arXiv:2602.03758v1 [math.CO] 3 Feb 2026

A concept of largness of monochromatic sums and products in large integral domain

Pintu Debnath
数学系，巴西尔哈特学院，巴西尔哈特-743412，北二十四帕尔加纳斯县，西孟加拉邦，印度。

电子邮箱： *pintumath1989@gmail.com*

摘要

无限整环 R 称为大理想整环，如果 R 的每一个非平凡理想在 R 中都具有有限指数。最近，N. Hindman 与 D. Strauss 针对自然数集和无限域，建立了 Moreira 定理的一个细化结果。本文针对大理想整环以及一种多项式扩展，证明了 N. Hindman 与 D. Strauss 的同一结果。

2020年数学主题分类： 05D10, 22A15, 54D35.

关键词： 分段稠密集， IP-集，大理想整环，Moreira 定理，多项式范德瓦尔登定理，离散半群的 Stone–Čech 紧化代数。

1 引言

我们以 N. Hindman、I. Leader 和 D. Strauss [6,提出的一个著名且至今仍未解决的问题作为本节引言的开端。问题 3]。

问题 1.1. 如果对自然数进行有限染色，是否必定存在 x、$y \in \mathbb{N}$，使得

$$x,\ y,\ x+y,\ and\ xy$$

全都是单色的?

在 [11], 中，J. Moreira 对这个问题给出了一个重要的部分解答。

定理 1.2 (Moreira)**.** *[11,* 推论 *1.5]* 对于 $\mathbb{N}$ 的任意有限染色，存在无穷多对 x、$y \in \mathbb{N}$，使得集合

$$\{x, xy, x+y\}$$

是单色的。

定义 1.3 (分段稠密**)**。 设 $(S,+)$ 为一个交换半群，且令$A \subseteq S$。集合 A 称为分段稠密，当且仅当存在 $G \in \mathcal{P}_f(S)$，使得对每个 $F \in \mathcal{P}_f(S)$，都存在满足条件的 $x \in S$

$$F + x \subseteq \bigcup_{t \in G} (-t + A).$$

在 [9, 推论 1.11], 中，N. Hindman 和 D. Strauss 得到了 Moreira 定理的一个改进，陈述如下。

定理 1.4。设 $S = \mathbb{N}$ 为无限域，设 $r \in \mathbb{N}$，且设 $S = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$ 是 S 的有限染色。则存在 $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ 以及无穷多个 $y \in S$，使得集合

$$\{x \in S : \{x, xy, x + y\} \subseteq C_i\}$$

是分段稠密的。

大理想整环（LID）的例子包括所有域、环 $\mathbb{Z}$（更一般地说，任意数域的整数环），以及有限域$\mathbb{F}$上的多项式环 $\mathbb{F}[x]$ 。J. Moreira 证明了以下关于大理想整环的结果。

定理 1.5。 *[11, 定理 7.5]* 设 R 为大理想整环，设 $s \in \mathbb{N}$，并且对每个$i = 1$、2、.....、s，设 F_i 是函数 $R^i \to R$ 的有限集，使得对于所有 $f \in F_i$ 以及所有x_1、.....、$x_{i-1} \in R$，函数

$$x \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x)$$

是一个具有零常数项的多项式。那么，对于 R 的任意有限染色，都存在一个色类 $C \subseteq R$ 以及无穷多个 $(s+1)$-元组 x_0、x_1、.....、$x_s \in R$，使得

$$\{x_0 x_1 \cdots x_s\} \cup \left\{x_0 \cdots x_j + f(x_{j+1}, \ldots, x_i) : 0 \leq j < i \leq s,\ f \in F_{i-j}\right\} \subseteq C.$$

