意见与网络耦合动力学中的涌现结构

Andrew Nugent[1,2], Carmen Calatayud Fern´andez[3], 和 Susana N. Gomes[2]

[1]伦敦大学学院数学系[2]华威大学数学研究所[3]华威大学物理系

2026年2月4日

arXiv:2602.03738v1 [physics.soc-ph] 3 Feb 2026

摘要

本文研究了一个自适应社交网络上的意见形成模型，该模型由一组描述个体意见及其对应网络边权重的耦合常微分方程构成。系统行为的一个关键驱动因素是交互函数的形式，它根据个体意见之间的距离决定交互强度，并同时出现在意见动力学和网络动力学中。本文考察了两种情形：第一种情形中，交互函数始终为正；第二种情形中，交互函数属于有界信任型。两种情形下，意见聚类与社交网络中社区结构的涌现之间都存在正反馈。这一点既通过关于长期行为的解析结果得到证实（这些结果扩展了已有的固定网络研究成果），也通过数值模拟得到验证。此外，本文还通过短时近似考察网络的瞬态动力学，该近似能够捕捉网络早期的“典型”动力学。每种方法都从不同方面加深了我们对意见与网络演化之间相互作用的理解。

目录

1 引言 **2**

2 模型设置
2 3 交互

n函数全支撑 4
3.1 记忆权重动力学.5 3.2 逻辑斯蒂权重动力学.6

4 相互作用 具有紧支撑集的函数 1 **0**
4.1 记忆权重动力学.11 4.2 逻辑斯蒂权重动力学.12 4.2.1 随机网络模型.12 4.2.2 有界信心下的意见聚类.14

5 早期权重动力学 14

6 结论 19 A 证明 23 B 示例轨迹 26

1 引言

从最初简单的群体决策模型 [1]和二元意见转换模型 [2], ，到有界信任模型 Hegselmann-Krause (HK) [3] 和 Deffuant-Weisbuch (DW) [4], ，再到迅速发展的现代意见动力学领域，模型变得日益复杂多样。尽管如此，仍可观察到一些共同主题，例如不同意见簇的形成，以及从共识向极化的转变。

随着自适应网络上的意见形成模型日益普遍，另一个主题也随之显现：网络中意见聚类与社区结构之间的正向强化。正如观点形成模型各不相同——意见可取离散值或连续值，更新可以是随机或确定性的、同步或异步的——人们也提出了多种方法来描述自适应社交网络。在基于DW模型或类似模型的情形中，随机选取的个体对若其意见足够接近便会发生交互，一种自然的做法是根据这些相同的距离对社交网络进行重连 [5–8]。随机网络重连也被用于具有二元意见的模型中，例如参见 [9,10] 以及综述 [11], ，以及HK模型的一个版本 [12]。

通常的典型做法是依据同质性原则进行重连，即意见相近、因而被视为更为相似的个体更有可能相互连接。其他机制包括三元闭包 [13] 以及基于结构平衡理论的网络更新 [14]。在 [15], 中，个体除意见外还在“社会空间”中拥有一个位置，该位置决定其网络连接。另一种做法是，在 [16], 中，个体的意见及其社会连接都作为演化博弈的一部分被修改，试图优化一个综合其意见强度、与相邻个体的一致性以及连接总数的函数。

自适应网络也应用于连续时间和观点空间中的模型，这类模型通常与 HK 模型的连续时间版本相关。在这种设定下，观点按照一组常微分方程或随机微分方程演化，而网络则可能通过随机重连 [17, 18] 或按照自身的一组微分方程演化 [19, 20]。

本文聚焦于后一种情形，具体而言，是研究 [19], 中提出的模型，旨在深入理解长期动力学和短期动力学。本文结构如下：第 2 节介绍模型的具体设定和假设。第 3 节研究决定交互的函数始终严格为正的情形，而第 4 节研究有界信心情形。这两节均包含关于收敛至簇和社群的解析结果，并将固定网络的已有结果扩展至各种网络动力学。第 4 节还包含数值模拟；由于结果高度依赖初始网络，因此无法得到解析结果。本节中的研究有助于更全面地理解自适应网络下意见形成的长期动力学。最后，第5节考察早期权重动力学，随后在第 6 节作出总结。

2 模型设置

本文主要研究 [19], 中引入的模型，该模型采用描述个体意见和网络边权重的常微分方程（ODEs）耦合系统形式。我们首先介绍意见动力学；其灵感来源于经典的HK模型、 [21], 中的表述，以及 [22]中讨论的离散交互DW模型的推导。

记为 $x_i \in$ $[-1,1]$ 个体 i的观点， $w_{ij} \in [0,1]$ 个体 i 之间的边权重，以及 j，k_i 的度 个体 i ，其定义为

$$k_i = \sum_{j=1}^{N} w_{ij},$$

最后是 ϕ ： $[-2,2] \to [0,1]$ 交互函数。交互函数描述了两个个体之间发生相互作用的可能性或强度如何随其观点差异而变化。随后，观点按照以下常微分方程系统演化

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{k_i} \sum_{j=1}^{N} w_{ij}\, \phi\big(x_j - x_i\big)\,(x_j - x_i). \tag{1}$$

根据 [19], ，我们提出若干假设，以确保该系统定义良好，并符合观点形成模型的框架。

假设 1. 假定以下条件始终成立。

a) 交互函数 ϕ 是利普希茨连续的，其利普希茨常数记为 L_ϕ，并满足$\phi(r) = \phi(-r)$ 对所有 $r \in [-2, 2]$ 和 $\phi(0) > 0$均成立。*b)* 初始意见按顺序排列，即 $x_1(0) \le x_2(0) \le \cdots \le x_N(0)$。*c)* 所有个体都赋予自己的观点权重 1，即对所有 $i = 1$，……，N，$w_{ii} = 1$。*d)* 初始网络 $w(0)$ 是强连通的。也就是说，对于任意个体 i、j，都存在一系列个体 i_n、$n = 0$、……、m，满足 $i_0 = i$、$i_m = j$，且 $w_{i_n, i_{n+1}}(0) > 0$。

关于 ϕ 连续性的假设是保证方程 **(1)** 的解唯一所必需的，可避免 [23] 中讨论的、由不连续的有界置信交互函数引起的问题。假设 $w_{ii} = 1$ 可确保对所有个体都有 $k_i \ge 1 > 0$，从而避免个体 i 与群体其他成员断开连接（或之后变得断开连接）时，除以 k_i 可能出现的问题。关于初始意见排序的假设仅为简化表述而设，并非模型的必要组成部分。最后一个假设确保网络的各部分能够彼此通信，因此可视为一个整体系统，而不是分离成不同的连通分量。

这一固定对称网络上的模型已在 [19] 中得到研究，其中利用与 [21], 中类似的能量论证，证明群体会收敛到一种聚类状态：个体被划分为若干组，每组内个体持有相同的观点，但组间不发生相互作用。其中一种聚类状态是共识，即所有个体持有相同的观点。这可以用几种等价的方式定义：首先，存在一个值 $x \in [-1, 1]$，使得对于所有 $i = 1, \ldots, N$均有 $x_i \to x$；其次，意见直径

$$D(t) = \max_{i,j=1,\ldots,N} |x_j(t) - x_i(t)| ,$$

当 $t \to \infty$时收敛到零。衡量聚类程度的另一种方法是定义一个序参量，该序参量最初由 [24], 针对意见动力学引入，其定义为

$$Q = \frac{1}{N^2 M_\phi} \sum_{i,j=1}^{N} \phi(x_j - x_i) , \tag{2}$$

其中，M_ϕ 是 $\phi(r)$在 $r \in [-2, 2]$上的最大值。假设 ϕ 在 $\phi(0) = 1$处取得最大值，与指数型或有界置信交互函数的情形一样，那么 Q^{-1} 近似等于具有 $Q = 1$的簇的数量，从而给出了共识的第三种等价描述。该序参量将用于第4.2.2节，以衡量模拟的结果。

我们现在介绍 [19]中提出的完整意见与网络耦合动力学。该系统由以下常微分方程给出：

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{k_i(t)} \sum_{j \ne i} w_{ij}\, \phi\big(x_j - x_i\big)\, (x_j - x_i) , \qquad i = 1, \ldots, N \tag{3a}$$

$$\frac{dw_{ij}}{dt} = \phi\big(x_j - x_i\big)\, f^+(w)_{ij} - \Big(1 - \phi\big(x_j - x_i\big)\Big)\, f^-(w)_{ij} , \qquad i, j = 1, \ldots, N,\ i \ne j \tag{3b}$$

$$\frac{dw_{ii}}{dt} = 0, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{3c}$$

这一结构的动机是利用交互函数，使边增长项（$f^+(w)_{ij}$）与边移除项（$f^-(w)_{ij}$）相互平衡。它们是整个网络的函数，从而使网络动力学能够依赖于其他边，例如三元闭包。

在介绍关于 f^+和 f^-形式的若干假设之前，我们定义以下集合

$$\mathcal{W}_{ij}^0 = \{w \in [0,1]^{N \times N} : w_{ij} = 0\},$$
$$\mathcal{W}_{ij}^1 = \{w \in [0,1]^{N \times N} : w_{ij} = 1\}.$$

假设 2. 我们对网络动力学作如下假设：

a) 函数 $f^+ : \ [0,1]^{N \times N} \to \mathbb{R}_{\ge 0}^{N \times N}$和 $f^- : \ [0,1]^{N \times N} \to \mathbb{R}_{\ge 0}^{N \times N}$均为非负且利普希茨连续。

b) For all $w \in \mathcal{W}_{ij}^1$, $f^+(w)_{ij} = 0$.

c) For all $w \in \mathcal{W}_{ij}^0$, $f^-(w)_{ij} = 0$.

这些假设确保系统 (3) 定义良好，且所有边权重均保持在区间 $[0,1]$内。本文将重点讨论 [19], 中引入的两种边权重动力学，即记忆权重动力学和逻辑斯蒂权重动力学。

记忆权重动力学只是将边权重推向交互函数，从而提供个体交互历史的"记忆"。取 $f^+(w)_{ij} = (1 - w_{ij})$ 和 $f^-(w)_{ij} = w_{ij}$，我们得到

$$\frac{dw_{ij}}{dt} = \phi(x_j - x_i) - w_{ij}\,. \tag{4}$$

这种权重动力学既可以创建边，也可以移除边，因此会取代大部分初始网络结构，并可能对意见形成过程产生重大影响 [19]。自然可以预期，网络聚类行为会映射出意见动力学中典型的聚类行为。

逻辑斯蒂权重动力学只改变边权重，而不会创建任何新边。我们取 $f^+(w)_{ij} = f^-(w)_{ij} = w_{ij}(1 - w_{ij})$，得到

$$\frac{dw_{ij}}{dt} = w_{ij}\,(1 - w_{ij})\,(2\phi(x_j - x_i) - 1)\,. \tag{5}$$

在这里，由于无法创建边，初始网络结构发挥着更大的作用，因此我们可能会预期意见动力学和网络动力学的可预测性都较低。

以下各节将对长期动力学进行描述，并分别讨论由两类交互函数产生的不同行为。为了区分这几类交互函数，我们首先引入 [20] 中的以下定义。

定义 2.1。对于给定的相互作用函数 ϕ： $[-2,2] \to [0,1]$ 我们将 ϕ 的根集记为

$$\mathcal{R}_\phi = \{r \in [0,2] : \phi(|r|) = 0\}. \tag{6}$$

如果 $\mathcal{R}_\phi$ 为空，则定义 $R = 2$；否则令 $R =$ 下确界$(\mathcal{R}_\phi)$。

在第 3 节中，我们考察具有 $R = 2$ 的相互作用函数以及各种权重动力学下，意见与网络耦合动力学 (3) 的行为。随后，在第 4 节中，我们考察具有 $R < 2$的相互作用函数。

3 具有全支撑集的相互作用函数

由于 $R = 2$，我们可以推断，对于所有 $|r| < 2$， $\phi(r) > 0$ 。如果对于所有 $r \in [-2,2]$都有 $\phi(r) > c > 0$ ，那么个体之间始终会在一定程度上发生相互作用。因此，避免形成共识的唯一方式是权重动力学将群体分离开来。这是我们希望在本节中考察的主要情形，因此我们首先讨论 $\phi(2) = 0$这一特定情形。

由于所有观点都保持在初始意见的范围内 [19], ，只有当时刻 $t = 0$ 至少存在一个观点为 $+1$ 的个体，以及至少存在一个观点为 -1的个体时， $\phi(\pm 2)$ 的值才相关（否则就不会有长度为 2 的距离，因此 $\phi(2)$ 的值无关紧要）。由于初始意见是有序的，因此我们将有 $x_1(0) = -1$ 且 $x_N(0) = 1$。如果所有个体的观点都在集合 $\{-1, 1\}$ 中，那么意见动力学将处于一个不动点，所有权重都将收敛至

$$\frac{dw_{ij}}{dt} = \begin{cases} \phi(0)\, f^+(w)_{ij} - \big(1 - \phi(0)\big)\, f^-(w)_{ij}, & \text{if } x_i(0) = x_j(0), \\ -f^-(w)_{ij}, & \text{if } x_i(0) \neq x_j(0) \end{cases}.$$

否则，必然存在某个个体 i ，其观点位于开区间（-1，1）内。由于初始网络是连通的，存在一条路径 in $w(0)$，将个体 i 同时连接到个体 1 和个体N。由于权重动力学具有有限速度，存在一个 $\varepsilon > 0$ 和一个时刻 $T > 0$ ，使得这条路径上的所有边在所有 $0 \le t \le T$ 时的权重都至少为 ε 。考察这条路径上与个体i 相邻的个体：如果他们一开始的观点不在开区间（-1，1）内，那么由于他们与 x_i互动，其观点会立即进入该开区间。一旦发生这种情况，与他们相连的个体也必然如此，依此

下去，直到个体 1 和 N 进入这个开区间。此时，所有人的意见都将位于这个开区间内。因此，经过任意短的一段时间后，$\phi(\pm 2)$ 的值便无关紧要。

由于本节着重讨论式 (3) 的涌现网络结构和长期行为，我们得出结论：唯一需要单独考虑 $\phi(2) = 0$ 的情况是对所有 i，$x_i \in \{-1, 1\}$，这一点已在上文讨论。本节余下部分将对 ϕ引入以下附加假设。

假设 3. 存在一个常数 $c_\phi > 0$，使得对所有 $r \in [-2, 2]$，$\phi(r) > c_\phi > 0$。

对于固定网络，假设 3 足以保证收敛至共识，例如参见 [19] 中的命题 2.2。现在我们考察上文介绍的几种权重动力学，并探讨类似结果是否成立。

3.1 记忆权重动力学

对于记忆权重动力学，可以为式 (3) 的长期行为证明类似结果。下面的命题 3.1 适用于记忆权重动力学，但我们在此证明一个稍微更一般的版本。

命题 3 .1. 作出假设 *3*，并进一步假设存在一个常数 c_f，使得 $f^+(w)_{ij} > c_f$ 对所有 $w \in \mathcal{W}_{ij}^0$。那么，该群体达到共识。

