arXiv:2602.03739v1 [math.CT] 3 Feb 2026

幺半范畴中诱导函子的半可分性

LUCREZIA BOTTEGONI 和 ZHENBANGZUO

摘要。对于幺半范畴中的任意代数态射，我们给出了使其对应的诱导函子成为半可分函子的充分条件（若单位是左张量生成元，这些条件也是必要的）。在温和的假设下，我们证明，应用松幺半函子后，诱导函子的半可分性仍得以保持。对于幺半范畴中余代数态射对应的余诱导函子，我们也证明了类似的结果。作为应用，我们研究了双幺半范畴背景下（余）诱导函子组合的半可分性。

目录

1. 引言 1 2. 半可分函子的背景 3 3. 标量扩张函子 4 3.1. 诱导函子的半可分性 5 3.2. 示例 8 3.3. 幺半范畴中代数的张量函子 11 3.4. 由幺半函子变化的诱导函子 12 4. 余诱导函子 17 4.1. 余诱导函子的半可分性 18 4.2. 示例 19 4.3. 幺半范畴中余代数的张量函子 21 4.4. 由幺半函子变化的余诱导函子 22 5. 双幺半范畴中的半可分性结果 23 5.1. 诱导函子的组合 24 5.2. 余诱导函子的组合 26 参考文献 27

1. 引言

可分函子的概念由 [29], 引入，若干结果和应用例如在 [18]中有所描述。作为主要例子，给定一个环态射 $\varphi\colon R \to S$，标量限制函子 $\varphi_* : \mathcal{M}_S \to \mathcal{M}_R$ 是可分的，当且仅当相应的环扩张 S/R 是可分的；而其左伴随，即诱导函子 $\varphi^* = - \otimes_R S\colon \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}_S$，是可分的，当且仅当存在一个 R-双模态射 $E\colon S \to R$，使得 $E \circ \varphi = \mathrm{Id}_R$。在 [16,定理 3.6], 中，先前的刻画被推广到了幺半范畴中的代数扩张，其中单位对象是一个左 $\otimes$-生成元。

半可分函子在 [5] 中被定义为可分函子和自然满函子 [6] 的一种较弱概念。事实上，函子是可分的（分别地，自然满的），当且仅当它忠实（分别地，满）且半可分，参见 [5, 命题 1.3]。此外，Rafael 型定理[5, 定理 2.1] 通过伴随的（余）单位满足正则性条件，刻画了左（分别地，右）伴随函子的半可分性。

2020 数学主题分类。 主要分类 18A22；次要分类 18M05、18A40、18M50。
K关键词和短语。 半可分函子；幺半范畴；（余）诱导函子；双幺半范畴。

本文研究幺半范畴中的（余）代数态射所附带的（余）诱导函子的半可分性（和自然满性），其中该范畴具有余等化子（分别地，等化子）$(\mathcal{C},\ \otimes,\ 1)$。我们证明，给定代数态射 $\varphi:\ R\ \to\ S$ in $\mathcal{C}$，诱导函子$\varphi^*=-\otimes_R S\colon\ \mathcal{C}_R\to\mathcal{C}_S$ 是半可分的（分别地，自然满的），当且仅当 φ 作为 R-双模态射在 $\mathcal{C}$中是正则的（分别地，是分裂满态射），参见定理 3.5（分别地，命题 3.7 ）。若幺半单位 1 是左 $\otimes$- 生成元，则逆命题也成立。作为一个特例，我们得到 [5，命题 3.1] ，其中 $\mathcal{C}$ 是阿贝尔群范畴 $(\mathrm{Ab}\ \otimes_{\mathbb{Z}},\ \mathbb{Z})$。随后，我们为若干幺半范畴给出例子，例如集合范畴 $(\mathrm{Set}\ \times,\ \{0\})$ 、双代数 H 上左模的范畴 $({}_H\mathcal{M},\ \otimes,\ \Bbbk)$，以及 H 为可分 $\Bbbk$- 代数时的 H- 双模范畴 $({}_H\mathcal{M}_H,\ \otimes_H,\ H)$。

正如预期，对于带单位 u_A 的代数 A （其属于 $\mathcal{C}$），诱导函子 $u_A^*=-\otimes_1 A\colon\ \mathcal{C}_1\to\mathcal{C}_A$ 恰好是张量函子 $-\otimes A\colon\ \mathcal{C}\to\mathcal{C}_A$。在命题 3.20 中，我们刻画了后一个函子的半可分性，而无需对幺半范畴 $\mathcal{C}$ 作出额外假设。此外，在单位是左 $\otimes$- 生成元的阿贝尔幺半范畴中，对于具有像分解 $f=\varphi\circ\psi$ 的代数态射 f，我们证明：若诱导函子 f^* 半可分，则$\psi^*=-\otimes_R\mathrm{Im}(f)$ 自然满，且 $\varphi^*=-\otimes_{\mathrm{Im}(f)} S$ 可分，见推论 3.14。

接下来，我们探讨诱导函子的半可分性得以保持或反映的各种变化。我们主要关注通过幺半函子实现的变化，见命题 3.24、命题 3.25、命题 3.28 和命题 3.29。

对于具有等化子的幺半范畴中余代数所关联的余诱导函子，对偶结果同样成立。更具体地，给定余代数态射 $\psi:C\to D$ in $\mathcal{C}$，若 ψ 是 $\mathcal{C}$ 中的 D-双余模正则态射，则余诱导函子 $\psi^*=-\square_D C\colon\ \mathcal{C}^D\to\mathcal{C}^C$ 是半可分的，见定理 4.4。此外，在命题 4.5（分别为命题 4.6）中，我们证明，若 ψ 作为 $\mathcal{C}$ 中的 D- 双余模态射是分裂满态射（分别为分裂单态射），则 ψ^* 是可分的（分别为自然满的）。若 $\mathcal{C}$ 的单位对象 1 是左 $\otimes$-余生成元，则反向结论也成立。特别地，若 $\mathcal{C}$ 是 $\Bbbk$-向量空间的范畴，我们便得到已知的 [5, 命题 3.8], [19, 定理 2.7], 以及[6, 例 3.23 (1)]。我们还给出了集合范畴、环 R 上的双模范畴、双代数 H 上的左模范畴、以 Vec$_f$ 为元素的 n 乘 n 矩阵范畴等幺半范畴中的例子。

接下来，我们将关注双幺半范畴（$\mathcal{C},\ \circ,\ \bullet$）这一情形。给定两个代数态射 f_1, f_2 in $\mathcal{C}^\circ$（其单位是一个 $\circ$-生成元），且相应的诱导函子是半可分的（分别为可分的、自然满的），我们证明（$f_1\bullet f_2$）* 也具有半可分性（分别为可分性、自然满性），见命题 5.2。这一结果可应用于例如具有有限积的幺半范畴（推论 5.3）以及预编织幺半范畴（推论 5.4）。此外，对于范畴 $\mathcal{C}^\circ$ 中的代数 R, S ，若函子 $-\circ R:\ \mathcal{C}\ \to\ \mathcal{C}_R$,$-\circ S\colon\ \mathcal{C}\to\mathcal{C}_S$ 是半可分的，我们还研究 $-\circ(R\bullet S)\colon\ \mathcal{C}\to\mathcal{C}_{R\bullet S}$ 的半可分性，见命题 5.6。余归纳函子也有类似结果，见例如命题 5.9、命题 5.10。

本文的组织结构如下。第 2 节回顾有关半可分函子、可分函子和自然满函子的若干基本定义与结果。第 3 节研究幺半范畴中与代数态射相关联的诱导函子的半可分性。第 3.2 小节给出若干例子。作为一个特例，第 3.3 小节考察幺半范畴中与代数相关联的张量函子。第 3.4 小节汇集了由幺半函子变动的诱导函子的相关结果。第 4 节研究幺半范畴中与余代数态射相关联的余诱导函子的半可分性。最后，第 5 节给出双幺半范畴中（余）诱导函子的相关结果。

记号。给定范畴 $\mathcal{C}$中的一个对象 X ，其上的恒等态射记作 Id_X ，或简记为 X 。对于范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$，函子 $F\colon\ \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 表示一个协变函子。我们用 $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$表示 $\mathcal{C}$ 上的恒等函子。此外，我们用 K 表示一个交换含幺环，用 $\Bbbk$ 表示一个域。本文中的环（分别地， K-代数）指含幺结合环（分别地，K-代数）。环 R 上的左模范畴记作 ${}_R\mathcal{M}$。给定域上的余代数 C，其右 C-余模及其态射所构成的范畴记作 $\mathcal{M}^C$。对于幺半范畴 $\mathcal{C}$中的代数 A ，我们用 m_A 和 u_A 分别表示其乘法和单位，并用 ${}_A\mathcal{C}$ （分别地， $\mathcal{C}_A$）表示 A上的左模（分别地，右模）范畴。对于幺半范畴 $\mathcal{C}$中的余代数 C ，我们用 Δ_C 和 ε_C 分别表示其余乘法和余单位，并用 ${}^C\mathcal{C}$ （分别地， $\mathcal{C}^C$）表示

C上的左余模（分别地，右余模）范畴。若存在态射（分别地，自然变换） g 使得 $f \circ g \circ f = f$，则称态射（分别地，自然变换） f 为正则。

2. Background on semiseparable functors

设 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个函子，并考虑自然变换

$$\mathcal{F}: \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, F-),$$

定义为令 $\mathcal{F}_{X,\ X'}(f) = F(f)$，对任意 $f: X \to X'$属于 $\mathcal{C}$。

若存在自然变换 $\mathcal{P}: \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F-,\ F-) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\ -)$，使得

- $\mathcal{P} \circ \mathcal{F} = \mathrm{Id}$，则称 F为可分 [29];
- $\mathcal{F} \circ \mathcal{P} = \mathrm{Id}$，则称 F为自然满 [6];
- $\mathcal{F} \circ \mathcal{P} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F}$，那么 F称为半可分 [5]。

半可分性可以用来刻画可分函子和自然满函子，如下所示。

命题 2.1。 [5, 命题 1。3] 设 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个函子。那么，

$i)$ F 是可分的，当且仅当 F 是半可分且忠实的；$ii)$ F 是自然满的，当且仅当 F 是半可分且满的。

半可分函子在复合下不封闭，参见例如 [5, 例 3。3], 不过，在以下情形中，封闭性成立。

引理 2.2。 [5, 引理 1。12] 设 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 和 $G: \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ 是函子，并考虑复合 $G \circ F: \mathcal{C} \to \mathcal{E}$。

$i)$ 如果 F 是半可分的，且 G 是可分的，那么 $G \circ F$ 是半可分的。$ii)$ 如果 F 是自然满的，且 G 是半可分的，那么 $G \circ F$ 是半可分的。

可以为任意半可分函子附加一个合适的幂等自然变换，而它能判定该函子何时可分。

命题 2.3。 [5, 命题 1。4] 设 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个通过自然变换 $\mathcal{P}$ 的半可分函子。那么，存在唯一的幂等自然变换 $e: \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$，使得 $Fe = \mathrm{Id}_F$ 满足以下泛性质：若 f、g: $X \to Y$ 是态射，则 $Ff = Fg$ 当且仅当 $e_Y \circ f = e_Y \circ g$。具体而言， e 在各分量上的定义为 $e_X := \mathcal{P}_{X,\ X}(\mathrm{Id}_{FX})$。

推论 2.4。 [5, 推论 1。7] 设 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个半可分函子，且令 $e: \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ 为相应的自然变换。那么， F 可分，当且仅当 $e = \mathrm{Id}$。

可分函子的一个关键结果是***Rafael*** 定理 [31, 定理 1.2], 它根据（余）单位的分裂性质，刻画了具有伴随的函子的可分性。半可分性也满足 Rafael 型定理。

定理 2.5. [5, 定理 2.1] 设 $F \dashv G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 为一个伴随，其中单位为 $\eta: \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to GF$，余单位为 $\epsilon: FG \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$。则，

$i)$ F 是半可分的，当且仅当 η 是正则的；$ii)$ G 是半可分的，当且仅当 ϵ 是正则的。

若干半可分函子的例子见 [5, 第 3]节。我们回顾与环态射相关的标量扩张函子、与余代数态射相关的余诱导函子以及与余环相关的诱导函子的半可分性主要刻画。

命题 2.6. [5, 命题 3.1] 设 $\varphi: R \to S$ 是环的一个态射。那么，标量扩张函子 $\varphi^* = S \otimes_R (-): {}_R\mathcal{M} \to {}_S\mathcal{M}$ 是半可分的，当且仅当 φ 是 R-双模的正则态射，即存在 $E \in {}_R\mathrm{Hom}_R(S, R)$ 使得 $\varphi \circ E \circ \varphi = \varphi$，也就是说，$\varphi E(1_S) = 1_S$。

命题 2.7. [5, 命题 3.8] 设 $\psi: C \to D$ 是一个余代数态射。则余诱导函子 $\psi^* = (-)\square_D C: \mathcal{M}^D \to \mathcal{M}^C$ 是半可分的，当且仅当 ψ 是 D-双余模的正则态射，当且仅当存在一个 D-双余模态射 $\chi: D \to C$ 使得 $\varepsilon_C \circ \chi \circ \psi = \varepsilon_C$。

Pro命题 2.8. [5,定理 3.10] 设 $\mathcal{C}$ 是一个 R-余环。则下列各项等价。

(i) 诱导函子 $G := (-) \otimes_R \mathcal{C} : \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}^{\mathcal{C}}$ 是半可分的。*(ii)* 余环余单位 $\varepsilon_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to R$ 作为 R-双模的态射是正则的。*(iii)* 存在一个不变元 $z \in \mathcal{C}^R$ 使得 $\varepsilon_{\mathcal{C}}(z)\varepsilon_{\mathcal{C}}(c) = \varepsilon_{\mathcal{C}}(c)$（等价地，使得 $\varepsilon_{\mathcal{C}}(z)c = c$），对每个 $c \in \mathcal{C}$均成立。

在接下来的章节中，我们将研究幺半范畴中与（余）代数态射相关联的（余）诱导函子的半可分性。关于幺半范畴中的（余）代数的更多细节，请参阅 [2]。根据 Mac Lane 相干定理，不失一般性，我们通常假设幺半范畴是严格的。

3. 标量扩张函子

我们首先回顾 [16], [30, 第 3]节中的预备概念。设 $\mathcal{C}$ 是一个具有余等化子的幺半范畴。考虑 $\mathcal{C}$ 中的代数 A 、 $M \in \mathcal{C}_A$ 与 $X \in {}_A\mathcal{C}$，其结构态射分别为ν_M^A： $M \otimes A \to M$与 μ_X^A： $A \otimes X \to X$。设（$M \otimes_A X, q_{M,X}^A$）为 $\mathcal{C}$中平行态射 $\nu_M^A \otimes \mathrm{Id}_X$ 与$\mathrm{Id}_M \otimes \mu_X^A$ 的余等化子:

$$M \otimes A \otimes X \underset{\mathrm{Id}_M \otimes \mu_X^A}{\overset{\nu_M^A \otimes \mathrm{Id}_X}{\rightrightarrows}} M \otimes X \xrightarrow{q_{M,X}^A} M \otimes_A X. \tag{1}$$

˜对于 $\mathcal{C}$中的左 A-线性态射 f： $X \to Y$，设 f： $= M \otimes_A f$： $M \otimes_A X \to M \otimes_A Y$为 $\mathcal{C}$ 中使得

$$\tilde{f} q_{M,X}^A = q_{M,Y}^A (\mathrm{Id}_M \otimes f).$$

Let g： $M \to N$在 $\mathcal{C}_A$ 与 $Y \in {}_A\mathcal{C}$中。我们用ˆg： $= g \otimes_A Y$： $M \otimes_A Y \to N \otimes_A Y$表示该唯一 u射在 $\mathcal{C}$ 中，使得

$$\hat{g} q_{M,Y}^A = q_{N,Y}^A (g \otimes \mathrm{Id}_Y).$$

对于 $M \in \mathcal{C}_A$、 $X \in \mathcal{C}$、 $Y \in {}_A\mathcal{C}$，存在典范自然同构 Υ_M、 $\Upsilon_{M,\ X}$、 Υ'_Y:

- Υ_M： $M \otimes_A A \to M$，由$\Upsilon_M q_{M,\ A}^A = \nu_M^A$唯一确定;
- $\Upsilon_{M,\ X}$： $M \otimes_A (A \otimes X) \to M \otimes X$，由$\Upsilon_{M,\ X} q_{M,\ A\otimes X}^A = \nu_M^A \otimes \mathrm{Id}_X$唯一确定;
- Υ'_Y： $A \otimes_A Y \to Y$，由$\Upsilon'_Y q_{A,\ Y}^A = \mu_Y^A$唯一确定。

可以验证

$$\Upsilon_M^{-1} = q_{M,A}^A (\mathrm{Id}_M \otimes u_A); \quad \Upsilon_Y'^{-1} = q_{A,Y}^A (u_A \otimes \mathrm{Id}_Y); \quad \Upsilon_{M,X}^{-1} = q_{M,A\otimes X}^A (\mathrm{Id}_M \otimes u_A \otimes \mathrm{Id}_X).$$

回忆一下， X 的对象 $\mathcal{C}$ 称为右余平坦（分别地，左余平坦），如果函子 $X \otimes -$ （分别地， $- \otimes X$）保持余等化子。 $\mathcal{C}$ 的对象称为余平坦，如果它既是左余平坦的，也是右余平坦的。

设 A， R 是 $\mathcal{C}$中的代数。根据 [14, 引理 2.4] ，我们有:

i) 若 A 是右余平坦的，则对任意 $X \in {}_A\mathcal{C}_R$ 和 $Y \in {}_R\mathcal{C}$，由 $\mu_{X\otimes_R Y}^A(\mathrm{Id}^A \otimes q_{X,Y}^R) = q_{X,Y}^R($ $\mu_X^A \otimes \mathrm{Id}_Y)$唯一确定的态射 $\mu_{X\otimes_R Y}^A$: $A \otimes (X \otimes_R Y) \to X \otimes_R Y$在$X \otimes_R Y$ 上定义了一个 $\mathcal{C}$中的左 A-模结构; *ii*) 若 A 是左余平坦的，则对任意 $X \in \mathcal{C}_R$ 和 $Y \in {}_R\mathcal{C}_A$，由 $\nu_{X\otimes_R Y}^A(q_{X,Y}^R \otimes \mathrm{Id}_A)$ $= q_{X,Y}^R(\mathrm{Id}_X \otimes \nu_Y^A)$唯一确定的态射 $\nu_{X\otimes_R Y}^A$: $(X \otimes_R Y) \otimes A \to X \otimes_R Y$在 $X \otimes_R Y$上定义了一个 $\mathcal{C}$中的右 A-模结构。

定义 3.1。 [16, 定义 3.1] 设 $\mathcal{C}$ 为一个幺半范畴。若对象 P 属于 $\mathcal{C}$ ，则称其为 $\mathcal{C}$ 的左$\otimes$-生成元，如果对于我们在 $\mathcal{C}$ 中考虑的任意两个态射 f， g： $Y \otimes Z \to W$ ，只要$f(\varepsilon \otimes \mathrm{Id}_Z) = g(\varepsilon \otimes \mathrm{Id}_Z)$，对所有 ε: $P \to Y$属于 $\mathcal{C}$均成立，则有 $f = g$。

右 $\otimes$-生成元的概念可以对称地定义。我们将同时为左、右 $\otimes$-生成元的对象称为双侧 $\otimes$-生成元。在上述定义中取 $Z = 1$ ，可得幺半范畴 $\mathcal{C}$ 的左 $\otimes$-生成元必然是 $\mathcal{C}$的生成元。

本节中，除非另有说明，我们总是假设幺半范畴具有余等化子，且其中的对象都是余平坦的。

3.1. 诱导函子的半可分性。 设 $\varphi\colon R \to S$ 是 $\mathcal{C}$中的一个代数态射。注意， S 成为一个 R-双模，其 R-模结构分别由 $m_S(\varphi \otimes \mathrm{Id}_S)$ 和 $m_S(\mathrm{Id}_S \otimes \varphi)$ 给出。考虑标量限制函子 $\varphi_*\colon \mathcal{C}_S \to \mathcal{C}_R$ 及其左伴随，即诱导函子

$$\varphi^* := - \otimes_R S : \mathcal{C}_R \to \mathcal{C}_S, \quad X \mapsto X \otimes_R S, \quad f \mapsto \hat{f},$$

其中， $X \otimes_R S$ 的右 S-模结构由 m_S诱导。该伴随的单位和余单位分别为

$$\eta_X := q^R_{X,S}(\mathrm{Id}_X \otimes u_S) : X \to X \otimes_R S, \quad \epsilon_M := \overline{\nu^S_M} : M \otimes_R S \to M,$$

其中，后者由$\nu^S_M q^R_{M,\ S} = \nu^S_M$唯一确定。

注 3.2。 若 $\psi\colon L \to R$和 $\varphi\colon R \to S$是 $\mathcal{C}$中的代数态射，则 $\varphi^* \circ \psi^* \cong (\varphi \circ \psi)^*$。事实上，根据 [10, 命题 3.21], $(\varphi \circ \psi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$是 $\varphi^* \circ \psi^*$的右伴随。同时，我们有伴随$(\varphi \circ \psi)^* \dashv (\varphi \circ \psi)_*$，因此 $\varphi^* \circ \psi^* \cong (\varphi \circ \psi)^*$。

由于 φ_* 忠实，根据命题 2.1，它是半可分的当且仅当它是可分的。接下来，我们要研究 φ^* 的半可分性。我们回顾一下， φ^* 的可分性在 [16] 中被刻画如下。

定理 3.3. [16, 定理 3.6] 设 $\mathcal{C}$ 是一个幺半范畴，且 1 是左 $\otimes$-生成元。考虑代数态射 $\varphi\colon R \to S$，其中 $\mathcal{C}$。那么，诱导函子 $\varphi^* = -\otimes_R S\colon \mathcal{C}_R \to \mathcal{C}_S$ 是可分的，当且仅当存在一个 R-双模态射 $E\colon S \to R$ ，其中 $\mathcal{C}$ ，使得 $Eu_S = u_R$ （等价地， $E \circ \varphi = \mathrm{Id}_R$ ）。

前述结果证明中的一个主要要素是下面这个引理。

引理 3.4. [16, 引理 3.3] 设单位对象 1 是 $\mathcal{C}$ 的左 $\otimes$-生成元，并设 $\varphi\colon R \to S$ 是 $\mathcal{C}$ 中的代数态射。考虑由 φ 诱导的标量限制函子 $\varphi_*\colon \mathcal{C}_S \to \mathcal{C}_R$ 和诱导函子 $\varphi^* : \mathcal{C}_R \to \mathcal{C}_S$。那么，存在一个双射

$$\mathrm{Nat}(\varphi_*\varphi^*, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}_R}) \cong {}_R\mathrm{Hom}_R(S, R).$$

现在我们刻画 φ^* 的半可分性。

定理 3.5。 设 $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ 是一个幺半范畴。设 $\varphi\colon R \to S$是 $\mathcal{C}$ 中的一个代数态射。那么，以下断言等价:

(i) φ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个 R-双模态射正则，即存在一个 R-双模态射$E\colon S \to R$，它属于 $\mathcal{C}$，且满足 $\varphi \circ E \circ \varphi = \varphi$; (ii) 存在一个 R-双模态射 $E\colon S \to R$，它属于 $\mathcal{C}$，且满足 $\varphi E u_S = u_S$。

若前述等价条件之一成立，则

(iii) *the induction functor* $\varphi^* : \mathcal{C}_R \to \mathcal{C}_S$ *is semiseparable.*

此外，若1 是 $\mathcal{C}$ 中的左 $\otimes$-生成元，则(iii)等价于(i) 和(ii)。

证明。 我们证明 (i) 等价于 (ii)。一方面，由于 $\varphi u_R = u_S$，由 $\varphi E \varphi = \varphi$ 可得 $\varphi E u_S = \varphi E \varphi u_R = \varphi u_R = u_S$。另一方面，假设 $\varphi E u_S = u_S$。那么，

$$\begin{aligned}\varphi = m_S(\varphi \otimes u_S) &= m_S(\varphi \otimes \varphi E u_S) = \varphi m_R(\mathrm{Id}_R \otimes E)(\mathrm{Id}_R \otimes u_S) \\ &= \varphi E \mu^R_S(\mathrm{Id}_R \otimes u_S) = \varphi E m_S(\varphi \otimes \mathrm{Id}_S)(\mathrm{Id}_R \otimes u_S) = \varphi E \varphi.\end{aligned}$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$. 根据定理 2.5， φ^* 是半可分的，当且仅当存在一个自然变换 $\nu \in \mathrm{Nat}(\varphi_*\varphi^*, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}_R})$，使得 $\eta \circ \nu \circ \eta = \eta$。给定满足 $\varphi E u_S = u_S$ 的 $E \in {}_R\mathrm{Hom}_R(S, R)$，对每个 $M \in \mathcal{C}_R$ 定义，

$$\nu_M := \Upsilon_M \tilde{E} : M \otimes_R S \to M, \tag{2}$$

如引理 3.4 的证明中所述，其中 $\tilde{E}$ 是满足 $\tilde{E}q^R_{M,S} = q^R_{M,R}(\mathrm{Id}_M \otimes E)$ 的态射，而 Υ_M 是满足 $\Upsilon_M q^R_{M,R} = \nu^R_M$ 的同构。于是，我们得到

$$\begin{aligned}
\eta_M\nu_M\eta_M &= \eta_M\Upsilon_M\tilde{E}\eta_M = \eta_M\Upsilon_M\tilde{E}q^R_{M,S}(\mathrm{Id}_M \otimes u_S) = \eta_M\Upsilon_M q^R_{M,R}(\mathrm{Id}_M \otimes Eu_S)\\
&= q^R_{M,S}(\mathrm{Id}_M \otimes u_S)\nu^R_M(\mathrm{Id}_M \otimes Eu_S) = q^R_{M,S}(\mathrm{Id}_M \otimes u_S)(\nu^R_M \otimes \mathrm{Id}_1)(\mathrm{Id}_M \otimes Eu_S \otimes \mathrm{Id}_1)\\
&= q^R_{M,S}(\nu^R_M \otimes \mathrm{Id}_S)(\mathrm{Id}_M \otimes Eu_S \otimes u_S) = q^R_{M,S}(\mathrm{Id}_M \otimes \mu^R_S)(\mathrm{Id}_M \otimes Eu_S \otimes u_S)\\
&= q^R_{M,S}(\mathrm{Id}_M \otimes m_S(\varphi \otimes \mathrm{Id}_S))(\mathrm{Id}_M \otimes Eu_S \otimes u_S)\\
&= q^R_{M,S}(\mathrm{Id}_M \otimes m_S)(\mathrm{Id}_M \otimes \varphi Eu_S \otimes u_S)\\
&= q^R_{M,S}(\mathrm{Id}_M \otimes m_S)(\mathrm{Id}_M \otimes u_S \otimes u_S) = q^R_{M,S}(\mathrm{Id}_M \otimes u_S) = \eta_M.
\end{aligned}$$

