的那样。 □

注 B.15。事实上，可以证明算子 $R = \mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(a)\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(b) - \mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(ab)$ 是连续的 $H^r \to H^{r-(2\rho-1)}$，对所有 $r\in\mathbb{R}$ 均成立，其中 $H^r = H^r(\mathcal{M},\mathcal{E})$ 表示阶数为 r 的标准索伯列夫空间。

作为推论，我们得到：

推论 B.16. 设 $s\in\mathbb{R}$。当 $0 < h < h_0(s)$ 足够小时，对任意酉平坦丛 $\mathcal{E}\to\mathcal{M}$，算子 $\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(\mathrm{e}^{sG_m})\colon C^\infty(\mathcal{M},\mathcal{E}) \to C^\infty(\mathcal{M},\mathcal{E})$ 可逆，并且

$$\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(\mathrm{e}^{sG_m})^{-1} = \mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(\mathrm{e}^{-sG_m})(\mathrm{Id} + \mathcal{O}_{s,m}(h)_{L^2\to L^2}).$$

证明。由命题 B.14，可得

$$\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(\mathrm{e}^{-sG_m})\,\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(\mathrm{e}^{sG_m}) = \mathrm{Id} + R,$$

其中 $\|R\|_{L^2\to L^2} \lesssim h$ 关于 $\mathcal{E}$ 和 R 一致：对任意 r，$H^r \to H^{r-(2\rho-1)}$。设 $v\in C^\infty(\mathcal{M},\mathcal{E})$，并令

$$u := (\mathrm{Id}+R)^{-1}\,\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(\mathrm{e}^{-sG_m})v \in L^2(\mathcal{M},\mathcal{E}).$$

于是，$(\mathrm{Id}+R)u = \mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(\mathrm{e}^{-sG_m})v \in C^\infty(\mathcal{M},\mathcal{E})$。此外，由于 $R\colon H^r\to H^{r-(2\rho-1)}$ 连续，恒等式 $u = \mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(\mathrm{e}^{-sG_m})v - Ru$ 蕴含

$$u\in H^k \Longrightarrow u\in H^{k+(2\rho-1)}. \tag{B.8}$$

由于 $u\in L^2$，通过对 (B.8) 进行迭代并利用索伯列夫嵌入定理可得 $u\in C^\infty(\mathcal{M},\mathcal{E})$，并且 $\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(\mathrm{e}^{sG_m})u = v$。 □

最后，我们将引理 B.11 推广到酉平坦丛的情形 $\mathcal{E}\to\mathcal{M}$，其中 $f=\varphi_t$ 是测地流，且 t 较小。

命题 B.17（埃戈罗夫定理）。设 m 为命题 5.1中的阶函数。设 a、$b\in S^{sm(\bullet)}$、$S^{-sm(\bullet)}$，分别如此。则，

$$\big\|\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(a)\mathrm{e}^{-t\mathbf{X}_{\mathcal{E}}}\,\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(b)\big\|_{L^2\to L^2} = \mathcal{O}_{a,b}(1).$$

此外，如果 $m\circ\widetilde{\varphi}_t - m \le -c < 0$ 在支集$(b)\cap\widetilde{\varphi}_t^{-1}$(支集$(a)$)上，那么

$$\big\|\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(a)\mathrm{e}^{-t\mathbf{X}_{\mathcal{E}}}\,\mathrm{Op}_h^{\mathcal{E}}(b)\big\|_{L^2\to L^2} \lesssim \|(a\circ\widetilde{\varphi}_t)b\|_\infty + \mathcal{O}(h).$$

证明。 由于 $\mathrm{e}^{t\mathbf{X}_\mathcal{E}}$ 在 L^2上是酉的，因此研究该算子等价于

$$P := \mathrm{e}^{t\mathbf{X}_\mathcal{E}} \operatorname{Op}_h^\mathcal{E}(a)\mathrm{e}^{-t\mathbf{X}_\mathcal{E}} \operatorname{Op}_h^\mathcal{E}(b)$$