证明。由于 f^+是利普希茨连续的，且根据假设，$w \in \mathcal{W}_{ij}^0$意味着 $f^+(w)_{ij} > c_f$，因此存在一个常数 $w^+ > 0$，使得对所有 $w_{ij} < w^+$，$f^+(w)_{ij} > \frac{1}{2} c_f$。由于 f^-也是利普希茨连续的，且 $w \in \mathcal{W}_{ij}^0$意味着 $f^-(w)_{ij} = 0$，因此存在一个常数 $w^- > 0$，使得对所有 $w_{ij} < w^-$

$$f^-(w)_{ij} < \frac{c_\phi}{2(1 - c_\phi)} c_f.$$

注意，这些 c_f 的分数是为了简化下面的不等式而选取的。

令 $w^* = \min\{w^+, w^-\}$。那么对于 $w_{ij} < w^*$，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{dw_{ij}}{dt} &= \phi\big(x_j - x_i\big)\, f^+(w)_{ij} - \Big(1 - \phi\big(x_j - x_i\big)\Big)\, f^-(w)_{ij} \\
&\geq c_\phi\, f^+(w)_{ij} - (1 - c_\phi) f^-(w)_{ij} \\
&\geq \frac{c_\phi c_f}{2} - (1 - c_\phi) f^-(w)_{ij} \\
&> \frac{c_\phi}{2} c_f - (1 - c_\phi) \frac{c_\phi}{2(1 - c_\phi)} c_f = 0\,.
\end{aligned}$$

因此，只要 $w_{ij} < w^*$，w_{ij}的导数就为正；于是，初始值高于 w^* 的权重将始终高于它，而初始值低于它的权重则会逐渐增大并趋近于它。因此，存在有限时刻 t^*，使得对所有 $t \geq t^*$，$w_{ij}(t) > \frac{1}{2} w^*$。

对于任意 $t > t^*$，考虑观点最低的个体，记为 x_m。其观点的变化由下式给出

$$\frac{dx_m}{dt} = \frac{1}{k_m} \sum_{j=1}^{N} w_{mj}\, \phi(x_j - x_m)\, (x_j - x_m) \geq \frac{c_\phi w^*}{2} \frac{1}{k_m} \sum_{j=1}^{N} (x_j - x_m) \geq \frac{c_\phi w^*}{2} D(t).$$

类似地

$$\frac{dx_M}{dt} \leq -\frac{c_\phi w^*}{2} D(t)\,.$$

因此

$$\frac{d}{dt} D(t) \leq -c_\phi w^* D(t)\,,$$

因此，$D(t) \to 0$，群体达到共识。 □

现在，我们将其应用于记忆权重动力学，并扩展该结果以描述长期网络行为。

推论 3.1。 在记忆权重动力学和假设 *3* 下，群体达到共识，网络完全连通，边权重为 $\phi(0) > 0$。

证明。 首先注意，对于 $w \in \mathcal{W}_{ij}^0$, $f^+(w)_{ij} = 1$，因此我们可以立即应用命题 3.1 来保证共识。于是，对于所有 i, j，我们将有 $\phi(x_j - x_i) \to \phi(0)$，因此 (4) 的解为

$$w_{ij}(t) = e^{-t} w_{ij}(0) + \int_0^t e^{s-t} \phi\big(x_j(s) - x_i(s)\big)\, ds \to \phi(0)\,.$$

□

注 3.1。 在命题 *3.1* 的假设下，可得 $\phi(x_j - x_i) \to \phi(0)$。然而，对于其他允许的权重动力学，一般无法推断 w 的长期行为（除了 w_{ij} 最终会超过 w^* 这一点之外），因为权重动力学中可能存在其他不动点。

命题 3.2。 在记忆权重动力学和假设 *3* 下，直径 $D(t)$满足以下界，

$$D(t) \le \exp\Big(- c^2 (t + e^{-t} - 1)\Big) D(0)\,.$$

证明。 这是直接应用 [21]，第 2.1 节中的结果，并利用以下事实所得：

$$w_{ij}(t) = e^{-t} w_{ij}(0) + \int_0^t e^{s-t} \phi\big(x_j(s) - x_i(s)\big)\, ds \ge e^{-t} w_{ij}(0) + c(1 - e^{-t}) \ge c(1 - e^{-t})\,,$$

从而给出相互作用项强度的下界。 □

这与从记忆权重动力学 $c_\phi = w^* = c$ 的推论 3.1 证明中直接得到的界非常相似。在这两种情况下，收敛速度都可能显著快于该界，因为该界只考虑了 ϕ 可能达到的最小值。

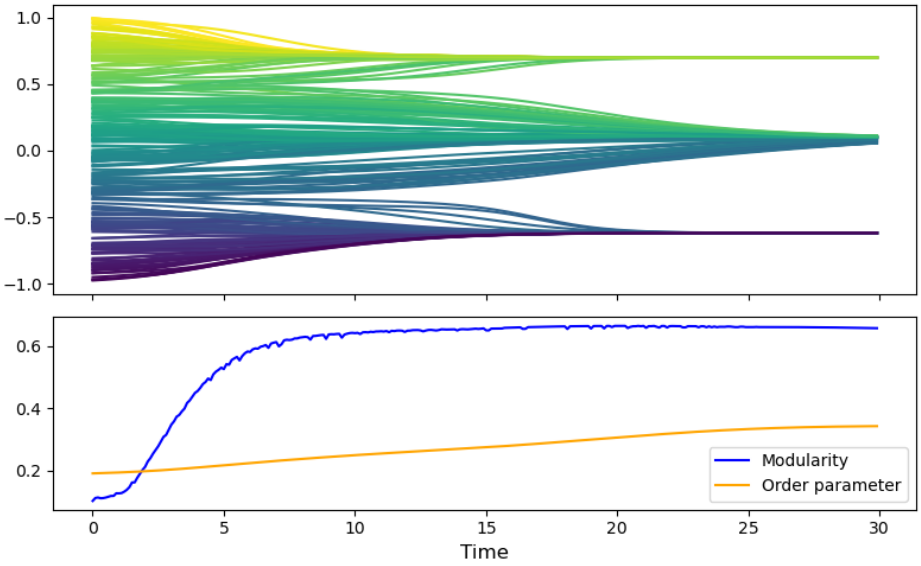
在 $R = 2$ 和记忆权重动力学的情况下，所有个体之间始终保持较高水平的相互作用，因此收敛至共识以及随后网络的收敛都相当可预测。因此，我们转而考察更一般的权重动力学，它们允许出现更复杂的行为。

3.2 逻辑斯蒂权重动力学

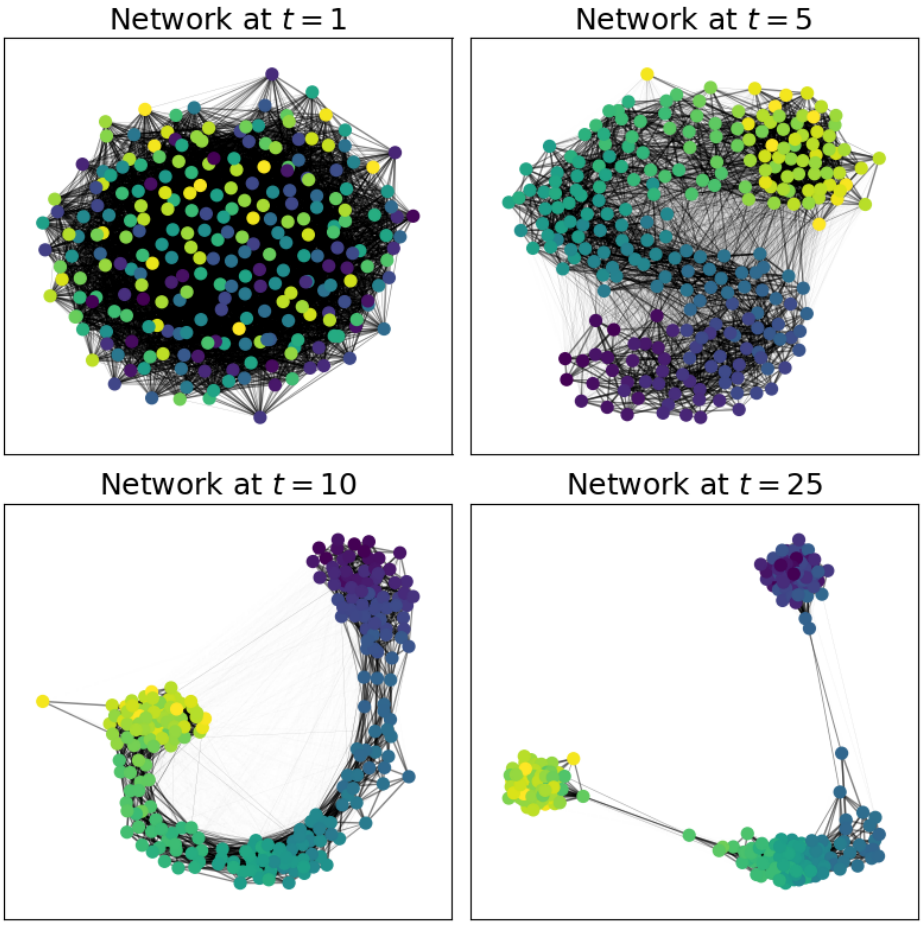
本节首先给出一个适用于具有全支撑的交互函数的一般结果，随后介绍若干关于逻辑斯蒂权重动力学的特定结果，最后讨论一个情形，以此说明证明有关意见簇位置的结果所面临的障碍。

首先需要说明，与记忆权重动力学不同，逻辑斯蒂权重动力学并不保证达到共识。如果 $\phi(x_j - x_i) < 1/2$，边权重 w_{ij} 将下降，并可能使网络（初始时连通）分裂为多个不连通分量。图 1 展示了这一行为的一个例子，其中 ϕ 是一个指数交互函数，初始意见均匀随机选取，初始网络是一个参数为 $p = 0.25$ 的埃尔德什-雷尼随机网络。上方面板展示了意见随时间变化的轨迹，并根据初始意见着色，体现出意见分裂为三个意见簇的过程。虽然序参量 (2) 随时间逐渐增大，但网络模块度更早出现了更显著的上升。模块度通过计算组内边的数量与等价网络中随机放置边时的预期数量之差，来描述网络中社区结构的程度 [25]。模块度上升表明网络中社区结构的形成，并与意见簇的形成同时发生。

这种结构变化可以从图 1 下方的网络快照中看出。最初的随机网络逐渐组织起来，实际上是根据个体的初始意见自行排序。这种行为不同于重连下常见的簇立即形成现象，而更接近 [15] 中观察到的行为：个体被置于一个“社会空间”中。网络结构的这种变化与意见聚类形成了一个正反馈回路，随着时间推移，最终产生明显的意见簇及相应的网络社区。请注意，由于逻辑斯蒂权重动力学不会创建新的边，这些社群连接紧密，但并未完全互连。 [19] 第 3.3 节通过模拟研究了这一设置，尤其是从共识到聚类的转变。下面我们给出一个解析结果，证实在一大类权重动力学中观察到的簇形成现象。



(a) 上图展示了观点随时间变化的轨迹，颜色表示初始意见。随着权重动力学移除连接这些簇的边，最终形成了三个明显的簇。下图展示了序参量和网络模块度随时间的变化。在动力学开始时，随着网络分化为不同社群，模块度迅速上升。



(b) 网络结构的快照。边的宽度按边权重绘制；节点的颜色表示个体的初始意见。网络首先按照个体的意见形成有序结构，随后分化为三个社群。请注意，节点的位置是根据网络结构确定的，而不是嵌入某个物理空间后确定的。

图 1： 逻辑斯蒂权重动力学下意见聚类的示例。若不存在权重动力学，由于交互函数具有全支撑，系统将趋于共识。但在此处，网络会根据个体的意见重新组织，形成不同社群，并进一步形成相应的意见簇。

定理 3.1. 在假设 *3* 以及满足假设 *2* 的任意权重动力学下，群体分离为有限多个意见簇，且簇之间的所有边趋于消失。也就是说，对于任意两个个体 i、j，$x_j - x_i$ 或 w_{ij} 中至少有一个在 $t \to \infty$ 时收敛到零。

证明. 考虑具有最低意见 $x_m(t)$ 的个体。该值非递减，且上界为 $x_N(0)$，因此当 $t \to \infty$ 时必收敛到某个值。将该值记为 x_m^*。定义 $g(t)$ 为

$$\frac{dx_m}{dt} = \frac{1}{k_m} \sum_{j=1}^{N} w_{mj}\, \phi(x_j - x_m)\,(x_j - x_m) =: g(t)\,.$$

注意，g 为正，且在时间上不一定连续。具体而言，若个体 i当前持有最低意见，且 x_i 快速增加，则它可能越过另一个个体 j的观点，从而在持有最低意见的个体身份发生变化时，导致 $g(t)$ 出现不连续下降。此类不连续性必然总是使 $g(t)$减小，因为最低值永远无法追上一个增长得比它更快的观点。此外，在这些不连续点之间的时段内，$g(t)$ 是利普希茨连续的，因为 x, w, k和 ϕ 也都是利普希茨连续的（这是假设 1 的结果）。

我们断言 $g(t) \to 0$。若不然，则由于 $g(t) \geq 0$，它必定无穷多次取值高于某个 $\varepsilon > 0$。由于 $g(t)$ 在递增时连续，它必定在某个更早的时刻经过 $\varepsilon/2$。此外，由于它在递增时是 Lipschitz 的，这一时间差必定大于某个固定的 $s > 0$。因此，每一次高于 ε 的偏移至少为 x_m 的值贡献 $s\varepsilon/2$，从而 $x_m \to \infty$。这是一个矛盾，因为 x_m 以 $x_N(0)$ 为上界，因此

$$\frac{1}{k_m} \sum_{j=1}^{N} w_{mj}\, \phi(x_j - x_m)\,(x_j - x_m) \to 0\,.$$

由于所有 该和式中的各项均为正（且 k_m 以 N 为上界），因此对所有 j，我们必有 ，

$$w_{mj}\, \phi(x_j - x_m)\,(x_j - x_m) \to 0\,.$$

由于 $\phi(x_j - x_i) > c$，要么 $x_j \to x_m^*$，要么 $x_j \nrightarrow x_m^*$，从而 $w_{mj} \to 0$。用 $(G1)$ 表示满足 $x_j \to x_m^*$ 的个体群体，用 $(G2)$ 表示满足 $x_j \nrightarrow x_m^*$ 从而 $w_{mj} \to 0$ 的那些个体。这些组划分了群体。

由于最低意见收敛到 x_m^*，因此 $(G1)$ 中至少有一个个体，但 $(G2)$ 可能为空。若 $(G2)$ 确实为空，则我们就达成了共识，也就是说，对于所有 i，j，$x_j - x_i \to 0$，因此证明完毕。
因此，假设 $(G2)$ 非空。令 $i \in (G1)$，并考虑

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{k_i}\left(\sum_{j \in (G1)} w_{ij}\, \phi(x_j - x_i)\,(x_j - x_i) + \sum_{j \in (G2)} w_{ij}\, \phi(x_j - x_i)\,(x_j - x_i) \right) =: g_1(t) + g_2(t)\,.$$

由此立即可得 $g_1(t) \to 0$，因为对于所有 $j \in (G1)$，$x_j - x_i \to 0$。由于 $i \in (G1)$，x_i 在 $t \to \infty$ 时有极限，这意味着

$$\int_0^\infty \frac{dx_i(s)}{dt}\, ds < \infty\,.$$

由于我们知道 $g_1(t) \to 0$，因此可得

$$\int_0^\infty g_2(t)\, dt < \infty\,.$$

此外 g_2 (t) 一致连续，因此根据 Barablat 引理，[26] $g_2(t) \to 0$。于是对于所有 $j \in (G2$),

$$w_{ij}\, \phi(x_j - x_i)\,(x_j - x_i) \to 0\,.$$

由于 $\phi > c$ 和 $x_j \nrightarrow x_m^*$，唯一剩下的可能性是 $w_{ij} \to 0$。总而言之，我们在此论证了，对于所有 $i \in (G1)$ 和 $j \in (G2)$，$w_{ij} \to 0$。
接下来考虑（$G2$）的最小元素，记为 $x_{\tilde{m}}$，我们再次将其分开

$$\frac{dx_{\tilde{m}}}{dt} = \frac{1}{k_{\tilde{m}}}\left(\sum_{j \in (G1)} w_{\tilde{m},j}\, \phi(x_j - x_{\tilde{m}})\,(x_j - x_{\tilde{m}}) + \sum_{j \in (G2)} w_{\tilde{m},j}\, \phi(x_j - x_{\tilde{m}})\,(x_j - x_{\tilde{m}}) \right) =: g_1(t) + g_2(t)\,.$$