因此，φ^* 是半可分的。

$(iii) \Rightarrow (i)$。假设 1 是一个左 $\otimes$-生成元。给定 $\nu \in \mathrm{Nat}(\varphi_*\varphi^*, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}_R})$ 使得 $\eta\nu\eta = \eta$，我们考虑与之对应的 $E \in {}_R\mathrm{Hom}_R(S, R)$，如引理 3.4 中所述，其定义为 $E = \nu_R\Upsilon'^{-1}_S$。回顾 $\Upsilon'_S q^R_{R,S} = \mu^R_S$。我们注意到，$\varphi = \Upsilon'_S\eta_R$ 作为 $\varphi = m_S(\varphi \otimes u_S) = m_S(\varphi \otimes \mathrm{Id}_S)(\mathrm{Id}_R \otimes u_S) = \mu^R_S(\mathrm{Id}_R \otimes u_S) = \Upsilon'_S q^R_{R,S}(\mathrm{Id}_R \otimes u_S) = \Upsilon'_S\eta_R$。于是，

$$\varphi E\varphi = \varphi\nu_R\Upsilon'^{-1}_S\varphi = \varphi\nu_R\Upsilon'^{-1}_S\Upsilon'_S\eta_R = \varphi\nu_R\eta_R = \Upsilon'_S\eta_R\nu_R\eta_R = \Upsilon'_S\eta_R = \varphi. \qquad \square$$

注 3.6。如果 φ 作为 $\mathcal{C}$ 中经由 $E : S \to R$ 的一个 R-双模态射是正则的，那么与半可分函子 φ^* 相关联的幂等自然变换在各分量上由下式给出

$$e_M = \nu_M\eta_M = \Upsilon_M\tilde{E}q^R_{M,S}(\mathrm{Id}_M \otimes u_S) = \Upsilon_M q^R_{M,R}(\mathrm{Id}_M \otimes Eu_S) = \nu^R_M(\mathrm{Id}_M \otimes Eu_S), \tag{3}$$

对每个 $M \in \mathcal{C}_R$。

在下一个结果中，我们刻画 φ^* 的自然满性。

命题 3.7。设 $\mathcal{C}$ 是一个幺半范畴。设 φ: $R \to S$ 是 $\mathcal{C}$中的一个代数态射。那么，以下断言等价:

(i) φ 是 $\mathcal{C}$中的一个 R-双模分裂满态射，也就是说，存在一个 R-双模态射E: $S \to R$，它属于 $\mathcal{C}$，使得 $\varphi \circ E = \mathrm{Id}$;$(ii)$ φ 是一个满态射，并且存在一个 R-双模态射 E: $S \to R$，它属于 $\mathcal{C}$，使得$\varphi Eu_S = u_S$。

如果前述等价条件之一成立，那么

(iii) 诱导函子 φ^* 是自然满的。

此外，如果1 是 $\mathcal{C}$中的左 $\otimes$-生成元，那么(iii)等价于(i)、(ii)。

证明。$(i) \Rightarrow (ii)$。显然。

$(ii) \Rightarrow (i)$。如果存在一个 R-双模态射 E: $S \to R$ （属于 $\mathcal{C}$），使得 $\varphi Eu_S = u_S$，那么根据定理 3.5，$\varphi E\varphi = \varphi$。由于 φ 是满态射，因此我们有 $\varphi \circ E = \mathrm{Id}_S$。

$(i) \Rightarrow (iii)$。根据 [6, 定理 2.，当且仅当存在自然变换 $\nu \in \mathrm{Nat}(\varphi_*\varphi^*, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}_R})$，使得 $\eta \circ \nu = \mathrm{Id}$ 时，6] φ^* 自然满。给定 $E \in {}_R\mathrm{Hom}_R(S, R)$，使得$\varphi \circ E = \mathrm{Id}$，对每个 $M \in \mathcal{C}_R$，如式 (2) 定义 ν_M。于是我们有

$$\begin{aligned}
\eta_M\nu_M q^R_{M,S} &= q^R_{M,S}(\mathrm{Id}_M \otimes u_S)\Upsilon_M\tilde{E}q^R_{M,S} = q^R_{M,S}(\mathrm{Id}_M \otimes u_S)\Upsilon_M q^R_{M,R}(\mathrm{Id}_M \otimes E)\\
&= q^R_{M,S}(\mathrm{Id}_M \otimes u_S)\nu^R_M(\mathrm{Id}_M \otimes E) = q^R_{M,S}(\mathrm{Id}_M \otimes u_S)(\nu^R_M \otimes \mathrm{Id}_1)(\mathrm{Id}_M \otimes E \otimes \mathrm{Id}_1)\\
&= q^R_{M,S}(\nu^R_M \otimes \mathrm{Id}_S)(\mathrm{Id}_M \otimes \mathrm{Id}_R \otimes u_S)(\mathrm{Id}_M \otimes E \otimes \mathrm{Id}_1)\\
&= q^R_{M,S}(\mathrm{Id}_M \otimes \mu^R_S)(\mathrm{Id}_M \otimes E \otimes u_S) = q^R_{M,S}(\mathrm{Id}_M \otimes m_S(\varphi \otimes \mathrm{Id}_S))(\mathrm{Id}_M \otimes E \otimes u_S)\\
&= q^R_{M,S}(\mathrm{Id}_M \otimes m_S)(\mathrm{Id}_M \otimes \varphi E \otimes u_S) = q^R_{M,S}(\mathrm{Id}_M \otimes m_S)(\mathrm{Id}_M \otimes \mathrm{Id}_S \otimes u_S) = q^R_{M,S}.
\end{aligned}$$

由于 $q^R_{M,S}$ 是满态射，因此得到 $\eta_M\nu_M = \mathrm{Id}_{M\otimes_R S}$。

$(iii) \Rightarrow (i)$。给定 $\nu \in \mathrm{Nat}(\varphi_*\varphi^*, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}_R})$ 使得 $\eta\nu = \mathrm{Id}$，我们考虑相应的$E \in {}_R\mathrm{Hom}_R(S, R)$，其由 $E = \nu_R\Upsilon'^{-1}_S$ 给出。由定理 3.5 的证明可知，$\varphi = \Upsilon'_S\eta_R$。于是，

$$\varphi E = \Upsilon'_S\eta_R\nu_R\Upsilon'^{-1}_S = \Upsilon'_S\Upsilon'^{-1}_S = \mathrm{Id}. \qquad \square$$

推论 3.8。 设 $\varphi:\ R\to S$ 是幺半范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个代数态射，且单位是一个左 $\otimes$-生成元。那么，诱导函子 φ^* 自然满，当且仅当 φ^* 是半可分的且 φ是满态射。同样地， φ^* 可分，当且仅当 φ^* 半可分且φ 是单态射。

证明。 自然满情形由命题 3.7 和定理 3.5 得出。可分情形由定理 3.3 和定理 3.5 得出。□

注 3.9。 给定代数态射 φ: $R\to S$ in $\mathcal{C}$，还可以考虑左模范畴之间的诱导函子 $\varphi^*=S\otimes_R-:\ {}_R\mathcal{C}\to{}_S\mathcal{C}$，其定义为 $X\mapsto S\otimes_R X$,$f\mapsto S\otimes_R f$。可以证明，定理 3.5 中的 (i) 蕴含 $\varphi^*:\ {}_R\mathcal{C}\to{}_S\mathcal{C}$ 是半可分的。如果进一步假设 1 是右 $\otimes$-生成元，则逆命题也成立。因此，如果 1 是双侧$\otimes$-生成元，那么 $S\otimes_R-:\ {}_R\mathcal{C}\to{}_S\mathcal{C}$ 是半可分的，当且仅当 $-\otimes_R S:\ \mathcal{C}_R\to\mathcal{C}_S$ 也是半可分的。此外，可分情形和自然满情形也有类似结论。

注 3.10. 设 $\mathcal{C}$ 是一个幺半范畴，其中单位对象不一定是左 $\otimes$-生成元。由引理 3.4 和定理 3.3 的证明可知，若 φ^* 可分，则存在 $E\in \mathrm{Hom}_R(S,R)$ 属于 $\mathcal{C}$，使得 $E\varphi=\mathrm{Id}$，即 $Eu_S=u_R$。类似地，当φ^* 半可分（分别地，自然满）时，存在一个态射 $E\in \mathrm{Hom}_R(S,R)$ 属于 $\mathcal{C}$，使得 $\varphi E\varphi=\varphi$ （分别地， $\varphi E=\mathrm{Id}$）。此外，若存在一个 R-双模态射 $E:\ S\to R$ 属于 $\mathcal{C}$，使得 $E\varphi=\mathrm{Id}_R$，则 φ^* 可分。

我们注意到，对于定理 3.5 中的（iii）推出（i），左 $\otimes$-生成元条件并非总是必要的，正如下一个例子所示。

例 3.11. 设 H 是域 $\Bbbk$ 上的双代数。考虑右 H-模的范畴 $(\mathcal{M}_H,\otimes_\Bbbk,\Bbbk)$。一般而言，单位 $\Bbbk$ 不是 $\mathcal{M}_H$ 中的生成元，因此它不是左 $\otimes$-生成元。设$\varphi:\ R\to S$ 是 $\mathcal{M}_H$ 中的代数态射。由注 3.10 可知，若 φ^* 是半可分的，则 $E=\nu_R\Upsilon_S'^{-1}=\nu_R q^R_{R,S}(u_R\otimes\mathrm{Id}_S):\ S\to R$ 属于 $\mathrm{Hom}_R(S,R)$，其中 ν 属于 $\mathrm{Nat}(\varphi_*\varphi^*,\mathrm{Id}_{\mathcal{C}_R})$，且满足 $\eta\circ\nu\circ\eta=\eta$。更明确地，对任意 s 属于 S，都有 $E(s)=\nu_R(1_R\otimes_R s)$。我们证明 E 是左 R-线性的。考虑 $\xi:\ \Bbbk\to R$, $\xi(k)=k\xi(1)=kx$，其中 $x:=\xi(1)\in R$，且 $f_\xi:\ R\to R$,$r\mapsto\xi(1)r=xr$。注意到 $f_\xi\in\mathcal{M}_H$，因为 $f_\xi(rh)=xrh=f_\xi(r)h$。于是，由 $f_\xi\nu_R=\nu_R(f_\xi\otimes_R S)$ 可得 $E(xs)=\nu_R(1_R\otimes_R xs)=\nu_R(x\otimes_R s)=\nu_R(f_\xi\otimes_R S)(1\otimes_R s)=f_\xi\nu_R(1_R\otimes_R s)=xE(s)$。

设 $\mathcal{C}$ 是一个右闭幺半范畴，且 $\varphi:\ R\to S$ 是 $\mathcal{C}$ 中的代数态射。通过将 [30, 推论 3.8] 推广到右模范畴，由于 S 属于 ${}_S\mathcal{C}_R$，它诱导出函子$\varphi^!:=[S,-]_R:\ \mathcal{C}_R\to\mathcal{C}_S$。此外，根据 [30, 命题 3.10], ，对任意 $M\in\mathcal{C}_S$、 $N\in\mathcal{C}_R$，都有自然同构 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(M,\ [S,N]_R)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_R}(M\otimes_S S,\ N)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_R}(\varphi_*(M)\ N)$，因此$\varphi^!$ 是标量限制函子 $\varphi_*:\mathcal{C}_S\to\mathcal{C}_R$ 的右伴随。于是， $\varphi^*\dashv\varphi_*\dashv\varphi^!$ 构成一个伴随三元组。根据 [5, 命题 2.19] ， $\varphi^!$ 是半可分（分别地，可分、自然满），当且仅当 φ^*也是如此。因此，我们得到以下推论。

推论 3.12. 设$(\mathcal{C},\otimes,1)$ 是一个右闭幺半范畴。设 $\varphi:\ R\to S$是 $\mathcal{C}$中的一个代数态射。若定理 *3.5* 中的(i) 或(ii) 成立，则 $\varphi^!$ 是半可分的。此外，若1是 $\mathcal{C}$中的左 $\otimes$-生成元，则反向结论也成立。

现在，我们将注意力转向阿贝尔幺半范畴。这里，阿贝尔幺半范畴是指其本身为阿贝尔范畴且张量函子为加性的幺半范畴。回顾 [5, 推论 1.16]，函子是半可分的，当且仅当它可分解为 $S\circ N$，其中 S是可分函子，而 N 是自然满函子。众所周知，阿贝尔范畴中的任意态射都有像分解，参见例如 [11, 定理 1.5.5]。这两个事实引出了一个自然的问题：像分解能否导出半可分诱导函子的分解，使其成为一个自然满诱导函子后接一个可分诱导函子的复合？当范畴是阿贝尔幺半范畴、单位是左 $\otimes$-生成元且张量函子右正合时，答案是肯定的。

首先，我们证明下面的引理。

引理 3.13。 设 $(\mathcal{C},\otimes,1)$ 是一个张量积右正合的阿贝尔幺半范畴，且 $f:\ R\to S$ 是 $\mathcal{C}$中的代数态射。考虑 $f=\varphi\circ\psi$ 在 $\mathcal{C}$中的像分解。那么，$\mathrm{Im}(f)$ 是 $\mathcal{C}$中的一个代数，且 $\psi:\ R\to\mathrm{Im}(f)$和 $\varphi:\ \mathrm{Im}(f)\to S$是$\mathcal{C}$中的代数态射。

证明。 由于张量积右正合，我们知道 $\psi\otimes\psi$ 是一个满态射。考虑 φ的余核 $\pi: S\to \mathrm{Coker}(\varphi)$。由于

$$\pi\circ m_S\circ(\varphi\otimes\varphi)(\psi\otimes\psi)=\pi\circ m_S\circ(f\otimes f)=\pi\circ f\circ m_R=\pi\circ\varphi\circ\psi\circ m_R=0,$$

我们得到 $\pi m_S(\varphi\otimes\varphi)=0$。注意，$\mathrm{Ker}(\pi)\cong\mathrm{Im}(\varphi)=\mathrm{Im}(f)$。因此，根据核的泛性质，存在唯一的 $m_{\mathrm{Im}(f)}\colon \mathrm{Im}(f)\otimes\mathrm{Im}(f)\to\mathrm{Im}(f)$，使得 $\varphi\circ m_{\mathrm{Im}(f)}=m_S\circ(\varphi\otimes\varphi)$。由此，根据结合律可得 $m_{\mathrm{Im}(f)}\circ(m_{\mathrm{Im}(f)}\otimes\mathrm{Id}^{\mathrm{Im}(f)})=m_{\mathrm{Im}(f)}\circ(\mathrm{Id}_{\mathrm{Im}(f)}\otimes m_{\mathrm{Im}(f)})$
m_S 的，并且由于 φ是单态射。事实上，

$$\begin{aligned}\varphi m_{\mathrm{Im}(f)}(m_{\mathrm{Im}(f)}\otimes\mathrm{Id}_{\mathrm{Im}(f)})&=m_S(\varphi\otimes\varphi)(m_{\mathrm{Im}(f)}\otimes\mathrm{Id}_{\mathrm{Im}(f)})=m_S(\varphi m_{\mathrm{Im}(f)}\otimes\varphi)\\&=m_S(m_S(\varphi\otimes\varphi)\otimes\varphi)=m_S(m_S\otimes\mathrm{Id}_S)(\varphi\otimes\varphi\otimes\varphi)\\&=m_S(\mathrm{Id}_S\otimes m_S)(\varphi\otimes\varphi\otimes\varphi)=m_S(\varphi\otimes m_S(\varphi\otimes\varphi))\\&=m_S(\varphi\otimes\varphi m_{\mathrm{Im}(f)})=m_S(\varphi\otimes\varphi)(\mathrm{Id}_{\mathrm{Im}(f)}\otimes m_{\mathrm{Im}(f)})\\&=\varphi m_{\mathrm{Im}(f)}(\mathrm{Id}_{\mathrm{Im}(f)}\otimes m_{\mathrm{Im}(f)}).\end{aligned}$$

定义 $u_{\mathrm{Im}(f)}:=\psi\circ u_R\colon 1\to\mathrm{Im}(f)$。注意，$u_S=f\circ u_R=\varphi\circ\psi\circ u_R=\varphi\circ u_{\mathrm{Im}(f)}$。我们考察 $\varphi\circ m_{\mathrm{Im}(f)}\circ(u_{\mathrm{Im}(f)}\otimes\mathrm{Id}^{\mathrm{Im}(f)})=m_S\circ(\varphi\otimes\varphi)\circ(u_{\mathrm{Im}(f)}\otimes\mathrm{Id}^{\mathrm{Im}(f)})=m_S\circ((\varphi\circ u_{\mathrm{Im}(f)})\otimes\varphi)=m_S\circ(u_S\otimes\mathrm{Id}_S)(\mathrm{Id}_1\otimes\varphi)=\varphi$。由于 φ 是单态射，这意味着 $m_{\mathrm{Im}(f)}\circ(u_{\mathrm{Im}(f)}\otimes\mathrm{Id}^{\mathrm{Im}(f)})=\mathrm{Id}^{\mathrm{Im}(f)}$。类似地，可以证明 $m_{\mathrm{Im}(f)}\circ(\mathrm{Id}_{\mathrm{Im}(f)}\otimes u_{\mathrm{Im}(f)})=\mathrm{Id}^{\mathrm{Im}(f)}$。因此，$\mathrm{Im}(f)$ 是 $\mathcal{C}$中的一个代数。由于 $u_S=\varphi\circ u_{\mathrm{Im}(f)}$，我们得到 φ 是 $\mathcal{C}$中的一个代数态射。因为 $\varphi\circ m_{\mathrm{Im}(f)}\circ(\psi\otimes\psi)=m_S\circ(\varphi\otimes\varphi)\circ(\psi\otimes\psi)=m_S\circ(f\otimes f)=f\circ m_R=\varphi\circ\psi\circ m_R$，且 φ 是单态射，所以 $m_{\mathrm{Im}(f)}\circ(\psi\otimes\psi)=\psi\circ m_R$。回想 $u_{\mathrm{Im}(f)}=\psi\circ u_R$，于是我们得到 ψ 也是 $\mathcal{C}$中的一个代数态射。□

作为定理 3.5 的一个应用，对于阿贝尔幺半范畴，我们有如下结论。

推论 3.14. 设$(\mathcal{C},\otimes,1)$ 是一个张量积右正合的阿贝尔幺半范畴，并且1 是 $\mathcal{C}$中的左 $\otimes$-生成元。设 $f\colon R\to S$ 是 $\mathcal{C}$ 中的代数态射，且$f^*=-\otimes_R S\colon \mathcal{C}_R\to\mathcal{C}_S$ 是半可分的。考虑 $\mathcal{C}$中 $f=\varphi\circ\psi$ 的像分解。那么，$\psi^*=-\otimes_R\mathrm{Im}(f)\colon \mathcal{C}_R\to\mathcal{C}_{\mathrm{Im}(f)}$ 自然满，且 $\varphi^*=-\otimes_{\mathrm{Im}(f)}S\colon \mathcal{C}_{\mathrm{Im}(f)}\to\mathcal{C}_S$ 可分。

证明. 根据定理 3.5，存在一个 $\mathcal{C}$中的 R-双模态射 $E\colon S\to R$，使得 $f\circ E\circ f=f$，即 $\varphi\circ\psi\circ E\circ\varphi\circ\psi=\varphi\circ\psi$。因此，由于 φ是单态射且 ψ是满态射，我们有 $\psi E\varphi=\mathrm{Id}^{\mathrm{Im}(f)}$。此外，$\psi$ 和 φ 是左 R-模态射，因为根据引理 3.13，分别有$m_{\mathrm{Im}(f)}(\psi\otimes\mathrm{Id}^{\mathrm{Im}(f)})(\mathrm{Id}_R\otimes\psi)=\psi m_R$和 $\varphi m_{\mathrm{Im}(f)}(\psi\otimes\mathrm{Id}^{\mathrm{Im}(f)})=m_S(\varphi\otimes\varphi)(\psi\otimes\mathrm{Id}^{\mathrm{Im}(f)})=m_S(f\otimes\mathrm{Id}_S)(\mathrm{Id}_R\otimes\varphi)$。类似地，$\psi$ 和 φ 是右 R-模态射。因此，$E\varphi$ 是一个 R-双模态射。由于 E 是一个 R-双模态射，我们有 $Em_S(f\otimes\mathrm{Id}_S)=m_R(\mathrm{Id}_R\otimes E)$。这意味着 $\psi Em_S(\varphi\psi\otimes\mathrm{Id}_S)=\psi Em_S(f\otimes\mathrm{Id}_S)=\psi m_R(\mathrm{Id}_R\otimes E)=m_{\mathrm{Im}(f)}(\psi\otimes\psi E)$。因为 $\psi\otimes\mathrm{Id}_S$是满态射，所以我们得到 $\psi Em_S(\varphi\otimes\mathrm{Id}_S)=m_{\mathrm{Im}(f)}(\mathrm{Id}_{\mathrm{Im}(f)}\otimes\psi E)$，即 ψE是左 $\mathrm{Im}(f)$-模态射。类似地，可以证明它也是右 $\mathrm{Im}(f)$-模态射。根据命题 3.7 和定理 3.3，$\psi^*\colon -\otimes_R\mathrm{Im}(f)$ 自然满，且 $\varphi^*=-\otimes_{\mathrm{Im}(f)}S$ 可分。□

3.2. **例子**。 现在我们将定理 3.5 和命题 3.7 应用于一些例子。

例 3.15。 设 K 是一个交换含幺环，并以 ${}_K\mathcal{M}$ 表示左 K-模及左 K-线性映射构成的范畴。众所周知，${}_K\mathcal{M}$ 是一个幺半范畴，其张量积为 $\otimes=\otimes_K$，单位为 $1=K$。注意，张量函子是右正合的，参见例如 [3, 命题 19.13], , 因此它们保持余等化子，也就是说，${}_K\mathcal{M}$中的每个对象都是余平坦的。正如在 [16,例 3.2 2)]中所观察到的，K 是 ${}_K\mathcal{M}$中的左 $\otimes$-生成元。事实上，${}_K\mathcal{M}$ 中的任意态射 $\varepsilon\colon K\to M$ 都完全由$\varepsilon(1)=m\in M$确定。因此，定理 3.5 和命题 3.7 均适用。

特别地，对于 $K=\mathbb{Z}$（整数环），我们得到阿贝尔群的幺半范畴 (Ab $\otimes_{\mathbb{Z}}$, $\mathbb{Z}$)。在这种情况下，Ab 中的代数是含幺环，因此定理 3.5 得到了命题 2.6，而命题 3.7 则恢复了 [6,命题 3.1 2)]。

例 3.16。 集合范畴（Set $\times$, $\{0\}$）由集合和函数构成，是一个笛卡尔幺半范畴，其中单位对象是一个单元素集合 $\{0\}$。单位是一个左 $\otimes$-生成元，参见 [16, 例

3.2 1)]。Set 中的代数是一个幺半群。由于 Set 是笛卡尔闭的，例如参见 [26, 第 98] 页， $-\times B$ 是一个左伴随，因此它保持余等化子。

考虑幺半群的态 射（关于通常的乘 积）

$$\psi:\mathbb{N}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{N},\quad (n,z)\mapsto n,\quad \text{and}\quad \varphi:\mathbb{N}\to \mathrm{M}_2(\mathbb{N}),\quad n\mapsto n\mathrm{I}_2,$$

其中 I_2 是 2 阶单位矩阵。我们证明 $\varphi^*\circ\psi^*\cong(\varphi\circ\psi)^*$ 是半可分的。可以验证， $D:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$, $m\mapsto(m,0)$ 是 Set 中的一个 $(\mathbb{N}\times\mathbb{Z})$-双模态射。此外，对于每个 $n\in\mathbb{N}$, $\psi D(n)=\psi(n,0)=n$，因此根据命题 3.7， ψ^* 是自然满的。考虑 $E:\mathrm{M}_2(\mathbb{N})\to\mathbb{N},(a_{ij})\mapsto a_{11}$。于是， $E\varphi(n)=E(n\mathrm{I}_2)=n$ ，且 E 是 Set 中的一个 $\mathbb{N}$-双模态射。事实上， $E(n(a_{ij}))=E(\varphi(n)(a_{ij}))=E((na_{ij}))=na_{11}=nE((a_{ij}))$，另一侧也类似。因此，根据定理 3.3 φ^* 是可分的。

于是，由引理 2.2，$(\varphi\circ\psi)^*\cong\varphi^*\circ\psi^*$ 是半可分的。我们注意到 $\varphi\psi$ 既非单射也非满射，因此 $\varphi^*\circ\psi^*$ 既不可分也非自然满。由定理 3.5，存在一个 $(\mathbb{N}\times\mathbb{Z})$-双模态射 $\xi:\mathrm{M}_2(\mathbb{N})\to\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ 在 $\mathcal{C}$ 中，使得 $\varphi\psi\xi\varphi\psi=\varphi\psi$。特别地， ξ 可取为 $D\circ E$，$(a_{ij})\mapsto(a_{11},0)$。

N现在我们考虑一些单位对象可能不是左 $\otimes$-生成元的幺半范畴 r.