当 t 足够小时，由于联络是平坦的，我们有：

$$R_i\chi_i\mathrm{e}^{-t\mathbf{X}_\mathcal{E}} = \chi_i\mathrm{e}^{-tX}R_i\eta_i, \qquad \mathrm{e}^{t\mathbf{X}_\mathcal{E}}R_i^*\chi_i = R_i^*\mathrm{e}^{tX}\chi_i.$$

因此，

$$P = \sum_i R_i^*\mathrm{e}^{tX}\chi_i \operatorname{Op}_h^\mathcal{M}(a)\chi_i\mathrm{e}^{-tX}R_i\eta_i \sum_j R_j^*\chi_j \operatorname{Op}_h^\mathcal{M}(b)R_j\chi_j.$$

由伪局部性，只要 t 足够小，我们可以在右侧插入因子 η_i，至多增加一个误差 $\mathcal{O}(h^\infty)$，从而

$$P = \sum_i R_i^*\mathrm{e}^{tX}\chi_i \operatorname{Op}_h^\mathcal{M}(a)\chi_i\mathrm{e}^{-tX}R_i\eta_i \sum_j R_j^*\chi_j \operatorname{Op}_h^\mathcal{M}(b)R_j\chi_j\eta_i + \mathcal{O}(h^\infty).$$

回顾 $R_iR_j^*\eta_i\chi_j = R_{ij}\eta_i\chi_j$，其中 R_{ij}是常数矩阵，因此我们可以将R_{ij} 与$\operatorname{Op}_h^\mathcal{M}(b)$互换，然后利用 $R_{ij}R_j\chi_j\eta_i = R_i\chi_j\eta_i$ 得到

$$P = \sum_i R_i^*\Big(\sum_j \mathrm{e}^{tX}\chi_i \operatorname{Op}_h^\mathcal{M}(a)\chi_i\mathrm{e}^{-tX}\chi_j \operatorname{Op}_h^\mathcal{M}(b)\chi_j\Big)R_i\eta_i + \mathcal{O}(h^\infty)_{L^2\to L^2}.$$

我们现在援引引理 B.11 （截断函数 χ_i、χ_j 的存在是无害的），并取 $f = \varphi_t$，对每个 i、j 得到：

$$\left\|\mathrm{e}^{tX} \operatorname{Op}_h^\mathcal{M}(a)\chi_i\mathrm{e}^{-tX}\chi_j \operatorname{Op}_h^\mathcal{M}(b)\right\|_{L^2\to L^2} \le C(a,b),$$

一般情况下，具有 $C(a,b) = \mathcal{O}_{a,b}(1)$；若 $m\circ\widetilde{\varphi}_t - m \le -c < 0$ 在 $\operatorname{Supp}(b) \cap \widetilde{\varphi}_t^{-1}(\operatorname{Supp}(a))$ 上，则可改进为 $C(a,b) \lesssim \|(a\circ\widetilde{\varphi}_t)b\|_\infty + \mathcal{O}_{a,b}(h)$。最后对 i,j 求和即可得出结论。

□

参考文献

[AM24] Nalini Anantharaman 与 Laura Monk. 随机双曲曲面的谱隙. 2024. arXiv: 2403.12576 [math.GT].[AM25a] Nalini Anantharaman 与 Laura Monk. 随机双曲几何中的 Friedman-Ramanujan 函数及其对谱隙的应用. 2025年. arXiv: 2304.02678 [math.SP]. [AM25b] Nalini Anantharaman 与 Laura Monk. 随机双曲几何中的 Friedman-Ramanujan 函数及其对谱隙的应用 II. 2025年. arXiv: 2502.12268 [math.MG]. [Ava56] Vojislav G. Avakumović. “关于闭黎曼流形上的特征函数”. 《数学杂志》65 (1956年), 第327–344页. [BC19] Charles Bordenave 与 Benoît Collins. “随机提升的特征值与随机置换矩阵的多项式”. 《数学年刊》(2) 190.3 (2019年), 第811–875页. [BH99] Martin R. Bridson 与 André Haefliger. 非正曲率度量空间. 第319卷. 数学科学基本原理 [数学科学基本原理]. 施普林格出版社, 柏林, 1999年, 第xxii+643页. isbn: 3-540-64324-9. [BKL02] Michael Blank、Gerhard Keller 与 Carlangelo Liverani. “Anosov 映射的 Ruelle-Perron-Frobenius 谱”. 《非线性》15.6 (2002年), 第1905–1973页. [BL07] Oliver Butterley 与 Carlangelo Liverani. “光滑 Anosov 流：相关谱与稳定性”. 《现代动力学杂志》1.2 (2007年), 第301–322页. [BM04] Robert Brooks 与 Eran Makover. “黎曼曲面的随机构造”. 《微分几何杂志》68.1 (2004年), 第121–157页.