由于对于所有 $i \in$ （$G1$）和 $j \in$ （$G2$），$g_1(t) \to 0$，并且根据上述针对 g 的类似论证，我们还必须有 $g_2(t) \to 0$。将 $x_{\tilde{m}}$ 的极限值记为 $x^*_{\tilde{m}}$。同样，我们可以将（$G2$）分成两个群体（$G21$）和（$G22$），前一群体中的个体收敛到 $x^*_{\tilde{m}}$，而后一群体中的个体则不收敛到该值。与之前一样，这意味着对于所有 $i \in$ （$G21$）和 $j \in$ （$G22$），$w_{ij} \to 0$。

接下来，我们将整个论证应用于 $(G22)$ 并重复上述过程。由于个体数量有限，最终某个 $(G\ldots2)$ 群体必为空，且群体中的所有个体都已被涵盖。因此，通过这一过程，所有个体都被划分为不同的意见簇。此外，我们还证明了簇间的所有边都必定消失，这正是所需的结果。

□

注意，定理 3.1 还意味着，对于所有 i，$x_i(t)$ 在 $t \to \infty$ 时存在极限。这一聚类结果将固定网络的类似结果推广到了动态网络情形。

接下来，我们将其具体应用于逻辑斯蒂权重动力学。

推论 3.2. 在假设 *3* 和逻辑斯蒂权重动力学下，若 $\phi > c \geq 1/2$，则群体达成共识，且 $w_{ij} \to \mathbb{1}\{w_{ij}(0) > 0\}$。

证明。若 $\phi > c$ 且满足 $c \geq 1/2$，则所有非零权重的导数均为正。因此，若 $w_{ij}(0) > 0$，则 $w_{ij} \to 0$ 不可能成立；由定理 3.1 $x_j - x_i \to 0$，对于所有此类配对均成立。由于假设初始网络是强连通的，因此群体将达成共识。若 $w_{ij} = 0$，则动力学会使其保持不变。

□

推论 3.3. 在假设 *3* 和逻辑斯蒂权重动力学下，对于所有的 i、j、$w_{ij} \to 1$，若满足以下所有条件：

- ***a)*** $x_j - x_i \to 0$,
- ***b)*** $w_{ij}(0) > 0$,
- ***c)*** $2\phi(0) > 1$,

否则 $w_{ij} \to 0$。

证明。若 $x_j - x_i \to 0$，则 $\phi(x_j - x_i) \to \phi(0)$，因此当且仅当 $w_{ij}(0) > 0$ 且 $2\phi(0) - 1 > 0$ 时，$w_{ij} \to 1$（因为 0 是逻辑斯蒂权重动力学的不动点）。若 $x_j - x_i \nrightarrow 0$，则根据定理 3.1，我们必有 $w_{ij} \to 0$。

□

推论 3.4。在假设 *3* 和逻辑斯蒂权重动力学下，对于一对个体 i 和 j，如果$w_{ij}(0) = 1$，那么无论群体中其他个体的行为如何，个体 i 和 j 都将处于同一个意见簇中。

证明。由于 $w_{ij} = 1$ 是逻辑斯蒂权重动力学的不动点，因此 $w_{ij} \to 0$是不可能的。因此，根据定理 3.1，我们必然有 $x_j - x_i \to 0$，这意味着他们将处于同一个意见簇中。 □

注3.2。与固定网络或记忆权重动力学的情形不同，对于逻辑斯蒂权重动力学，我们不证明收敛至共识，因为除非 $\phi > c \geq 1/2$，否则无法保证这一点。此外，对于逻辑斯蒂权重动力学，一般无法推断意见簇的位置。考虑图*2*所示的情形。群体中有两个彼此靠近的大型意见簇，分别以 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 表示这两个簇中的个体。假设 $w(0)$ 在每个簇内均相连。还假设存在一个观点高得多的个体，记为 x_M。由于对初始网络结构的唯一要求是其连通，因此完全可能不存在连接 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$的初始边，也就不可能形成此类边，因为它们可能仅通过个体 M 相连。由于 x_M 距离极远，这些连接会迅速衰减，导致极限网络非连通，两个相近的簇因而持续存在而不会合并。请注意，这种情形只要求交互函数在距离超过某个值后小于二分之一。

定理 3.1 同样适用于 [19], 中介绍的朋友的朋友（FOAF）权重动力学，因为它们满足假设 2。权重动力学定义如下：

$$\frac{dw_{ij}}{dt} = = \phi(x_j - x_i)\left(w_{ij} + N^{-1}(w^2)_{ij}\right)(1 - w_{ij}) - \left(1 - \phi(x_j - x_i)\right)w_{ij}\,,$$

并体现三元闭包的理念（即在两个有共同连接/共同朋友的个体之间建立一条新边）；这一机制已用于各种社会网络演化模型中 [13, 27–29]。

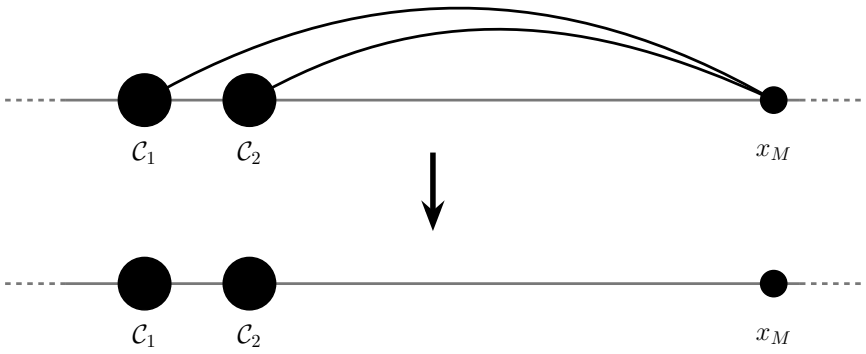


图2： 展示注3.2所述情形的示意图。在逻辑斯蒂权重动力学下，两个簇（$\mathcal{C}_1$和 $\mathcal{C}_2$）之间可以相距任意远。这是因为初始网络结构中，两簇仅通过一个远处的个体（x_M）相连，而后两簇都与该个体断开连接。

与推论 3.3 中一样，我们考虑两种情况。同样，若 $x_j - x_i \nrightarrow 0$，则必然有 $w_{ij} \to 0$。若 $x_j - x_i \to 0$，情况则更复杂，因为相互连接可能产生权重。若在任何时候出现 $w_{ij} > 0$，则我们将有 $w_{ij} \to 1$，因为 $t \to \infty$，而 $\phi(x_j - x_i) \to 1$。因此，在这种情况下，当且仅当对所有 $t \geq 0$，$w_{ij}(t) = 0$ 时，才有 $w_{ij} \to 0$；这一结论取决于整个系统的具体轨迹。不过，一般而言，对于连接相当紧密的初始网络，人们会预期朋友的朋友机制会使网络中对应于意见簇的社群完全连通。请注意，注3.2仍然适用，且无法确定簇的位置。在这种情况下，如图3所示，现在将两个个体置于 x_M，使得 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 没有共同的 x_M作为共同朋友。每个簇与其位于 x_M 的邻居之间的连接将迅速衰减，因为朋友的朋友机制不会增加边权重，从而导致网络变为非连通。因此，这些簇可以位于距离 x_M足够远的任意位置。

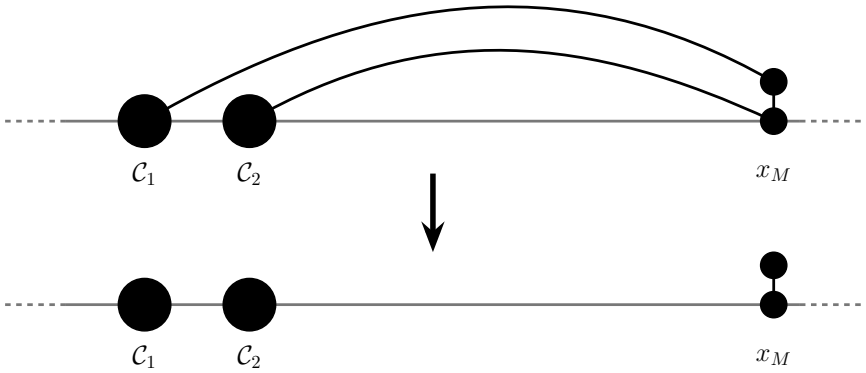


图3： 展示将注3.2扩展至朋友的朋友权重动力学时所述情形的示意图。在朋友的朋友权重动力学下，两个簇（$\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$）之间可以相距任意远。这是因为初始网络结构中，两簇仅通过两个彼此相连的远处个体（均位于 x_M）相连，而后两簇都与这两个个体断开连接。

最后，我们也可以将定理 3.1 应用于记忆权重动力学。在推论 3.1 的证明中，已证明最终 $w_{ij}(t)$ 有一个严格为正的常数下界。这意味着 $w_{ij} \nrightarrow 0$，因此根据定理 3.1，我们得出对于所有 i，j。也就是说，群体达到共识。然而，这种方法无法得出推论 3.1 同样证明的直径指数级减小这一结论。

4 具有紧支撑的相互作用函数

本节考虑具有 $R < 2$ 的相互作用函数。这类相互作用函数可视为对有界信心这一理念的推广：个体不愿与观点差异过大的人相互作用，只是不再采用不连续的截断形式。我们具体考虑以下类别的相互作用函数。

定义 4.1。 若相互作用函数 ϕ： $[-2,2]\to\mathbb{R}$ 连续、对称，且对于 $|r|<R$ 满足 $\phi(r)>0$，对于 $|r|\geq R$ 满足 $\phi(r)=0$，则称其为半径（或信心界限）为 $R\in$ （0，2）的光滑有界置信相互作用函数。

请注意，这并不要求交互函数是单调的，但确实排除了ϕ 存在其他根且严格比 R更近的可能性。

在固定网络的情况下，这类相互作用函数会促成意见簇的形成（单个或多个）：这些个体持有相同的观点，但彼此之间的距离大于 R [19]。接下来，我们将把这一结果推广到记忆权重动力学的情况。

4.1 记忆权重动力学

在给出本节的主要结果之前，我们先回顾 [20] 中 R-链的定义。

定义 4.2。 如果一群个体按观点排序后，每对相邻个体之间的距离都严格小于 R，则称这群个体构成一个 R-链。

请回想，无论网络动力学如何，当 ϕ 是半径为 R 的平滑有界置信交互函数时，如果群体的观点中存在大小至少为 R 的间隔，该间隔就永远不会闭合（ [19] 命题 3.2 ）。因此，如果个体处于不同的 R- 链中，它们就永远不会发生相互作用。

命题 4.1。 假设 ϕ 是半径为 R 的平滑有界置信交互函数。那么，对于任意两个个体 i、j，要么 $x_j-x_i\to 0$，要么 $\phi(x_j-x_i)\to 0$，当 $t\to\infty$ 时，分别有 $w_{ij}\to 1$ 或 $w_{ij}\to 0$。

证明。 由于不同的 R-链之间永不相互作用，我们可以分别考察它们。此外，对于 i，位于不同 R-链中的 j ϕ（x_j-x_i）在任何时刻都成立，因此结论显然成立。为简单起见，我们可以假设整个群体初始时且始终保持为一条 R-链；因为如果它最初由多条 R-链组成，或后来分裂为多条 R-链，我们都可以从那时起分别考察这些链。

再次考虑 t　　he 意见最低的个体 x_m。如同定理 3.1 的证明，我们必须有
　e 对所有 j,

$$w_{mj}\,\phi(x_j-x_m)\,(x_j-x_m)\to 0\,.$$

乘积中的所有项都有界，且至少有一项必须收敛于零。由于我们考察的是记忆权重动力学，$w_{mj}\to 0$ 当且仅当 $\phi(x_j-x_m)\to 0$。因此，我们可以将群体分为两组：满足 $x_j-x_m\to 0$（即 $x_j\to x_m^*$，极限最小意见）的个体，称为（$G1$）；以及满足 $\phi(x_j-x_m)\to 0$ 的个体，称为（$G2$）。

因此，对于个体 $i\in(G1)$，命题陈述成立。若 $j\in(G1)$ 也成立，则 x_i 和 x_j 都收敛于 x_m^*，因此 $x_j-x_i\to 0$。若 $j\in(G2)$，则由于 ϕ 的连续性，$\lim_{t\to\infty}\phi(x_j-x_i)=\lim_{t\to\infty}\phi(x_j-x_m)=0$。

与定理 3.1 的证明类似，我们现在考虑 $(G2)$ 的最小元素，目的是将该群体拆分，并重复类似的论证。

首先注意到，由于对所有 $j\in(G1)$ 都有 $x_j\to x_m^*$，对于任意 $\varepsilon>0$，都存在一个时刻 t，在此之后，对所有 $j\in(G1)$ 都有 $|x_j-x_m^*|<\varepsilon$。类似地，由于 $\phi(x_j-x_m)\to 0$ 对所有 $j\in(G2)$ 都成立，对于任意 $\varepsilon>0$，都存在一个时刻 t，在此之后对所有 $j\in(G2)$ 都有$x_j>x_m^*+R-\varepsilon$。这是因为 $R\in$(0，2) 是 ϕ 的最小根。对于给定的 $\varepsilon>0$，令 t^* 为这两个时刻中的较大者。

令 $\tilde{m}\in(G2)$ 为 $(G2)$ 中观点最低的个体。利用上述结果，$x_{\tilde{m}}>x_m^*+R-\varepsilon$ aftert^*。由于群体必须保持为一个 R-链，并且在 t^* 之后，$(G1)$ 中的所有个体都在 x_m^*的 ε 范围内，因此我们得出 $x_{\tilde{m}}\in(x_m^*+R-\varepsilon,\ x_m^*+R+\varepsilon)$。因此 $x_{\tilde{m}}\to x_m^*+R$。
我们可以将 $x_{\tilde{m}}$ 的导数拆分为以下两部分

$$\frac{dx_{\tilde{m}}}{dt}=\frac{1}{k_{\tilde{m}}}\Bigg(\sum_{j\in(G1)}w_{\tilde{m},j}\,\phi(x_j-x_{\tilde{m}})\,(x_j-x_{\tilde{m}})+\sum_{j\in(G2)}w_{\tilde{m},j}\,\phi(x_j-x_{\tilde{m}})\,(x_j-x_{\tilde{m}})\Bigg)=:g_1(t)+g_2(t)\,.$$

由于 $\tilde{m}\in(G2)$，我们有 $\phi(x_j-x_{\tilde{m}})\to 0$ 对所有 $j\in(G1)$ 均成立，因此 $g_1(t)\to 0$，因为 $t\to\infty$。此外，$g_2(t)$ 为正，因为它只包含 $(G2)$ 内部的相互作用，而 $x_{\tilde{m}}$ 是 $(G2)$ 的最小元素。与之前证明定理 3.1 时对 g 的处理一样，g_2 在减小时可能不连续，但在增大时是一致利普希茨连续的。因此，使用相同的论证，$g_2(t)\to 0$，因为 $t\to\infty$。