例 3.17. 参见例 3.11。设 H 是域 $\Bbbk$上的一个双代数。我们将 $\otimes_{\Bbbk}$ 在 $\Bbbk$ 上的张量积记作不带修饰的 $\otimes$。左 H-模范畴 $({}_H\mathcal{M},\ \otimes,\ \Bbbk)$ 是幺半范畴，且单位对象 $\Bbbk\in{}_H\mathcal{M}$ 借助平凡作用 $hk=\varepsilon(h)k$。对于 $X,\ Y\in{}_H\mathcal{M}$,$X\otimes Y\in{}_H\mathcal{M}$ ，借助对角作用

$$H\otimes(X\otimes Y)\to X\otimes Y,\ h\otimes x\otimes y\mapsto\sum h_1x\otimes h_2y.$$

${}_H\mathcal{M}$ 中的每个对象都是余平坦的，因为张量函子是右正合的。 ${}_H\mathcal{M}$ 中的代数 A 是一个$\Bbbk$-代数 A ，其乘法和单位都是左 H-线性的态射，即一个左 H-模代数。更精确地说，一个 $\Bbbk$-代数带有左 H-模结构，并满足

$$h\cdot(ab)=(h_1\cdot a)(h_2\cdot b),\quad \text{and}\quad h\cdot 1=\varepsilon_H(h)1,$$

对所有 $h\in H$、 $a,b\in A$均成立。

设 H 是域 $\Bbbk$ 上的霍普夫代数，其反极为 S，单位为 $u:\Bbbk\to H$ ，余单位为 $\varepsilon:H\to\Bbbk$。回顾一下， H 相对于左伴随作用 $H\otimes H\to H$,$h\otimes a\mapsto h\triangleright_{\mathrm{Ad}}a:=h_1aS(h_2)$是一个左 H-模代数，见 [27, 例 1.6.3]。注意， $\Bbbk$ 通过平凡作用成为一个 H-模代数。此外， u 是 ${}_H\mathcal{M}$中的代数态射。事实上，对每个 $h\in H$, $k\in\Bbbk$， u 都是左 H-线性的，因为$u(hk)=u(\varepsilon(h)k)=\varepsilon(h)k1_H=h_1k1_HS(h_2)=h_1u(k)S(h_2)=h\triangleright_{\mathrm{Ad}}u(k)$。此外，对每个 $h,a\in H$， ε 都是左 H-线性的，

$$\varepsilon(h\triangleright_{\mathrm{Ad}}a)=\varepsilon(h_1aS(h_2))=\varepsilon(h_1)\varepsilon(a)\varepsilon(S(h_2))=\varepsilon(\varepsilon(h)1_H)\varepsilon(a)=\varepsilon(h)\varepsilon(a)=h\varepsilon(a).$$

注意， ε 属于 ${}_{\Bbbk}\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(H,\ \Bbbk)$，因为 $\varepsilon(k\cdot h)=\varepsilon(u(k)h)=\varepsilon(k1h)=\varepsilon(kh)=k\varepsilon(h)$，且 $\varepsilon(h\cdot k)=\varepsilon(hu(k))=\varepsilon(hk1)=\varepsilon(h)k$。由于对每个 $k\in\Bbbk(\varepsilon\circ u)(k)=\varepsilon(k1_H)=k\varepsilon(1_H)=k1_{\Bbbk}=k$， u都是一个分裂单态射。由注 3.10 可知， $u^*=-\otimes H:\mathrm{Vec}_{\Bbbk}\to\mathcal{M}_H$ 是可分的。

设 H' 是一个 H-模代数。现在考虑投影 $\psi:\ \Bbbk\oplus H'\to\Bbbk,(k,\ h)\mapsto k$。我们验证 $\Bbbk\oplus H'$ 是一个 H-模代数，其中 H-模结构是逐分量的。事实上，

$$\begin{aligned}h\cdot((k,a)(k',b))&=h\cdot(kk',ab)=(\varepsilon(h)kk',(h_1\cdot a)(h_2\cdot b))\\&=(\varepsilon(h_1)k,h_1\cdot a)(\varepsilon(h_2)k',h_2\cdot b)=(h_1\cdot(k,a))(h_2\cdot(k',b))\end{aligned}$$

并且 $h\cdot(1,\ 1)=(\varepsilon(h)1_{\Bbbk},\ \varepsilon(h)1_H)=\varepsilon(h)(1,\ 1)$，对所有 $h\in H$, $k,\ k'\in\Bbbk$ $a,\ b\in H'$均成立。注意， ψ 是 ${}_H\mathcal{M}$中的一个代数态射。考虑 $D:\ \Bbbk\to\Bbbk\oplus H'$, $k\mapsto(k,\ 0)$，它是 ${}_H\mathcal{M}$中的一个态射。我们有

$$\begin{aligned}D((k,h)\cdot k')&=D(\psi((k,h)k')=D(kk')=(kk',0)=(k,h)(k',0)=(k,h)D(k'),\\D(k'\cdot(k,h))&=D(k'\psi(k,h))=D(k'k)=(k'k,0)=(k',0)(k,h)=D(k')(k,h),\end{aligned}$$

因此， $D\in{}_{\Bbbk\oplus H'}\mathrm{Hom}_{\Bbbk\oplus H'}(\Bbbk,\ \Bbbk\oplus H')$ 和 $\psi D(k)=\psi((k,\ 0))=k$。于是，根据命题 3.7， ψ^* 是自然满的。因此，复合 $u^*\circ\psi^*\cong(u\circ\psi)^*:({}_H\mathcal{M})_{\Bbbk\oplus H'}\to({}_H\mathcal{M})_H$是一个半可分函子，但它既不可分，也不是自然满的。

例 3.18。 设 K 为交换含幺环， R 为一个 K-代数。我们知道， ${}_R\mathcal{M}_R$ 范畴由 R-双模和 R-双线性态射组成，并且是一个幺半范畴，其 $\otimes = \otimes_R$ 为 R。由于张量积 $\otimes_R$ 是右正合的，余平坦条件得以满足。根据 [16,例 3.2 3)]， R 是左 $\otimes$-生成元，当且仅当 R 是 ${}_R\mathcal{M}_R$中的生成元。特别地，如果 R是一个可分的 K-代数，那么 R 是 ${}_R\mathcal{M}_R$中的生成元。根据霍普夫代数的Maschke定理[25], ，如果 H 是半单Hopf代数，那么它也是可分的，因此 H 是 $({}_H\mathcal{M}_H, \otimes_H, H)$ 的左 $\otimes$-生成元。

例如，设 $G = \{g_1, \cdots, g_n\}$ 是一个基数为 $n \in \mathbb{N}$， $n \geq 1$ 的有限群，并考虑域 $\Bbbk$ 上的群代数 $\Bbbk G$ ，其中 $\mathrm{char}(\Bbbk) \nmid n$。那么， $\Bbbk G$ 是可分的。因此，单位对象 $\Bbbk G$ 是 $({}_{\Bbbk G}\mathcal{M}_{\Bbbk G}, \otimes_{\Bbbk G}, \Bbbk G)$ 中的左 $\otimes$- 生成元。记 $\otimes := \otimes_{\Bbbk}$。设 I 是一个基数为 $|I|$ 的有限指标集。记 $\Bbbk^{|I|} := \oplus_{i\in I}\Bbbk$。注意， $\Bbbk^{|I|} \otimes \Bbbk G$ 是 $({}_{\Bbbk G}\mathcal{M}_{\Bbbk G}, \otimes_{\Bbbk G}, \Bbbk G)$ 中的一个代数。更准确地说， $\Bbbk^{|I|} \otimes \Bbbk G$ 的 $\Bbbk G$-模结构为

$$\begin{aligned} \Bbbk G \otimes (\Bbbk^{|I|} \otimes \Bbbk G) \to \Bbbk^{|I|} \otimes \Bbbk G, \quad & (\Bbbk^{|I|} \otimes \Bbbk G) \otimes \Bbbk G \to \Bbbk^{|I|} \otimes \Bbbk G \\ h \otimes (a \otimes g) \mapsto a \otimes hg \quad & (a \otimes g) \otimes h \mapsto a \otimes gh. \end{aligned}$$

此外，乘法为

$$m : (\Bbbk^{|I|} \otimes \Bbbk G) \otimes_{\Bbbk G} (\Bbbk^{|I|} \otimes \Bbbk G) \to \Bbbk^{|I|} \otimes \Bbbk G, \ (a \otimes g) \otimes_{\Bbbk G} (b \otimes g') \to ab \otimes gg'.$$

$\Bbbk G$-模的左模结构由 m的 $h \cdot ((a \otimes g) \otimes_{\Bbbk G} (b \otimes g')) = (a \otimes hg) \otimes_{\Bbbk G} (b \otimes g')$给出。此外，单位为 $u : \Bbbk G \to \Bbbk^{|I|} \otimes \Bbbk G$, $g \mapsto 1 \otimes g$。容易验证，乘法 m和单位 u 是 $\Bbbk G$-双线性的。

现在，假设 $\Bbbk^{|I|}$ 的基为 $\{a_j\}_{j\in I}$，其中 $a_j \in \Bbbk^{|I|}$ 是第 j个分量为 1、其余分量为 0 的元素。对于任意 $l \in I$，定义

$$\psi_l : \Bbbk^{|I|} \otimes \Bbbk G \to \Bbbk G, \ \sum_{i,j} k_{ij} a_i \otimes g_j \mapsto \sum_j k_{lj} g_j \text{ and } D_l : \Bbbk G \to \Bbbk^{|I|} \otimes \Bbbk G, \ g \mapsto a_l \otimes g.$$

显然， $\psi_l \circ D_l = \mathrm{Id}_{\Bbbk G}$。现在证明 ψ_l 是 ${}_{\Bbbk G}\mathcal{M}_{\Bbbk G}$中的代数态射。由于当 $i = s$ 时$a_i a_s = a_i$ ，且当 $i \neq s$ 时 $a_i a_s = 0$ ，我们有

$$\begin{aligned} &\psi_l(m((\sum k_{ij} a_i \otimes g_j) \otimes_{\Bbbk G} (\sum k'_{st} a_s \otimes g_t))) = \psi_l(\sum k_{ij} k'_{st} a_i a_s \otimes g_j g_t) = \psi_l(\sum k_{ij} k'_{it} a_i \otimes g_j g_t) \\ &= \sum k_{lj} k'_{lt} g_j g_t = (\sum k_{lj} g_j)(\sum k'_{lt} g_t) = m_{\Bbbk G}(\psi_l(\sum k_{ij} a_i \otimes g_j) \otimes_{\Bbbk G} \psi_l(\sum k'_{st} a_s \otimes g_t)) \\ &= m_{\Bbbk G}(\psi_l \otimes_{\Bbbk G} \psi_l)((\sum k_{ij} a_i \otimes g_j) \otimes_{\Bbbk G} (\sum k'_{st} a_s \otimes g_t)), \end{aligned}$$

并且 $\psi_l u(g) = \psi_l(1 \otimes g) = g$。此外， D_l 作为 $D_l(hg) = a_l \otimes hg = h(a_l \otimes g) = hD_l(g)$，是 $\Bbbk G$-双线性的，右侧也同理。它还是 $\Bbbk^{|I|} \otimes \Bbbk G$-双线性的，因为

$$D_l((a_k \otimes g)h) = D_l(\psi_l((a_k \otimes g))h) = \begin{cases} 0 & \text{if } k \neq l \\ D_l(gh) = a_l \otimes gh & \text{if } k = l \end{cases}$$

$$(a_k \otimes g)D_l(h) = (a_k \otimes g)(a_l \otimes h) = a_k a_l \otimes gh = \begin{cases} 0 & \text{if } k \neq l, \\ a_l \otimes gh & \text{if } k = l \end{cases}$$

另一侧也同理。此外， $\psi_l D_l(g) = \psi_l(a_l \otimes g) = g$，因此根据命题 3.7， ψ_l^*是自然满的。

现在考虑 $\Bbbk G^{\otimes m} := \Bbbk G \otimes \ldots \otimes \Bbbk G\,(m \text{ times})$，其中 $m > 1$ 是一个固定的自然数。 $\Bbbk G^{\otimes m}$ 的左 $\Bbbk G$-模结构定义在基上，对于 $h \in G$，由 $h \otimes (g_1 \otimes \ldots \otimes g_m) \mapsto hg_1 \otimes \ldots \otimes hg_m$ 给出，右侧也同理。我们注意到， $\Bbbk G^{\otimes m}$ 在 ${}_{\Bbbk G}\mathcal{M}_{\Bbbk G}$中是一个幺半群，其乘法为

$$m_{\Bbbk G^{\otimes m}} : \Bbbk G^{\otimes m} \otimes_{\Bbbk G} \Bbbk G^{\otimes m} \to \Bbbk G^{\otimes m}, \ (a_1 \otimes \ldots \otimes a_m) \otimes_{\Bbbk G} (b_1 \otimes \ldots \otimes b_m) \mapsto a_1 b_1 \otimes \ldots \otimes a_m b_m,$$

其中 $\Bbbk G^{\otimes m} \otimes_{\Bbbk G} \Bbbk G^{\otimes m}$ 的 $\Bbbk G$-模结构由

$$\begin{aligned} g \cdot ((a_1 \otimes \ldots \otimes a_m) \otimes_{\Bbbk G} (b_1 \otimes \ldots \otimes b_m)) &= (g \cdot (a_1 \otimes \ldots \otimes a_m)) \otimes_{\Bbbk G} (b_1 \otimes \ldots \otimes b_m) \\ &= (ga_1 \otimes \ldots \otimes ga_m) \otimes_{\Bbbk G} (b_1 \otimes \ldots \otimes b_m). \end{aligned}$$

可以验证 $m_{\Bbbk G^{\otimes m}}$ 是左、右 $\Bbbk G$-线性的。单位由 $u_{\Bbbk G^{\otimes m}}$ 给出: $\Bbbk G \to \Bbbk G^{\otimes m}$, $g \mapsto g \otimes \ldots \otimes g$。考虑代数态射

$$\varphi : \Bbbk G \to \Bbbk G^{\otimes m}, \quad \sum_{i=1}^{n} k_i g_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} k_i g_i \otimes \ldots \otimes g_i$$

在 ${}_{\Bbbk G}\mathcal{M}_{\Bbbk G}$ 中。定义 $E := \varepsilon^{\otimes(m-1)} \otimes \mathrm{Id} : \Bbbk G^{\otimes m} \to \Bbbk G$, $E(h_1 \otimes \ldots \otimes h_m) = h_m$, 其中 $h_1, \ldots\ldots, h_m \in G$。于是, E 属于 ${}_{\Bbbk G}\mathrm{Hom}_{\Bbbk G}(\Bbbk G^{\otimes m}, \Bbbk G)$, 因为 $E(t(h_1 \otimes \ldots \otimes h_m)) = E(th_1 \otimes \ldots \otimes th_m) = th_m = tE(h_1 \otimes \ldots \otimes h_m)$, 右侧同理。此外, $E\varphi(\sum_i k_i g_i) = E(\sum_i k_i g_i \otimes \ldots \otimes g_i) = \sum_i k_i g_i$, 故由定理 3.3 可知 φ^* 是可分的。注意, E 也可以选为 $\varepsilon \otimes \ldots \otimes \mathrm{Id} \otimes \varepsilon, \cdots, \mathrm{Id} \otimes \varepsilon \otimes \ldots \otimes \varepsilon$ （$m-1$ 种方式）。于是, 由引理 2.2 $\varphi^* \circ \psi^* \cong (\varphi \circ \psi)$ 可知 * 是半可分的。我们观察到 $\varphi\psi$ 既非单射也非满射, 因此 $\varphi^* \circ \psi^*$ 既非可分也非自然满。由定理 3.5, 存在一个 $\Bbbk^{|I|} \otimes \Bbbk G$- 双模态射 $\xi : \Bbbk G^{\otimes m} \to \Bbbk^{|I|} \otimes \Bbbk G$ 在 ${}_{\Bbbk G}\mathcal{M}_{\Bbbk G}$ 中, 使得 $\varphi\psi\xi\varphi\psi = \varphi\psi$。例如, ξ 可以选为 $D_l E : \Bbbk G^{\otimes m} \to \Bbbk^{|I|} \otimes \Bbbk G, g_1 \otimes \ldots \otimes g_m \mapsto a_l \otimes g_m$。

例 3.19. 设 $\Bbbk$ 为一个域, $\mathcal{Z}_{\Bbbk}$ 为 $\Bbbk$上的 Zunino 范畴, 见 [17, 2.2]。$\mathcal{Z}_{\Bbbk}$ 的对象是由集合 X 以及由 X标号的一族$\Bbbk$-向量空间 $(M_x)_{x\in X}$ 构成的对 $M = (X, (M_x)_{x\in X})$。$\mathcal{Z}_{\Bbbk}$ 中的态射 $\varphi : M = (X, (M_x)_{x\in X}) \to N = (Y, (N_y)_{y\in Y})$ 是一个对 $(f, (\varphi_x)_{x\in X})$, 其中 $f : X \to Y$是集合范畴中的态射, 而 $(\varphi_x : M_x \to N_{f(x)})_{x\in X}$是一族$\Bbbk$-线性映射。若 $\chi = (g, (\chi_y)_{y\in Y}) : N \to P$是 $\mathcal{Z}_{\Bbbk}$中的另一个态射, 则复合由 $\underline{\chi} \circ \underline{\varphi} = (g \circ f, (\chi_{f(x)} \circ \overline{\varphi_x})_{x\in X})$ 定义。$\mathcal{Z}_{\Bbbk}$ 的幺半结构由

$$\underline{M} \otimes \underline{N} = (X \times Y, (M_x \otimes N_y)_{(x,y)\in X\times Y})$$

对于对象 M, $\underline{N}$属于 $\mathcal{Z}_{\Bbbk}$, 以及

$$\underline{\varphi} \otimes \underline{\varphi'} = (f \times f', (\varphi_x \otimes \varphi'_{x'})_{(x,x')\in X\times X'})$$

对于态射 $\varphi : M \to N$、 $\underline{\varphi'} : M' \to N'$属于 $\mathcal{Z}_{\Bbbk}$。单位是（$\{*\}$, $\Bbbk$）, 并且在 [16, 例 3.2 5)]中证明了它是一个左 $\otimes$-生成元。

根据 [17, 命题 2.11], , 范畴 $\mathcal{Z}_{\Bbbk}$ 有余等化子。此外, 根据 [7, 命题 3.4], 范畴 $\mathcal{Z}_{\Bbbk}$ =Fam(Vec$_{\Bbbk}$) 是闭单幺范畴。因此, $\mathcal{Z}_{\Bbbk}$ 中的任意对象都是余平坦的。事实上, 也可以直接利用集合范畴和 Vec$_{\Bbbk}$中对象的余平坦性, 验证 $\mathcal{Z}_{\Bbbk}$ 中对象的余平坦性。因此, 定理 3.5 和命题 3.7 适用。此外, 根据 [17, 命题 2.7], (G, A) 是 $\mathcal{Z}_{\Bbbk}$ 中的一个代数, 当且仅当 G 是一个幺半群, 且 A 是一个 G-代数（参见定义 1.6], ）。这等价于说, $\mathcal{Z}_{\Bbbk}$ 中的代数与按幺半群分次的代数一一对应, 参见 [16,例 4.2 4)]。

3.3. **幺半范畴中代数的张量函子**。设 (A, m_A, u_A) 是幺半范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个代数。考虑遗忘函子 $F : \mathcal{C}_A \to \mathcal{C}$ 及其左伴随 $G = - \otimes A : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_A$, $M \mapsto (M \otimes A, M \otimes m_A)$。伴随的单位 $\eta : \mathrm{Id} \to FG$ 由下式给出$\eta_M = M \otimes u_A : M \to M \otimes A$, 对于 $\mathcal{C}$ 中的每个对象 M, 而余单位 $\epsilon : GF \to \mathrm{Id}$ 由下式给出$\epsilon_N = \mu_N^A : F(N) \otimes A = N \otimes A \to N$, 对于 $\mathcal{C}_A$ 中的每个对象 (N, μ_N^A)。

正如 [16, 第 730], 页所述, 当代数扩张由单位态射 $u_A : 1 \to A$ 给出时, 诱导函子 $u_A^* = - \otimes_1 A : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_A$ 就是张量函子 $- \otimes A : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_A$。事实上, $\mathcal{C}$ 中的每个对象都自动具有右 1- 模结构, 因此 $\mathcal{C}_1$ 与 $\mathcal{C}$ 重合。于是, 定理 3.5 适用。更确切地说, 如果 $u_A : 1 \to A$ 是正则的, 那么根据定理 3.5, u_A^* 是半可分的。因此, $- \otimes A : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_A$ 也是半可分的。注意, 定理 3.5 要求幺半范畴 $\mathcal{C}$ 具有余等化子, 且每个对象都是余平坦的。然而, 即使没有这些假设, 我们仍然可以得到该结果。

命题 3.20。设 A 是幺半范畴 $\mathcal{C}$中的一个代数。则以下断言等价:

(i) 单位 $u_A : 1 \to A$ 作为 $\mathcal{C}$中的一个态射是正则的（分别为分裂单态射、分裂满态射）。(ii) 张量函子 $- \otimes A : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_A$ 是半可分的（分别为可分的、自然满的）。(iii) 张量函子 $A \otimes - : \mathcal{C} \to {}_A\mathcal{C}$ 是半可分的（分别为可分的、自然满的）。

证明。 我们考虑半可分情形。可分情形和自然满情形可以类似地证明。

$(i) \Rightarrow (ii)$。假设 $u_A: 1 \to A$ 是正则的，即存在 $\chi: A \to 1$ 属于 $\mathcal{C}$，使得$u_A\chi u_A = u_A$。对于每个 $M \in \mathcal{C}_A$，定义 $\nu_M = \chi \otimes M: M \otimes A \to M$，这显然是一个自然变换。此外，$\eta_M\nu_M\eta_M = (M \otimes u_A)(M \otimes \chi)(M \otimes u_A) = M \otimes u_A = \eta_M$。因此，根据定理 2.5，函子 $- \otimes A: \mathcal{C} \to \mathcal{C}_A$ 是半可分的。

$(ii) \Rightarrow (i)$。若 $- \otimes A$ 是半可分的，则由定理 2.5，存在自然变换$\nu: F(- \otimes A) \to \mathrm{Id}$，使得 $\eta\nu\eta = \eta$。定义 $\chi = \nu_1: A \to 1$。由于 $u_A\chi u_A = (1 \otimes u_A)\nu_1(1 \otimes u_A) = \eta_1\nu_1\eta_1 = \eta_1 = 1 \otimes u_A = u_A$，我们得到 (i)。

$(i) \Leftrightarrow (iii)$。同理可得。 □

注 3.21. 我们观察到，命题 3.20 中的 (i) 等价于 $\mathcal{C}$ 中存在态射$\chi: A \to 1$，使得 $(\chi \otimes A)(u_A \otimes A) = \mathrm{Id}_A$。一方面，$u_A\chi u_A = u_A$ 推出 $u_A \otimes A = u_A\chi u_A \otimes A = (u_A \otimes A)(\chi u_A \otimes A)$。由于 $u_A \otimes A$ 是单态射，$\mathrm{Id}_A = \chi u_A \otimes A = (\chi \otimes A)(u_A \otimes A)$。另一方面，$(\chi \otimes A)(u_A \otimes A) = \mathrm{Id}_A$ 推出 $u_A = 1 \otimes u_A = (\chi \otimes A)(u_A \otimes A)(1 \otimes u_A) = (1 \otimes u_A)(\chi \otimes 1)(u_A \otimes 1) = u_A\chi u_A$。

例 3.22。设 A 是一个带增广 ε 的代数：$A \to 1$ 在幺半范畴 $\mathcal{C}$ 中。由于 ε 是 $\mathcal{C}$ 中的代数态射，我们有 $\varepsilon u_A = \mathrm{Id}_1$, ，因此 u_A 是一个分裂单态射。根据命题 3.20，$- \otimes A: \mathcal{C} \to \mathcal{C}_A$ 是可分的。例 3.17 就是这种情形的一个实例，其中 $u: \Bbbk \to H$ 是域 $\Bbbk$ 上的霍普夫代数的单位。

3.4. **由幺半函子变动的诱导函子**。给定幺半范畴 $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ 和 $(\mathcal{D}, \otimes, 1')$，如果存在一个自然变换 ϕ^2，其分量由 $F(X) \otimes F(Y) \to F(X \otimes Y)$ 给出，以及一个态射 $\phi^0: 1' \to F(1)$，使得，则称函子 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是松幺半的，参见例如 [2, 定义 3.1],

$$\phi^2_{X,Y\otimes Z}(\mathrm{Id} \otimes \phi^2_{Y,Z}) = \phi^2_{X\otimes Y,Z}(\phi^2_{X,Y} \otimes \mathrm{Id}),$$
$$l_{F(X)} = F(l_X)\phi^2_{1,X}(\phi^0 \otimes \mathrm{Id}), \quad r_{F(X)} = F(r_X)\phi^2_{X,1}(\mathrm{Id} \otimes \phi^0),$$