该定理的一个直接推论如下。

推论 1.6。 设 R 是一个大理想整环，设 $k \in \mathbb{N}$，且 $F \subseteq xR[x]$ 是有限集。那么，对于 R 的任意有限染色，都存在 x 、 $y \in R$，使得

$$\{xy\} \cup \{x + f(y) : f \in F\}$$

是单色的。

本文证明了大理想整环上定理 1.4 的以下多项式类似。

定理 1.7。 设 R 是一个大理想整环，设 k、$r \in \mathbb{N}$，且 $F \subseteq xR[x]$ 是有限集。若 $R = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$ 是 R 的有限染色，则存在 $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ 以及无穷多个 $y \in R$，使得集合

$$\{x \in R : \{xy\} \cup \{x + f(y) : f \in F\} \subseteq C_i\}$$

是分段稠密的。

ˇ 我们以简要回顾离散半群的 Stone–Čech 紧化的代数结构作为本节的结尾；在接下来两节中若干结果的证明中将会用到这一结构。

设 S 为一个离散半群。 βS 的元素与S 上的超滤子等同。对于 $A \subseteq S$，定义

$$\overline{A} = \{p \in \beta S : A \in p\}.$$

集族$\{A : \ A \subseteq \overline{S}\}$ 构成 βS的闭集的一个基。 S 上的半群运算可延拓至 βS ，使得 $(\beta S, \cdot)$ 成为一个紧致右拓扑半群。这意味着，对每个 $p \in \beta S$，由 $\rho_p\ (q) \ = q \cdot p$ 定义的映射 $\rho_p : \ \beta S \to \beta S$ 是连续的，并且 S 包含于 βS 的拓扑中心中，即对每个 $x \in S$，由 $\lambda_x\ (q) \ = x \cdot q$ 给出的映射 $\lambda_x : \ \beta S \to \beta S$ 是连续的。

Ellis的一个经典定理断言，每个紧致右拓扑半群都含有一个幂等元。半群 T 的非空子集 I 称为**左理想**，若$TI \subseteq I$；称为**右理想**，若 $IT \subseteq I$；称为**双边理想**（或简称为**理想**），若它既是左理想又是右理想。极小左理想是不含任何真左理想的左理想。极小右理想与最小理想可类似地定义。

每个紧致豪斯多夫右拓扑半群 T 都有一个最小双边理想，其表示为

$$K(T) \ = \bigcup\{L : \ L\text{是 } T\} = \bigcup\{R\text{的极小左理想}; \ R\text{是 } T\}.\text{的极小右理想}$$

如果 L 是一个极小左理想，而 R 是一个极小右理想，那么 $L \cap R$ 是一个群，特别地，它包含一个幂等元。对于幂等元 $p, \ q \in T$，当且仅当 $pq = qp = p$时，我们记作 $p \leq q$。幂等元关于此序是极小的，当且仅当它属于 $K(T)$。最后，对于 $p, \ q \in \beta S$和 $A \subseteq S$，我们有

$$A \in p \cdot q \quad \text{if and only if} \quad \{x \in S : x^{-1}A \in q\} \in p,$$

其中 $x^{-1}A = \{y \in S : \ x \cdot y \in A\}$。更多细节请参见 [7]。

2 范德瓦尔登定理的一个改进

本节主要致力于定理2.5的证明，该定理将用于定理 3.7的证明。

设 $(S, +)$ 是一个交换半群，并设 $A \subseteq S$。

- **(IP-集)** 集合 A 称为 IP-集，当且仅当存在一个序列$\langle x_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ 属于 S ，使得

$$FS(\langle x_n \rangle_{n=1}^{\infty}) \subseteq A,$$

其中

$$FS(\langle x_n \rangle_{n=1}^{\infty}) = \left\{ \sum_{n \in F} x_n : F \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \right\}.$$

- （$IP^\star$**-集**）集合 A若与每个 IP-集都相交，则称为 $IP^\star$-集。
- **（稠密集）** 如果存在有限子集 $F \subseteq S$，使得

$$S \subseteq \bigcup_{s\in F}(-s + A).$$

作为多项式 Hales–Jewett 定理的推论，我们得到关于无限交换环上 IP-集的范德瓦尔登定理的以下多项式版本。为完整起见，我们给出证明。

定理 2.1. 设 R 是一个无限交换环，且设 $r \in \mathbb{N}$。对于任意划分

$$R = \bigcup_{s=1}^{r} C_s,$$

存在 $s \in \{1, \dots, r\}$，使得对于每个 $F \in \mathcal{P}_f$（$xR[x]$），

$$\{n \in R : \exists a \in R \text{ such that } a + f(n) \in C_s \text{ for all } f \in F\}$$