这使我们回到了之前相同的情形。现在，对于每个 $j \in (G2)$，要么 $x_j - x_{\tilde{m}} \to 0$ （即 $x_j \to x_m^* + R$），要么 $\phi(x_j - x_{\tilde{m}}) \to 0$。随后可以根据需要多次重复上述论证，直到证明所有个体都收敛到某个 $n \in \mathbb{N}$ 的 $x_m^* + nR$，这就说明了结论。 □

注释 4.1。 实际上，对于有界置信交互函数，我们不认为群体会一直处于单一的 R-链中。事实上，典型情况是群体会分裂成彼此距离大于 R 的簇。不过，由于上述结果涉及长期行为，因此在发生这种分裂后，可以将其分别应用于每个 R-链。

4.2 逻辑斯蒂权重动力学

在这种情况下，若没有关于初始网络结构的额外信息，就无法描述系统的行为。为突出这一点，我们再次像前面的证明中那样将群体划分为若干组。这里省略了一些细节，因为这一构造与上述构造基本相同。

我们再次选取一个具有 $x_i \to x_m^*$ 的个体 i。对于所有 j，

$$w_{ij}\,\phi(x_j - x_i)\,(x_j - x_i) \to 0\,.$$

现在有三种选择： $x_j \to x_m^*$ （$G1$）、 ϕ（$x_j - x_m^*$） $\to 0$ （$G2$），或者对于所有此类 i （$G3$）， $w_{ij} \to 0$。和之前一样，后面的组排除前面的组。

请注意，在第 3 节考虑具有全支撑的 ϕ 时，我们可以排除 $\phi(x_j - x_m^*) \to 0$，因此只剩下两种选择。在命题 4.1 中，我们无法排除 $\phi(x_j - x_m^*) \to 0$，但记忆权重动力学意味着 $\phi(x_j - x_m^*) \to 0$ 当且仅当 $w_{ij} \to 0$，因此同样只剩下两种选择。在考虑有界置信交互函数和逻辑斯蒂权重动力学时，我们无法减少组的数量。

核心问题在于，我们对群体（$G3$）中个体的观点一无所知。回想注3.2中的构造：在逻辑斯蒂权重动力学作用下，一个初始时连通的网络会变为非连通。在这种情况下，（$G3$）中的个体也可能持有几乎任意的观点。因此，我们无法一般性地刻画（$G2$）中的个体与（$G3$）中的个体之间的相互作用，这意味着无法反复应用该论证，逐步将群体分离为意见簇。

相反，我们通过模拟研究有界信心交互函数与逻辑斯蒂权重动力学的这一组合，将 [19] 中针对 Erdős–Rényi（ER）随机网络所做的分析扩展到不同的初始网络结构，包括 Watts–Strogatz（WS）随机网络、Barabási–Albert（BA）随机网络以及随机块模型（SBM）。我们首先介绍这些随机网络，并对其初始结构及其发展方式给出一些直观认识，然后描述更大规模模拟的设置。

4.2.1 随机网络模型

以 ER 随机网络为基线，其他每种模型都引入了一些额外结构。对于每种类型的随机网络，附录 B 中给出了图 1 的一个版本，用以展示意见轨迹、网络统计量以及网络演化快照的示例。请注意，与图 1 一样，这里使用了指数交互函数，因此长期行为遵循定理 3.1。有关随机网络模型的更多细节，参见例如 [30, 31]。

WS随机网络通过主要将个体与附近的个体（即索引 i 和 j 接近）相连，并进行一些随机重连以建立横跨整个网络的连接，从而生成“小世界”网络。 [32] 在图 4 所示的模拟中，个体与环上的 10 个最近邻相连，重连概率则有所变化。附录 B 的图 8 中，初始连接数增加到 20，重连概率设为 0.05，使网络结构更加明显。网络最初呈环状结构，但很快便失去许多边，因为个体不太可能与数量有限的相邻个体持有相似的观点。网络并未像图 1（或后面的图 10）那样形成高度连接的社群，而是分裂成许多链，其中的个体持有相似的观点。

BA随机网络 [33] 通过优先连接以顺序方式构建：随着新节点以固定度加入，这些边会根据现有节点的度连接到相应节点上。由此形成中心枢纽和幂律度分布。在图 4 所示的模拟中，这一初始边数有所变化。附录 B 中的图 9 展示了一个具有 5 条初始边的示例。可以清楚地看到，其初始结构是一个高度连接的中心，且连接数随着远离中心而减少。随着

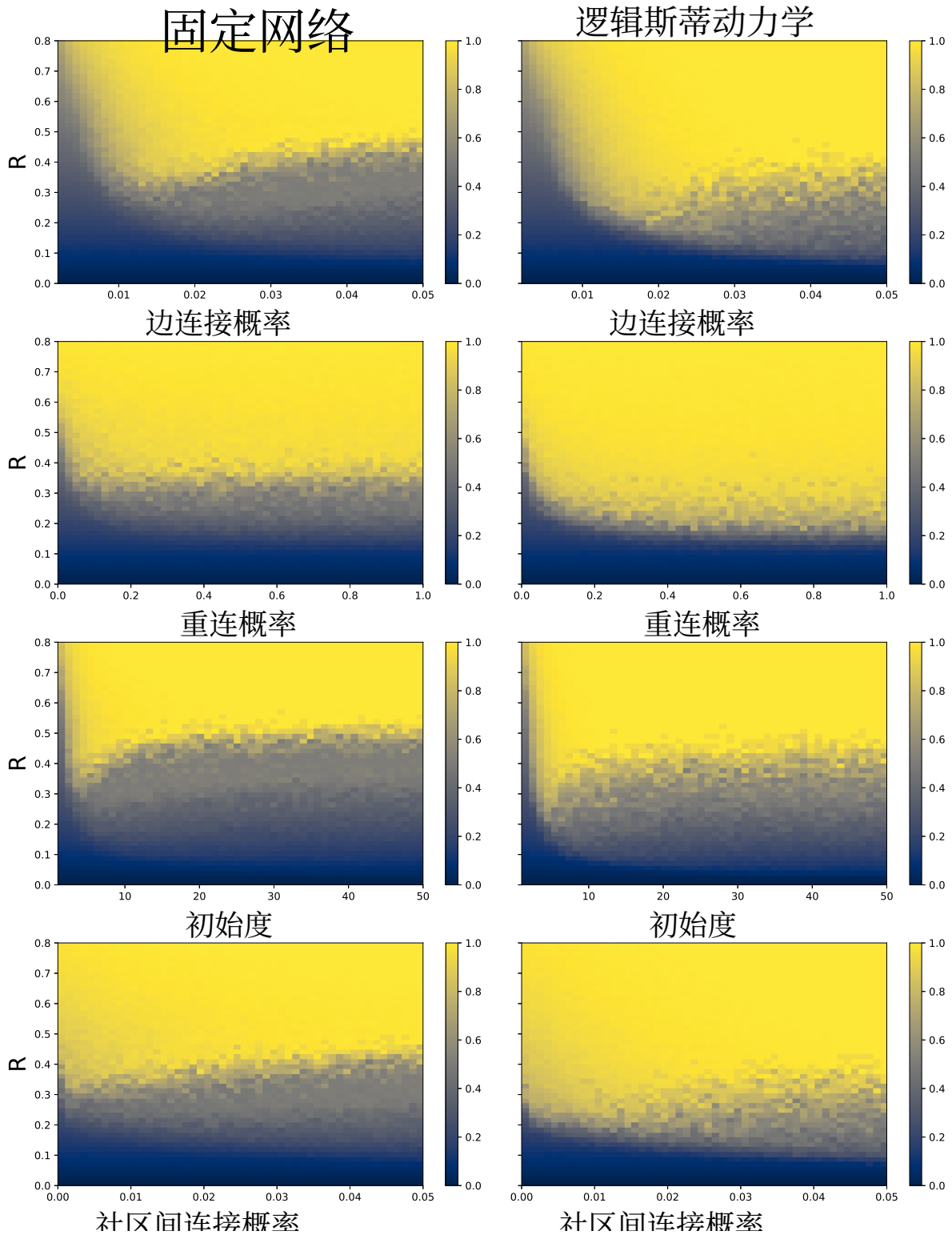


图 4： 热图展示了使用不同随机网络模型生成 $w(0)$ 时，固定网络（左）和逻辑斯蒂权重动力学（右）下意见形成在稳态时的序参量（2）。蓝色区域表示意见聚类，灰色区域表示极化，黄色表示群体已达成共识。在每张热图中，有界置信交互函数的截断值 R 沿纵轴变化，而每种随机网络特有的模型参数沿横轴变化。总体而言，逻辑斯蒂权重动力学使共识更为常见，但当 R 非常低时，无法防止聚类。

网络不断演化，外围许多个体由于只有少量初始连接而与网络断开。与此同时，中心群体分裂为三个社群。这导致了类似的意见聚类，但伴随着许多孤立个体。

最后，SBM 对 ER 网络进行调整，生成具有一定初始社区结构的网络 [34]。群体被划分为两个规模相等的社群。社群内部的边以概率$p_{\text{within}} = 0.05$存在，而社群之间存在边的概率则有所变化。附录 B 中的图 10 展示了一个示例，其中 p_{within} 增至 0.2， $p_{\text{between}} = 0.02$也同样如此，以使网络结构更加明显。图 4 中的模拟选择较小的 p_{within} 值，是因为与 ER 随机网络类似，当网络连接非常紧密时，行为的变化较少；而当这些边的概率较低时，则会出现有趣的转变。图 10 中有两个初始强社群。到 $t = 5$ 时，每个社群都已根据观点形成三个子社群。随着时间推移，网络从最初设定的社群逐渐重组为由观点驱动的社群。

4.2.2 有界信心下的观点聚类

介绍了将要考察的随机网络模型后，我们回到逻辑斯蒂权重动力学与有界信心交互函数的设定。为了减少参数总数，这里采用不连续有界信心函数，它只有一个参数：信心半径 R。这也便于更直接地与 [19] 中关于 ER 随机网络的结果进行比较。对于每种随机网络结构，我们改变网络参数和信心界限 R，并在模拟达到稳态（或达到最长时间 $t = 2000$）后报告序参量 Q(2)。图 4 展示了模拟结果。顶行重现了 [19] 中关于 ER 随机网络上逻辑斯蒂权重动力学的结果。其余各行展示了上述随机网络模型的新结果。在所有情况下，$N = 500$ ，且热图中的每个单元格都是对采用不同初始条件的 10 次模拟取平均所得。

对于固定网络（左列）和逻辑斯蒂权重动力学（右列），四种网络结构都呈现出若干共同特征。随着相互作用半径 R 增大，系统总会从多簇状态（呈深蓝色）转变为极化状态（呈灰色），再转变为共识状态（呈黄色）。随着网络参数变化，这些转变的位置也会发生变化。

对于 ER、BA 和 SBM 网络，随着网络参数（分别为边概率、初始度和社区间边概率）增加，网络的平均度也会增加。在这些情况下，当 R 值约为 0.4 时，连通性与序参量之间呈现非单调关系。这种现象在 BA 网络中最为明显。当连通性极低时，不会形成共识。随后进入一个能够形成共识的最佳区域；而当连通性进一步增加时，群体会发生极化。对于固定网络和处于逻辑斯蒂权重动力学下的网络，都能观察到这一效应；这是自然的，因为两者的网络连通性水平基本相同。这表明，连通性较低的网络中，观点传播速度较慢，能够避免簇的快速形成，因此可能更容易达成共识。

对于较小的 R值，从多个簇（蓝色）向极化（灰色）的转变似乎基本不受逻辑斯蒂权重动力学影响。这表明，大量簇是由初始网络缺乏连通性造成的，而这种权重动力学无法改变这一点。

然而，在所有四种网络结构中，逻辑斯蒂权重动力学都缩小了出现极化的参数空间，转而促成共识。尤其是在 WS 图中，逻辑斯蒂权重动力学几乎完全消除了这片灰色区域。如图 8 所示，网络从最初的环分裂成一系列链。这种剧烈转变表明，在逻辑斯蒂权重动力学下，环要么保持完整（从而促成共识），要么分裂成许多部分（从而形成大量簇），而形成两条大型链／社群的可能性很低。这表明，在较为适中的 R 值下，即使不添加新的边，仅改变权重强度也能有效促成共识。

5 早期权重动力学

虽然意见动力学研究（包括本文）通常关注系统的长期收敛，但我们也可以考察早期动力学。具体而言，我们旨在理解个体意见之间的初始距离与其对应边权重之间的关系，以估算“典型”的边权重动力学。作为起点，我们考虑记忆权重动力学最简单的近似。

用 $d_{ij} = x_j - x_i$ 表示两个个体意见之间的距离。由于假设初始意见已排序，因此我们有 $d_{ij} \geq 0$，其中 $i \leq j$ ，并聚焦于这些正值。为简化符号，我们将 $\phi_{ij}(t)$ 记作 $= \phi(d_{ij}(t))$。

假设当 $t \geq 0$ 较小时， $d_{ij}(t) \approx d_{ij}(0)$。因此

$$\begin{aligned} w_{ij}(t) &= w_{ij}(0)\, e^{-t} + \int_0^t e^{s-t}\phi_{ij}(s)\, ds \\ &\approx w_{ij}(0)\, e^{-t} + \int_0^t e^{s-t}\phi_{ij}(0)\, ds \\ &= w_{ij}(0)\, e^{-t} + \phi_{ij}(0)(1-e^{-t})\,. \end{aligned}$$

因此，在短时间内，我们得到初始界

$$\phi_{ij}(0)(1-e^{-t}) \lesssim w_{ij} \lesssim e^{-t} + \phi_{ij}(s)(1-e^{-t})\,.$$

然而，这完全忽略了意见形成过程。为了改进这些界，我们可以定义

$$v_{ij} := \frac{d(d_{ij})}{dt}\bigg|_{t=0},$$

并采用以下近似

$$d_{ij}(t) \approx d_{ij}(0) + t v_{ij}\,, \tag{7a}$$

$$\phi_{ij}(t) \approx \phi_{ij}(0) + t v_{ij}\, \phi'_{ij}(0) + \frac{1}{2}t^2 v_{ij}^2\, \phi''_{ij}(0)\,. \tag{7b}$$

对 d_{ij} 采用线性近似，因为如下文所示，近似 d_{ij} 的一阶导数颇具挑战；而由于耦合程度很高，对其二阶导数进行近似并不切实际。不过，只要 ϕ足够光滑，我们仍可以对其采用二次近似。

对于记忆权重动力学，这给出如下估计

$$w_{ij}(t) = w_{ij}(0)e^{-t} + \phi_{ij}(0)\,(1-e^{-t}) + v_{ij}\,\phi'_{ij}(0)\,(t-1+e^{-t}) + \frac{1}{2}v_{ij}^2\,\phi''_{ij}(0)((t-2)t+2-2e^{-t})\,, \tag{8}$$

而对于逻辑斯蒂权重动力学，我们有

$$w_{ij}(t) \approx \frac{w_{ij}(0)}{w_{ij}(0) + (1-w_{ij}(0))e^{-\lambda(t)}}\,, \tag{9}$$

$$\lambda(t) = 2\Big(\phi_{ij}(0)t + \frac{1}{2}t^2 v_{ij}\,\phi'_{ij}(0) + \frac{1}{6}t^3 v_{ij}^2 \phi''_{ij}(0)\Big) - t\,.$$

这两个估计值都需要近似求出 v_{ij}，即 d_{ij} 在时刻 $t=0$ 的导数。也就是说，如果两个个体一开始相距 d_{ij}，我们预计他们会以多快的速度靠近或远离。根据定义

$$v_{ij} = \sum_{n=1}^{N} \frac{w_{jn}(0)}{k_j(0)}\phi_{jn}(0)\, d_{jn}(0) - \frac{w_{in}(0)}{k_i(0)}\phi_{in}(0)\, d_{in}(0)\,.$$