[BMP25] Werner Ballmann、Sugata Mondal 与 Panagiotis Polymerakis. 论有限覆盖的谱稳定性. 2025年. arXiv: 2507.17466 [math.DG]. [Bor20] Charles Bordenave. “Friedman第二特征值定理的一个新证明及其向随机提升的推广”. 高等师范学院科学年刊 (4) 53.6 (2020), 第1393–1439页. [BT07] Viviane Baladi 与 Masato Tsujii. “双曲微分同胚的各向异性 Hölder 空间与 Sobolev 空间”. 傅里叶研究所年刊 (Grenoble) 57.1 (2007年), 第127–154页. [Che+25] Chi-Fang Chen、Jorge Garza-Vargas、Joel A. Tropp 与 Ramon van Handel. 强收敛的一种新方法. 2025年. arXiv: 2405.16026 [math.PR]. [CL24] Mihajlo Cekić 与 Thibault Lefeuvre. 主丛上的半经典分析. 2024. arXiv: 2405.14846 [math.AP]. [CMN24] Irving Calderón、Michael Magee 与 Frédéric Naud. “随机 Schottky 曲面的谱隙” (2024). arXiv: 2407.21506 [math.SP]. [DFG15] Semyon Dyatlov、Frédéric Faure 与 Colin Guillarmou. “双曲流形上测地流的功率谱”. 《分析与偏微分方程》8.4 (2015年), 第923–1000页. [DJN22] Semyon Dyatlov、Long Jin 与 Stéphane Nonnenmacher. “变曲率曲面上特征函数的控制”. 《美国数学会杂志》35.2 (2022年), 第361–465页. [Dol98] Dmitry Dolgopyat. “论 Anosov 流中的相关衰减”. 《数学年刊》(2) 147.2 (1998年), 第357–390页. [DP98] Dmitry Dolgopyat 与 Mark Pollicott. “补遗：“周期轨道与动力谱”［《遍历理论与动力系统》 18 (1998 年), 第 2 期 , 第 255–292 页 ; MR1619556 (2000h:37031)］, V. Baladi 著”. 《遍历理论与动力系统》18.2 (1998年), 第293–301页. [FK14] Joel Friedman 与 David-Emmanuel Kohler. Alon 的相对化第二特征值猜想. 2014年. arXiv: 1403.3462 [cs.DM]. [FM82] A. Freire 与 R. Mañé. “论无共轭点流形中测地流的熵”. 《数学发明》69.3 (1982年), 第375–392页. [Fri08] Joel Friedman. “Alon第二特征值猜想及相关问题的一个证明”. 《美国数学会论文集》195.910 (2008年), 第viii+100页. [FS11] Frédéric Faure 与 Johannes Sjöstrand. “Anosov 流的 Ruelle 共振密度上界”. 《数学物理通讯》308.2 (2011年), 第325–364页. [FT23] Frédéric Faure 与 Masato Tsujii. “Anosov 流 Ruelle 谱的分形 Weyl 定律”. 《亨利·勒贝格年刊》6 (2023), 第331–426页. [FT24] Frédéric Faure 与 Masato Tsujii. “接触 Anosov 流的微局部分析与 Ruelle 谱的带结构”. 《美国数学会通讯》4 (2024), 第641–745页. [FW17] Frédéric Faure 与 Tobias Weich. “开部分膨胀映射的全局标准形与渐近谱隙”. 《数学物理通讯》356.3 (2017), 第755–822页. [GB] Yannick Guedes Bonthonneau. “黎曼流形上 Weyl 量子化简编”. [GL06] Sébastien Gouëzel 与 Carlangelo Liverani. “适用于 Anosov 系统的 Banach 空间”. 《遍历理论与动力系统》26.1 (2006年), 第189–217页. [GM25] Colin Guillarmou 与 Marco Mazzucchelli. 几何反问题导论. 2025年. [Hel84] Sigurdur Helgason. 群与几何分析. 第113卷. 纯粹数学与应用数学. 积分几何、不变微分算子与球函数. Academic Press Inc. 佛罗里达州奥兰多, 1984年, 第xix+654页. isbn: 0-12-338301-3. [HM23] Will Hide 与 Michael Magee. “双曲曲面的近最优谱隙”. 《数学年刊》(2) 198.2 (2023), 第791–824页. [HMN25] Will Hide、Julien Moy 与 Frédéric Naud. “论负曲率曲面覆盖的谱隙”. 《国际数学研究通讯》24 (2025年), rnaf357. [HMT25a] Will Hide、Davide Macera 与 Joe Thomas. 随机覆盖曲面具有多项式速率的谱隙. 2025年. arXiv: 2505.08479 [math.SP]. [HMT25b] Will Hide、Davide Macera 与 Joe Thomas. Weil-Petersson 随机曲面具有多项式速率的谱隙. 2025年. arXiv: 2508.14874 [math.SP].