其中，l、r 是所涉及范畴的左、右单位约束。若 ϕ^2、ϕ^0 可逆，则称函子 F 为强幺半函子。此外，松幺半函子（$F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}, \phi^2, \phi^0$）将 $\mathcal{C}$中的代数（R, m_R, u_R）映为 $\mathcal{D}$中的代数（$F(R)$ $F(m_R)\phi^2_{R,R}$, $F(u_R)\phi^0$），参见例如 [2, 命题 3.29]。此外，若 $\varphi: R \to S$ 是 $\mathcal{C}$中的代数态射，则 $F(\varphi): F(R) \to F(S)$是 $\mathcal{D}$中的代数态射。

引理 *3.23.* 设（$\mathcal{C}, \otimes, 1$）、（$\mathcal{D}, \otimes, 1'$）为幺半范畴，（$F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}, \phi^2, \phi^0$）为松幺半函子，$R$ 是 $\mathcal{C}$ 中的代数，且 X 通过 ν^R_X 在 $\mathcal{C}$中成为右 R-模。则 $F(X)$是右 $F(R)$-模，其模结构为 $F(\nu^R_X) \circ \phi^2_{X,R}$。类似地，若 X通过μ^R_X是左 R-模，则 $F(X)$是左 $F(R)$-模，其模结构为 $F(\mu^R_X) \circ \phi^2_{R,X}$。

因此，F 诱导函子 $\mathcal{C}_R \to \mathcal{D}_{F(R)}$、${}_R\mathcal{C} \to {}_{F(R)}\mathcal{D}$ 以及${}_R\mathcal{C}_R \to {}_{F(R)}\mathcal{D}_{F(R)}$。

证明。这是直接的。 □

T下一个结果表明，在张量生成元假设下，半可分性（相应地 .,
sepa可分性、自然满性）的诱导函子被弱幺半函子保持。

命题 *3.24.* 设 $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$、$(\mathcal{D}, \otimes, 1')$ 为幺半范畴。假设 1 是 $\mathcal{C}$ 中的左 $\otimes$-生成元。设 $(F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}, \phi^2, \phi^0)$ 为弱幺半函子，并设 $\varphi: R \to S$ 为 $\mathcal{C}$ 中的代数态射，使得 $\varphi^* = - \otimes_R S: \mathcal{C}_R \to \mathcal{C}_S$ 是半可分的（相应地，可分的、自然满的）。则 $F(\varphi)^* = - \otimes_{F(R)} F(S): \mathcal{D}_{F(R)} \to \mathcal{D}_{F(S)}$ 是半可分的（相应地，可分的、自然满的）。

反过来，假设 $1'$ 是 $\otimes$中的左生成元，且$(F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}, \phi^2, \phi^0)$ 是一个全忠实松幺半函子，并且 ϕ^2 在分量上是满态射。如果 $F(\varphi)^* = - \otimes_{F(R)} F(S): \mathcal{D}_{F(R)} \to \mathcal{D}_{F(S)}$ 是半可分的（分别地，可分的、自然满的），那么 $\varphi^* = - \otimes_R S: \mathcal{C}_R \to \mathcal{C}_S$ 是半可分的（分别地，可分的、自然满的）。

证明。如果 φ^* 是半可分的，那么根据定理 3.5，存在一个 R-双模态射 $E: S \to R$，属于 $\mathcal{C}$，使得 $\varphi E \varphi = \varphi$。由此可得 $F(\varphi)F(E)F(\varphi) = F(\varphi E \varphi) = F(\varphi)$。根据引理 3.23，$F(E)$是 $\mathcal{D}$中的一个 $F(R)$-双模态射。因此，根据定理 3.5 $F(\varphi)^*$是半可分的。

现在，假设 $1'$ 是 $\mathcal{D}$ 中的左 $\otimes$-生成元，F 是全忠实的，并且 $F(\varphi)^* = - \otimes_{F(R)} F(S): \mathcal{D}_{F(R)} \to \mathcal{D}_{F(S)}$ 是半可分的。我们证明 $\varphi^* = - \otimes_R S: \mathcal{C}_R \to \mathcal{C}_S$ 是半可分的。根据定理 3.5，存在一个 $F(R)$-双模态射 $E': F(S) \to F(R)$，属于 $\mathcal{D}$，使得

$F(\varphi)E'F(\varphi) = F(\varphi)$。由于 F 是满的，对于某个 $E\colon S \to R$（属于 $\mathcal{C}$），有 $E' = F(E)$。因此，$F(\varphi E\varphi) = F(\varphi)$，由此可得 $\varphi E\varphi = \varphi$，因为 F 是忠实的。接下来只需证明 E 是 $\mathcal{C}$ 中的一个 R-双模态射。由于 $E' = F(E)$ 是右 $F(R)$-模态射，也就是说 $F(E)^{m_{F(S)}}(\mathrm{Id}_{F(S)} \otimes F(\varphi)) = m_{F(R)}(F(E) \otimes \mathrm{Id}^{F(R)})$，我们有 $F(Em_S(\mathrm{Id}_S \otimes \varphi))\phi^2_{S,R} = F(m_R(E \otimes \mathrm{Id}_R))\phi^2_{S,R}$。由于 ϕ^2 在各分量上是满态射，且 F 是忠实的，我们得到 $Em_S(\mathrm{Id}_S \otimes \varphi) = m_R(E \otimes \mathrm{Id}_R)$。这意味着 E 是右 R-模态射。类似地，可以证明 E 也是左 R-线性的。可分和自然满的情形也可类似地证明。□

接下来，我们证明一些在不假设 1 是 $\mathcal{C}$ 中的左 $\otimes$-生成元时仍然成立的结果。第一个是幺半范畴中代数的诱导函子这一特殊情形，它是命题 3.20 的直接推论。

命题 3.25. 设 $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$、$(\mathcal{D}, \otimes, 1')$ 为幺半范畴，A 为 $\mathcal{C}$ 中的代数，其单位为 $u_A\colon 1 \to A$。设 $(F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}, \phi^2, \phi^0)$ 为弱幺半函子。

$i)$ 若 ϕ^0 是分裂满态射，且 $- \otimes A\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_A$ 是半可分的（相应地，自然满的），则 $- \otimes F(A)\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}_{F(A)}$ 是半可分的（相应地，自然满的）。$ii)$ 若 ϕ^0 是分裂单态射，且 $- \otimes A\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_A$ 是可分的，则 $- \otimes F(A)\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}_{F(A)}$ 是可分的。

证明。$i)$。如果 $- \otimes A\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_A$ 是半可分的，那么根据命题 3.20，存在一个态射$E\colon A \to 1$ 在 $\mathcal{C}$ 中，使得 $u_AEu_A = u_A$。由此可得 $F(u_A)F(E)F(u_A) = F(u_A)$。由于存在一个态射 $\psi^0\colon F(1) \to 1'$在 $\mathcal{D}$ 中满足 $\phi^0\psi^0 = \mathrm{Id}^{F(1)}$，我们得到 $F(u_A)\phi^0\psi^0F(E)F(u_A)\phi^0 = F(u_A)\phi^0$，这意味着 $u_{F(A)}\psi^0F(E)u_F(A) = u_F(A)$。再次根据命题 3.20，我们得到$- \otimes F(A)\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}_{F(A)}$是半可分的。自然满情形类似可得。

$ii)$。如果 $- \otimes A\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_A$ 是可分的，那么根据命题 3.20，存在一个态射 $E\colon A \to 1$在 $\mathcal{C}$中，使得 $Eu_A = \mathrm{Id}_1$。由此可得 $F(E)F(u_A) = \mathrm{Id}^{F(1)}$。由于存在一个态射 $\psi^0\colon F(1) \to 1'$在 $\mathcal{D}$中满足 $\psi^0\phi^0 = \mathrm{Id}_{1'}$，我们有 $\psi^0F(E)u_{F(A)} = \psi^0F(E)F(u_A)\phi^0 = \psi^0\phi^0 = \mathrm{Id}_{1'}$。根据命题 3.20 $- \otimes F(A)$是可分的。□

现在我们给出前一个结果的逆命题。

命题 3.26. 设 $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ 和 $(\mathcal{D}, \otimes, 1')$ 是幺半范畴，A 是 $\mathcal{C}$ 中的一个代数，其单位为 $u_A\colon 1 \to A$。设 $(F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}, \phi^2, \phi^0)$ 是一个全忠实松幺半函子。若 ϕ^0 是满态射，且 $- \otimes F(A)\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}_{F(A)}$ 是半可分（分别地，可分、自然满），则 $- \otimes A\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_A$ 是半可分（分别地，可分、自然满）。

证明。若 $- \otimes F(A)$ 是半可分的，根据命题 3.20，我们知道存在某个态射 $E'\colon F(A) \to 1'$ 属于 $\mathcal{D}$，使得 $u_{F(A)}E'u_{F(A)} = u_{F(A)}$。由于 F 是满函子，存在态射 $E\colon A \to 1$ 属于 $\mathcal{C}$，使得 $F(E) = \phi^0E'$。这意味着 $F(u_A)F(E)F(u_A)\phi^0 = F(u_A)\phi^0$。由于 ϕ^0是满态射且 F是忠实的，我们得到 $u_AEu_A = u_A$。因此，根据命题 3.20，$- \otimes A\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_A$ 是半可分的。自然满的情形可类似证明。

若 $- \otimes F(A)$ 是可分的，根据命题 3.20，我们知道存在某个态射 $E'\colon F(A) \to 1'$in $\mathcal{D}$，使得 $E'F(u_A)\phi^0 = E'u_{F(A)} = \mathrm{Id}_{1'}$。于是，$\phi^0E'F(u_A)\phi^0 = \phi^0$。由于 ϕ^0是满态射，因此有 $\phi^0E'F(u_A) = \mathrm{Id}^{F(1)}$。由于 F是满函子，存在态射 $E\colon A \to 1$in $\mathcal{C}$，使得$F(E) = \phi^0E'$。因此，$F(E)F(u_A) = \mathrm{Id}^{F(1)}$。由于 F是忠实函子，我们得到 $Eu_A = \mathrm{Id}_1$。因此，根据命题 3.20，$- \otimes A\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_A$ 是可分的。□

接下来，我们的目标是将命题 3.25 和命题 3.26 推广到 $\mathcal{C}$ 中任意的代数态射。这项推广基于一个保持余等化子的满、本质满且强幺半的函子；参见命题 3.28 和命题 3.29。首先，我们需要以下引理。

引理 *3.27.* 设 $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$、$(\mathcal{D}, \otimes, 1')$ 为幺半范畴，$(F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}, \phi^2, \phi^0)$ 为强幺半函子，$\varphi : R \to S$ 是 $\mathcal{C}$ 中的代数态射。假设 F 保持余等化子。那么，对于每个 $X \in \mathcal{C}_R$，存在一个同构 $\Phi^R_{X,S}$：$FX \otimes_{FR} FS \to F(X \otimes_R S)$，使得 $\Phi^R_{X,S} \circ q^{FR}_{FX,FS} = F(q^R_{X,S}) \circ \phi^2_{X,S}$。此外，$\Phi^R_{X,S}$ 在 X 上是自然的。

证明。由于 F 保留余等化子，我们有

$$F(X \otimes R \otimes S) \underset{F(\mathrm{Id}_X \otimes \mu^R_S)}{\overset{F(\nu^R_X \otimes \mathrm{Id}_Y)}{\rightrightarrows}} F(X \otimes S) \xrightarrow{F(q^R_{X,S})} F(X \otimes_R S) \tag{4}$$

是一个余等化子。由 ϕ^2的自然性可知， $F(\nu_X^R \otimes \mathrm{Id}_S) = \phi^2_{X,S} \circ (F(\nu_X^R) \otimes \mathrm{Id}_{FS}) \circ (\phi^2_{X\otimes R,S})^{-1}$ 以及 $F(\mathrm{Id}_X \otimes \mu_S^R) = \phi^2_{X,S} \circ (\mathrm{Id}_{FX} \otimes F(\mu_S^R)) \circ (\phi^2_{X,R\otimes S})^{-1}$。此外，根据引理 3.23，$F(X)$ 是一个右 $F(R)$-模，其模结构为 $F(\nu_X^R) \circ \phi^2_{X,R}$；而 $F(S)$ 是一个左 $F(R)$-模，其模结构为 $F(\mu_S^R) \circ \phi^2_{R,S}$。因此，我们考虑以下余等化子：

$$FX \otimes FR \otimes FS \underset{\mathrm{Id}_{FX}\otimes F(\mu_S^R)\circ\phi^2_{R,S}}{\overset{F(\nu_X^R)\circ\phi^2_{X,R}\otimes \mathrm{Id}_{FS}}{\rightrightarrows}} FX \otimes FS \xrightarrow{q^{FR}_{FX,FS}} FX \otimes_{FR} FS. \tag{5}$$

我们有

$$\begin{aligned}
&F(q^R_{X,S}) \circ \phi^2_{X,S} \circ (F(\nu_X^R) \circ \phi^2_{X,R} \otimes \mathrm{Id}_{FS}) \\
=&F(q^R_{X,S}) \circ \phi^2_{X,S} \circ (F(\nu_X^R) \otimes \mathrm{Id}_{FS}) \circ (\phi^2_{X\otimes R,S})^{-1} \circ \phi^2_{X\otimes R,S} \circ (\phi^2_{X,R} \otimes \mathrm{Id}_{FS}) \\
=&F(q^R_{X,S}) \circ F(\nu_X^R \otimes \mathrm{Id}_S) \circ \phi^2_{X,R\otimes S} \circ (\mathrm{Id}_{FX} \otimes \phi^2_{R,S}) \\
=&F(q^R_{X,S}) \circ F(\mathrm{Id}_X \otimes \mu_S^R) \circ \phi^2_{X,R\otimes S} \circ (\mathrm{Id}_{FX} \otimes \phi^2_{R,S}) \\
=&F(q^R_{X,S}) \circ \phi^2_{X,S} \circ (\mathrm{Id}_{FX} \otimes F(\mu_S^R)) \circ (\phi^2_{X,R\otimes S})^{-1} \circ \phi^2_{X,R\otimes S} \circ (\mathrm{Id}_{FX} \otimes \phi^2_{R,S}) \\
=&F(q^R_{X,S}) \circ \phi^2_{X,S} \circ (\mathrm{Id}_{FX} \otimes F(\mu_S^R)\phi^2_{R,S}).
\end{aligned}$$

于是，根据余等化子 (5) 的泛性质，存在唯一的态射 $\Phi^R_{X,S}\colon FX\otimes_{FR}FS \to F(X \otimes_R S)$，使得 $\Phi^R_{X,S} \circ q^{FR}_{FX,FS} = F(q^R_{X,S}) \circ \phi^2_{X,S}$。类似地，根据余等化子 (4) 的泛性质，存在唯一的 $\Psi^R_{X,S}\colon F(X \otimes_R S) \to FX \otimes_{FR} FS$，使得 $\Psi^R_{X,S} \circ F(q^R_{X,S}) = q^{FR}_{FX,FS} \circ (\phi^2_{X,S})^{-1}$。容易验证，$\Psi^R_{X,S}$和 $\Phi^R_{X,S}$互为逆。我们证明 $\Phi^R_{X,S}$ 关于 X 的自然性。对于 $\mathcal{C}_R$ 中任意态射 $f\colon X \to Y$，我们有

$$\begin{aligned}
&F(f \otimes_R S) \circ \Phi^R_{X,S} \circ q^{FR}_{FX,FS} = F(f \otimes_R S) \circ F(q^R_{X,S}) \circ \phi^2_{X,S} = F((f \otimes_R S)q^R_{X,S}) \circ \phi^2_{X,S} \\
=&F(q^R_{Y,S}(f \otimes S)) \circ \phi^2_{X.S} = F(q^R_{Y,S}) \circ F(f \otimes S) \circ \phi^2_{X,S} = F(q^R_{Y,S}) \circ \phi^2_{Y,S} \circ (Ff \otimes FS) \\
=&\Phi^R_{Y,S} \circ q^{FR}_{FY,FS} \circ (Ff \otimes FS) = \Phi^R_{Y,S} \circ (Ff \otimes_{FR} FS) \circ q^{FR}_{FX,FS}.
\end{aligned}$$

因此， $F(f \otimes_R S) \circ \Phi^R_{X,\ S} = \Phi^R_{Y,\ S} \circ (Ff \otimes_{FR} FS)$，因为 $q^{FR}_{FX,\ FS}$是一个满态射。 □

命题 3.28。 设 $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$、$(\mathcal{D}, \otimes, 1')$ 为幺半范畴，且 $\varphi\colon R \to S$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个代数态射，使得 $\varphi^* = - \otimes_R S\colon \mathcal{C}_R \to \mathcal{C}_S$ 是半可分（分别地，可分、自然满）。设 $(F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}, \phi^2, \phi^0)$ 是一个满、本质满的强幺半函子，并假设它保持余等化子。则 $F(\varphi)^* = - \otimes_{F(R)} F(S)\colon \mathcal{D}_{F(R)} \to \mathcal{D}_{F(S)}$ 也为半可分（分别地，可分、自然满）。

证明。 回顾伴随的单位 (φ^*, φ_*) 由 $\eta_X := q^R_{X,S}(\mathrm{Id}_X \otimes u_S)\colon X \to X \otimes_R S$ 给出。考虑 $\mathcal{C}$ 中的代数态射 $F(\varphi)$，伴随 $(F(\varphi)^*, F(\varphi)_*)$ 的单位由 $\eta'_D := q^{FR}_{D,FS}(\mathrm{Id}_D \otimes u_{FS})\colon D \to D \otimes_{FR} FS$ 给出，对每个 $D \in \mathcal{D}_{FR}$ 都成立。根据 Rafael 型定理 2.5，存在一个自然变换 $\nu\colon \varphi_*\varphi^* \to \mathrm{Id}$，使得 $\eta\nu\eta = \eta$。

F 的本质满射性意味着，对每个 $D \in \mathcal{D}$，都存在 $X \in \mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 中的一个同构$\alpha_D\colon D \to FX$。对于每个具有模结构 $\nu^{FR}_D\colon D \otimes FR \to D$ 的 $D \in \mathcal{D}_{FR}$，容易验证 $\alpha_D\nu^{FR}_D(\alpha_D^{-1} \otimes FR)\colon FX \otimes FR \to FX$ 是 FX 的右 FR-模结构，且$\alpha_D\colon D \to FX$ 属于 $\mathcal{D}_{FR}$。我们定义

$$\nu'_D : D \otimes_{FR} FS \to D, \quad \text{by } \nu'_D = \alpha_D^{-1} \circ F(\nu_X) \circ \Phi^R_{X,S} \circ (\alpha_D \otimes_{FR} FS).$$

我们注意到， ν'_D 的定义不依赖于 α_D的选择。事实上，如果还有另一个同构 $\alpha'_D\colon D \to FX'$ 属于 $\mathcal{D}$，那么根据 F 的满性，存在一个态射 $h\colon X' \to X$ 属于 $\mathcal{C}$，使得 $F(h) = \alpha_D(\alpha'_D)^{-1}$。因此，

$$\begin{aligned}
\nu'_D &= \alpha'^{-1}_D F(\nu_{X'})\Phi^R_{X',S}(\alpha'_D \otimes_{FR} FS) = \alpha_D^{-1}F(h)F(\nu_{X'})\Phi^R_{X',S}(F(h)^{-1}\alpha_D \otimes_{FR} FS) \\
&= \alpha_D^{-1}F(\nu_X)F(h \otimes_{FR} FS)\Phi^R_{X',S}(F(h)^{-1}\alpha_D \otimes_{FR} FS) = \alpha_D^{-1}F(\nu_X)\Phi^R_{X,S}(\alpha_D \otimes_{FR} FS).
\end{aligned}$$

T ν' 的自然性可由下一个交换图推出，对每个 $f: D \to D'$ 属于 $\mathcal{D}_{F R}$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
D \otimes_{FR} FS & \xrightarrow{\alpha_D \otimes_{FR} FS} & FX \otimes_{FR} FS & \xrightarrow{\Phi^R_{X,S}} & F(X \otimes_R S) & \xrightarrow{F(\nu_X)} & FX & \xrightarrow{\alpha_D^{-1}} & D \\
\downarrow{\scriptstyle f \otimes_{FR} FS} & & \downarrow{\scriptstyle (\alpha_{D'} f \alpha_D^{-1}) \otimes_{FR} FS} & & \downarrow{\scriptstyle F(h \otimes_R S)} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{D'} f \alpha_D^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\
D' \otimes_{FR} FS & \xrightarrow[\alpha_{D'} \otimes_{FR} FS]{} & FX' \otimes_{FR} FS & \xrightarrow[\Phi^R_{X',S}]{} & F(X' \otimes_R S) & \xrightarrow[F(\nu_{X'})]{} & FX' & \xrightarrow[\alpha_{D'}^{-1}]{} & D',
\end{array}$$

其中 h: $\mathcal{C}$ 中满足 $Fh = \alpha_{D'} f \alpha_D^{-1}$ 的态射，第二个方形根据 Φ^R_{-} 的自然性. s （引理 3.27）是交换的，第三个方形则根据 ν 的自然性是交换的。根据 Rafael 型定理 2.5，剩下只需证明 $\eta'\nu'\eta' = \eta'$。注意到 $\phi^2_{X,\ 1}$（$\mathrm{Id}_{FX} \otimes \phi^0$）$= \mathrm{Id}_{FX}$ 且 $\phi^2_{1,\ X}$（$\phi^0 \otimes \mathrm{Id}_{FX}$）$= \mathrm{Id}_{FX}$。对于每个 $D \cong FX \in \mathcal{D}_{FR}$，我们有

$$\begin{aligned}
&\eta'_D\nu'_D\eta'_D = q^{FR}_{D,FS}(\mathrm{Id}_D \otimes u_{FS})\alpha_D^{-1}F(\nu_X)\Phi^R_{X,S}(\alpha_D \otimes_{FR} FS)q^{FR}_{D,FS}(\mathrm{Id}_D \otimes F(u_S)\phi^0)\\
=&q^{FR}_{D,FS}(\mathrm{Id}_D \otimes u_{FS})\alpha_D^{-1}F(\nu_X)\Phi^R_{X,S}q^{FR}_{FX,FS}(\alpha_D \otimes \mathrm{Id}_{FS})(\mathrm{Id}_D \otimes F(u_S)\phi^0)\\
=&q^{FR}_{D,FS}(\mathrm{Id}_D \otimes u_{FS})\alpha_D^{-1}F(\nu_X)F(q^R_{X,S})\phi^2_{X,S}(\mathrm{Id}_{FX} \otimes F(u_S)\phi^0)(\alpha_D \otimes \mathrm{Id}_{1'})\\
=&q^{FR}_{D,FS}(\mathrm{Id}_D \otimes u_{FS})\alpha_D^{-1}F(\nu_X)F(q^R_{X,S})F(\mathrm{Id}_X \otimes u_S)\phi^2_{X,1}(\mathrm{Id}_{FX} \otimes \phi^0)(\alpha_D \otimes \mathrm{Id}_{1'})\\
=&q^{FR}_{D,FS}(\mathrm{Id}_D \otimes u_{FS})\alpha_D^{-1}F(\nu_X)F(\eta_X)(\alpha_D \otimes \mathrm{Id}_{1'})\\
=&q^{FR}_{D,FS}(\alpha_D^{-1}\alpha_D \otimes F(u_S)\phi^0)\alpha_D^{-1}F(\nu_X)F(\eta_X)(\alpha_D \otimes \mathrm{Id}_{1'})\\
=&q^{FR}_{D,FS}(\alpha_D^{-1} \otimes \mathrm{Id}_{FS})(\mathrm{Id}_{FX} \otimes F(u_S))(\alpha_D \otimes \phi^0)\alpha_D^{-1}F(\nu_X)F(\eta_X)(\alpha_D \otimes \mathrm{Id}_{1'})\\
=&q^{FR}_{D,FS}(\alpha_D^{-1} \otimes \mathrm{Id}_{FS})(\phi^2_{X,S})^{-1}F(\mathrm{Id}_X \otimes u_S)\phi^2_{X,1}(\mathrm{Id}_{FX} \otimes \phi^0)F(\nu_X)F(\eta_X)(\alpha_D \otimes \mathrm{Id}_{1'})\\
=&q^{FR}_{D,FS}(\alpha_D^{-1} \otimes \mathrm{Id}_{FS})(\phi^2_{X,S})^{-1}F(\mathrm{Id}_X \otimes u_S)F(\nu_X)F(\eta_X)(\alpha_D \otimes \mathrm{Id}_{1'})\\
=&(\alpha_D^{-1} \otimes_{FR} FS)q^{FR}_{FX,FS}(\phi^2_{X,S})^{-1}F(\mathrm{Id}_X \otimes u_S)F(\nu_X)F(\eta_X)(\alpha_D \otimes \mathrm{Id}_{1'})\\
=&(\alpha_D^{-1} \otimes_{FR} FS)(\Phi^R_{X,S})^{-1}F(q^R_{X,S})F(\mathrm{Id}_X \otimes u_S)F(\nu_X)F(\eta_X)(\alpha_D \otimes \mathrm{Id}_{1'})\\
=&(\alpha_D^{-1} \otimes_{FR} FS)(\Phi^R_{X,S})^{-1}F(q^R_{X,S})F(\mathrm{Id}_X \otimes u_S)(\alpha_D \otimes \mathrm{Id}_{1'})\\
=&(\alpha_D^{-1} \otimes_{FR} FS)q^{FR}_{FX,FS}(\phi^2_{X,S})^{-1}F(\mathrm{Id}_X \otimes u_S)(\alpha_D \otimes \mathrm{Id}_{1'})\\
=&(\alpha_D^{-1} \otimes_{FR} FS)q^{FR}_{FX,FS}(\mathrm{Id}_{FX} \otimes Fu_S)(\phi^2_{X,1})^{-1}(\alpha_D \otimes \mathrm{Id}_{1'})\\
=&(\alpha_D^{-1} \otimes_{FR} FS)q^{FR}_{FX,FS}(\mathrm{Id}_{FX} \otimes Fu_S)(\mathrm{Id}_{FX} \otimes \phi^0)(\alpha_D \otimes \mathrm{Id}_{1'})\\
=&q^{FR}_{D,FS}(\alpha_D^{-1} \otimes \mathrm{Id}_{FS})(\mathrm{Id}_{FX} \otimes u_{FS})(\alpha_D \otimes \mathrm{Id}_{1'}) = q^{FR}_{D,FS}(\mathrm{Id}_D \otimes u_{FS}) = \eta'_D.
\end{aligned}$$