显然，这取决于许多变量，而不仅仅是距离 $d_{ij}(0)$——事实上，它取决于整个群体的初始意见。因此，我们旨在估计 v_{ij} 的矩。采用 [19]中考虑的设定：初始意见服从均匀随机分布，初始网络是概率为 $p \in [0,1]$ 的 ER 随机网络，现有边的权重在 $[0,1]$ 中均匀选取。由此我们可以计算

$$\mathbb{E}[w_{ij}] = \frac{p}{2}\,, \quad \mathrm{Var}[w_{ij}] = p\left(\frac{1}{3} - \frac{p}{4}\right).$$

虽然除以节点度会引入一些相关性，但我们利用上述结果给出以下近似

$$\mathbb{E}\left[\frac{w_{ij}}{k_i}\right] \approx \frac{1}{N}\,, \quad \mathrm{Var}\left[\left(\frac{w_{ij}}{k_i}\right)^2\right] \approx \frac{1}{N^2}\left(\frac{4}{3p} - 1\right). \tag{10}$$

由此，我们可以估计在给定 d_{ij} 的条件下， v_{ij} 的一阶矩和二阶矩。

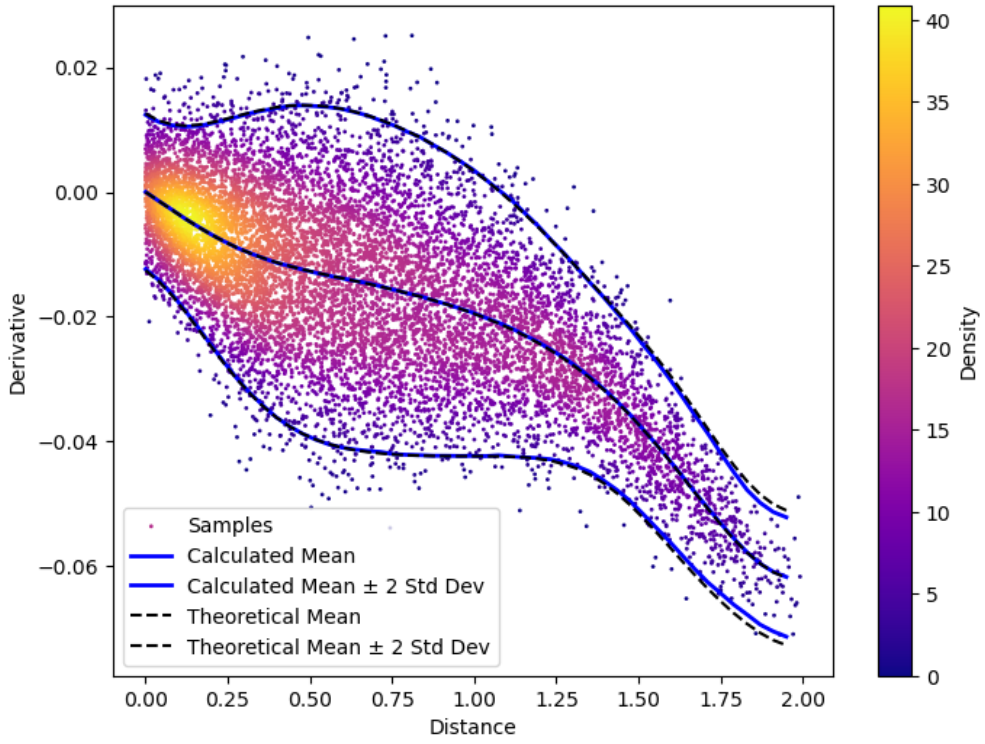


图5： 使用指数交互函数展示估计值 (11)。所用种群规模为$N = 100$，生成了100组不同的随机初始条件，以便准确计算均值和方差。图中绘出了具有代表性的10，000个数据点，并根据核密度估计着色。这些估计值很好地捕捉了该分布。

命题 5.1。 使用近似(7) 和(10)， v_{ij} 具有以下条件矩

$$\mathbb{E}[v_{ij} \mid d_{ij}] = \frac{1}{2-d_{ij}} \int_{-1}^{1-d_{ij}} I_1(d_{ij},x) - \frac{2}{N}\Big(I_1(d_{ij},x) + \phi_{ij}\, d_{ij}\Big)\, dx\,, \tag{11a}$$

$$\mathbb{E}[v_{ij}^2 \mid d_{ij}] = \frac{1}{2-d_{ij}} \int_{-1}^{1-d_{ij}} \frac{1}{N^2} f(x) + \frac{1}{N^2}\left(\frac{4}{3p} - 1\right) g(x)\, dx\,, \tag{11b}$$

其中

$$I_m(d_{ij},x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \Big(\phi(y-x-d_{ij})\,(y-x-d_{ij}) - \phi(y-x)\,(y-x)\Big)^m\, dy\,,$$

$$f(d_{ij},x) = (N-2)(N-3)I_1(d_{ij},x)^2 + (N-2)I_2(d_{ij},x) + 4(\phi_{ij}d_{ij})^2 - 4(\phi_{ij}\,d_{ij})(N-2)I_1(d_{ij},x)\,,$$

$$g(d_{ij},x) = 2(\phi_{ij}\,d_{ij})^2 + (N-2)\big(J(x+d_{ij}) + J(x)\big)\,,$$

$$J(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \Big(\phi(y-x)\,(y-x)\Big)^2\, dy\,.$$

证明。见附录A。 □

图5展示了指数交互函数和 $N = 100$ 下这些近似的一个示例。均值和方差的估计值拟合良好，均值 $\pm$ 个标准差给出了 v_{ij}的合理上下界。对于较大的 d_{ij}，方差存在轻微偏差，不过该区域的数据点自然较为稀疏。

这些曲线的具体形状将取决于种群规模、交互函数 ϕ 和边概率 p；边概率决定了边的方差，从而决定了式（11b）中函数 f和 g 之间的平衡。注意， g 不包含 N^2 阶的项。因此，网络中的不确定性所产生的方差（由项

$$\frac{1}{N^2}\left(\frac{4}{3p} - 1\right) g(x)\,,$$

in $\mathrm{E}[v_{ij}^2 \mid d_{ij}]$ 表示）将随着 $N \to \infty$ 而消失。然而，由于 x_i 位置未知所导致的不确定性仍然存在，因为 f 包含 N^2 阶的项。这似乎很自然，因为已知 ER 随机网络在 $N \to \infty$ [35] 时收敛于均匀图子，这意味着网络的行为变得确定，因此不会为这一近似贡献不确定性。

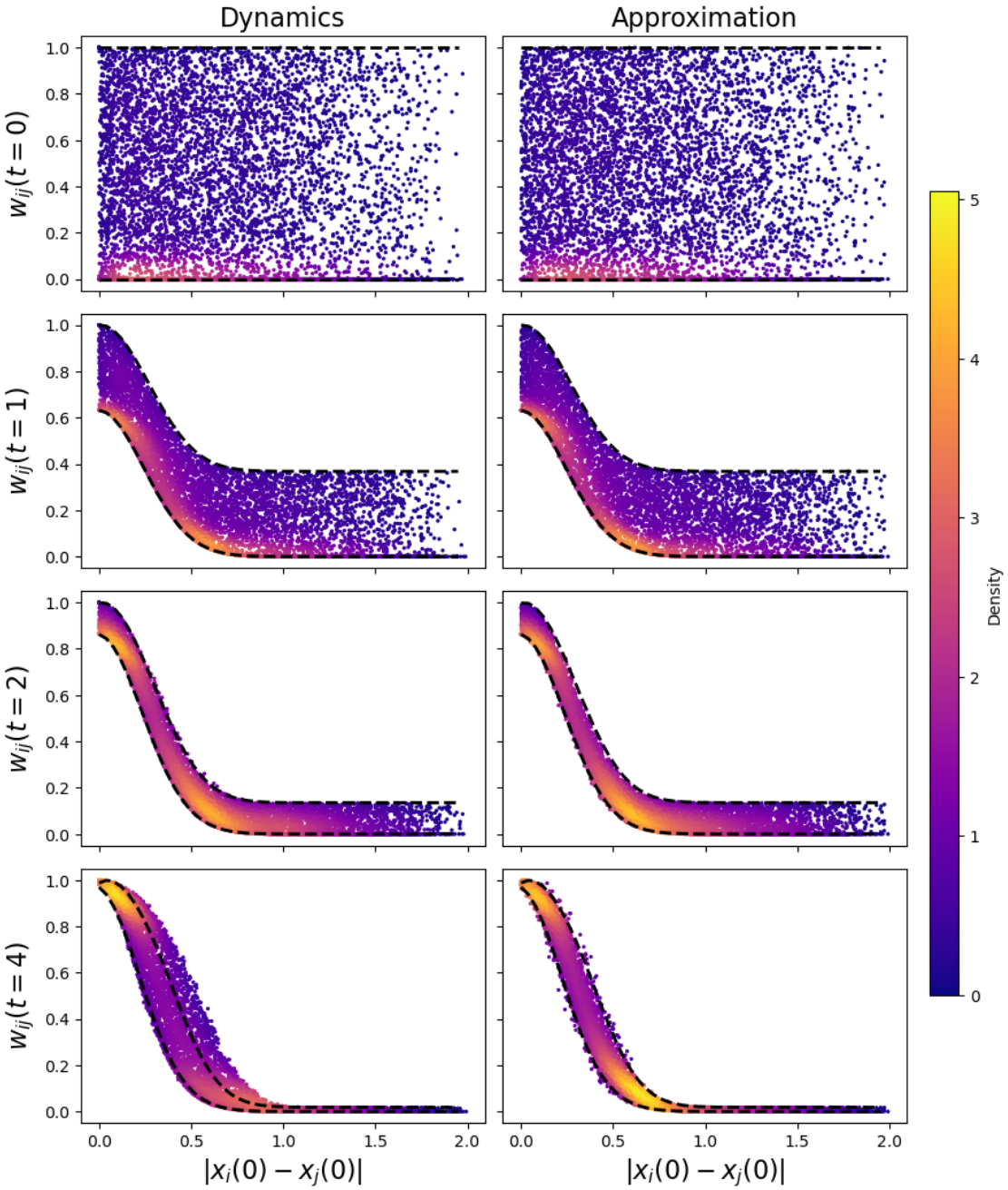


图 6： 记忆权重动力学下的权重（左），以及通过结合式（7）和式（8）得到的小 t 近似（右）。左侧散点图显示实际模拟数据，右侧显示数量相同的随机采样点。两者均使用核密度估计着色。黑色虚线表示使用 $w_{ij} = 0$，1 得到的上、下估计值，以及 v_{ij} 的均值加减两个标准差（使用命题 5.1 中的估计值）。模拟与近似吻合良好，直到 $t = 2$，此后两者的动力学开始偏离。

随后可以将这些估计值与（8）或（9）结合，以近似 w_{ij}。需要注意的是，d_{ij} 的近似是线性的，因此我们无法考虑意见动力学中可能在后期出现的非线性效应。图 6 展示了一个使用与图5相同设置的示例。具体而言，创建一个具有 $N = 100$、$p = 0.5$ 的随机厄尔多斯–雷尼网络，将现有边赋予在 $[0, 1]$ 中均匀分布的随机权重，并在$[-1, 1]$中均匀选取初始意见。随后，左列展示了10,000对随机选取的节点在四个时间点的权重 $w_{ij}(t)$。

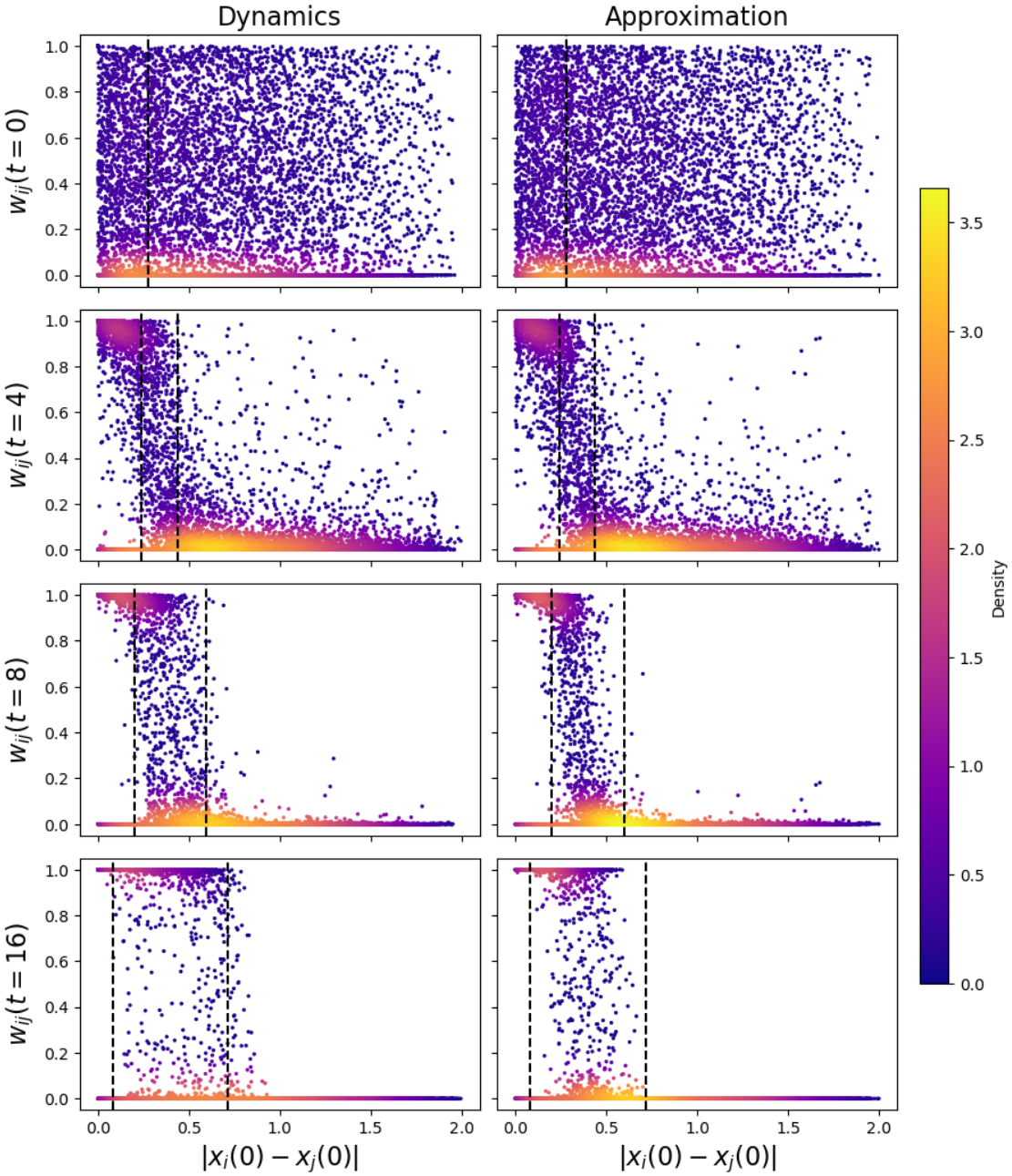


图 7： 逻辑斯蒂权重动力学下的权重（左）以及通过结合（7）和（9）获得的小 t 近似（右）。散点图左侧显示实际模拟数据，右侧显示数量相等的随机采样点。两者均使用核密度估计进行着色。黑色虚线显示边界 $d^{\perp}$，其描述见第5节末尾。