[Hör07] 拉斯·霍尔曼德。《线性偏微分算子的分析》第 III 卷。数学经典丛书。伪微分算子，1994 年版重印。施普林格，柏林，2007年，页码 viii+525。isbn：978-3-540-49937-4。[JN12] Dmitry Jakobson 和 Frédéric Naud。《凸余紧双曲曲面的临界线》。《几何与泛函分析》22.2（2012），第 352–368 页。[Kat82] A. Katok。《熵与闭测地线》。Ergodic Theory Dynam. Systems 2.3-4（1982），第 339–365 页。[Kli74] Wilhelm Klingenberg。《具有 Anosov 型测地流的黎曼流形》。《数学年刊》（第 2 辑）99（1974），第 1–13 页。[Kni12] Gerhard Knieper。《非紧调和流形的新结果》。Comment. Math. Helv. 87.3（2012），第 669–703 页。[Kni94] Gerhard Knieper。《负曲率紧黎曼流形上的球面平均》。Differential Geom. Appl. 4.4（1994），第 361–390 页。[Lef25] Thibault Lefeuvre。《双曲动力学与几何中的微局部分析》。SMF 专题课程丛书。法国数学学会，2025年。isbn：978-2-37905-221-7。[Liv04] Carlangelo Liverani。《关于接触 Anosov 流》。《数学年刊》（第 2 辑）159.3（2004），第 1275–1312 页。[LM25] Larsen Louder 和 Michael Magee。《极限群的强收敛酉表示》。J. Funct. Anal. 288.6（2025）。附录由 Will Hide 和 Michael Magee 撰写，论文编号 110803，共 28 页。[LMS17] Etienne Le Masson 和 Tuomas Sahlsten。《双曲曲面的量子遍历性与 Benjamini–Schramm 收敛》。杜克数学杂志 166.18（2017），第 3425–3460 页。[LW24] Michael Lipnowski 和 Alex Wright。《迈向大亏格下的最优谱隙》。Ann. Probab. 52.2（2024），第 545–575 页。[Mag20] Michael Magee。《致 Bram Petri 的信》。2020。[Mag25] Michael Magee。《离散群的酉表示与置换表示的强收敛》。2025。arXiv：2503.21619 [math.GR]。[Man79] Anthony Manning。《测地流的拓扑熵》。《数学年刊》（第 2 辑）110.3（1979），第 567–573 页。[Mir13] 玛丽安·米尔扎哈尼。《魏尔–彼得森体积的增长与大亏格随机双曲曲面》。Journal of Differential Geometry 94（2013），第 267–300 页。[MM24] Minghui Ma 和 Qiaochu Ma。《半经典分析、几何表示与量子遍历性》。Comm. Math. Phys. 405.11（2024），论文编号 259，共 28 页。[MN20] Michael Magee 和 Frédéric Naud。《黎曼曲面随机覆盖的显式谱隙》。Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 132（2020），第 137–179 页。[MNP22] Michael Magee、Frédéric Naud 和 Doron Puder。《紧双曲曲面的一个随机覆盖具有相对谱隙 $\frac{3}{16} - \varepsilon$》。《几何与泛函分析》32.3（2022），第 595–661 页。[Mos65] Jürgen Moser。《流形上的体积元》。Trans. Amer. Math. Soc. 120（1965），第 286–294 页。[Moy25] JULIEN MOY。《负曲率非紧曲面随机覆盖的谱隙》。2025。arXiv：2505.07056 [math.SP]。[MPvH25] Michael Magee、Doron Puder 和 Ramon van Handel。《曲面群上一致随机置换表示的强收敛》（2025）。arXiv：2504.08988 [math.GT