在可分情形下，我们有

$$\begin{aligned}
\nu'_D\eta'_D =&\alpha_D^{-1}F(\nu_X)F(q^R_{X,S})F(\mathrm{Id}_X \otimes u_S)\phi^2_{X,1}(\mathrm{Id}_{FX} \otimes \phi^0)(\alpha_D \otimes \mathrm{Id}_{1'})\\
=&\alpha_D^{-1}F(\nu_X)F(\eta_X)(\alpha_D \otimes \mathrm{Id}_{1'}) = \alpha_D^{-1}F(\nu_X\eta_X)(\alpha_D \otimes \mathrm{Id}_{1'}) = \alpha_D^{-1}\alpha_D = \mathrm{Id}_D.
\end{aligned}$$

根据 [31, 定理 1.2], $F(\varphi)^*$ 是可分的。对于自然满情形，我们有

$$\begin{aligned}
&\eta'_D\nu'_Dq^{FR}_{D,FS} = q^{FR}_{D,FS}(\mathrm{Id}_D \otimes F(u_S)\phi^0)\alpha_D^{-1}F(\nu_X)\Phi^R_{X,S}(\alpha_D \otimes_{FR} FS)q^{FR}_{D,FS}\\
=&q^{FR}_{D,FS}(\mathrm{Id}_D \otimes F(u_S)\phi^0)\alpha_D^{-1}F(\nu_X)\Phi^R_{X,S}q^{FR}_{FX,FS}(\alpha_D \otimes \mathrm{Id}_{FS})\\
=&q^{FR}_{D,FS}(\mathrm{Id}_D \otimes F(u_S)\phi^0)\alpha_D^{-1}F(\nu_X)F(q^R_{X,S})\phi^2_{X,S}(\alpha_D \otimes \mathrm{Id}_{FS})\\
=&q^{FR}_{D,FS}(\alpha_D^{-1} \otimes F(u_S)\phi^0)F(\nu_X)F(q^R_{X,S})\phi^2_{X,S}(\alpha_D \otimes \mathrm{Id}_{FS})\\
=&q^{FR}_{D,FS}(\alpha_D^{-1} \otimes \mathrm{Id}_{FS})(\phi^2_{X,S})^{-1}F(\mathrm{Id}_X \otimes u_S)\phi^2_{X,1}(\mathrm{Id}_{FX} \otimes \phi^0)F(\nu_X)F(q^R_{X,S})\phi^2_{X,S}(\alpha_D \otimes \mathrm{Id}_{FS})\\
=&q^{FR}_{D,FS}(\alpha_D^{-1} \otimes \mathrm{Id}_{FS})(\phi^2_{X,S})^{-1}F(\mathrm{Id}_X \otimes u_S)F(\nu_X)F(q^R_{X,S})\phi^2_{X,S}(\alpha_D \otimes \mathrm{Id}_{FS})\\
=&(\alpha_D^{-1} \otimes_{FR} FS)q^{FR}_{FX,FS}(\phi^2_{X,S})^{-1}F(\mathrm{Id}_X \otimes u_S)F(\nu_X)F(q^R_{X,S})\phi^2_{X,S}(\alpha_D \otimes \mathrm{Id}_{FS})\\
=&(\alpha_D^{-1} \otimes_{FR} FS)(\Phi^R_{X,S})^{-1}F(q^R_{X,S})F(\mathrm{Id}_X \otimes u_S)F(\nu_X)F(q^R_{X,S})\phi^2_{X,S}(\alpha_D \otimes \mathrm{Id}_{FS})\\
=&(\alpha_D^{-1} \otimes_{FR} FS)(\Phi^R_{X,S})^{-1}F(\eta_X\nu_X)F(q^R_{X,S})\phi^2_{X,S}(\alpha_D \otimes \mathrm{Id}_{FS})\\
=&(\alpha_D^{-1} \otimes_{FR} FS)(\Phi^R_{X,S})^{-1}F(q^R_{X,S})\phi^2_{X,S}(\alpha_D \otimes \mathrm{Id}_{FS})\\
=&(\alpha_D^{-1} \otimes_{FR} FS)q^{FR}_{FX,FS}(\alpha_D \otimes \mathrm{Id}_{FS}) = q^{FR}_{D,FS}(\alpha_D^{-1} \otimes \mathrm{Id}_{FS})(\alpha_D \otimes \mathrm{Id}_{FS}) = q^{FR}_{D,FS}.
\end{aligned}$$

Since $q^{FR}_{D,FS}$是满态射，则 $\eta'_D \circ \nu'_D = \mathrm{Id}_{D\otimes_{FR}FS}$。由 [6, 定理 2.6] 得出结论。 □

将 F 的本质满射性替换为忠实性，我们可以证明命题 3.28 的逆命题。

命题 3.29. 设$(\mathcal{C}, \otimes, 1)$、$(\mathcal{D}, \otimes, 1')$ 是幺半范畴，且 $\varphi\colon R \to S$ 是 $\mathcal{C}$中的代数态射。设$(F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}, \phi^2, \phi^0)$ 是全忠实的强幺半函子，并假设它保余等化子。若 $F(\varphi)^* = - \otimes_{F(R)} F(S)\colon \mathcal{D}_{F(R)} \to \mathcal{D}_{F(S)}$ 是半可分（分别为可分、自然满），则 $\varphi^* = - \otimes_R S\colon \mathcal{C}_R \to \mathcal{C}_S$是半可分（分别为可分、自然满）。

证明。 假设 $F(\varphi)^* = - \otimes_{F(R)} F(S) : \mathcal{D}_{F(R)} \to \mathcal{D}_{F(S)}$是半可分（分别为可分、自然满）。存在一个自然变换 $\nu' = (\nu'_D\colon D \otimes_{FR} FS \to D)_{D\in\mathcal{D}}$，使得$\eta'\nu'\eta' = \eta'$（分别为 $\nu'\eta' = \mathrm{Id}$、 $\eta'\nu' = \mathrm{Id}$）。由于 F是满函子，存在一个态射 $\nu_X\colon X\otimes_R S \to X$，使得 $F(\nu_X) = \nu'_{FX}(\Phi^R_{X,S})^{-1}$，其中$\Phi^R_{X,S}$: $FX \otimes_{FR} FS \to F(X \otimes_R S)$是引理 3.27 中的同构。由于对于 $\mathcal{C}_R$中的任意态射 $f : X \to Y$，

$$\begin{aligned} F(\nu_Y)F(f \otimes_R S) =& \nu'_{FY}(\Phi^R_{Y,S})^{-1}F(f \otimes_R S) = \nu'_{FY}(Ff \otimes_{FR} FS)(\Phi^R_{X,S})^{-1} \\ =& F(f)\nu'_{FX}(\Phi^R_{X,S})^{-1} = F(f)F(\nu_X), \end{aligned}$$

由于 F是忠实的，我们得到 ν的自然性。由于 $u_{FS} = F(u_S)\phi^0$，因此有

$$\begin{aligned} F(\eta_X) &= F(q^R_{X,S})F(\mathrm{Id}_X \otimes u_S)\phi^2_{X,1}(\phi^2_{X,1})^{-1} = F(q^R_{X,S})\phi^2_{X,S}(F(\mathrm{Id}_X) \otimes F(u_S))(\phi^2_{X,1})^{-1} \\ &= \Phi^R_{X,S}q^{FR}_{FX,FS}(F(\mathrm{Id}_X) \otimes F(u_S))(\mathrm{Id}_{FX} \otimes \phi^0) = \Phi^R_{X,S}q^{FR}_{FX,FS}(F(\mathrm{Id}_X) \otimes u_{FS}). \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned} F(\eta_X)F(\nu_X)F(\eta_X) =& \Phi^R_{X,S}q^{FR}_{FX,FS}(F(\mathrm{Id}_X) \otimes u_{FS})\nu'_{FX}(\Phi^R_{X,S})^{-1}\Phi^R_{X,S}q^{FR}_{FX,FS}(F(\mathrm{Id}_X) \otimes u_{FS}) \\ =& \Phi^R_{X,S}q^{FR}_{FX,FS}(F(\mathrm{Id}_X) \otimes u_{FS})\nu'_{FX}q^{FR}_{FX,FS}(F(\mathrm{Id}_X) \otimes u_{FS}) \\ =& \Phi^R_{X,S}\eta'_{FX}\nu'_{FX}\eta'_{FX} = \Phi^R_{X,S}\eta'_{FX} = \Phi^R_{X,S}q^{FR}_{FX,FS}(F(\mathrm{Id}_X) \otimes u_{FS}) = F(\eta_X). \end{aligned}$$

由于 F是忠实的，我们得到 $\eta_X\nu_X\eta_X = \eta_X$。因此， $\varphi^* = - \otimes_R S\colon \mathcal{C}_R \to \mathcal{C}_S$是半可分的。类似地，可以证明可分情形和自然满情形。□

现在，我们给出一些满足命题 3.28 中条件的函子。

例 3.30。 设 $(\mathcal{A}, \otimes, 1)$ 是一个半单阿贝尔幺半范畴（参见 [20, 定义 1.5.1]），其张量积是双正合的。回顾一下，全加性子范畴 $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ 称为 ***Serre*** 子范畴，如果 $\mathcal{C}$ 对取子对象、商对象和扩张封闭。若对任意 $X \in \mathcal{A}$、 $Y \in \mathcal{C}$，都有 $X \otimes Y \in \mathcal{C}$和 $Y \otimes X \in \mathcal{C}$，则称 $\mathcal{A}$ 的 Serre 子范畴$\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{A}$ 的双侧 ***Serre*** 张量理想 。

考虑 $\mathcal{A}$ 的双侧 Serre 理想 $\mathcal{C}$ 以及商范畴 $\mathcal{A}/\mathcal{C}$，其定义如 [22, 第三章第 1]节所述。众所周知，典范商函子 T： $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{C}$ 是正合的，见 [22,第三章第1节命题 1]。因此 T 保持余等化子。由 [34, 命题4.8]，商范畴 $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ 是幺半的，且 T 是幺半函子。由商函子的定义，对 $\mathcal{A}$中的任意对象 M，有 $T(M) = M$。由此可知 T是本质满的。

此外，回顾对 $\mathcal{A}/\mathcal{C}$中的任意态射 f： $M \to N$， f可写成 $f = T(f)$，其中某个f： $M' \to N/N'$，而 M'、 N'分别是 M、 N的子对象。事实上，对单态射 i： $M' \to M$与满态射 q： $N \to N/N'$，有 $T(f) = T(q)fT(i)$，且 $T(i)$ $T(q)$是同构，见 [22, 第三章第1节命题 1]。由于 $\mathcal{A}$ 是半单的， M' 与N/N'分别是 M与 N的直和项。因此，存在满态射p: $M \to M'$与单态射 j： $N/N' \to N$，使得 $pi = \mathrm{Id}_{M'}$且 $qj = \mathrm{Id}^{N/N'}$。因为$T(i)$与 $T(q)$是 $\mathcal{A}/\mathcal{C}$中的同构，我们有 $T(i)^{-1} = T(p)$以及 $T(q)^{-1} = T(j)$。这意味着$f = T(j)T(f)T(p) = T(jfp)$。因此， T是满的。

例 3.31. 设 $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ 为一个具有余等化子的幺半范畴，并假设每个对象都是余平坦的。设 $e\colon \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ 为一个幂等自然变换，使得对每个 $X, Y \in \mathcal{C}$ 都有 $e_{X\otimes Y} = e_X \otimes e_Y$，并设 $\mathcal{C}_e$ 为在 [21, 例 17] 中定义的余识别范畴，其 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_e) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，且 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_e}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)/\sim$，其中态射集上的同余关系 $\sim$对所有 $f, g\colon X \to Y$（在 $\mathcal{C}$ 中）由设定 $f \sim g$ 当且仅当 $e_Y \circ f = e_Y \circ g$给出。

对任意态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$，我们用 $\bar{f}$ 表示 f 在 $\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}_e}(X,Y)$ 中的类。商函子 $H: \mathcal{C} \to \mathcal{C}_e$ 在对象上作用为恒等映射，在态射上作用为典范投影。由 [5, 1.5] 可知， H 是本质满的，并且关于 $\mathcal{P}_{X,Y}: \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_e}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$（由 $\mathcal{P}_{X,Y}(\bar{f}) = e_Y \circ f$ 定义）是自然满的。

我们观察到（$\mathcal{C}_e, \otimes, \mathbf{1}$）是一个幺半范畴。更确切地说，（$\mathcal{C}_e, \otimes, \mathbf{1}$）中对象的张量积由与 $\mathcal{C}$ 中相同的对象定义，而在态射上由 $\bar{f} \otimes \bar{g} := \overline{H(f \otimes g)}$ 定义。它是良定义的，因为对于 $\bar{f}, \bar{f'}: \bar{X} \to \bar{X'}$, $\bar{g}, \bar{g'}: Y \to Y'$ 在 $\mathcal{C}$ 中使得 $\bar{f} = \bar{f'}$ 且 $\bar{g} = \bar{g'}$，我们有 $e_{X' \otimes Y'}(f \otimes g) = e_{X'} f \otimes e_{Y'} g = e_{X'} f' \otimes e_{Y'} g' = e_{X' \otimes Y'}(f' \otimes g')$。因此， $H(f \otimes g) = H(f' \otimes g')$。由定义可知， H 显然是一个严格幺半函子。

我们证明 H 保持余等化子。设 (Q, q) 是平行态射 $f, g: U \to V$ 在 $\mathcal{C}$ 中的余等化子。我们有 $Hq \circ Hf = H(qf) = H(qg) = Hq \circ Hg$。对于任意满足 $\xi \circ Hf = \xi \circ Hg$ 的 $\xi: HV \to HZ$ 在 $\mathcal{C}_e$ 中，我们有 $H(h) = \xi$，其中 $h: V \to Z$ 在 $\mathcal{C}$ 中，因此 $H(h \circ f) = H(h \circ g)$。于是， $e_Z \circ h \circ f = e_Z \circ h \circ g$。根据余等化子 (Q, q) 的泛性质，存在唯一的 $l: Q \to Z$ 在 $\mathcal{C}$ 中，使得 $l \circ q = e_Z \circ h$，进而 $Hl \circ Hq = Hh = \xi$。假设存在态射 $t: Q \to Z$ 在 $\mathcal{C}_e$ 中，使得 $Hl \circ Hq = t \circ Hq$。由于 H 是满的，存在态射 $t': Q \to Z$ 在 $\mathcal{C}$ 中，使得 $t = H(t')$。因此， $H(lq) = H(t'q)$，这意味着 $e_Z lq = e_Z t' q$。由于 q 是满态射，我们有 $e_Z l = e_Z t'$。因此， $Hl = Ht' = t$。这意味着 Hl 是 $\mathcal{C}_e$ 中满足 $Hl \circ Hq = \xi$ 的唯一态射。

例 3.32. 设 $(\mathcal{A}, \otimes, \mathbf{1})$ 是一个张量积双正合的阿贝尔幺半范畴。回忆一下，例 2.4], 中的有界导出范畴 $(\mathbf{D}^b(\mathcal{A}), \widetilde{\otimes}, 1^\bullet)$ 是一个幺半三角范畴，其幺半结构 $\widetilde{\otimes}$ 继承自有界同伦范畴 $\mathbf{K}^b(\mathcal{A})$，这意味着局部化函子 $Q: \mathbf{K}^b(\mathcal{A}) \to \mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ 是一个强幺半函子。此外，典范函子 $\mathcal{A} \to \mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ 是全忠实的，参见例如 [24, 1.5], 这意味着局部化函子 Q 是满的。因此， Q是一个满、本质满的强幺半函子。此外， Q 保有限余极限，参见例如 [35, 引理 05Q2]。因此，它保余等化子。

4. 余归纳函子

设 (C, Δ, ε) 是具有等化子的幺半范畴 $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$ 中的一个余代数。我们回顾例如 [4]（另见 [1, 定义 2.2.1]）：给定 $\mathcal{C}$ 中的右 C-余模 (V, ρ_V^C) 和左 C-余模 (W, λ_W^C)，它们在 $\mathcal{C}$ 中关于 C 的余张量积定义为态射对 $(\rho_V^C \otimes W, V \otimes \lambda_W^C)$ 的等化子 $(V \square_C W, e_{V,W}^C)$:

$$V \square_C W \xrightarrow{e_{V,W}^C} V \otimes W \underset{\mathrm{Id}_V \otimes \lambda_W^C}{\overset{\rho_V^C \otimes \mathrm{Id}_W}{\rightrightarrows}} V \otimes C \otimes W. \tag{6}$$

Fo对于任意左 C-余线性态射 $f: X \to Y$（属于 $\mathcal{C}$），令 $V \square_C f: V \square_C X \to V \square_C Y$ 为唯一的态射 $\mathcal{C}$ 中满足

$$e_{V,Y}^C (V \square_C f) = (\mathrm{Id}_V \otimes f) e_{V,X}^C.$$

设 $g: M \to N$ 属于 $\mathcal{C}^C$，且 Y 属于 ${}^C\mathcal{C}$。那么， $g \square_C Y: M \square_C Y \to N \square_C Y$ 是 $\mathcal{C}$ 中满足下式的唯一态射

$$e_{N,Y}^C (g \square_C Y) = (g \otimes \mathrm{Id}_Y) e_{M,Y}^C.$$

我们有典范的（自然）同构 Λ_M, $\Lambda_{M,X}$, Λ'_Y:

- $\Lambda_M: M \to M \square_C C$，由性质 $\rho_M^C = e_{M,C}^C \Lambda_M$ 唯一确定；
- $\Lambda_{M,X}: M \otimes X \to M \square_C (C \otimes X)$，由性质 $\rho_M^C \otimes \mathrm{Id}_X = e_{M,C\otimes X}^C \Lambda_{M,X}$ 唯一确定；
- $\Lambda'_Y: Y \to C \square_C Y$，由性质 $\lambda_Y^C = e_{C,Y}^C \Lambda'_Y$ 唯一确定。

容易验证，

$$\Lambda_M^{-1} = (\mathrm{Id}_M \otimes \varepsilon) e_{M,C}^C, \quad (\Lambda'_Y)^{-1} = (\varepsilon \otimes \mathrm{Id}_Y) e_{C,Y}^C.$$

设 C, D 是 $\mathcal{C}$ 中的余代数。我们用 ${}^D\mathcal{C}^C$ 表示 (D, C)-双余模的范畴。若对象 X 属于 $\mathcal{C}$，且 $- \otimes X$（分别地， $X \otimes -$）保持等化子，则称其为右平坦（分别地，左平坦）。我们有：

i) 若 C 右平坦，则对任意 $V \in {}^{D}\mathcal{C}^{C}$, $M \in \mathcal{C}^{D}$ ，态射 $\rho^{C}_{M\square_D V}$ 由 $(e^{D}_{M,V} \otimes C)$ $\rho^{C}_{M\square_D V} = (\mathrm{Id}_M \otimes \rho^{C}_{V})e^{D}_{M,V}$ 唯一确定；*ii*) 若 C 左平坦，则对任意 $V \in {}^{D}\mathcal{C}$, $M \in {}^{C}\mathcal{C}^{D}$，态射 $\lambda^{C}_{M\square_D V}$: $M\square_D V \to C \otimes (M\square_D V)$ 由 $(\mathrm{Id}_C \otimes e^{D}_{M,V})\lambda^{C}_{M\square_D V} = (\lambda^{C}_{M} \otimes \mathrm{Id}_V)e^{D}_{M,V}$ 唯一确定。

设 $\psi : C \to D$ 是 $\mathcal{C}$ 中的余代数态射。考虑 余标量限制函子$\psi_* : \mathcal{C}^{C} \to \mathcal{C}^{D}$ 和 余诱导函子

$$\psi^* := -\square_D C : \mathcal{C}^{D} \to \mathcal{C}^{C}, \quad (M, \rho^{D}_{M}) \mapsto (M\square_D C, \rho^{C}_{M\square_D C}), \quad f \mapsto f\square_D C,$$

其中 $\rho^{C}_{M\square_D C}$: $M\square_D C \to (M\square_D C) \otimes C$ 由下式唯一确定

$$(e^{D}_{M,C} \otimes \mathrm{Id}_C)\rho^{C}_{M\square_D C} = (\mathrm{Id}_M \otimes \Delta_C)e^{D}_{M,C}.$$

我们有伴随 $\psi_* \dashv \psi^* : \mathcal{C}^{D} \to \mathcal{C}^{C}$，其单位和余单位定义如下

$$\eta_M := \overline{\rho^{C}_{M}} : M \to M\square_D C, \quad \epsilon_N := (\mathrm{Id}_N \otimes \varepsilon_C)e^{D}_{N,C} : N\square_D C \to N,$$

对于每个 $(M, \rho^{C}_{M}) \in \mathcal{C}^{C}$、$(N, \rho^{D}_{N}) \in \mathcal{C}^{D}$，其中 $\overline{\rho^{C}_{M}}$ 由 $\rho^{C}_{M} = e^{D}_{M,C}\rho^{C}_{M}$ 唯一确定。

注 4.1. 根据注 3.2 的对偶结论，若 ψ: $C \to D$ 和 φ: $D \to E$ 是 $\mathcal{C}$ 中的余代数态射，则 $\varphi_* \circ \psi_* \cong (\varphi \circ \psi)_*$。

在本节中，除非另有说明，我们始终假设幺半范畴具有等化子，且其对象都是平坦的。

4.1. 余诱导函子的半可分性。 设 ψ: $C \to D$ 是域上的余代数态射。回顾 [5, 命题 3.8] ，余归纳函子 $\psi^* = -\square_D C : \mathcal{M}^{D} \to \mathcal{M}^{C}$ 是半可分的，当且仅当 ψ 是一个 D-双余模的正则态射；这又当且仅当存在一个 D-双余模态射 χ: $D \to C$ 使得 $\varepsilon_C \circ \chi \circ \psi = \varepsilon_C$。我们将这一结果推广到幺半范畴情形。为此，我们需要 $\mathcal{C}$中左 $\otimes$-生成元的对偶概念。

定义 4.2. 设 $\mathcal{C}$ 是一个幺半范畴。若对象 Q满足：对于 $\mathcal{C}$中的任意两个态射 f, g: $Y \to Z \otimes W$，只要 $(\xi \otimes \mathrm{Id}_W)f = (\xi \otimes \mathrm{Id}_W)g$，则对每个 $\mathcal{C}$中的 ξ: $Z \to Q$，都有 $f = g$，那么称 $\mathcal{C}$ 中的对象 Q为 $\mathcal{C}$ 的左 $\otimes$-余生成元 。此外，若一个对象既是左 $\otimes$-余生成元又是右 $\otimes$-余生成元，则称其为双侧 $\otimes$-余生成元 。

下一个引理是引理 3.4 的对偶版本。

引理 4.3. 设 $\psi : C \to D$ 是幺半范畴 $\mathcal{C}$ 中的余代数态射。假设 $\mathcal{C}$ 的单位对象 1 是左 $\otimes$-余生成元。那么，存在一个双射

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Id}_{\mathcal{C}^D}, \psi_*\psi^*) \cong {}^{D}\mathrm{Hom}^{D}(D, C).$$

证明。 我们仅给出证明的概要。定义 $\alpha : \mathrm{Nat}(\mathrm{Id}_{\mathcal{C}^D}, \psi_*\psi^*) \to {}^{D}\mathrm{Hom}^{D}(D, C)$ by$\alpha(t) = (\Lambda'_C)^{-1} \circ t_D$。可以验证 $\alpha(t)$ 是 $\mathcal{C}$ 中的 D-双余模态射。为证明 $\alpha(t)$ 属于 ${}^{D}\mathcal{C}$，可利用 1 是左 $\otimes$-余生成元这一事实。此外， α 是一个双射，其逆映射 α' 定义如下:

$$\alpha'(\chi) = (\beta_Y := (Y\square_D \chi)\Lambda_Y : Y \to Y\square_D C)_{Y \in \mathcal{C}^D},$$

对每个 χ ，其中 ${}^{D}\mathrm{Hom}^{D}(D, C)$。 □

本节中的若干结果可由第 3 节中的对应结果通过对偶性得到。为供日后参考，我们在此列出这些结果而不作证明。与定理 3.5 对偶，余诱导函子的半可分性可作如下刻画。

定理 4.4。 设 ψ: $C \to D$ 是幺半范畴 $\mathcal{C}$中的余代数态射。则下列断言等价:

（i） ψ 是 D-双余模的正则态射 $\mathcal{C}$ （即存在一个 D-双余模态射χ: $D \to C$ 在 $\mathcal{C}$ 中，使得 $\psi \circ \chi \circ \psi = \psi$）；（$ii$）存在一个 D-双余模态射 χ: $D \to C$ 在 $\mathcal{C}$ 中，使得 $\varepsilon_C \circ \chi \circ \psi = \varepsilon_C$。

若前述等价条件之一成立，则

（iii）余诱导函子 $\psi^* = -\square_D C$: $\mathcal{C}^{D} \to \mathcal{C}^{C}$ 是半可分的。

此外，如果 $\mathcal{C}$ 的单位对象1 是一个左 $\otimes$-余生成元，那么(iii) 等价于(i)，(ii)。

下面是定理 3.3 的对偶形式（另见注 3.10）。

命题 4.5。设 $\psi: C \to D$ 是幺半范畴 $\mathcal{C}$中的余代数态射。则下列断言等价:

(i) ψ 作为 D-双余模态射是分裂满态射，即在 $\mathcal{C}$ 中存在一个 D-双余模态射 $\chi: D \to C$，使得 $\psi \circ \chi = \mathrm{Id}_D$）；$(ii)$ 在 $\mathcal{C}$ 中存在一个 D-双余模态射 $\chi: D \to C$，使得 $\varepsilon_C \circ \chi = \varepsilon_D$。若上述等价条件之一成立，则$(iii)$ 余诱导函子 $\psi^* = -\Box_D C: \mathcal{C}^D \to \mathcal{C}^C$ 是可分的。M

此外，若单位对象 1 是 $\mathcal{C}$ 的一个左 $\otimes$-余生成元，则(iii) 等价于 (i)，(ii)
T下一个结果给出了余归纳函子的自然满性，与命题 3.7 对偶。

命题 4.6. 设 $\psi: C \to D$ 是幺半范畴 $\mathcal{C}$ 中的余代数态射。那么，以下断言等价:

(i) ψ 是 $\mathcal{C}$ 中的 D-双余模态射分裂单态射（即存在一个 D-双余模态射 $\chi: D \to C$，属于 $\mathcal{C}$，使得 $\chi \circ \psi = Id_C$）；*(ii)* ψ 是单态射，且存在一个 D-双余模态射 $\chi: D \to C$，属于 $\mathcal{C}$，使得$\varepsilon_C \circ \chi \circ \psi = \varepsilon_C$。若前述等价条件之一成立，则 *(iii)* 余归纳函子 $\psi^* = -\Box_D C:$ $\mathcal{C}^D \to \mathcal{C}^C$ 自然满。此外，若 $\mathcal{C}$ 的单位对象 *1* 是左 $\otimes$-余生成元，则 *(iii)* 等价于 *(i)*、*(ii)*。

注 4.7. 可以观察到，若余诱导函子 $\psi^*: \mathcal{C}^D \to \mathcal{C}^C$ 是半可分的（分别地，可分的、自然满的），则存在 $\chi \in \mathrm{Hom}^D(D, C)$，使得 $\psi\chi\psi = \psi$ （分别地，$\psi \circ \chi = \mathrm{Id}_D$、$\chi \circ \psi = \mathrm{Id}_C$）。

推论 4.8. 设 $\psi: C \to D$ 是幺半范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个余代数态射，且其单位是左 $\otimes$-余生成元。那么，余诱导函子 $\psi^*: \mathcal{C}^D \to \mathcal{C}^C$ 自然满，当且仅当 ψ^* 半可分且 ψ 是单态射。类似地，ψ^* 可分，当且仅当 ψ^* 半可分且 ψ 是满态射。

注4.9. 给定 $\mathcal{C}$ 中的一个余代数态射 $\psi: C \to D$，我们也可以考虑余诱导函子 $\psi^* = C\Box_D -: {}^D\mathcal{C} \to {}^C\mathcal{C}$。事实上，命题4.4中的（$i$）蕴含 $\psi^*: {}^C\mathcal{C} \to {}^D\mathcal{C}$ 是半可分的。若 1 是右 $\otimes$-余生成元，则逆命题也成立。因此，若 1 是双侧 $\otimes$-余生成元，则 $C\Box_D -$ 半可分，当且仅当 $-\Box_D C$也半可分。可分情形和自然满情形也有类似结论。

4.2. **例子**。现在我们将这些结果应用于一些例子。

例4.10. 设 $\Bbbk$ 是一个域。考虑由 $\Bbbk$-向量空间构成的幺半范畴 $(\mathrm{Vec}_\Bbbk, \otimes_\Bbbk, \Bbbk)$。对于每个 $X \in \mathrm{Vec}_\Bbbk$，众所周知，函子 $- \otimes_\Bbbk X$（分别为 $X \otimes_\Bbbk -$）保等化子。现在我们证明 $\Bbbk$ 是一个左 $\otimes$-余生成元。设 $f, g: Y \to Z \otimes_\Bbbk W$ 是 $\Bbbk$-线性映射。假设对于所有 $\xi: Z \to \Bbbk$属于 $\mathrm{Vec}_\Bbbk$，都有 $(\xi \otimes_\Bbbk \mathrm{Id}_W)(f(y)) = (\xi \otimes_\Bbbk \mathrm{Id}_W)(g(y))$。将 $f(y)$ 和 $g(y)$ 在一组基上表示，我们得到 $\sum_{i,j} k_{ij}^f \xi(z_i) \otimes w_j = \sum_{i,j} k_{ij}^g \xi(z_i) \otimes w_j$。于是，对于所有$\xi: Z \to \Bbbk$，都有 $\sum_i k_{ij}^f \xi(z_i) = \sum_i k_{ij}^g \xi(z_i)$。特别地，当 $\xi = z_l^*: Z \to \Bbbk$ 时，我们得到 $k_{lj}^f = k_{lj}^g$。因此 $f = g$。于是，定理 4.4 推出 [5, 命题 3.8]，命题 4.5 推出 [19, 定理 2.7], 而命题 4.6 推出 [6,例 3.23 (1)]。

示例4.11. 设 $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ 和 $(\mathcal{C}', \otimes, 1')$ 是两个幺半范畴。根据 [2, 第 4], 页，它们的积范畴 $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$是一个幺半范畴，其张量积为 $(X, X') \otimes (Y, Y') := (X \otimes Y, X' \otimes Y')$，单位对象为 $(1, 1')$。如果 1 和 $1'$分别是 $\mathcal{C}$和 $\mathcal{C}'$中的左 $\otimes$-余生成元，那么 $(1, 1')$ 是 $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$中的左 $\otimes$-余生成元。事实上，设 (f, f')、$(g, g'): (Y, Y') \to (Z, Z') \otimes (W, W')$ 是 $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$中的态射，且对于所有 $(\xi, \xi'): (Z, Z') \to (1, 1')$，有 $((\xi, \xi') \otimes \mathrm{Id}_{(W,W')})(f, f') = ((\xi, \xi') \otimes \mathrm{Id}_{(W,W')})(g, g')$。这意味着对于所有 $\xi: Z \to 1$ in $\mathcal{C}$ 和 $\xi': Z' \to 1'$ in $\mathcal{C}'$，$(\xi \otimes \mathrm{Id}_W)f = (\xi \otimes \mathrm{Id}_W)g$ 且 $(\xi' \otimes \mathrm{Id}_{W'})f' = (\xi' \otimes \mathrm{Id}_{W'})g'$。由于 1 和 $1'$ 分别是 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}'$中的左 $\otimes$-余生成元，因此我们有 $f = g$ 和 $f' = g'$。由此可得 $(f, f') = (g, g')$，即 $(1, 1')$ 是 $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$中的左 $\otimes$-余生成元。

例如，考虑域 $\Bbbk$ 上的向量空间范畴 $\mathcal{C} = \mathcal{C}' = \mathrm{Vec}_\Bbbk$。根据例4.10，我们知道 $1 = \Bbbk$ 是 $\mathrm{Vec}_\Bbbk$ 的左 $\otimes$-余生成元。那么，(1,1) 是

$\mathrm{Vec}_{\Bbbk} \times \mathrm{Vec}_{\Bbbk}$ 的左 -余生成元。此外，容易验证 $\mathrm{Vec}_{\Bbbk} \times \mathrm{Vec}_{\Bbbk}$ 有等化子，且每个对象都是平坦的。因此，定理 4.4、命题 4.5 和命题 4.6 均适用。

例 4.12。考虑集合的幺半范畴 $(\mathrm{Set}, \times, \{0\})$。注意，$\{0\}$ 不是左$\otimes$-余生成元。否则，对于任意满足 $(\xi \times \mathrm{Id}_W)f = (\xi \times \mathrm{Id}_W)g$ 的 $f, g\colon Y \to Z \times W \in \mathrm{Set}$ 以及任意 $\xi\colon Z \to \{0\}$，都有 $f = g$。考虑 $Z = \{0, 1\}$，并固定一个 $w \in W$，令 $f\colon Y \to Z \times W$, $f(y) = (0, w)$，以及 $g\colon Y \to Z \times W$, $g(y) = (1, w)$。那么，$(\xi \times \mathrm{Id}_W)f = (\xi \times \mathrm{Id}_W)g$，但 $f \neq g$。事实上，左 $\otimes$-余生成元可以取为至少含有两个不同元素的集合，参见例如 [10, 命题 4.71]。此外，对于任意 $S \in \mathrm{Set}$，$- \times S$（分别地，$S \times -$）保持等化子。事实上，$\mathrm{Eq}(f, g) \times S = \{(v, s) \in V \times S \mid f(v) = g(v)\} = \{(v, s) \in V \times S \mid (f \times \mathrm{Id}_S)(v, s) = (g \times \mathrm{Id}_S)(v, s)\} = \mathrm{Eq}(f \times \mathrm{Id}_S, g \times \mathrm{Id}_S)$。回顾一下，任意集合 S 都是 Set 中的一个余代数，其余乘法为 $\Delta_S\colon S \to S \times S$, $s \mapsto (s, s)$，余单位为 $S \to \{0\}$, $s \mapsto 0$；任意映射都是 Set 中的余代数态射。给定 Set 中的一个态射 $\psi : C \to D$，我们断言余诱导函子 ψ^* 可分，当且仅当 ψ 是满射。事实上，若 ψ 是满射，则由选择公理，ψ 是分裂满态射，因此存在 $\chi : D \to C$，使得 $\psi\chi = \mathrm{Id}_D$。我们注意到，χ 是 Set 中的 D-双余模态射，因为 $(\chi \times \mathrm{Id}_D)\Delta_D(d) = (\chi(d)\ d) = (\chi(d)\ \psi\chi(d)) = (\mathrm{Id}_C \times \psi)\Delta_C(\chi(d))$，且类似地 $(\mathrm{Id}_D \times \chi)\Delta_D = (\psi \times \mathrm{Id}_C)\Delta_C\chi$。于是，由命题 4.5，$\psi^*$ 可分。反过来，若 ψ^* 可分，则由注 4.7 可知，存在 $\chi \in \mathrm{Hom}^D(D, C)$，使得 $\psi\chi = \mathrm{Id}_D$。于是，ψ 是满射。

然而，对于自然满情形，我们并没有类似的断言。更确切地说，若 $\psi : C \to D$ 是单射，则 ψ^* 未必自然满。一个例子由 $\psi : \{0\} \to S, \psi(0) = s_1$ 给出，其中 S 为非空集，s_1 是 S 中的一个固定元素。于是，唯一的 $\chi\colon S \to \{0\}$ 由 $\chi(s) = 0$ 给出；若 S 至少有两个元素，则它不是集合范畴中的 S-双余模态射。由注 4.7，ψ^* 并非自然满。

现在，对于集合范畴中的余代数态射 $\psi : C \to D$，我们断言 ψ^* 半可分当且仅当 ψ^* 可分。事实上，若 ψ^* 半可分，则由注 4.7，存在右 D-余模态射 $\chi : D \to C$ 使得 $\psi\chi\psi = \psi$。由于 χ 是右 D-余模态射，我们知道对所有 $d \in D$ 有 $\psi\chi(d) = d$，因此 ψ 是满射。于是 ψ^* 可分。另一方面，若 ψ^* 可分，则由命题 2.1 它是半可分的。因此，ψ^* 自然满当且仅当它全忠实。此外，若 ψ^* 自然满，则由注 4.7 ψ 是双射。反之，若 ψ 是双射，则存在映射 $\chi : D \to C$ 使得 $\chi\psi = \mathrm{Id}_C$ 且 $\psi\chi = \mathrm{Id}_D$。由上文的观察，χ 是 D- 双余模态射，故由命题 4.6，ψ^* 自然满。

例 4.13. 设 H 是域 $\Bbbk$ 上的有限维双代数，并令 $({}_H\mathcal{M}, \otimes, \Bbbk)$ 为例 3.17 中所考虑的左 H-模范畴。众所周知，对于 ${}_H\mathcal{M}$ 中的任意对象 X，函子 $X \otimes -$ 和 $- \otimes X$ 都是正合的。回忆一下，${}_H\mathcal{M}$ 中的余代数 C 是一个 H-模余代数，即一个带有余乘法 Δ_C 和余单位 ε_C 的余代数 C，满足 $\Delta_C(h \cdot c) = (h_1 \cdot c_1) \otimes (h_2 \cdot c_2)$，且 $\varepsilon_C(h \cdot c) = \varepsilon_H(h)\varepsilon_C(c)$。我们注意到，$\Bbbk$ 通常不是左 $\otimes$-余生成元。例如，考虑群代数 $\Bbbk G$，其中 G 是一个有限群。定义 $f_g : \Bbbk G \to \Bbbk G, x \mapsto xg$，其中 $g \neq 1$。显然，f_g 和恒等映射 $\mathrm{Id}_{\Bbbk G}$ 都是左 $\Bbbk G$-模态射。对于任意左 $\Bbbk G$-模态射 $\xi : \Bbbk G \to \Bbbk$，$\Bbbk G$-线性意味着，对于所有 $h \in \Bbbk G$，$\xi(h) = \varepsilon(h)\xi(1)$。因此，$\xi f_g(x) = \xi(xg) = \varepsilon(x)\xi(1) = \xi(x)$，但 $f_g \neq \mathrm{Id}_{\Bbbk G}$。因此，$\Bbbk$ 不是余生成元，因而不是左 $\otimes$-余生成元。

我们还注意到，在包含至少两个非同构对象的半单阿贝尔范畴中，任何单对象都不能是余生成元。因此，在相应的幺半情形下，它也不能是左 $\otimes$-余生成元。为此，假设单对象 X 是左余生成元，并选取另一个单对象 Y，使得 Y 与 X不同构。根据舒尔引理（例如，参见[20, 引理 1.5.2]），Y 与 X 之间唯一的态射是零态射。因此，我们可以取恒等态射 $\mathrm{Id}_Y\colon Y \to Y$和零态射 $0_Y\colon Y \to Y$。我们总有 $0_{Y,\,X}\mathrm{Id}_Y = 0_{Y,\,X}0_Y$，但 $\mathrm{Id}_Y \neq 0_Y$。

设 H'是 ${}_H\mathcal{M}$中的一个余代数。显然，$\Bbbk \oplus H'$属于 ${}_H\mathcal{M}$，且具有逐分量的 H-模结构。我们断言，$\Bbbk \oplus H'$ 是 ${}_H\mathcal{M}$ 中的一个余代数，其余代数结构由 $\Delta_{\Bbbk\oplus H'}((k,\ h)) := (k,\ 0) \otimes (1,\ 0) + (0,\ h_1) \otimes (0,\ h_2)$ 和 $\varepsilon_{\Bbbk\oplus H'}((k,\ h)) = k + \varepsilon_{H'}(h)$ 给出。事实上，这个余代数结构源自 ${}_H\mathcal{M}$ 是一个双幺半范畴（参见定义 5.1 ）这一事实，其中

$\circ = \oplus$, $\bullet = \otimes$，参见例如 [2, 例 6.19], ，并应用 [2, 命题 6.35]。考虑单射$i_{\Bbbk}\colon \Bbbk \to \Bbbk \oplus H'$ 和投影 $\pi : \Bbbk \oplus H' \to \Bbbk$，它们是 ${}_H\mathcal{M}$中的态射。我们证明

π是$(\Bbbk \oplus H')$-双余线性的。事实上，$(i_{\Bbbk} \otimes \Bbbk)\Delta_{\Bbbk}\pi((k,\ h)) = (k,\ 0) \otimes 1 = ((\Bbbk \oplus H') \otimes \pi)((k,\ 0) \otimes (1,\ 0) + (0,\ h_1) \otimes (0,\ h_2)) = ((\Bbbk \oplus H') \otimes \pi)\Delta((k,\ h))$。类似地，可以验证 π是右$(\Bbbk \oplus H')$-余线性的。此外，$\pi \circ i_{\Bbbk} = \mathrm{Id}_{\Bbbk}$，因此由命题 4.6，余诱导函子 $i_{\Bbbk}^*: {}_{(H}\mathcal{M})^{\Bbbk \oplus H'} \to {}_{H}\mathcal{M})^{\Bbbk}$是自然满的。

例 4.14. 设 $\mathcal{C}$ 是一个么半范畴，A、A' 是 $\mathcal{C}$ 中的代数，且 $\pi: A \to A'$、$\gamma: A' \to A$ 是 $\mathcal{C}$ 中的代数态射，使得 $\pi\gamma = \mathrm{Id}_{A'}$。由于 π 是 $\mathcal{C}$ 中的代数态射，我们有 $\pi m_A(\gamma \otimes A) = m_{A'}(\pi \otimes \pi)(\gamma \otimes A) = m_{A'}(A' \otimes \pi)$，类似地，$\pi m_A(A \otimes \gamma) = m_{A'}(\pi \otimes \pi)(A \otimes \gamma) = m_{A'}(\pi \otimes A')$。由定理 3.3 和注 3.10 可知，诱导函子 $\gamma^*: \mathcal{C}_{A'} \to \mathcal{C}_A$ 是可分的。对偶地，设 C、C' 是 $\mathcal{C}$ 中的余代数，且 $\pi: C \to C'$、$\gamma: C' \to C$ 是 $\mathcal{C}$ 中的余代数态射，使得 $\pi\gamma = \mathrm{Id}_{C'}$。由命题 4.5 可知，余诱导函子 $\pi^*: \mathcal{C}^{C'} \to \mathcal{C}^C$ 是可分的。

作为一例，考虑辫么半范畴 $\mathcal{C}$中带投影的双代数，即四元组(A, H, π, γ)，其中 A与 H是 $\mathcal{C}$中的双代数，且 $\pi: A \to H$、$\gamma: H \to A$是 $\mathcal{C}$ 中的双代数态射，使得 $\pi\gamma = \mathrm{Id}_H$。于是，诱导函子 $\gamma^*: \mathcal{C}_H \to \mathcal{C}_A$ 与余诱导函子 $\pi^*: \mathcal{C}^H \to \mathcal{C}^A$ 是可分的。特别地，设 H 为 $\mathcal{C}$中的霍普夫代数。考虑 ${}^H_H\mathcal{YD}(\mathcal{C})$中的双代数 R，以及玻色化 $R\#H$，见 [23, 定义 3.8.1]。由 [23,命题 3.8.4]，$R\#H$ 是 $\mathcal{C}$中的双代数，并且由 [23, 引理 3.8.2] $\pi := \varepsilon_R \otimes \mathrm{Id}_H: R\#H \to H$与 $\gamma := u_R \otimes \mathrm{Id}_H: H \to R\#H$是 $\mathcal{C}$中的双代数态射，且 $\pi\gamma = \mathrm{Id}_H$。于是，诱导函子 $\gamma^*: \mathcal{C}_H \to \mathcal{C}_{R\#H}$ 与余诱导函子 $\pi^*: \mathcal{C}^H \to \mathcal{C}^{R\#H}$ 是可分的。

4.3. 么半范畴中余代数的张量函子。设 $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ 为一个么半范畴，并设 (C, Δ, ε) 为 $\mathcal{C}$ 中的一个余代数。回想，对 $\mathcal{C}$ 中的任意对象 M，$(M \otimes C, M \otimes \Delta)$ 是 $\mathcal{C}$ 中右 C-余模范畴 $\mathcal{C}^C$ 中的一个对象，并且张量函子 $- \otimes C: \mathcal{C} \to \mathcal{C}^C, M \mapsto (M \otimes C, M \otimes \Delta)$，$f \mapsto f \otimes C$ 是遗忘函子 $F: \mathcal{C}^C \to \mathcal{C}$ 的右伴随。单位 η 对每个 $(N, \rho_N) \in \mathcal{C}^C$ 由 $\eta_{(N,\rho_N)} = \rho_N: N \to N \otimes C = F(N) \otimes C$ 定义；余单位 ϵ 对任意 $M \in \mathcal{C}$ 由 $\epsilon_M = M \otimes \varepsilon: F(M \otimes C) = M \otimes C \to M$ 给出，参见例如 [28, 第 2] 节。

引理 4.15. 设 (C, Δ, ε) 是么半范畴 $\mathcal{C}$中的一个余代数。那么，余诱导函子$\varepsilon^* = -\Box_1 C: \mathcal{C}^1 \to \mathcal{C}^C$ 可得 $- \otimes C: \mathcal{C} \to \mathcal{C}^C$。

证明。范畴 $\mathcal{C}$ 中任意对象 V 上的右 1-余模结构由单位约束 r_V^{-1} 给出。由三角公理可知 $r_V^{-1} \otimes \mathrm{Id}_C = \mathrm{Id}_V \otimes l_C^{-1}$。因此，我们有如下等化子

$$V \otimes C \xrightarrow{\mathrm{Id}_{V \otimes C}} V \otimes C \underset{\mathrm{Id}_V \otimes l_C^{-1}}{\overset{r_V^{-1} \otimes \mathrm{Id}_W}{\rightrightarrows}} V \otimes 1 \otimes C$$

这意味着 $V\Box_1 C = V \otimes C$。 □

若 $\varepsilon_C: C \to 1$ 是 $\mathcal{C}$中的正则态射，则根据定理 4.4 ε_C^*，它是半可分的。因此，$- \otimes C: \mathcal{C} \to \mathcal{C}^C$也是如此。注意，该定理要求 $\mathcal{C}$ 有等化子，且每个对象都是平坦的。不过，去掉这些条件后，我们仍然可以得到这一结果。

命题 4.16。设 C 是么半范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个余代数。则以下断言等价。

（i）余单位 $\varepsilon_C: C \to 1$ 作为 $\mathcal{C}$ 中的态射是正则的（分别为分裂满态射、分裂单态射）。（ii）张量函子 $- \otimes C: \mathcal{C} \to \mathcal{C}^C$ 是半可分的（分别为可分的、自然满的）。（iii）张量函子 $C \otimes -: \mathcal{C} \to {}^C\mathcal{C}$ 是半可分的（分别为可分的、自然满的）。

证明。这与命题 3.20 的证明对偶。 □

注 4.17。我们注意到，命题 4.16 中的（i）等价于存在一个态射$\chi: 1 \to C$，其属于 $\mathcal{C}$，使得（$\varepsilon_C \otimes C$）（$\chi \otimes C$）$= \mathrm{Id}_C$，这与注 3.21 对偶。

现在，我们讨论一些例子。

例4.18。设 C 是辫么半范畴 $\mathcal{C}$ 中的双代数。由于 $\varepsilon_C u_C = \mathrm{Id}_1$，，我们有 ε_C 是一个分裂满态射。根据命题 4.16，$- \otimes C: \mathcal{C} \to \mathcal{C}^C$ 是可分的。

例4.19. 设 R 为一个环。考虑 R-双模的么半范畴$({}_R\mathcal{M}_R, \otimes_R, R)$，并设 C 为一个 R-余环，即 ${}_R\mathcal{M}_R$中的一个余代数。于是，命题 4.16分别在半可分、可分与自然满情形下恢复了命题2.8, [12, 定理3.3], [6, 命题3.13] 。

例4.20. 设 $\Bbbk$ 为一个域，并考虑 $\Bbbk$上向量空间的幺半范畴(Vec $\otimes_{\Bbbk}, \Bbbk$)。设 $C \neq 0$ 为一个 $\Bbbk$-余代数。由命题 4.16，函子 $-\otimes_{\Bbbk} C : \mathrm{Vec} \to \mathcal{M}^C$ 是半可分的当且仅当它是可分的，因为在此情形下余单位 ε_C 是满射。此外，由 [13, 3.29] $-\otimes_{\Bbbk} C$ 是可分的当且仅当存在 $z \in C$ 使得 $\varepsilon_C(z) = 1$。由于 ε_C 是满射，故 $-\otimes_{\Bbbk} C$ 总是可分的。此外，$-\otimes_{\Bbbk} C$ 是满的当且仅当它是自然满的当且仅当它是全忠实的。

现在考虑左 H-模范畴 $({}_H\mathcal{M}, \otimes_{\Bbbk}, \Bbbk)$，其底层为一个 $\Bbbk$-双代数 H。设 C是 ${}_H\mathcal{M}$中的余代数，即一个 H-模余代数。由于 ε_C是满射，函子 $-\otimes_{\Bbbk} C\colon {}_H\mathcal{M} \to {}_H\mathcal{M}^C$ 半可分，当且仅当它可分。

更一般地，设 $\mathcal{C}$ 是一个阿贝尔幺半范畴，且单位对象是简单对象，例如具有左对偶的环范畴，参见 [20, 定理 4.3.8]。$\mathcal{C}$ 中非零余代数的余单位 ε_C 总是满态射。因此，$-\otimes C\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^C$ 半可分，当且仅当它可分。