它们在 x轴上的位置由其初始距离 $d_{ij}(0)$给出，以便与上述近似进行比较。根据高斯核密度估计（核密度估计，KDE）为各点着色，以展示其分布。

对于右侧一列，每个时间点生成 10,000 个随机样本。对于每个样本，以 $1-p$ 的概率选择一个初始边权重为 $w_{ij}(0)=0$，或以 p 的概率从 $w_{ij}\sim\mathrm{Uniform}[0,1]$ 中选择。意见 x_i 和 x_j 从 $[-1,1]$ 中均匀采样，并在必要时交换，使得 $d_{ij}=x_j-x_i\geq 0$。给定这一 d_{ij}，从均值为 $\mathrm{E}[v_{ij}\,|\,d_{ij}]$、方差为 $\mathrm{Var}[v_{ij}\,|\,d_{ij}]$的正态分布中采样 v_{ij}，其参数由（11）给出。随后使用估计式（8）近似 $w_{ij}(t)$。同样，使用核密度估计为各点着色，以显示其分布。

最后，两列中均以黑色虚线标出了合理的上下界。要计算这些界，我们需要求出 w_{ij} 和 v_{ij} 的上下界，因此分别将 1 和 0 取作 w_{ij}，并将均值± 两倍标准差取作 v_{ij}（如图5中的黑色虚线所示）。

由于个体之间相互独立，动力学和近似按构造在 $(d_{ij},\ w_{ij})$ 上具有相同的初始分布。作为 $p = 0.5$，网络中一半的权重初始值为 0，另一半则分布在 $[0, 1]$ 上。对于距离 $d_{ij} \geq 0$，其分布为

$$\mathbb{P}[d_{ij} = d] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mathbb{P}[d_{ij} = d \,|\, x_i = x]\, dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mathbb{P}[x_j = x + d \,|\, x_i = x]\, dx = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{d}{2}\right).$$

动力学与近似在 $t = 2$之前始终吻合良好，此后便开始出现分歧。如上所述，这是短时间近似的预期表现。对于 $t = 4$，动力学中的权重高于预期，这表明节点对之间的距离比线性距离近似预测的更近，因而导致 ϕ 的值更高，进而使权重更高。这种误差很可能是由 d_{ij} 的线性近似误差在估计值中逐步累积所致。

观察 $t \leq 2$ 可见，在动力学和近似中，分布都集中在下界附近，因为大多数权重初始为 $w_{ij}(0) = 0$。不过，我们可以看到，在 $d_{ij} = 0$ 附近以及略高于 $d_{ij} = 0.5$ 的位置，形成了两个密度较高的区域。第一个区域对应的是观点起初相近、但在网络中彼此非连通的个体对，因此它们会迅速建立更强的连接。第二个区域对应的是起初距离太远、无法互动，但随着时间推移逐渐靠近并建立较弱连接的个体对。由于 x 值由 $d_{ij}(0)$ 给定，其分布不会改变，因此密度增加表明，对于该 $d_{ij}(0)$ 值，可取的权重范围较小，也就是说更容易预测。距离处于 $d_{ij} \in [0.25, 0.5]$ 范围内的个体对并未呈现这种密度增加，说明其边权重可能取值范围更广。在近似中，这些高密度区域在 $t = 4$ 时变得更加明显；而在动力学中，只有 $d_{ij} = 0$ 附近的区域得以保留。这很可能是由于动力学中的非线性降低了网络在较晚时间点的可预测性。

在动力学和近似中，当取值为 $d_{ij} \geq 1$ by $t = 4$时，所有边实际上都会被移除，这表明网络中形成了社群，与图 1 类似。不过，此处采用的是记忆权重动力学，而非逻辑斯蒂权重动力学；根据推论 3.1，我们知道群体最终必定会达到共识，且 $w_{ij} \to \phi(0) = 1$。因此，这些最初被移除的边必定会在之后重新出现。这种长期行为与图 6 所示的短时近似行为截然不同，表明在最终收敛至共识之前，先经历了一个初始聚类阶段，并伴随着网络中社群的形成。

图 7 展示了逻辑斯蒂权重动力学的结果（交互函数和初始条件设置均相同），即使在较晚时刻，两者仍吻合良好。在这种情况下，$w_{ij} = 0$，1 不能用于构造上下界，因为这些值是动力学的不动点。不过，利用 $v_{ij} = \mathbb{E}[v_{ij}] \pm 2\sqrt{\mathrm{Var}[v_{ij}]}$，我们可以通过式 (7b) 为 $\phi_{ij}(t)$ 给出合理的上下估计值，记为 $\phi_{ij}^{\pm}(t)$。据此，我们可以求出距离 $d^{\pm}(t)$，在该距离处 $\phi^{\pm}(d(t)) = 1/2$，从而区分权重增大和减小的区域。对于 $d_{ij} \leq d^{-}(t)$，距离较小，因此任何初始时非零的权重都会增大至接近 1。对于 $d_{ij} \geq d^{+}(t)$，初始距离过大，具有 $w_{ij} < 1$ 的边会逐渐减小至 0。对于 $d_{ij} \in (d^{-}(t)\ d^{+}(t))$，我们预计边处于转变过程中。这一行为与图 7 中观察到的完全一致。

在这两种情况下，我们在此都只能预测个体权重。若扩展这一方法以描述更广泛网络结构的演化，就可以去除目前一个核心假设：边之间的独立性。该假设在 $t = 0$ 时成立，但会随时间推移而失效。

6 结论

本文考察了动态网络模型（3）的长期和短期行为。当交互函数在 $[0, 2]$, 上严格为正时，研究表明，该模型的收敛行为与固定网络情形相同，都会形成不同的意见簇；但在动态网络中，还会相应地产生社区结构。对于记忆权重动力学，我们证明模型会收敛至共识，并形成全连接网络；不过，第5节对短期动力学的探讨表明，意见和边权重在初始阶段也会出现聚类现象。

当交互函数不具有全支撑时，例如平滑有界置信函数，情况更为复杂。对于记忆权重动力学，类似的收敛到聚类结果仍然成立；而对于逻辑斯蒂权重动力学，对初始条件的强烈依赖使得无法采用同样的分析方法。一个关键因素是，网络动力学消除了簇

必须相隔一段距离、且在该距离处交互函数为零这一要求，如图2和图3所示的例子所强调的那样。这种无法定位簇的情况进一步增加了对初始网络结构的依赖。在第4.2.2节中，通过使用不同随机网络模型的模拟探讨了该结构的影响。尽管具体行为有所不同，所有模型都表现出从聚类到极化再到共识的转变，网络参数会影响这些转变的位置。此外，逻辑斯蒂权重动力学普遍降低了极化，但当交互函数半径非常小时，其影响很小。

本文采用的各种方法，使我们能够更完整地理解耦合系统（3）在各种交互函数和网络动力学下的短期与长期动力学。总体而言，自适应网络推动了与意见簇相映射的社群形成，但其具体行为高度取决于交互函数的支撑集，以及权重动力学创造新边的能力。

参考文献

[1] Morris H DeGroot。达成共识。《美国统计学会杂志》，69(345)：118–121，1974。[2] Thomas Milton Liggett 和 Thomas M Liggett。《相互作用粒子系统》，第 2 卷。纽约：Springer，1985。[3] Rainer Hegselmann、Ulrich Krause 等。有界信心模型中的意见动力学、分析与模拟。《人工社群与社会模拟杂志》，5(3)，2002。[4] Guillaume Deffuant、David Neau、Frederic Amblard 和 G´erard Weisbuch。相互作用主体之间的信念混合。《复杂系统进展》，3(01n04)：87–98，2000。[5] Unchitta Kan、Michelle Feng 和 Mason A Porter。网络上的自适应有界信心意见动力学模型。《复杂网络杂志》，11(1)：415–444，2023。[6] Yi Yu、Gaoxi Xiao、Guoqi Li、Wee Peng Tay 和 Hao Fatt Teoh。自适应网络中的意见多样性与社群形成。《混沌：非线性科学跨学科杂志》，27(10)，2017。[7] Floriana Gargiulo 和 Sylvie Huet。群体结构自适应网络上的意见动力学。arXiv 预印本 arXiv:0912.2821，2009。[8] Henrique Ferraz de Arruda、Felipe Maciel Cardoso、Guilherme Ferraz de Arruda、Alexis R Hern´andez、Luciano da Fontoura Costa 和 Yamir Moreno。社会网络算法如何影响意见极化的建模。《信息科学》，588：265–278，2022。[9] Henrique M Borges、V´ıtor V Vasconcelos 和 Fl´avio L Pinheiro。社会重连偏好如何连接极化社群。《混沌、孤子与分形》，180：114594，2024。[10] Byungjoon Min。群体交互的协同演化动力学：协同演化的非线性投票者模型。《复杂系统前沿》，1：1298265，2023。[11] Federico Vazquez。协同演化网络上的意见动力学。载于《复杂网络的动力学：第 2 卷：时变动力系统的应用》，第 89–107 页。Springer，2013。[12] Jiongming Su、Baohong Liu、Qi Li 和 Hongxu Ma。社会群体中意见与有向自适应网络的协同演化。《人工社群与社会模拟杂志》，17(2)：4，2014。[13] Aili Asikainen、Gerardo I˜niguez、Javier Ure˜na-Carri´on、Kimmo Kaski 和 Mikko Kivel¨a。三元闭包与同质性在社会网络中的累积效应。《科学进展》，6(19)：eaax7310，2020。[14] Rongrong Kang 和 Xiang Li。演化符号评价网络上的意见动力学协同演化。《自动化学报》，137：110138，2022。[15] Nataˇsa Djurdjevac Conrad、Nhu Quang Vu 和 S¨oren Nagel。基于主体的模型中用于意见与社会动力学的协同演化网络。《混沌：非线性科学跨学科杂志》，34(9)，2024。[16] Tucker Evans 和 Feng Fu。动态网络上的意见形成：识别党派回音室出现的条件。《皇家学会开放科学》，5(10)：181122，2018。[17] Gerardo Iniguez、J´anos Kert´esz、Kimmo K Kaski 和 Raphael Angl Barrio。协同演化网络中的意见与社群形成。《物理评论 E——统计、非线性与软物质物理》，80(6)：066119，2009。[18] Jiazhen Liu、Shengda Huang、Nathaniel M Aden、Neil F Johnson 和 Chaoming Song。协同演化网络中极化的涌现。《物理评论快报》，130(3)：037401，2023。[19] Andrew Nugent、Susana N Gomes 和 Marie-Therese Wolfram。关于演化网络模型及其对意见形成的影响。《物理学 D辑：非线性现象》，456：133914，2023。[20] Andrew Nugent、Susana N. Gomes 和 Marie-Therese Wolfram。通过控制社会网络引导意见动力学。《混沌：非线性科学跨学科杂志》，34(7)，2024。[21] Sebastien Motsch 和 Eitan Tadmor。异质性互动动力学增强共识。《SIAM评论》，56(4)：577–621，2014年1月。

[22] Andrew Nugent、Susana N Gomes 和 Marie-Therese Wolfram。《连接基于智能体的模型与连续意见动力学之间的鸿沟》。《物理学A：统计力学及其应用》，651:129886，2024。[23] Vincent D. Blondel、Julien M. Hendrickx 和 John N. Tsitsiklis。《具有依赖意见的通信的连续时间平均保持意见动力学》，2009年7月。arXiv:0907.4662 [math]。[24] Chu Wang、Qianxiao Li、Weinan E 和 Bernard Chazelle。《含噪Hegselmann–Krause系统：相变与2r猜想》。《统计物理学杂志》，166(5):1209–1225，2017。[25] Mark EJ Newman。《网络中的模块度与社区结构》。《美国国家科学院院刊》，103(23):8577–8582，2006。[26] Ioan Barbalat 等。《非线性振荡微分方程组》。《纯粹与应用数学评论》，4(2):267–270，1959。[27] Ginestra Bianconi、Richard K Darst、Jacopo Iacovacci 和 Santo Fortunato。《三元闭包：复杂网络中社群形成的基本机制》。《物理评论E》，90(4):042806，2014。[28] Peter Klimek 和 Stefan Thurner。《三元闭包动力学推动社会多重网络中的标度律》。《新物理学杂志》，15(6):063008，2013。[29] Hong Huang、Yuxiao Dong、Jie Tang、Hongxia Yang、Nitesh V Chawla 和 Xiaoming Fu。《三元闭包会加强社会网络中的联系吗？》。《ACM知识发现与数据挖掘汇刊（TKDD）》，12(3):1–25，2018。[30] Mark EJ Newman。《复杂网络的结构与功能》。《SIAM评论》，45(2):167–256，2003。[31] Anna Goldenberg、Alice X Zheng、Stephen E Fienberg 和 Edoardo M Airoldi。《统计网络模型综述》。《机器学习基础与趋势》，2(2):129–233，2010。[32]Duncan J Watts 和 Steven H Strogatz。《“小世界”网络的集体动力学》。《自然》，393(6684):440–442，1998。[33]Albert-L´aszl´o Barab´asi 和 R´eka Albert。《随机网络中标度的涌现》。《科学》，286(5439):509–512，1999。[34] Paul W Holland、Kathryn Blackmond Laskey 和 Samuel Leinhardt。《随机块模型：初探》。《社会网络》，5(2):109–137，1983。[35] L´aszl´o Lov´asz。《大型网络与图极限》，第60卷。美国数学学会，2012。

致谢

AN 获得了英国工程与自然科学研究委员会的资助，该资助通过华威大学系统数学博士培训中心提供（编号 EP/S022244/1）。
为实现开放获取，作者已将知识共享署名许可协议（CC-BY）许可应用于本次投稿产生的任何作者接受稿版本。

作者谨此感谢 Sasha Glendinning 协助校对稿件。

A 证明

命题 5.1 的证明

证明。 我们从 v_{ij} 的一阶矩开始,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[v_{ij} \mid d_{ij}] &= \int_{-1}^{1} \mathbb{E}[v_{ij} \mid d_{ij}, x_i = x]\, \mathbb{P}[x_i = x | d_{ij}]\, dx \\ &= \frac{1}{2 - d_{ij}} \int_{-1}^{1-d_{ij}} \mathbb{E}[v_{ij} \,|x_i = x, x_j = x + d_{ij}]\, dx \\ &= \frac{1}{N(2 - d_{ij})} \int_{-1}^{1-d_{ij}} \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N} \phi_{jn}(0)\, d_{jn}(0) - \phi_{in}(0)\, d_{in}(0) \,\middle|\, x_i = x, x_j = x + d_{ij} \right] dx\,. \qquad (12)\end{aligned}$$

于是，将期望中的和拆分为涉及 i, j 的项以及其他独立项,

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N} \phi_{jn}(0)\, d_{jn}(0) - \phi_{in}(0)\, d_{in}(0) \right] &= \frac{1}{N}\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N} \phi_{jn}\, d_{jn} - \phi_{in}\, d_{in} \right] \\ &= \frac{1}{N}\mathbb{E}\left[\sum_{n\neq i,j}^{N} \phi_{jn}\, d_{jn} - \phi_{in}\, d_{in} \right].\end{aligned}$$

回忆 $d_{ii} = d_{jj} = 0$，因此我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N} \phi_{jn}(0)\, d_{jn}(0) - \phi_{in}(0)\, d_{in}(0) \right] + \frac{1}{N}\mathbb{E}\left[\phi_{ji}\, d_{ji} - \phi_{ii}\, d_{ii} + \phi_{jj}\, d_{jj} - \phi_{ij}\, d_{ij} \right] \\ = \Big(1 - \frac{2}{N}\Big)\mathbb{E}[\phi_{jn}\, d_{jn} - \phi_{in}\, d_{in}] \\ + \frac{1}{N}\mathbb{E}\left[\phi_{ji}\, d_{ji} - \phi_{ij}\, d_{ij} \right] \\ = \Big(1 - \frac{2}{N}\Big) I_1(d_{ij}, x) - \frac{2}{N}\phi_{ij}\, d_{ij}\,.\end{aligned}$$

因此，(12) 变为

$$\mathbb{E}[v_{ij} \mid d_{ij}] = \frac{1}{2 - d_{ij}} \int_{-1}^{1-d_{ij}} \Big(1 - \frac{2}{N}\Big) I_1(d_{ij}, x) - \frac{2}{N}\phi_{ij}\, d_{ij}\, dx\,.$$

接下来我们考虑二阶矩。

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[v_{ij}^2 \mid d_{ij}] &= \int_{-1}^{1} \mathbb{E}[v_{ij}^2 \mid d_{ij}, x_i = x]\, \mathbb{P}[x_i = x | d_{ij}]\, dx \\ &= \frac{1}{2 - d_{ij}} \int_{-1}^{1-d_{ij}} \mathbb{E}[v_{ij}^2 \,|x_i = x, x_j = x + d_{ij}]\, dx \\ &= \frac{1}{(2 - d_{ij})} \int_{-1}^{1-d_{ij}} \mathbb{E}\left[\Big(\sum_{n=1}^{N} \frac{w_{jn}}{k_j} \phi_{jn}(0)\, d_{jn}(0) - \frac{w_{in}}{k_i} \phi_{in}(0)\, d_{in}(0) \Big)^2 \,\middle|\, x_i = x, x_j = x + d_{ij} \right] dx\,.\end{aligned}$$

为简化记号，我们记作 $\omega_{ij} = w_{ij}/k_i$。

这次需要考虑更多情形。我们逐一考虑以下各项:

1. $n = i$, $m = 1, \ldots, N$
2. $n = j$, $m = 1, \ldots, N$
3. $n \neq i, j$, $m = i$, 4. $n \neq i, j$, $m = j$, 5. $n \neq i, j$, $m = n$, 6. $n \neq i, j$, $m \neq i, j, n$.