是 （R, $+$） 中的 $IP^\star$-集。等价地，

$$\left\{ n \in R : \bigcap_{f\in F} \big(-f(n) + C_s\big) \neq \emptyset \right\}$$

是 $(R, +)$ 中的一个 $IP^\star$-集。

为证明定理 2.1，我们回顾经典的 Hales–Jewett 定理。设

$$\omega = \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

给定一个非空集合 $\mathbb{A}$ （称为字母表）， $\mathbb{A}$ 上的有限词 是一个表达式$w = a_1 a_2 \cdots a_n$，其中 $n \geq 1$ 且 $a_i \in \mathbb{A}$。 w的长度记为 $|w|$。设 v是一个不属于 $\mathbb{A}$的符号。 $\mathbb{A}$ 上的变词是 $\mathbb{A} \cup \{v\}$ 上的一个词，其中至少出现一次 v。对于变词 w 和 $a \in \mathbb{A}$，我们用 $w(a)$ 表示将 v 的每一次出现都替换为 a所得到的词。

定理 2.2 (Hales–Jewett 定理)**.** 对所有 t、 $r \in \mathbb{N}$，存在一个数$\mathrm{HJ}(r, t)$，使得只要 $N \geq \mathrm{HJ}(r, t)$ 且 $[t]^N$ 被 r-着色，就存在一个变词 w，使得

$$\{w(a) : a \in [t]\}$$

是单色的。

空间 $[t]^N$ 称为*Hales–Jewett* 空间，数 HJ(r, t) 称为*Hales–Jewett* 数。

Bergelson 和 Leibman 运用拓扑动力系统的方法，在 [2]中建立了 Hales–Jewett 定理的多项式扩展；随后 Walters [12]给出了组合证明。现在我们引入陈述这一结果所需的记号。

设 q, $N \in \mathbb{N}$并令 $Q = [q]^N$。对于 $a \in Q$、 $\emptyset \neq \gamma \subseteq [N]$和 $1 \leq x \leq q$，定义$a \oplus x\gamma$为由以下各项给出的向量 $b \in Q$

$$b_i = \begin{cases} x, & i \in \gamma, \\ a_i, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

在多项式 Hales–Jewett 定理中，元素 $a \in Q$ 写作

$$a = \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_d \rangle,$$

其中，对于 $j = 1$、.....、d，有 $\vec{a}_j \in [q]^{N^j}$。记 $\vec{a}_j = \langle a_{j,\ \vec{i}} \rangle_{\vec{i} \in N^j}$，定义

$$a \oplus x_1\gamma \oplus x_2(\gamma \times \gamma) \oplus \cdots \oplus x_d\gamma^d = b,$$

其中 $b = \langle \vec{b}_1$、.....、$\vec{b}_d \rangle$，并且

$$b_{j,\vec{i}} = \begin{cases} x_j, & \vec{i} \in \gamma^j, \\ a_{j,\vec{i}}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

定理 2.3 (多项式 Hales–Jewett 定理**)**。对于所有 q、k、$d \in \mathbb{N}$，都存在$N(q$、k、$d) \in \mathbb{N}$，使得每当

$$Q = [q]^N \times [q]^{N^2} \times \cdots \times [q]^{N^d}$$

是 k 染色的，就存在 $a \in Q$ 和 $\gamma \subseteq [N]$，使得集合

$$\left\{ a \oplus x_1\gamma \oplus x_2(\gamma \times \gamma) \oplus \cdots \oplus x_d\gamma^d : 1 \leq x_j \leq q \right\}$$

是单色的。

定理 *2.1* 的证明。令 $F = \{f_i\colon\ i = 1, \ldots, n\}$，并令 $d_i = \deg(f_i)$。设 $d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}$。记