例 4.21. 考虑集合的幺半范畴 (集合范畴 $\times$, $\{0\}$)。任意集合 S都是集合范畴中的余代数，参见例 4.12；当且仅当 S 非空时，余单位 $\varepsilon_S : S \to \{0\}$ 是满射。此外，令$s \in S$ 并定义 $\chi : \{0\} \to S$, $0 \mapsto s$。我们有 $\varepsilon_S\chi(0) = 0$，因此 ε_S 是一个分裂满态射。于是，对任意非空集合 S，命题 4.16 蕴含函子 $-\times S$ 是可分的。因此，它是半可分的。故 $-\times S$ 是满的，当且仅当它是自然满的，当且仅当 ε_S 是双射。

4.4. 由幺半函子变动的余诱导函子。设 $(F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}, \psi^2, \psi^0)$ 是一个余松幺半函子，参见例如 [2, 定义 3.2], ，即一个函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，其定义于幺半范畴之间，并配备一个自然变换 ψ^2，其分量为 $\psi^2_{X,Y}\colon F(X \otimes Y) \to F(X) \otimes F(Y)$，以及一个态射 $\psi^0\colon F(1) \to 1'$，满足与松幺半函子的公理对偶的公理（参见第 3.4 小节）。若 $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个余代数，则 $(F(C) \overset{\psi^2_{C,C}}{\longleftarrow} F(\Delta_C)\ \psi^0 F(\varepsilon_C))$ 是 $\mathcal{D}$ 中的一个余代数，参见例如 [2, 命题 3.29]。此外，若 $\varphi\colon C \to D$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个余代数态射，则诱导的态射 $F(\varphi) : F(C) \to F(D)$ 是 $\mathcal{D}$ 中的一个余代数态射。

下一个结果是命题 3.24 的对偶。

命题 *4.22.* 设 *$(\mathcal{C}, \otimes, 1)$*、*$(\mathcal{D}, \otimes, 1')$* 为幺半范畴。假设 *$1$* 是 $\mathcal{C}$ 中的左 $\otimes$-余生成元。设 *$(F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}, \psi^2, \psi^0)$* 为余松幺半函子，并设 $\varphi\colon C \to D$ 为 $\mathcal{C}$ 中的余代数态射，使得 $\varphi^* = -\square_D C : \mathcal{C}^D \to \mathcal{C}^C$ 是半可分的（相应地，可分的、自然满的）。则 $F(\varphi)^* = -\square_{F(D)} F(C) : \mathcal{D}^{F(D)} \to \mathcal{D}^{F(C)}$ 是半可分的（相应地，可分的、自然满的）。

反之，假设 $1'$ 是 $\mathcal{D}$ 中的左 $\otimes$-余生成元，且 F 是全忠实松幺半函子，使得 ψ^2 在分量上为单态射。若 $F(\varphi)^* = -\square_{F(D)} F(C)\colon \mathcal{D}^{F(D)} \to \mathcal{D}^{F(C)}$ 是半可分的（相应地，可分的、自然满的），则 $\varphi^* = -\square_D C : \mathcal{C}^D \to \mathcal{C}^C$ 是半可分的（相应地，可分的、自然满的）。

对于余代数态射由 $\mathcal{C}$ 中余代数 C 的余单位 $\varepsilon\colon C \to 1$ 给出的特殊情形，并不要求幺半单位是左 $\otimes$-余生成元。事实上，我们得到命题 3.25 与命题 3.26 的如下对偶。

命题 4.23. 设 $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$、$(\mathcal{D}, \otimes, 1')$ 为幺半范畴，C 为 $\mathcal{C}$ 中的余代数，其余单位为 $\varepsilon_C\colon C \to 1$。设 $(F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}, \psi^2, \psi^0)$ 为余松幺半函子。

i) 若 ψ^0 是分裂单态射，且 $-\otimes C\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^C$ 是半可分的（相应地，自然满的），则 $-\otimes F(C)\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}^{F(C)}$ 是半可分的（相应地，自然满的）。*ii)* 若 ψ^0 是分裂满态射，且 $-\otimes C\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^C$ 是可分的，则 $-\otimes F(C)\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}^{F(C)}$ 是可分的。

命题 4.24. 设$(\mathcal{C}, \otimes, 1)$、$(\mathcal{D}, \otimes, 1')$ 为幺半范畴，C是 $\mathcal{C}$中的一个余代数，其余单位为 $\varepsilon_C\colon C \to 1$。设$(F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}, \psi^2, \psi^0)$ 是一个全忠实的余松幺半函子。若 ψ^0 是单态射，且 $-\otimes F(C)\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}^{F(C)}$ 是半可分（分别地，可分、自然满），则$-\otimes C\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^C$ 是半可分（分别地，可分、自然满）。

现在我们给出一个例子，其中幺半范畴中余代数的余单位 ε_C 不是满态射。

例 4.25. 设 $\Bbbk$为一个域，Vec$_f$ 为有限维 $\Bbbk$-向量空间范畴。考虑范畴 Mat$_n$(Vec$_f$)，其对象为 $n\times n$矩阵，其中 $n\geq 2$，矩阵元素取自 Vec$_f$。根据 [20,例 4.1.3], ，我们知道 Mat$_n$(Vec$_f$) 是一个多张量范畴，其张量积定义为

$$(V\otimes W)_{il}:=\bigoplus_{j=1}^{n}V_{ij}\otimes W_{jl},$$

以及单位 $\Bbbk \mathrm{I}_n$，其中 I_n 是单位矩阵。

考虑包含函子 $F\colon \mathrm{Vec}_f\to \mathrm{Mat}_n(\mathrm{Vec}_f)$，其定义为 $F(V)_{ij}=\delta_{i1}\delta_{j1}V$。显然

$$(F(V)\otimes F(W))_{il}=\bigoplus_{j}F(V)_{ij}\otimes F(W)_{jl}=\delta_{i1}\delta_{l1}V\otimes W=F(V\otimes W)_{il}.$$

因此，令 $\psi^2_{V,W}:=\mathrm{Id}\colon\ F(V\otimes W)\to F(V)\otimes F(W)$，$\psi^0\colon\ F(\Bbbk)=(\delta_{i1}\delta_{j1}\Bbbk)_{ij}\to \Bbbk\mathrm{I}_n$，其定义为 $(\psi^0)_{11}=\mathrm{Id}_\Bbbk$，其他情况下为 $(\psi^0)_{ij}=0$。可以验证，(F,ψ^2,ψ^0) 是一个余松幺半函子。回忆一下，若 $(C,\Delta_C,\varepsilon_C)$ 是 Vec$_f$ 中的一个余代数，则 $F(C)$ 是 Mat$_n$(Vec$_f$) 中的一个余代数，其余乘法为 $\psi^2_{C,C}F(\Delta_C)$，余单位为 $\psi^0F(\varepsilon_C)$。显然，$F(C)$ 的余单位不是满射。

设 C 为 Vec$_f$ 中的非零余代数。由命题 4.16，我们知道 $-\otimes_\Bbbk C\colon \mathrm{Vec}_f\to\mathcal{M}^C$ 总是可分的，因为 ε_C 是满射。由于 ψ^0 通过典范投影 $\phi^0\colon\ \Bbbk\mathrm{I}_n\to F(\Bbbk)$ 是分裂单态射，则由命题 4.23 i) 可得 $-\otimes F(C)$ 是半可分的。然而，$-\otimes F(C)$ 不是可分的，因为 $F(C)$ 的余单位不是满射。

5. 双幺半范畴中的半可分性结果

如命题 3.24 和命题 4.22 所示，（余）诱导函子最自然的变体之一是通过幺半函子给出的。人们可以考虑是否存在其他变体，它们保持（余）诱导函子的半可分性。事实上，这种性质可以由阿贝尔幺半范畴中的直和或预编织幺半范畴中的张量积来实现。更一般地，我们现在在双幺半范畴的范围内证明这些结果。

我们回顾双幺半范畴的概念 [2, 定义 6.1], 也称为双幺半范畴。

定义 5.1。双幺半范畴是一个范畴 $\mathcal{C}$，配备有两个幺半结构 $\mathcal{C}^\circ=(\mathcal{C},\ \circ,\ I,\ a^\circ,\ l^\circ,\ r^\circ)$ 和 $\mathcal{C}^\bullet=(\mathcal{C},\ \bullet,\ J,\ a^\bullet,\ l^\bullet,\ r^\bullet)$，二者通过一个自然变换相关联

$$\zeta=(\zeta_{A,B,C,D}:(A\bullet B)\circ(C\bullet D)\to(A\circ C)\bullet(B\circ D))_{A,B,C,D\in\mathcal{C}},$$

称为交换律，以及态射 $\delta\colon\ I\to I\bullet I$，$\varpi\colon\ J\circ J\to J$，$\tau\colon\ I\to J$，使得

i) $(J,\ \varpi,\ \tau)$ 是 $\mathcal{C}^\circ$ 中的代数，并且 $(I,\ \delta,\ \tau)$ 是 $\mathcal{C}^\bullet$ 中的余代数；

ii) 对所有 $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F\in\mathcal{C}$，以下结合条件成立，

$$\begin{aligned}(7)\qquad &\zeta_{A,B,C\circ E,D\circ F}(\mathrm{Id}_{A\bullet B}\circ\zeta_{C,D,E,F})a^\circ_{A\bullet B,C\bullet D,E\bullet F}\\ &\qquad=(a^\circ_{A,C,E}\bullet a^\circ_{B,D,F})\zeta_{A\circ C,\ B\circ D,\ E,\ F}(\zeta_{A,\ B,\ C,\ D}\circ\mathrm{Id}_{E\bullet F})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(8)\qquad &(\mathrm{Id}_{A\circ D}\bullet\zeta_{B,C,E,F})\zeta_{A,B\bullet C,D,E\bullet F}(a^\bullet_{A,B,C}\circ a^\bullet_{D,E,F})\\ &\qquad=a^\bullet_{A\circ D,B\circ E,C\circ F}(\zeta_{A,B,D,E}\bullet\mathrm{Id}_{C\circ F})\zeta_{A\bullet B,C,D\bullet E,F};\end{aligned}$$

iii) 对所有 $A,\ B\in\mathcal{C}$，以下单位条件成立

$$(9)\qquad (l^\circ_A\bullet l^\circ_B)\zeta_{I,I,A,B}(\delta\circ\mathrm{Id}_{A\bullet B})=l^\circ_{A\bullet B};\quad (r^\circ_A\bullet r^\circ_B)\zeta_{A,B,I,I}(\mathrm{Id}_{A\bullet B}\circ\delta)=r^\circ_{A\bullet B};$$

$$(10)\qquad l^\bullet_{A\circ B}(\varpi\bullet\mathrm{Id}_{A\circ B})\zeta_{J,A,J,B}=l^\bullet_A\circ l^\bullet_B;\quad r^\bullet_{A\circ B}(\mathrm{Id}_{A\circ B}\bullet\varpi)\zeta_{A,J,B,J}=r^\bullet_A\circ r^\bullet_B.$$

本节中，我们始终考虑一个双幺半范畴 $\mathcal{C}$，其结构为 $\circ$，I，$\bullet$，J，ζ，δ，ϖ，τ，定义如上。 [8, 定理 2.16] 证明了每个双幺半范畴都双幺半等价于一个严格双幺半范畴，即两个幺半范畴都是严格的范畴。鉴于此，我们将省略结合约束。

我们用 Alg($\mathcal{C}^\circ$) 表示 $\mathcal{C}^\circ$ 中代数及代数态射构成的范畴，用 Coalg($\mathcal{C}^\bullet$) 表示 $\mathcal{C}^\bullet$ 中余代数及余代数态射构成的范畴。回顾 [2, 命题 6.35], $\bullet$ 在 Alg($\mathcal{C}^\circ$) 上诱导出一个幺半结构，而 $\circ$在 Coalg($\mathcal{C}^\bullet$) 上诱导出一个幺半结构。具体而言，对于 Alg($\mathcal{C}^\circ$) 中的 (A,m_A,u_A) 和 (B,m_B,u_B)，$A\bullet B$属于 Alg($\mathcal{C}^\circ$)，其乘法为 $m_{A\bullet B}=(m_A\bullet m_B)\zeta_{A,B,A,B}$，单位为 $u_{A\bullet B}=(u_A\bullet u_B)\delta$。对于 Coalg($\mathcal{C}^\bullet$) 中的 $(C,\Delta_C,\varepsilon_C)$ 和 $(D,\Delta_D,\varepsilon_D)$，$C\circ D$属于 Coalg($\mathcal{C}^\bullet$)，其余乘法为 $\Delta_{C\circ D}=\zeta_{C,C,D,D}(\Delta_C\circ\Delta_D)$，余单位为 $\varepsilon_{C\circ D}=\varpi(\varepsilon_C\circ\varepsilon_D)$。

5.1. **诱导函子的组合**。在本小节中，设 $\mathcal{C}$ 是一个具有余等化子的双幺半范畴，并且 $\mathcal{C}^\circ$ 中的任意对象都是余平坦。我们考虑附属于 $\mathcal{C}^\circ$ 中代数态射的诱导函子，其定义见第 3.1 小节。

命题 5.2. 设 I 是 $(\mathcal{C}, \circ, I)$ 的左 $\circ$-生成元。设 $f_1\colon R_1 \to S_1$、 $f_2\colon R_2 \to S_2$ 是 $\mathrm{Alg}(\mathcal{C}^\circ)$ 中的态射，使得 $f_1^* = - \circ_{R_1} S_1\colon \mathcal{C}_{R_1} \to \mathcal{C}_{S_1}$与 $f_2^* = - \circ_{R_2} S_2\colon \mathcal{C}_{R_2} \to \mathcal{C}_{S_2}$是半可分的（相应地，可分的、自然满的）。则 $(f_1 \bullet f_2)^* = - \circ_{R_1 \bullet R_2} (S_1 \bullet S_2)\colon \mathcal{C}_{R_1 \bullet R_2} \to \mathcal{C}_{S_1 \bullet S_2}$ 也是半可分的（相应地，可分的、自然满的）。

证明。设 $f_1^* = - \circ_{R_1} S_1$与 $f_2^* = - \circ_{R_2} S_2$是半可分的（相应地，可分的，相应地，自然满的）。由定理 3.5（相应地，定理 3.3，相应地，命题 3.7），存在 $\mathcal{C}$ 中的一个 R_1-双线性态射 $E_1 : S_1 \to R_1$ 以及一个 R_2-双线性态射 $E_2 : S_2 \to R_2$，使得 $f_1 E_1 f_1 = f_1$,$f_2 E_2 f_2 = f_2$ （相应地， $E_1 f_1 = \mathrm{Id}_{R_1}$, $E_2 f_2 = \mathrm{Id}_{R_2}$，相应地， $f_1 E_1 = \mathrm{Id}_{S_1}$, $f_2 E_2 = \mathrm{Id}_{S_2}$）。由于 ζ的自然性，我们有 $((f_1 \circ \mathrm{Id}_{S_1}) \bullet (f_2 \circ \mathrm{Id}_{S_2}))\zeta_{R_1,R_2,S_1,S_2} = \zeta_{S_1,S_2,S_1,S_2}((f_1 \bullet f_2) \circ \mathrm{Id}_{S_1 \bullet S_2})$ 以及$\zeta_{R_1,R_2,R_1,R_2}(\mathrm{Id}_{R_1 \bullet R_2} \circ (E_1 \bullet E_2)) = ((\mathrm{Id}_{R_1} \circ E_1) \bullet (\mathrm{Id}_{R_2} \circ E_2))\zeta_{R_1,R_2,S_1,S_2}$。注意 $f_1 \bullet f_2$ 是 $\mathcal{C}^\circ$中的代数态射，因此它在 $S_1 \bullet S_2$上诱导一个 $R_1 \bullet R_2$-双模结构。于是，

$$\begin{aligned}
(E_1 \bullet E_2) m_{S_1 \bullet S_2}((f_1 \bullet f_2) \circ \mathrm{Id}_{S_1 \bullet S_2}) &= (E_1 \bullet E_2)(m_{S_1} \bullet m_{S_2})\zeta_{S_1,S_2,S_1,S_2}((f_1 \bullet f_2) \circ \mathrm{Id}_{S_1 \bullet S_2}) \\
&= (E_1 \bullet E_2)(m_{S_1} \bullet m_{S_2})((f_1 \circ \mathrm{Id}_{S_1}) \bullet (f_2 \circ \mathrm{Id}_{S_2}))\zeta_{R_1,R_2,S_1,S_2} \\
&= ((E_1 m_{S_1}(f_1 \circ \mathrm{Id}_{S_1})) \bullet (E_2 m_{S_2}(f_2 \circ \mathrm{Id}_{S_2})))\zeta_{R_1,R_2,S_1,S_2} \\
&= (m_{R_1}(\mathrm{Id}_{R_1} \circ E_1)) \bullet (m_{R_2}(\mathrm{Id}_{R_2} \circ E_2))\zeta_{R_1,R_2,S_1,S_2} \\
&= (m_{R_1} \bullet m_{R_2})\zeta_{R_1,R_2,R_1,R_2}(\mathrm{Id}_{R_1 \bullet R_2} \circ (E_1 \bullet E_2)) \\
&= m_{R_1 \bullet R_2}(\mathrm{Id}_{R_1 \bullet R_2} \circ (E_1 \bullet E_2)).
\end{aligned}$$

因此， $E_1 \bullet E_2$ 是左 $R_1 \bullet R_2$-线性的。类似地，可以验证它也是右 $R_1 \bullet R_2$-线性的。注意，$(f_1 \bullet f_2)(E_1 \bullet E_2)(f_1 \bullet f_2) = f_1 \bullet f_2$ （分别地，$(E_1 \bullet E_2)(f_1 \bullet f_2) = \mathrm{Id}_{R_1} \bullet \mathrm{Id}_{R_2}$；分别地，$(f_1 \bullet f_2)(E_1 \bullet E_2) = \mathrm{Id}_{S_1} \bullet \mathrm{Id}_{S_2}$）。由定理 3.5（分别地，定理 3.3、命题 3.7）可知，$(f_1 \bullet f_2)^* = - \circ_{R_1 \bullet R_2} (S_1 \bullet S_2)$ 也是半可分的（分别地，可分的、自然满的）。□

以下推论是前述结果的直接应用。

推论 5.3。 设 $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ 是一个具有有限积的幺半范畴，且单位1 是左 $\otimes$-生成元。假设 $f_1 : R_1 \to S_1$, $f_2 : R_2 \to S_2$ 是 $\mathcal{C}$ 中的代数态射，并且 $f_1^* = - \otimes_{R_1} S_1$和 $f_2^* = - \otimes_{R_2} S_2$是半可分的（分别地，可分的、自然满的），那么$(f_1 \times f_2)^* = - \otimes_{R_1 \times R_2} (S_1 \times S_2)\colon \mathcal{C}_{R_1 \times R_2} \to \mathcal{C}_{S_1 \times S_2}$ 也是半可分的（分别地，可分的、自然满的）。

证明. 由命题 5.2 可得，因为我们有笛卡尔幺半结构 $(C, \times, 0)$，且$\mathcal{C}$ 是一个双幺半范畴，其 $\circ = \otimes$, $\bullet = \times$中， $I = 1$, $J = 0$, $\delta\colon 1 \to 1 \times 1$, $\varpi\colon 0 \otimes 0 \to 0$,$\tau = 0_1$,$\mathbf{0}\colon 1 \to 0$。在此情形下，$\zeta_{A,B,C,D}\colon (A \times B) \otimes (C \times D) \to (A \otimes C) \times (B \otimes D)$ 由 $\zeta_{A,B,C,D} = \langle p_A \otimes p_C, p_B \otimes p_D \rangle$ 定义，见例 6.19]。□

推论 5.4. 设 $\mathcal{C}$ 是一个预编织幺半范畴，并满足单位1 是 $\mathcal{C}$的左 $\otimes$-生成元。假设 $f_1\colon R_1 \to S_1$, $f_2\colon R_2 \to S_2$ 是 $\mathcal{C}$ 中的代数态射，且 $f_1^* = - \otimes_{R_1} S_1$和 $f_2^* = - \otimes_{R_2} S_2$是半可分（分别地，可分、自然满），那么$(f_1 \otimes f_2)^* = - \otimes_{R_1 \otimes R_2} (S_1 \otimes S_2)$ 也半可分（分别地，可分、自然满）。

证明。 由命题 5.2 可知这一点，因为预编织幺半范畴是具有 $\circ = \bullet = \otimes$ 的双幺半范畴，参见 [2, 命题 6.14]。□

例 5.5. 设 H 是域 $\Bbbk$ 上的一个双代数。根据 [32, 注 1.6], 另见 [15, 命题 2.7],， $\mathcal{C} = {}_H\mathcal{M}_H$ 中的 H-双模范畴具有双幺半结构，其幺半结构为 $\mathcal{C}^\circ = (\mathcal{C}, \circ = \otimes_H, I = H)$ 和 $\mathcal{C}^\bullet = (\mathcal{C}, \bullet = \otimes_\Bbbk, J = \Bbbk)$。回顾 [15, 节 2]，若 H 是域 $\Bbbk$ 上的一个代数，则 $\mathcal{C}$ 中的一个代数是由一对 (A, i) 构成，其中 $\Bbbk$ 是代数 A，而 $\Bbbk$ 是代数态射$i\colon H \to A$。在 $\mathcal{C}$ 中，代数态射 $f\colon (A, i) \to (B, j)$ 是一个 $\Bbbk$-代数态射 $f\colon A \to B$，并满足 $fi = j$。根据 [15, 引理 2.1],， $\mathcal{C}$ 中的代数态射是一个 $\Bbbk$-代数态射，同时也是左、右 H-线性的。

假设 H 是一个左 $\circ$-生成元。根据命题 5.2，如果 f 和 g 是 $\mathcal{C}^\circ = (\mathcal{C}, \otimes_H, H)$ 中的代数态射，且诱导函子 f^*、 g^* 是半可分的（分别地，可分的、自然满的），那么 $(f \otimes_\Bbbk g)^*$ 也具有相同性质。例如，考虑 H 为群代数 $\Bbbk G$，其中

G 是一个有限群，满足 char(𝕜) ∤ |G|。根据例 3.18， $\Bbbk G$ 是一个左 $\otimes_{\Bbbk G}$-生成元，并且我们知道 $\psi\colon \Bbbk G \oplus \Bbbk G \to \Bbbk G$、($a$, b) $\mapsto a$，以及 $\varphi\colon \Bbbk G \to \Bbbk G \otimes_{\Bbbk} \Bbbk G$， $\sum_{i=0}^{n-1} k_i g_i \mapsto \sum_{i=0}^{n-1} k_i g_i \otimes_{\Bbbk} g_i$ 是 $\mathcal{C}^{\circ}$ 中的代数态射，使得诱导函子 φ^* 是可分的，而诱导函子 ψ^* 是自然满的。特别地， φ^*、ψ^* 是半可分的。根据命题 5.2，我们得到 $(\varphi \otimes_{\Bbbk} \psi)^*$ 是半可分的。

现在，我们转而关注单位对象 I 不一定是左 $\circ$-生成元的情形。

命题 5.6. 设 $\mathcal{C}$ 是一个双幺半范畴。设 R、 S 是 $\mathcal{C}^{\circ}$ 中的代数，且函子$-\circ R\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_R$、 $-\circ S\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ 是半可分的（分别地，自然满）。假设 $\delta\colon I \to I \bullet I$ 是分裂满态射。那么，函子 $-\circ(R \bullet S)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_{R\bullet S}$ 是半可分的（分别地，自然满）。

证明。由命题 3.20，存在态射 χ_R、 χ_S，使得 $u_R\chi_R u_R = u_R$、 $u_S\chi_S u_S = u_S$（分别地， $u_R\chi_R = \mathrm{Id}_R$、 $u_S\chi_S = \mathrm{Id}_S$）。由此可得（$u_R \bullet u_S$）（$\chi_R \bullet \chi_S$）（$u_R \bullet u_S$）$= u_R \bullet u_S$（分别地，（$u_R \bullet u_S$）（$\chi_R \bullet \chi_S$）$= \mathrm{Id}_R \bullet \mathrm{Id}_S$）。由于对某个态射 $\lambda\colon I \bullet I \to I$有 $\delta\lambda = \mathrm{Id}_{I\bullet I}$，我们得到（$u_R \bullet u_S$）$\delta\lambda$（$\chi_R \bullet \chi_S$）（$u_R \bullet u_S$）$\delta =$（$u_R \bullet u_S$）$\delta$（分别地，（$u_R \bullet u_S$）$\delta\lambda$（$\chi_R \bullet \chi_S$）$= \mathrm{Id}_R \bullet \mathrm{Id}_S$）。这意味着 $u_{R\bullet S}\lambda$（$\chi_R \bullet \chi_S$）$u_{R\bullet S} = u_{R\bullet S}$（分别地， $u_{R\bullet S}\lambda$（$\chi_R \bullet \chi_S$）$= \mathrm{Id}_R \bullet \mathrm{Id}_S$），即 $u_{R\bullet S}$是正则的（分别地，分裂满态射）。再次由命题 3.20，函子 $-\circ$（$R \bullet S$）是半可分的（分别地，自然满）。□

Pro命题 5.7. 设 $\mathcal{C}$ 是一个双幺半范畴。设 R, S 是 $\mathcal{C}^{\circ}$ 中的代数，且函子 rs $-\circ R\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_R, -\circ S\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ 是可分的。因此， $-\circ(R \bullet S)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_{R\bullet S}$ 是可分的。