情形 1： $(n = i,\ m = 1, \ldots, N)$

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{N}(\omega_{ji}\phi_{ji}\,d_{ji})(\omega_{jm}\phi_{jm}\,d_{jm} - \omega_{im}\phi_{im}\,d_{im})\right] \\
&\quad= \mathbb{E}\left[(\omega_{ji}\phi_{ji}\,d_{ji})^2 - (\omega_{ji}\phi_{ji}\,d_{ji})(\omega_{ij}\phi_{ij}\,d_{ij}) + \sum_{m\neq i,j}(\omega_{ji}\phi_{ji}\,d_{ji})(\omega_{jm}\phi_{jm}\,d_{jm} - \omega_{im}\phi_{im}\,d_{im})\right] \\
&\quad= (\phi_{ij}\,d_{ij})^2\mathbb{E}[\omega_{ji}^2] + (\phi_{ij}\,d_{ij})^2\mathbb{E}[\omega_{ji}\,\omega_{ij}] - (\phi_{ij}\,d_{ij})\frac{1}{N}\mathbb{E}\left[\sum_{m\neq i,j}(\omega_{jm}\phi_{jm}\,d_{jm} - \omega_{im}\phi_{im}\,d_{im})\right] \\
&\quad= (\phi_{ij}\,d_{ij})^2\mathbb{E}[\omega^2] + (\phi_{ij}\,d_{ij})^2\frac{1}{N^2} - (\phi_{ij}\,d_{ij})\frac{1}{N^2}\mathbb{E}\left[\sum_{m\neq i,j}(\phi_{jm}\,d_{jm} - \phi_{im}\,d_{im})\right].
\end{aligned}
$$

在第一行中，我们将 $m = i,\ j$ 这些项单独列出，因为它们并不独立。在第二行中，从期望中去掉 $\phi_{ij}\,d_{ij}$ 的已知值。在第三行中，利用了 ω_{ij} 各项的独立性。

接下来，我们利用 $\mathrm{E}[\omega] = N^{-1}$ 来写出 $\mathrm{E}[\omega^2] = \mathsf{Var}[\omega] + N^{-2}$。此外，将 $m \neq i,\ j$ 项汇总为 $(N-2)$ 个相互独立的 $I_1(d_{ij},\ x)$ 副本。由此可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{N}(\omega_{ji}\phi_{ji}\,d_{ji})(\omega_{jm}\phi_{jm}\,d_{jm} - \omega_{im}\phi_{im}\,d_{im})\right] \\
&\quad= (\phi_{ij}\,d_{ij})^2\left(\mathrm{Var}[w] + \frac{1}{N^2}\right) + (\phi_{ij}\,d_{ij})^2\frac{1}{N^2} - (\phi_{ij}\,d_{ij})\frac{N-2}{N^2}I_1(d_{ij}, x) \\
&\quad= (\phi_{ij}\,d_{ij})^2\,\mathrm{Var}[w] + \frac{\phi_{ij}\,d_{ij}}{N^2}\left(2(\phi_{ij}\,d_{ij}) - (N-2)I_1(d_{ij}, x)\right).
\end{aligned}
$$

这里，最后一行只是对各项进行简单的重新排列。

情形 2： $(n = j,\quad m = 1, \ldots, N)$

这与情形 1 相同。

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{N}(\phi_{jj}\,d_{jj} - \phi_{ij}\,d_{ij})(\phi_{jm}\,d_{jm} - \phi_{im}\,d_{im})\right] \\
&\quad= (\phi_{ij}\,d_{ij})^2\,\mathrm{Var}[w] + \frac{\phi_{ij}\,d_{ij}}{N^2}\left(2(\phi_{ij}\,d_{ij}) - (N-2)I_1(d_{ij}, x)\right).
\end{aligned}
$$

情形 3： $(n \neq i,\ \ j,\ \ m = i)$

由于 n 与 m 之间具有对称性，因此可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sum_{n\neq i,j}(\phi_{jn}\,d_{jn} - \phi_{in}\,d_{in})(\phi_{ji}\,d_{ji} - \phi_{ii}\,d_{ii})\right] \\
&\quad= (\phi_{ij}\,d_{ij})^2\,\mathrm{Var}[w] - \frac{\phi_{ij}\,d_{ij}}{N^2}(N-2)I_1(d_{ij}, x).
\end{aligned}
$$

在这种情况下 其中 $n = i,\ \ j$ 项已被移除，因此无需单独考虑 .

情形 4： $(n \neq i,\ \ j,\ \ m = j)$

这与情形 3 相同。

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sum_{n\neq i,j}(\phi_{jn}\,d_{jn} - \phi_{in}\,d_{in})(\phi_{jj}\,d_{jj} - \phi_{ij}\,d_{ij})\right] \\
&\quad= (\phi_{ij}\,d_{ij})^2\,\mathrm{Var}[w] - \frac{\phi_{ij}\,d_{ij}}{N^2}(N-2)I_1(d_{ij}, x).
\end{aligned}
$$

情况 5： $(n \neq i,\ \ j,\ \ m = n)$

$$
\begin{aligned}
E &:= \mathbb{E}\Bigg[\sum_{n\neq i,j} (\omega_{jn}\phi_{jn}\, d_{jn} - \omega_{in}\phi_{in}\, d_{in})(\omega_{jn}\phi_{jn}\, d_{jn} - \omega_{in}\phi_{in}\, d_{in})\Bigg] \\
&= \mathbb{E}\Bigg[\sum_{n\neq i,j} (\omega_{jn}\phi_{jn}\, d_{jn} - \omega_{in}\phi_{in}\, d_{in})^2\Bigg] \\
&= (N-2)\mathbb{E}\Big[(\omega_{jn}\phi_{jn}\, d_{jn} - \omega_{in}\phi_{in}\, d_{in})^2\Big]\,.
\end{aligned}
$$

从这里开始，我们展开期望中的平方，并利用 ω 和意见之间的独立性，得到

$$
E = (N-2)\bigg(\mathbb{E}[\omega^2]\mathbb{E}\Big[(\phi_{jn}\, d_{jn})^2\Big] - 2\frac{1}{N^2}\mathbb{E}\Big[(\phi_{jn}\, d_{jn})(\phi_{in}\, d_{in})\Big] + \mathbb{E}[\omega^2]\mathbb{E}\Big[(\phi_{in}\, d_{in})^2\Big]\bigg)\,.
$$

注意，尽管已知 d_{ij} （因此也已知 ϕ_{ij}），$\phi_{jn}d_{jn}$ 和 $\phi_{in}d_{in}$ 仍是随机变量，且它们的分布不同（因为 x_j 和 x_i 不同）。再次使用 $\mathrm{E}[\omega^2] = \mathsf{Var}[\omega] + N^{-2}$ 并重新整理，得到

$$
\begin{aligned}
E &= (N-2)\bigg(\Big(\mathrm{Var}[w] + \frac{1}{N^2}\Big)\mathbb{E}\Big[(\phi_{jn}\, d_{jn})^2 + (\phi_{in}\, d_{in})^2\Big] - 2\frac{1}{N^2}\mathbb{E}\Big[(\phi_{jn}\, d_{jn})(\phi_{in}\, d_{in})\Big]\bigg) \\
&= (N-2)\bigg(\mathrm{Var}[w]\mathbb{E}\Big[(\phi_{jn}\, d_{jn})^2 + (\phi_{in}\, d_{in})^2\Big] + \frac{1}{N^2}\mathbb{E}\Big[(\phi_{jn}\, d_{jn})^2 + (\phi_{in}\, d_{in})^2 - 2(\phi_{jn}\, d_{jn})(\phi_{in}\, d_{in})\Big]\bigg)\,.
\end{aligned}
$$

现在，第二项同样可以写成一个平方，得到

$$
\begin{aligned}
E &= (N-2)\bigg(\mathrm{Var}[w]\mathbb{E}\Big[(\phi_{jn}\, d_{jn})^2 + (\phi_{in}\, d_{in})^2\Big] + \frac{1}{N^2}\mathbb{E}\Big[(\phi_{jn}\, d_{jn} - \phi_{in}\, d_{in})^2\Big]\bigg) \\
&= (N-2)\mathrm{Var}[w]\Big(J(x+d_{ij}) + J(x)\Big) + \frac{N-2}{N^2} I_2(d_{ij}, x)\,,
\end{aligned}
$$

其中

$$
J(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \Big(\phi(y-x)\,(y-x)\Big)^2\, dy\,.
$$

情况 6： $(n \neq i,\ \ j,\ \ m \neq i,\ \ j,\ \ n)$

当 $m \neq n,\ \ i,\ \ j$时，随机变量 $(\omega_{jn}\phi_{jn}\, d_{jn} - \omega_{in}\phi_{in}\, d_{in})$ 和 $(\omega_{jm}\phi_{jm}\, d_{jm} - \omega_{im}\phi_{im}\, d_{im})$ 立即不相关。因此，无需拆分任何项，我们可以直接计算

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Bigg[\sum_{n\neq i,j}\sum_{m\neq n,i,j} (\omega_{jn}\phi_{jn}\, d_{jn} - \omega_{in}\phi_{in}\, d_{in})(\omega_{jm}\phi_{jm}\, d_{jm} - \omega_{im}\phi_{im}\, d_{im})\Bigg] \\
&= \sum_{n\neq i,j}\sum_{m\neq n,i,j} \mathbb{E}[\omega_{jn}\phi_{jn}\, d_{jn} - \omega_{in}\phi_{in}\, d_{in}]\,\mathbb{E}[\omega_{jm}\phi_{jm}\, d_{jm} - \omega_{im}\phi_{im}\, d_{im}] \\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{n\neq i,j}\sum_{m\neq n,i,j} I_1(d_{ij}, x)^2 \\
&= \frac{(N-2)(N-3)}{N^2} I_1(d_{ij}, x)^2\,.
\end{aligned}
$$

综合以上，我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Bigg[\Big(\sum_{n=1}^{N} \phi_{jn}\, d_{jn} - \phi_{in}\, d_{in}\Big)\Big(\sum_{n=1}^{N} \phi_{jn}\, d_{jn} - \phi_{in}\, d_{in}\Big)\Bigg] \\
&= 2(\phi_{ij}\, d_{ij})^2\,\mathrm{Var}[w] + 2\frac{\phi_{ij}\, d_{ij}}{N^2}\Bigg(2(\phi_{ij}\, d_{ij}) - (N-2) I_1(d_{ij}, x)\Bigg)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2(\phi_{ij}\, d_{ij})^2 \operatorname{Var}[w] - 2\frac{\phi_{ij}\, d_{ij}}{N^2}(N-2) I_1(d_{ij}, x) \\
&+ (N-2)\operatorname{Var}[w]\Big(J(x+d_{ij}) + J(x)\Big) + \frac{1}{N^2}(N-2) I_2(d_{ij}, x) \\
&+ \frac{1}{N^2}(N-2)(N-3) I_1(d_{ij}, x)^2 \\
&= \Big(4(\phi_{ij}\, d_{ij})^2 + (N-2)\big(J(x+d_{ij}) + J(x)\big)\Big)\operatorname{Var}[w] \\
&+ \frac{4\phi_{ij}\, d_{ij}}{N^2}\Big(\phi_{ij}\, d_{ij} - (N-2) I_1(d_{ij}, x)\Big) + \frac{1}{N^2}(N-2) I_2(d_{ij}, x) + \frac{1}{N^2}(N-2)(N-3) I_1(d_{ij}, x)^2 .
\end{aligned}
$$

记

$$
\begin{aligned}
f(d_{ij}, x) &= (N-2)(N-3) I_1(d_{ij}, x)^2 + (N-2) I_2(d_{ij}, x) + 4(\phi_{ij} d_{ij})^2 - 4(\phi_{ij} d_{ij})(N-2) I_1(d_{ij}, x) , \\
g(d_{ij}, x) &= 4(\phi_{ij}\, d_{ij})^2 + (N-2)\big(J(x+d_{ij}) + J(x)\big) ,
\end{aligned}
$$

综上

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[v_{ij} \,|\, d_{ij}] &= \frac{1}{2-d_{ij}} \int_{-1}^{1-d_{ij}} I_1(d_{ij}, x) - \frac{2}{N}\Big(I_1(d_{ij}, x) + \phi_{ij}\, d_{ij}\Big)\, dx , \\
\mathbb{E}[v_{ij}^2 \,|\, d_{ij}] &= \frac{1}{2-d_{ij}} \int_{-1}^{1-d_{ij}} \frac{1}{N^2} f(x) + \operatorname{Var}[\omega] g(x)\, dx .
\end{aligned}
$$