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{d} a_j^i x^j,$$

其中 $a_j^i = 0$对于 $j > d_i$。令 $q = nd$，并令 $N = \text{PHJ}(q,\ r,\ d)$。

Let

$$A = \{a_j^i : 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq d\}.$$

正如 Walters 所指出的，定理 2.3 中只有字母表的基数是相关的；又因为 $|A| \leq q$，该定理适用于

$$Q = A^N \times A^{N^2} \times \cdots \times A^{N^d}.$$

定义 $\sigma : Q \to R$ 如下

$$\sigma(u) = r + \sum_{j=1}^{d} \sum_{\vec{i} \in N^j} u_{j,\vec{i}}\, y_{\vec{i}},$$

其中 $u = \langle \vec{u}_1$、.....、$\vec{u}_d \rangle$ 且 $\vec{u}_j = \langle u_{j,\ \vec{i}} \rangle_{\vec{i} \in N^j}$。

令 ϕ: $R \to \{1, 2, \ldots, r\}$ 为染色映射。那么 $\phi \circ \sigma$ 是 Q 的一个 r-染色。根据定理 2.3, 存在 $u \in Q$ 和 $\gamma \subseteq [N]$，使得 $\phi \circ \sigma$ 在

$$\left\{ u \oplus x_1\gamma \oplus x_2\gamma^2 \oplus \cdots \oplus x_d\gamma^d : x_j \in A \right\}.$$

Let

$$s = \sum_{j=1}^{d} \sum_{\vec{i} \in N^j \setminus \gamma^j} u_{j,\vec{i}}\, y_{\vec{i}}.$$

于是对于 $x_j = a_j^i$，我们得到

$$\begin{aligned} \sigma\big(u \oplus x_1\gamma \oplus \cdots \oplus x_d\gamma^d\big) &= r + s + \sum_{j=1}^{d} a_j^i \sum_{\vec{i} \in \gamma^j} y_{\vec{i}} \\ &= r + s + \sum_{j=1}^{d} a_j^i (y_\gamma)^j \\ &= r + s + f_i(y_\gamma), \end{aligned}$$

证毕。 □

˘ 利用离散半群 Stone–Čech 紧化的代数结构，[5, 推论 3.8], N. Hindman 证明了多项式范德瓦尔登定理的以下强形式。

定理 2.4 (Hindman)。 设 A 是$(\mathbb{N}, +)$ 的一个分段稠密子集，且 $F \in \mathcal{P}_f(x\mathbb{Z}[x])$。那么集合

$$\left\{ n \in \mathbb{Z} : \bigcap_{f \in F} \big(-f(n) + A\big) \text{ is piecewise syndetic in } (\mathbb{N}, +) \right\}$$

是一个 $IP^\star$-集，位于$(\mathbb{Z}, +)$ 中。

现在我们证明本节的主要结果。

定理2.5。 设 R 是一个无限交换环。若 A 在$(R,+)$ 中是分段稠密的，并且 $F \in \mathcal{P}_f($ $xR[x])$，则集合

$$\left\{ n \in R : \bigcap_{f \in F} \left(-f(n) + A\right) \text{ is piecewise syndetic in } (R,+) \right\}$$

是$(R,+)$ 中的一个 $IP^{\star}$-集。

我们首先回顾J. Moreira的一个定理 [10, 定理2.23], ，该定理为定理2.5的证明提供了动机。

定理2.6。 设$(S,+)$ 是一个可数交换半群，且 $\mathcal{P}$ 是 S的有限子集的一个集合。以下陈述等价:

(1) 对于每个有限染色 $S = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$，存在 $i \in \{1,2,\ldots,r\}$、 $P \in \mathcal{P}$和$s \in S$，使得 $s + P \subseteq C_i$。

(2) 对于每个分段稠密集 $A \subseteq S$，存在 $P \in \mathcal{P}$，使得集合

$$\{s \in S : s + P \subseteq A\}$$

是分段稠密的。

由于我们不局限于可数交换半群，现在要为任意交换半群建立定理 2.6 的一个类似结果。我们从 [7, 定理 4.39] 中的以下引理开始。

引理 2.7。 设 $(S,+)$ 是一个半群，并设 $p \in \beta S$。以下命题等价:

(*a*) $p \in K(\beta S)$。

(b) 对每个 $A \in p$，集合

$$\{x \in S : -x + A \in p\}$$

是稠密的。

(c) 对每个 $q \in \beta S$，我们都有 $p \in \beta S + q + p$。

定理 2.8。 设 S 是一个交换半群，且 $\mathcal{P}$ 是 S 的有限子集族。那么以下陈述等价:

(1) 对于每个有限染色 $S = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$，都存在 $i \in \{1,2,\ldots,r\}$、 $P \in \mathcal{P}$ 和 $s \in S$，使得 $s + P \subseteq C_i$。

(2) 对于每个分段稠密集 $A \subseteq S$，都存在 $P \in \mathcal{P}$，使得集合

$$\{s \in S : s + P \subseteq A\}$$

是分段稠密的。

证明。 蕴含关系 (2) ⇒(1) 是显然的。

为证明 (1) ⇒ (2)，令 $p \in K(\beta S) \cap \overline{A_\circ}$ 由引理 2.7，集合

$$B = \{x \in S : -x + A \in p\}$$

是稠密的。因此存在 x_1、.....、 $x_\ell \in S$，使得

$$S = \bigcup_{i=1}^{\ell} (-x_i + B).$$

由 (1)，存在 $P \in \mathcal{P}$ 和 $h \in S$，使得

$$h + P \subseteq -x_i + B$$

对于某个 $i \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$，这意味着 $x_i + h + P \subseteq B$。

Let

$$C = \bigcap_{t \in x_i + h + P} (-t + A).$$

于是 $C \in p$，从而 C 是分段稠密集。由于 S 是交换的，

$$x_i + h + C \subseteq \{s \in S : s + P \subseteq A\}.$$

因此， $\{s \in S : \ s + P \subseteq A\}$ 是分段稠密集。 □

定理*2.5*的证明。设 $A \subseteq R$ 是一个分段稠密集。为了证明该定理，只需证明对于 R 中的任意序列 $\langle x_n \rangle_{n=1}^{\infty}$，集合

$$\left\{ a \in R : \exists K \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \text{ such that } a + f\left(\sum_{t \in K} x_t\right) \in A \text{ for all } f \in F \right\}$$

是分段稠密集。

将 R 的有限子集族定义为

$$\mathcal{P} = \left\{ \left\{ f\left(\sum_{t \in H} x_t\right) : f \in F \right\} : H \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \right\}.$$

设 $r \in \mathbb{N}$，并假设

$$R = \bigcup_{i=1}^{r} A_i$$

是 R 的任意有限划分。由定理 2.1，存在 $H \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$、$i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ 和 $s \in R$，使得

$$s + P \subseteq A_i, \quad \text{where} \quad P = \left\{ f\left(\sum_{t \in H} x_t \right) : f \in F \right\}.$$

因此，族 $\mathcal{P}$ 满足定理 2.8 的条件 (1)。由于 A 是分段稠密的，由定理 2.8 的条件 (2) 可知，存在 $Q \in \mathcal{P}$，使得集合

$$\{a \in R : a + Q \subseteq A\}$$

是分段稠密的。

由于 $Q \in \mathcal{P}$，存在 $K \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$，使得

$$Q = \left\{ f\left(\sum_{t \in K} x_t \right) : f \in F \right\}.$$

证明至此完成。 □

3 Moreira 定理关于 LID 的一个细化

本节的主要结果是定理 3.7。作为应用，我们推导出定理 1.7。在证明主要结果之前，我们先引入几个技术引理。

半环 是一个三元组 $(S, +, \cdot)$，满足 $(S, +)$ 是交换半群，$(S, \cdot)$ 是半群，并且对所有 $a, b, c \in S$，

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{and} \quad (b + c)a = ba + ca.$$

引理 3.1。 *[9, 引理 2.4]* 设 $(S, +, \cdot)$ 是一个无限半环。对所有 $x \in S$ 以及所有 $p, q \in \beta S$，

$$x(p + q) = xp + xq \quad \textit{and} \quad (p + q)x = px + qx.$$

引理 3.2。 *[7, 引理 8.1]* 假设 S 是一个离散半群。如果 s 是 S 的左可消元素，那么 s 也是 βS 中的左可消元素。右可消元素也有类似的结论。