证明。 根据命题 3.20，存在态射 $\chi_R\colon R \to I, \chi_S\colon S \to I$，它们属于 $\mathcal{C}$，使得 $\chi_R u_R = \mathrm{Id}_I, \chi_S u_S = \mathrm{Id}_I$，因此我们有 $r_I^{\bullet}(\mathrm{Id}_I \bullet \tau)(\chi_R \bullet \chi_S)u_{R\bullet S} = r_I^{\bullet}(\mathrm{Id}_I \bullet \tau)(\chi_R \bullet \chi_S)(u_R \bullet u_S)\delta = r_I^{\bullet}(\mathrm{Id}_I \bullet \tau)\delta = r_I^{\bullet}(r_I^{\bullet})^{-1} = \mathrm{Id}_I$，其中 $\tau\colon I \to J$是 $\mathcal{C}^{\bullet}$中 I的余单位。□

例 5.8. 设 X 是一个集合。我们考虑由 X 上的跨度构成的双幺半范畴 span(X)，见 [9, 4。2], 该范畴由 [2, 例 6.17] 引入，名称为 顶点集为 X 的有向图范畴。span(X) 的对象是三元组 (A, s, t)，其中 A 是一个集合，而 s、 t 是映射$A \to X$，分别称为源 映射和目标映射。span(X) 中的态射是映射$f\colon$ (A, s, t) $\to$(A', s', t')，满足 $sf = s$ 和 $tf = t$。

对于 X 上任意的跨度 A, B，一种幺半结构为

$$A \circ B = \{(a,b) \in A \times B \mid s(a) = t(b)\} \quad \text{and} \quad I = (X, \mathrm{Id}, \mathrm{Id}),$$

其中 s(a, b) := s(b) 且 t(a, b) := t(a)，而另一种为

$$A \bullet B = \{(a,b) \in A \times B \mid s(a) = s(b), t(a) = t(b)\} \quad \text{and} \quad J = (X \times X, p_2, p_1),$$

其中 p_1、 p_2 是典范投影，且 s(a, b) := s(a) $= s$(b)， t(a, b) := t(a) $= t$(b)。交换律为

$$\zeta := (A \bullet B) \circ (A' \bullet B') \to (A \circ A') \bullet (B \circ B'), \quad (a,b,a',b') \mapsto (a,a',b,b').$$

$\circ$-幺半单位 I 关于 $\bullet$ 是一个余幺半群，其余乘法为

$$\delta : I \to I \bullet I = \{(x,y) \in X \times X \mid x = y\} \cong I, \quad x \mapsto (x,x) \cong x.$$

$\bullet$-幺半单位 J 关于 $\circ$ 是一个幺半群，其乘法为

$$\varpi : J \circ J = \{(x,y,x',y') \mid y = x'\} \to J, \quad (x,y,x',y') \mapsto (x,y').$$

The counit of the comonoid $\mathrm{id}\, I$ and the unit of the monoid $\mathrm{id}\, J$ are both given by $\tau : I \to J$, $x \mapsto (x,x)$。这里采用一些记号。设 A 是 span(X) 中的一个对象。对于 X 中任意一对顶点 i, j，从 i 到 j 的 A 中的箭的集合，即满足 s(a) $= i$ 且 t(a) $= j$ 的元素 $a \in A$ 所成的集合，记为 Arr$_A$(i, j)，它是 A 的一个子集。对于 span(X) 中的态射 $u\colon A \to B$，将 u 限制到箭集合 Arr$_A$(i, j) 上所得的映射记为 u_{ij} : Arr$_A$(i, j) $\to$ Arr$_B$(i, j)。

对于两个态射 u、 $v\colon A_1 \to A_2$ in span(X)，我们断言它们的余等化子存在。对于 X 中的任意一对顶点 i、 j，我们通过如下有向图定义 Coeq(u, v)：Arr$^{\mathrm{Coeq}(u,v)}$(i, j)：=Coeq(u_{ij}, v_{ij})，其中后者是 Set 中 u_{ij}、v_{ij} 的余等化子。对于满足 $hu = hv$ 的任意态射 $h\colon A_2 \to Z$in span(X)，我们知道 $h_{ij}u_{ij} = h_{ij}v_{ij}$。因此，根据 Set 中余等化子 q_{ij} : Arr$_{A_2}$(i, j) $\to$ Arr$^{\mathrm{Coeq}(u,v)}$(i, j) 的泛性质，我们得到唯一的映射 l_{ij} : Arr$^{\mathrm{Coeq}(u,v)}$(i, j) $\to$ Arr$_Z$(i, j)，使得对于 X 中的任意一对顶点 i、 j，都有 $l_{ij}q_{ij} = h_{ij}$，并且

因此存在一个态射 $l\colon \mathrm{Coeq}(u,v)\to Z$，使得 $lq=h$；其中 $q\colon A_2\to \mathrm{Coeq}(u,v)$ 是由q_{ij}对 X 中所有顶点 i,j 诱导的。这意味着 Coeq(u,v) 是 span(X) 中 u,v 的余等化子。

接下来，我们断言，(span(X) ○) 中的每个对象都是余平坦的。令 A_1、A_2、B 为 span(X) 中的对象。对于 span(X) 中的两个态射 $u,v\colon A_1\to A_2$，我们要证明 $\mathrm{Id}_B\circ\mathrm{Coeq}(u,v)$ 是 $\mathrm{Id}_B\circ u$ 和 $\mathrm{Id}_B\circ v$ 的余等化子。假设存在一个态射 $h\colon B\circ A_2\to Z$，它属于 span(X)，满足$h(\mathrm{Id}_B\circ u)=h(\mathrm{Id}_B\circ v)$，也就是说，对任意 $B\circ A_1$ 中的元素 $b\circ a$，都有 $h(b\circ u(a))=h(b\circ v(a))$。我们断言 $h_{s(a),t(b)}(\mathrm{Id}\times u_{s(a),t(a)})=h_{s(a),t(b)}(\mathrm{Id}\times v_{s(a),t(a)})$。事实上，对于 $\mathrm{Arr}_B(t(a)\ t(b))\times\mathrm{Arr}_{A_1}(s(a)\ t(a))=\mathrm{Arr}_{B\circ A_1}(s(a)\ t(b))$ 中的任意 (b',a')，我们有

$$\begin{aligned}h_{s(a),t(b)}(\mathrm{Id}\times u_{s(a),t(a)})(b',a')=&h_{s(a),t(b)}(b',u_{s(a),t(a)}(a'))=h_{s(a),t(b)}(b'\circ u(a'))=h(b'\circ u(a'))\\=&h(b'\circ v(a'))=h_{s(a),t(b)}(\mathrm{Id}\times v_{s(a),t(a)})(b',a').\end{aligned}$$

由于 Set 中的每个对象都是余平坦的，我们知道 $\mathrm{Arr}_B(t(a)\ t(b))\times\mathrm{Arr}^{\mathrm{Coeq(u,v)}}(s(a)\ t(a))$ 是 $\mathrm{Id}\times u_{s(a),t(a)}$ 和 $\mathrm{Id}\times v_{s(a),t(a)}$ 的余等化子。因此，根据其泛性质，存在唯一的映射$l_{s(a),t(b)}$，使得图

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Arr}_B(t(a),t(b))\times\mathrm{Arr}_{A_2}(s(a),t(a)) & \xrightarrow{\mathrm{Id}\times q_{s(a),t(a)}} & \mathrm{Arr}_B(t(a),t(b))\times\mathrm{Arr}_{\mathrm{Coeq(u,v)}}(s(a),t(a))\\ \Big\downarrow{\scriptstyle h_{s(a),t(b)}} & \swarrow{\scriptstyle l_{s(a),t(b)}} & \\ \mathrm{Arr}_Z(s(a),t(b)) & & \end{array}$$

com会合。由于 a 属于 A_1，映射 $l_{s(a),t(b)}$ 不足以确定从.....出发的态射 $B\circ$ 直接映到 Coeq(u,v) 中的 Z。为解决这个问题，我们讨论两种不同的情形。

对于 $B\circ A_2$ 中的任意元素 $b\circ a'$，(b,a') 属于 $\mathrm{Arr}_B(t(a')\ t(b))\times\mathrm{Arr}_{A_2}(s(a')\ t(a'))$。在第一种情形下，假设存在箭头 a 属于 $\mathrm{Arr}_{A_1}(s(a)\ t(a))$，使得 $s(a)=s(a')$，$t(a)=t(a')$。这意味着 (b,a') 属于 $\mathrm{Arr}_B(t(a)\ t(b))\times\mathrm{Arr}_{A_2}(s(a)\ t(a))$。如上所述，存在唯一的 $l_{s(a')\,t(b)}$，使得$h_{s(a')\,t(b)}=l_{s(a')\,t(b)}(\mathrm{Id}\times q_{s(a')\,t(a')})$。在第二种情形下，$\mathrm{Arr}_{A_1}(s(a')\ t(a'))$ 中不存在箭头，即 $\mathrm{Arr}_{A_1}(s(a')\ t(a'))$ 是空集。根据定义，

$$\mathrm{Arr}_{\mathrm{Coeq(u,v)}}(s(a'),t(a'))=\mathrm{Coeq}(u_{s(a')t(a')},v_{s(a')t(a')})=\mathrm{Arr}_{A_2}(s(a'),t(a')),$$

因为 $u_{s(a')t(a')}$ 和 $v_{s(a')t(a')}$ 的定义域为空集。另请注意，$q_{s(a')\,t(a')}=\mathrm{Id}$。因此，我们定义 $l_{s(a')\,t(a')}=h_{s(a')\,t(a')}$。显然，$h_{s(a')\,t(b)}=l_{s(a')\,t(b)}(\mathrm{Id}\times q_{s(a')\,t(a')})$。总之，存在唯一的态射 $l\colon B\circ\mathrm{Coeq(u,v)}\to Z$，使得 $h=l(\mathrm{Id}_B\circ q)$。

注意，由于 δ 是一个同构，命题 5.6 适用。此外，(span(X) ○) 中的代数恰好是对象集为 X 的小范畴，参见 [2,例 6.43]。

5.2. 余归纳函子的组合。 现在，设 $\mathcal{C}$ 是一个具有等化子的双幺半范畴，并假设 $\mathcal{C}^\bullet$ 中的任意对象都是平坦的。我们考虑第 4 节中定义的、附属于 $\mathcal{C}^\bullet$中某个余代数态射的余归纳函子。这里，给定 $\mathcal{C}^\bullet$中的余代数态射 $\psi\colon C\to D$，对于每个 $\mathcal{C}^D$中的 M，记 $M\blacksquare_D C:=\mathrm{Eq}(\rho^D_M\bullet\mathrm{Id}_C,\ \mathrm{Id}_M\bullet\lambda^D_C)$。

命题 5.9. 设 J是$(\mathcal{C},\bullet,J)$的左 $\bullet$-余生成元。令 $f_1\colon C_1\to D_1$, $f_2\colon C_2\to D_2$为Coalg$(\mathcal{C}^\bullet)$ 中的态射，使得余诱导函子 $f_1^*=-\blacksquare_{D_1}C_1\colon\ \mathcal{C}^{D_1}\to\mathcal{C}^{C_1}$ 和$f_2^*=-\blacksquare_{D_2}C_2\colon\mathcal{C}^{D_2}\to\mathcal{C}^{C_2}$ 是半可分（分别为可分、自然满）的。那么，$(f_1\circ f_2)^*=-\blacksquare_{D_1\circ D_2}(C_1\circ C_2)\colon\mathcal{C}^{D_1\circ D_2}\to\mathcal{C}^{C_1\circ C_2}$ 也是半可分（分别为可分、自然满）。

证明。假设 $f_1^*=-\blacksquare_{D_1}C_1$和 $f_2^*=-\blacksquare_{D_2}C_2$是半可分（分别地，可分、自然满）的。根据定理 4.4（分别地，命题 4.5、命题 4.6），存在一个 D_1-双余线性态射 $\chi_1\colon D_1\to C_1$，使得 $f_1\chi_1f_1=f_1$（分别地，$f_1\chi_1=\mathrm{Id}^{D_1}$、$\chi_1f_1=\mathrm{Id}^{C_1}$），以及一个 D_2-双余线性态射 $\chi_2\colon D_2\to C_2$，使得 $f_2\chi_2f_2=f_2$（分别地，$f_2\chi_2=\mathrm{Id}^{D_2}$、$\chi_2f_2=\mathrm{Id}^{C_2}$）。我们验证 $\chi_1\circ\chi_2$ 是（$D_1\circ D_2$）-余线性的。注意到（$f_1\circ f_2$）（$\chi_1\circ\chi_2$）（$f_1\circ f_2$）$=f_1\circ f_2$（分别地，（$f_1\circ f_2$）（$\chi_1\circ\chi_2$）$=\mathrm{Id}^{D_1\circ D_2}$，（$\chi_1\circ\chi_2$）（$f_1\circ f_2$）$=\mathrm{Id}^{C_1\circ C_2}$）。我们验证 $\chi_1\circ\chi_2$ 是一个

（$D_1 \circ D_2$）-双余线性态射，在 $\mathcal{C}$中。我们有

$$\begin{aligned}(\mathrm{Id}_{D_1\circ D_2} \bullet (\chi_1 \circ \chi_2))\Delta_{D_1\circ D_2} &= (\mathrm{Id}_{D_1\circ D_2} \bullet (\chi_1 \circ \chi_2))\zeta_{D_1,D_1,D_2,D_2}(\Delta_{D_1} \circ \Delta_{D_2}) \\ &= \zeta_{D_1,C_1,D_2,C_2}((\mathrm{Id}_{D_1} \bullet \chi_1) \circ (\mathrm{Id}_{D_2} \bullet \chi_2))(\Delta_{D_1} \circ \Delta_{D_2}) \\ &= \zeta_{D_1,C_1,D_2,C_2}((\mathrm{Id}_{D_1} \bullet \chi_1)\Delta_{D_1} \circ (\mathrm{Id}_{D_2} \bullet \chi_2)\Delta_{D_2}) \\ &= \zeta_{D_1,C_1,D_2,C_2}(((f_1 \bullet C_1)\Delta_{C_1}\chi_1) \circ ((f_2 \bullet C_2)\Delta_{C_2}\chi_2)) \\ &= \zeta_{D_1,C_1,D_2,C_2}((f_1 \bullet C_1) \circ (f_2 \bullet C_2))(\Delta_{C_1} \circ \Delta_{C_2})(\chi_1 \circ \chi_2) \\ &= ((f_1 \circ f_2) \bullet \mathrm{Id}_{C_1\circ C_2})\zeta_{C_1,C_1,C_2,C_2}(\Delta_{C_1} \circ \Delta_{C_2})(\chi_1 \circ \chi_2) \\ &= \lambda^{D_1\circ D_2}_{C_1\circ C_2}(\chi_1 \circ \chi_2)\end{aligned}$$

因此， $\chi_1 \circ \chi_2$在 $\mathcal{C}$中是左$(D_1 \circ D_2)$-余线性的。类似地，可以验证它也是右$(D_1 \circ D_2)$-余线性的。由定理 4.4 （相应地，命题 4.5 、命题 4.6 ），$(f_1 \circ f_2)^*$ 是半可分的（相应地，可分的、自然满的）。□

最后，我们给出命题 4.16 的直接应用，其中单位对象 J 不必是左 $\bullet$-余生成元。

命题 5.10. 设 $\mathcal{C}$ 是一个双幺半范畴。设 C、 D 是 $\mathcal{C}^\bullet$ 中的余代数，使得函子$-\bullet C : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^C$ 与 $-\bullet D : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^D$ 是半可分的（相应地，自然满的）。假设 $\varpi : J \circ J \to J$是分裂单态射。则 $-\bullet (C \circ D) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{C\circ D}$ 是半可分的（相应地，自然满的）。

证明。由命题 4.16，存在态射 $\chi_C : J \to C$, $\chi_D : J \to D$ in $\mathcal{C}$ such that$\varepsilon_C\chi_C\varepsilon_C = \varepsilon_C$, $\varepsilon_D\chi_D\varepsilon_D = \varepsilon_D$ （分别为 $\chi_C\varepsilon_C = \mathrm{Id}_C$, $\chi_D\varepsilon_D = \mathrm{Id}_D$）。由此可得 $(\varepsilon_C \circ \varepsilon_D)(\chi_C \circ \chi_D)(\varepsilon_C \circ \varepsilon_D) = \varepsilon_C \circ \varepsilon_D$ （分别为 $(\chi_C \circ \chi_D)(\varepsilon_C \circ \varepsilon_D) = \mathrm{Id}_C \circ \mathrm{Id}_D$）。由于 ϖ 是分裂单态射，存在态射 λ in $\mathcal{C}$ such that $\lambda\varpi = \mathrm{Id}_{J\circ J}$。于是， $\varepsilon_{C\circ D}(\chi_C \circ \chi_D)\lambda\varepsilon_{C\circ D} = \varpi(\varepsilon_C \circ \varepsilon_D)(\chi_C \circ \chi_D)\lambda\varpi(\varepsilon_C \circ \varepsilon_D) = \varpi(\varepsilon_C \circ \varepsilon_D) = \varepsilon_{C\circ D}$ （分别为 $(\chi_C \circ \chi_D)\lambda\varepsilon_{C\circ D} = (\chi_C \circ \chi_D)\lambda\varpi(\varepsilon_C \circ \varepsilon_D) = \mathrm{Id}_C \circ \mathrm{Id}_D$）。因此， $\varepsilon_{C\circ D}$ 是正则的（分别为分裂单态射）。再次由命题 4.16，可得 $-\bullet(C \circ D)$ 是半可分的（分别为自然满的）。□

命题 5.11. 设 $\mathcal{C}$ 是一个双幺半范畴。设 C、 D 是 $\mathcal{C}^\bullet$ 中的余代数，且 $-\bullet C$、$-\bullet D$ 可分。那么， $-\bullet (C \circ D)$ 可分。

证明. 根据命题 4.16，存在态射 $\chi_C : J \to C$、 $\chi_D : J \to D$ ，它们属于 $\mathcal{C}$ ，且满足 $\varepsilon_C\chi_C = \mathrm{Id}_J$、 $\varepsilon_D\chi_D = \mathrm{Id}_J$。由此可得 $\varepsilon_{C\circ D}(\chi_C \circ \chi_D)(\mathrm{Id}_J \circ \tau)(r^\circ_J)^{-1} = \varpi(\varepsilon_C \circ \varepsilon_D)(\chi_C \circ \chi_D)(\mathrm{Id}_J \circ \tau)(r^\circ_J)^{-1} = \varpi(\mathrm{Id}_J \circ \tau)(r^\circ_J)^{-1} = r^\circ_J(r^\circ_J)^{-1} = \mathrm{Id}_J$，其中 $\tau : I \to J$ 是 J 在 $\mathcal{C}^\circ$ 中的单位。□

例 5.12. 设 C, D 是预编织幺半范畴 $\mathcal{C}$ 中的余代数，且 $-\otimes C$,$-\otimes D$ 是半可分（分别为可分、自然满）的。由于 $\varpi : 1 \otimes 1 \to 1$ 是同构，根据命题 5.10（分别为命题 5.11、命题 5.10），可得 $-\otimes(C \otimes D)$ 也是半可分（分别为可分、自然满）的。

致谢。 作者谨向 A. Ardizzoni 致以谢意，感谢他提出的宝贵建议和意见。本文撰写期间，作者均为“代数与几何结构及其应用国家组”（GNSAGA-INdAM）的成员。L. Bottegoni 在布鲁塞尔自由大学数学系从事博士后研究期间获得博士后奖学金，该研究工作属于 ARC 项目“从代数到组合学，再回到代数”的框架。Z. Zuo 衷心感谢国家留学管理委员会（国家留学基金管理委员会）通过博士生奖学金（编号：202406190047）提供的资助。本研究部分由欧盟“下一代欧盟”计划下国家复苏与韧性计划（NRRP）任务 4 组成部分 2 资助，项目编号为 CUP D53D23005960006；同时也由意大利大学与研究部于 2022 年 2 月 2 日发布的 PRIN 2022 第 104 号征集项目资助；项目 2022S97PMY箭图、代数与表示的结构（*SQUARE*）。

参考文献

[1] Aguiar M., 内范畴与量子群。 *</style}*博士论文（*Ph.D.*）—康奈尔大学，*ProQuest LLC*，密歇根州安娜堡，*1997*年。*17Aguiar M., Mahajan S.,* 幺半函子、物种与*Hopf*代数。 CRM专著丛书，第29卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2010年。4, 12, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26

[3] Anderson F. W., Fuller K. R., 模环与模范畴。第二版。数学研究生教材， **13** 1992 8 。施普林格出版社，纽约，。Ardizzoni A. 幺半范畴中的楔积与余张量余代数。代数与表示论 11（ [4] 2008 5, 461 496 17 ），第–期。Ardizzoni A., Bottegoni L., 半可分函子。代数杂志 [5] **638** 2024 862 917 1, 2, 3, 4, 7, 17, 18, 19 （），–。Ardizzoni A., Caenepeel S., Menini C., Militaru G., 自然界中的自然满函子。数学学报（英文版） [6] **22** 2006 1, 233 250 1, 2, 3, 6, 8, 16, 19, 21 （），第–期。Ardizzoni A., Goyvaerts I., Menini C., 预刚性幺半范畴。数学问题 46（2023年），第8期，1503–1546。11[7] Batanin M., Markl M., 富集幺半范畴中的中心与同伦中心。数学进展 230（2012年），第4-6期，1811–1858。23[8] **394** 2013 139 172 25 Böhm G., Chen Y., Zhang L., 双幺半范畴中的Hopf幺半群。代数杂志（），[9] *1* -。Borceux F., 范畴代数手册。基础范畴论。数学及其应用百科全书， [10] **50** 1994 5, 20 。剑桥大学出版社，剑桥，。Borceux F., 范畴代数手册。范畴与结构。数学及其应用百科全书， [11] *2* **51** 1994 7 。剑桥大学出版社，剑桥，。Brzeziński T., 余环的结构：诱导函子、Maschke型定理以及Frobenius与Galois型性质。代数与表示论 [12] **5** 2002 4, 389 410 21 （），第–期。Brzezinski T., Wisbauer R., 余环与余模。伦敦数学会讲义系列，第309卷。剑桥大学出版社，剑桥，2003年。22[13] Bulacu D., Caenepeel S., 幺半范畴中的余环。Hopf代数与分次环论的新技术，53–78。比利时皇家佛兰德科学与艺术学院（KVAB），布鲁塞尔，2007年。4 [14] **662** 2025 1 71 24 Bulacu D., Popescu D., Torrecillas B., 双重环绕拟Hopf代数。代数杂志（），–。Bulacu D., Torrecillas B., 幺半范畴中的Frobenius与可分代数扩张：环绕的应用。非交换几何杂志 [15] **9** 2015 3, 707 774 1, 4, 5, 8, 9, 10, 11 （），第–期。Caenepeel S., De Lombaerde M., Turaev的Hopf群余代数的范畴方法。代数通讯 [16] **34** 2006 7, 2631 2657 11 （），第–期。Caenepeel S., Militaru G., Zhu S., 广义模范畴中的Frobenius函子与可分函子及非线性方程。数学讲义， [17] **1787** 2002 1 。施普林格出版社，柏林，。Castaño Iglesias F., Gómez Torrecillas J., Năstăsescu C., 余代数中的可分函子。应用。筑波数学杂志 [18] **21** 1997 2, 329 344 2, 19 （），第–期。Etingof P., Gelaki S., Nikshych D., Ostrik V., 张量范畴。数学调查专著，第205卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯， [19] 2015, +343 16, 20, 22, 23 xvi页。Freyd P. J., O'Hearn P. W., Power A. J., Takeyama M., Street R., Tennent R. D., 双反射性。程序语义的数学基础（路易斯安那州新奥尔良，1995年）。理论计算机科学 228（1999年），第1-2期，49–76。16 [20] **90** 1962 323 448 16 Gabriel P., 阿贝尔范畴。法国数学会通报（），–。Heckenberger I., Schneider, H.-J., Hopf代数与根系。数学调查专著，第247卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2020年。21[21] Krause H., 导出范畴、分解与Brown可表性。同伦论与代数之间的相互作用， [22] 101 139 **436**, 2007 17 –。当代数学。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，。Larson R. G., Sweedler M. E., Hopf代数上的结合正交双线性形式。美国数学杂志 91（ [23] 1969 75 94 10 ），–。Mac Lane S., 工作数学家的范畴论。第二版。数学研究生教材，第5卷。施普林格出版社，纽约，1998年。9 [24] 1995 9 Majid S., 量子群理论基础。剑桥大学出版社，剑桥，。Menini C., Torrecillas B., 强可分余环绕。代数杂志（），–。 [25] **583** 2021 153 186 21 N˘ast˘asescu C., Van den Bergh M., Van Oystaeyen F., 可分函子在分次环上的应用。代数杂志 **123** 2 1989 397 413 1, 3 （） （），–。Pareigis B., 非加性环与模理论。I. 幺半群的一般理论。德布勒森数学出版物 24（ [26] 1977 1 2, 189 204 4, 7 ），第-期–。Rafael M.D., 再论可分函子。代数通讯 [27] **18** 1990 5, 1445 1459 3, 15 （），第–期。Saracco P., 对极、预对极与Frobenius函子。代数与应用杂志（），第7期，论文编号2150124。24[28] **20** 2021 Xu Y., Zheng J., Hopf代数由其幺半导出范畴决定，预印本 arXiv:2502.16619。17[29] 2025 1 17 16 Zuo Z., Liu G., 多环范畴的商范畴，代数通讯（），–。Stacks项目，https://stacks.math.columbia.edu/tag/Q [30] [31] [32] [33] [34] [35] 05 2 17

（Lucrezia Bottegoni）
电子邮件地址：lucrezia.bottegoni@edu.unito.it

（Zhenbang Zuo）都灵大学数学系“G. Peano”，Carlo Alberto 路 10 号，I-10123 都灵，意大利电子邮件地址：zhenbang.zuo@edu.unito.it