].

[MT23] Michael Magee 和 Joe Thomas。右角 *Artin* 群的强收敛酉表示。即将在杜克数学杂志发表，2023。arXiv：2308。00863 [math.GR]。[Nic17] Bogdan Nica。“双曲群的算子范数”。拓扑与分析杂志 **9**.2（2017），第 291–296 页。[Nic24] Bogdan Nica。某些几何群作用的球面平均算子范数。2024。arXiv：2405。08682 [math.GR]。[Non20] Stéphane Nonnenmacher。半经典分析导论。https://www.imo.univ

ersite-paris-saclay.fr/~

注释 =访问日期：2025-06-06。2020。

[NZ15] Stéphane Nonnenmacher 和 Maciej Zworski。《正常双曲陷阱的相关衰减》。《数学发明》200.2（2015），第 345–438 页。[Par88] William Parry。《平衡态与闭轨道的加权均匀分布》。载于：《动力系统》（马里兰州大学公园市，1986–87）。第 1342 卷。《数学讲义》。施普林格，柏林，1988 年，第 617–625 页。isbn：3-540-50174-6。[Pol85] Mark Pollicott。《公理 A 流的混合速率》。《数学发明》81.3（1985），第 413–426 页。[PP90] William Parry 和 Mark Pollicott。《双曲动力学中的 ζ 函数与周期轨道结构》。载于：第 187-188 卷。1990 年。[PPS15] Frédéric Paulin、Mark Pollicott 和 Barbara Schapira。《负曲率中的平衡态》。《数学星丛》373（2015），第 viii+281 页。[Rat73] M. Ratner。《负曲率 n 维流形上测地流的中心极限定理》。《以色列数学杂志》16（1973），第 181–197 页。[Rue81] David Ruelle。《负曲率流形上测地流的压力》。《巴西数学学会通报》12.1（1981），第 95–99 页。[Rue87] D. Ruelle。《公理 A 流的共振》。《微分几何杂志》25.1（1987），第 99–116 页。[Rug94] Rafael O. Ruggiero。《扩张动力学与双曲几何》。《巴西数学学会通报》（新系列）25.2（1994），第 139–172 页。[SW25] Yang Shen 和 Yunhui Wu。《随机贝利曲面的近最优谱隙》。2025年。arXiv：2511.02517 [math.SP].[Tsu10] Masato Tsujii。《接触 Anosov 流转移算子的拟紧性》。《非线性》23.7（2010），第 1495 页。[vH25] Ramon van Handel。《强收敛现象》。2025年。arXiv：2507.00346 [math.PR]

[Wal75] Peter Walters. “连续变换压力的变分原理”. 《美国数学杂志》**97**.4 (1975), 第937–971页. [WX22] Yunhui Wu与Yuhao Xue. “大亏格随机双曲曲面的第一特征值大于 $\frac{3}{16} - \epsilon$”. 《几何与泛函分析》**32**.2 (2022), 第340–410页. [Zwo12] Maciej Zworski. 半经典分析. 第138卷. 《数学研究生教材》. 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 2012, 第xii+431页. isbn: 978-0-8218-8320-4.

奥赛数学实验室, 巴黎-萨克雷大学, 91405 奥赛邮政专递, 法国电子邮箱: julien.moy@universite-paris-saclay.fr