设 $(S, +)$ 是一个交换群，且 H 是 S 的子群。根据 [8, 定理 1.16]，H 是 $(S, +)$ 中的一个 $IP^\star$-集，当且仅当 H 在 S 中分段稠密。因此，$x\mathbb{Z}[x]$ 在 $(\mathbb{Z}[x], +)$ 中并非分段稠密，因为 $(\mathbb{Z}[x], +)$ 中的 IP-集 $\mathbb{N}$ 与 $x\mathbb{Z}[x]$ 的交集为空。相比之下，对于大理想整环，我们得到以下结果。

引理 3.3。 设 $(R,+,\cdot)$ 是一个大理想整环。若 $A \subseteq R$ 在 $(R,+)$ 中分段稠密，且$r \in R \setminus \{0\}$，则 rA 在 $(R,+)$ 中分段稠密。

证明。 这由 [11,定理 7.4] 得出。 □

我们还得到 [9, 引理 1.7] 的如下类似结果。

引理 3.4。 设 $(R,+,\cdot)$ 是一个大理想整环。假设 $A \subseteq R$ 在 $(R,+)$ 中分段稠密，并且对某个 $y \in R \setminus \{0\}$，有 $A \subseteq yR$。那么 A/y 在 $(R,+)$ 中分段稠密。

证明。 取 $x \in A \overline{\cap} K(\beta R)$。由于 $x \in yR \overline{=} y\beta R$，选取 $z \in \beta R$ 使得 $x = yz$。令 $q \in K(\beta R)$。于是 $yq \in \beta R$，故选取 $u \in \beta R$ 使得

$$yz = u + yq + yz.$$

由于 $u \in y\overline{R} = y\beta R$，存在 $w \in \beta R$ 使得 $u = yw$。因此

$$yz = yw + yq + yz.$$

由引理 3.1 可知

$$yz = y(w + q + z).$$

由于 R 是一个整环，由引理 3.2 可得

$$z = w + q + z \in K(\beta R) \cap \overline{A/y}.$$

□

定义 3.5 (有限乘积唯一性)。 设 $(S,\cdot)$ 是一个半群，设 $m \in \mathbb{N}$，并设 $\langle y_t \rangle_{t=1}^{m}$ 是 S 中的一个序列。当且仅当对任意满足 $H \neq K$ 的 $H, K \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$，都有

$$\prod_{t\in H} y_t \neq \prod_{t\in K} y_t.$$

无限序列 $\langle y_t \rangle_{t=1}^{\infty}$ 满足有限乘积唯一性，当这一条件对所有有限 $H, K \subseteq \mathbb{N}$ 都成立时。

引理 3.6。 设 $(R,+,\cdot)$ 是一个加法单位元为 0、乘法单位元为 1 的整环。设 $m \in \mathbb{N}$，并设 $\langle y_t \rangle_{t=1}^{m}$ 是一个满足下列条件的序列：

$$FP(\langle y_t \rangle_{t=1}^{m}) \subseteq R \setminus \{0,1\}$$

并且满足有限乘积唯一性。若 A 是 R 的无限子集，则存在 $y_{m+1} \in A$ 使得

$$FP(\langle y_t \rangle_{t=1}^{m+1}) \subseteq A \setminus \{0,1\},$$

且 $\langle y_t \rangle_{t=1}^{m+1}$ 满足有限乘积唯一性。

证明。令 $B = FP(\langle y_t\rangle_{t=1}^{m})$，并定义

$$C = \{x \in R \setminus \{0,1\} : (\exists \alpha, \beta \in B \cup \{1\})(x\alpha = \beta)\}.$$

我们断言 C 是有限的。反设 C 是无限的，并令 $\langle x_i\rangle_{i=1}^{\infty}$ 为 C 中互不相同元素构成的一个序列。对每个 i，存在 α_i，$\beta_i \in B \cup \{1\}$ 使得 $x_i\alpha_i = \beta_i$。