由（10）可得

$$
\operatorname{Var}[\omega] \approx \frac{4-3p}{3N^2 p} ,
$$

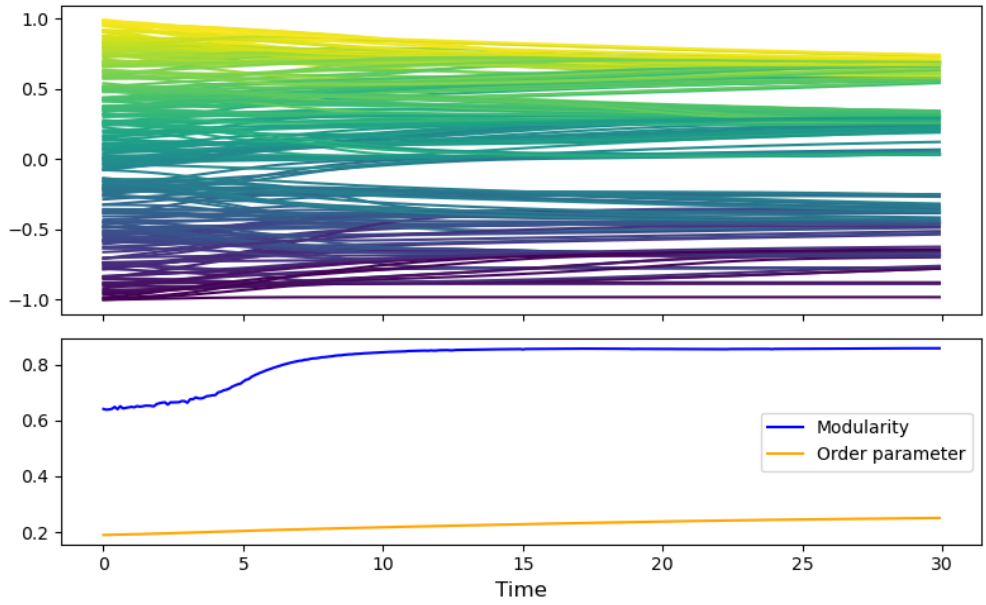
因此

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[v_{ij} \,|\, d_{ij}] &= \frac{1}{2-d_{ij}} \int_{-1}^{1-d_{ij}} I_1(d_{ij}, x) - \frac{2}{N}\Big(I_1(d_{ij}, x) + \phi_{ij}\, d_{ij}\Big)\, dx , \\
\mathbb{E}[v_{ij}^2 \,|\, d_{ij}] &= \frac{1}{2-d_{ij}} \int_{-1}^{1-d_{ij}} \frac{1}{N^2} f(x) + \frac{4-3p}{3pN^2} g(x)\, dx .
\end{aligned}
$$

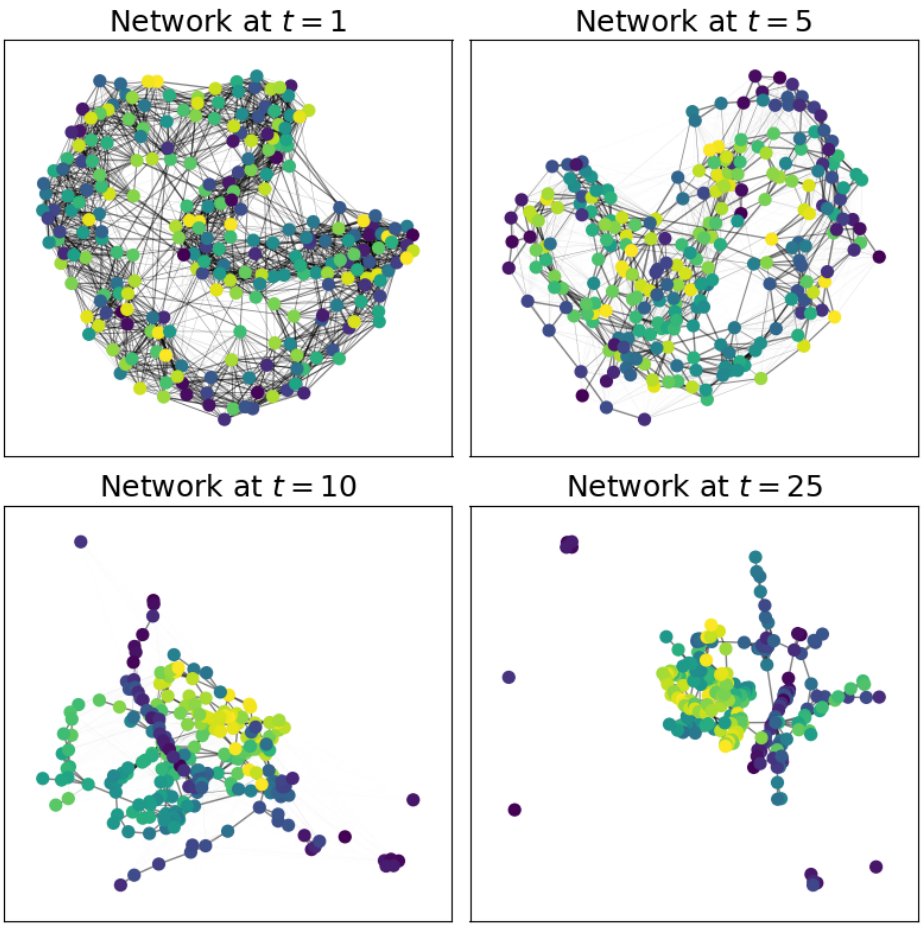
□

B 示例轨迹

下面给出使用不同随机网络模型生成 $w(0)$ 的图 1 的几个版本。与图 1 一样，这里采用指数交互函数。关于有界置信交互函数下动力学的详细探讨，见第4.2.2节。

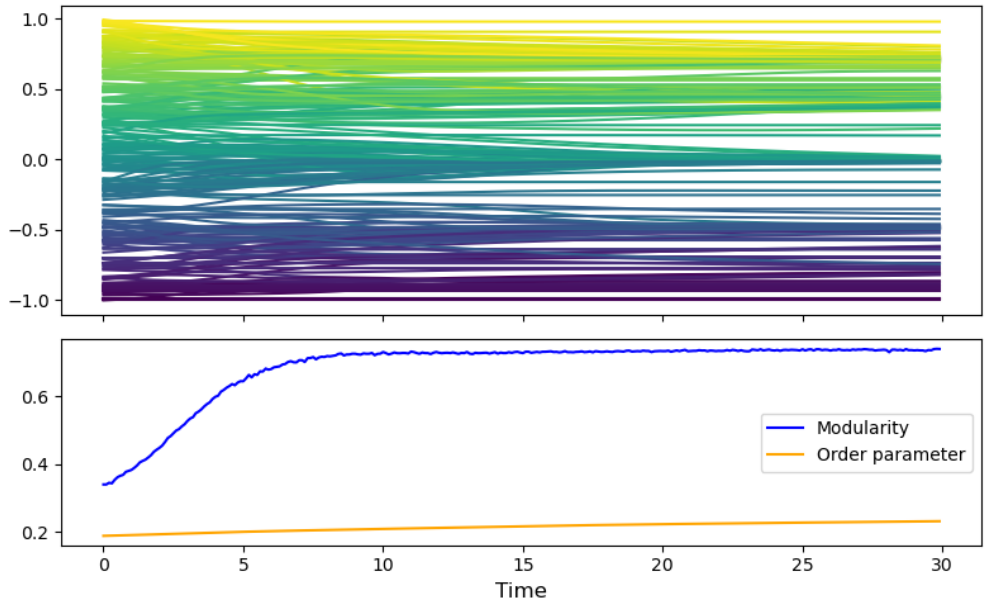


(a) 上图显示了意见随时间的轨迹，并根据初始意见着色。尽管形成了一些意见簇，但有许多个体变得孤立。下图显示了序参量和网络模块度随时间的变化。模块度初始较高，并在动力学开始时进一步上升，因为网络移除了许多边。

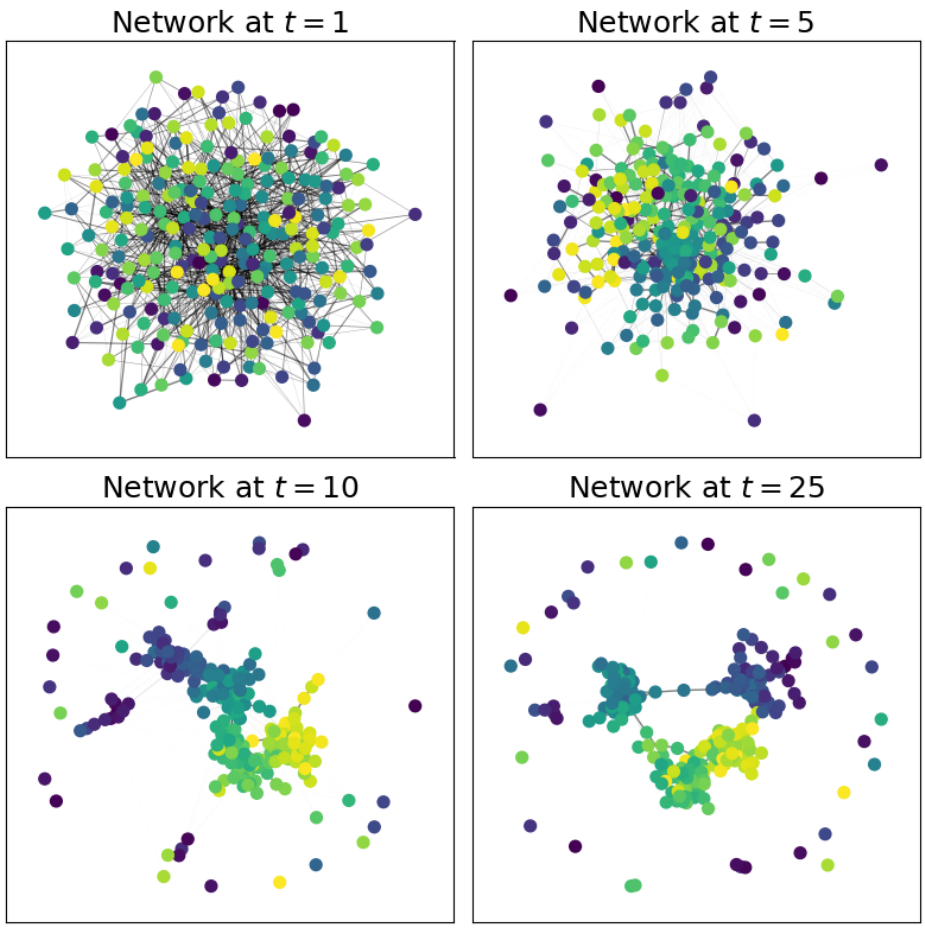


(b) 网络结构的快照。边的宽度根据边权重绘制；节点根据个体的初始意见着色。网络最初的环状结构逐渐分解为一组链。

图 8： 使用**WS初始网络**展示逻辑斯蒂权重动力学下的意见形成。设置的完整描述见第4.2.1节。

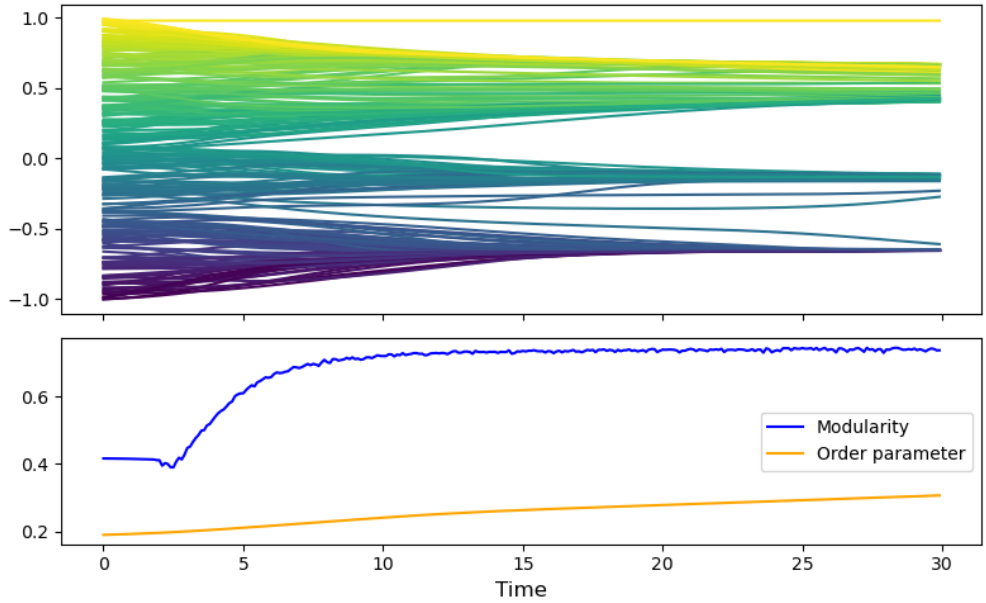


(a) 上方面板显示随时间变化的意见轨迹，并按初始意见着色。许多个体变得孤立，意见聚类极少。下方面板显示序参量和网络模块度随时间的变化。模块度从 $t = 0$ 持续上升至约 $t = 6$，此后趋于平稳。

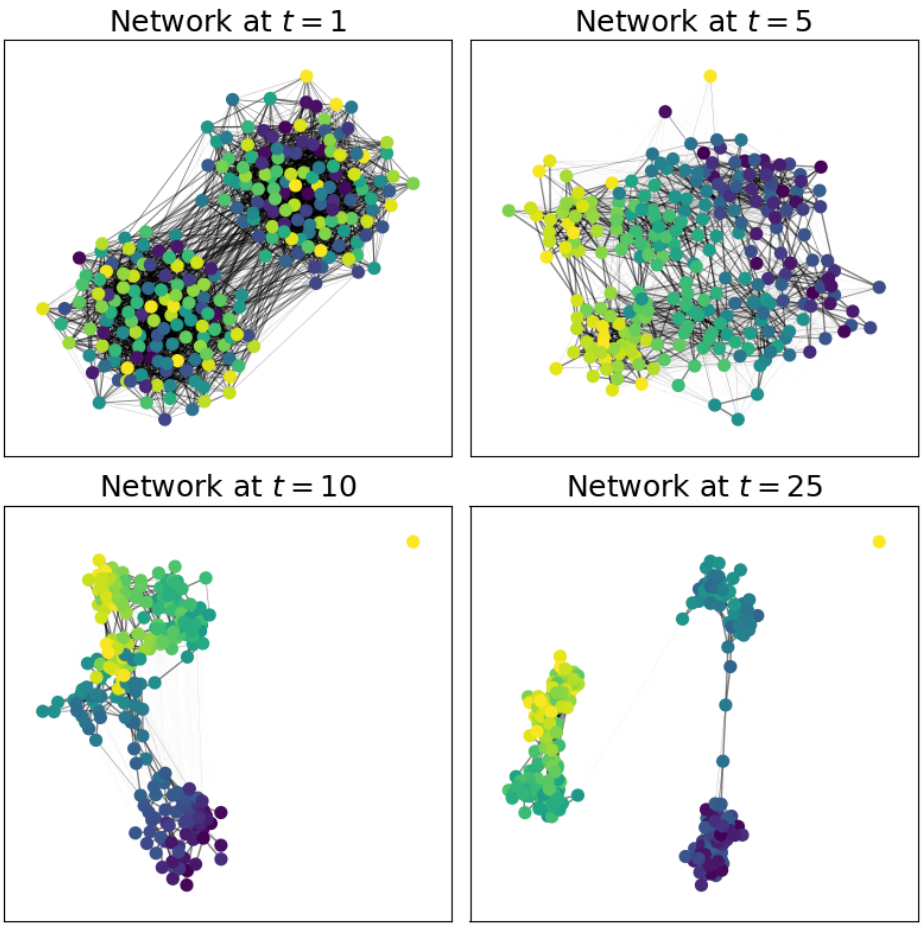


(b) 网络结构快照。边宽按边权重绘制；节点按个体的初始意见着色。该网络具有连接良好的中心，外围的边较少。在动力学过程中，这些外围边消失，从而产生孤立个体和三个中心簇。

图9：使用**BA初始网络**在逻辑斯蒂权重动力学下的意见形成演示。完整的设置描述见第4.2.1节。



(a) 上方面板显示随时间变化的意见轨迹，颜色按初始意见着色。随着权重动力学重新排列网络的社群，形成三个不同的簇。下方面板显示序参量和网络模块度随时间的变化。模块度最初为常数，在从两个社群转变为三个社群的过程中略有下降，随后再次上升。



(b) 网络结构快照。边宽按边权重绘制；节点按个体的初始意见着色。网络最初有两个清晰的社群。随着时间推移，这些预设社群根据个体意见被重新排列为三个社群。

图 10： 使用**SBM初始网络**在逻辑斯蒂权重动力学下进行意见形成的演示。完整的设置描述见第4.2.1节。