由于 $B \cup \{1\}$ 是有限的，存在一个无限子集 $N_1 \subseteq \mathbb{N}$ 以及 $\beta \in B \cup \{1\}$，使得对所有 $i \in N_1$ 都有 $x_i\alpha_i = \beta$。类似地，存在一个无限子集 $N_2 \subseteq N_1$ 以及 $\alpha \in B \cup \{1\}$，使得对所有 $i \in N_2$ 都有 $x_i\alpha = \beta$。对于 i，$j \in N_2$，我们有 $x_i\alpha = x_j\alpha$；又由于 R 是一个整环，这意味着 $x_i = x_j$，矛盾。因此 C 是有限的。

取 $y_{m+1} \in A \setminus C$ 即可完成证明。 □

由于加法群 $(R, +)$ 是无限的，$(R, +)$ 中的每个 $IP^{\star}$-集都是无限的。现在我们可以证明本节的主定理了。

定理 3.7. 设 R 是一个大理想整环，设 $r \in \mathbb{N}$，并假设

$$R = \bigcup_{i=1}^{r} C_i.$$

那么，存在 $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$、$S$ 中的一个单射序列 $\langle z_n\rangle_{n=1}^{\infty}$，以及由 $(R, +)$ 的分段稠密子集构成的序列 $\langle E_n\rangle_{n=1}^{\infty}$，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$，

$$E_n \subseteq Sz_n,$$

并且只要 $w \in E_n$ 和 $xz_n = w$，就有

$$\{xz_n, x + f(z_n) : f \in F\} \subseteq C_i,$$

其中 F 是 $xR[x]$ 的一个有限子集。

证明。取 $t_0 \in \{1, 2, \ldots, r\}$，使得 C_{t_0} 在 $(R, +)$ 中是分段稠密的。由定理2.5，取 $y_1 \in S \setminus \{0, 1\}$，使得

$$\bigcap_{f\in F} \big(B_0 - f(y_1)\big)$$

是分段稠密的，并令

$$D_1 = \bigcap_{f\in F} \big(B_0 - f(y_1)\big).$$

根据引理 3.3，y_1D_1 是分段稠密的。由于

$$y_1D_1 = \bigcup_{i=1}^{r} \big(y_1D_1 \cap C_i\big),$$

存在 $t_1 \in \{1,2,\ldots,r\}$，使得 $y_1D_1 \cap C_{t_1}$ 是分段稠密的。令

$$B_1 = y_1D_1 \cap C_{t_1}.$$

设 $k \in \mathbb{N}$，并假设我们已选取序列$\langle y_j\rangle_{j=1}^{k}$、$\langle B_j\rangle_{j=0}^{k}$、$\langle t_j\rangle_{j=0}^{k}$和$\langle D_j\rangle_{j=1}^{k}$，使其满足以下归纳假设。

(1) 对 $j = 1,\ldots,k$，$y_j \in S$成立，且

$$FP(\langle y_t\rangle_{t=1}^{k}) \subseteq S \setminus \{0,1\}$$

满足有限乘积唯一性。

(2) 对 $j = 1,\ldots,k$，D_j是分段稠密的。(3) 对 $j = 1,\ldots,k$，$t_j \in \{1,2,\ldots,r\}$成立。
(4) 对 $j = 1,\ldots,k$，B_j是分段稠密的。(5) 对 $j = 1,\ldots,k$，$B_j \subseteq C_{t_j}$成立。(6) 对 $j = 1,\ldots,k$，$B_j \subseteq y_jD_j$ 成立。

(7) 对于 $j < m$属于 $\{0,1,\ldots,k\}$，

$$B_m \subseteq y_my_{m-1}\cdots y_{j+1}B_j.$$

(8) 对于 $m = 1,\ldots,k$，

$$D_m \subseteq B_{m-1} \cap (B_{m-1} - y_m),$$

并且如果 $m > 1$，那么

$$D_m \subseteq \bigcap_{j=1}^{m-1} \bigcap_{f\in F} \left(B_{m-1} - y_{m-1}\cdots y_j f\left(y_{m-1}\cdots y_jy_m\right)\right).$$

所有假设对 $k = 1$ 均成立。
对于 $j = 1,\ldots,k$，令 $u_j = y_ky_{k-1}\cdots y_j$。由定理2.5,

$$A = \left\{ y \in S : \bigcap_{j=1}^{k} \bigcap_{f\in F} \left(B_k - u_jf(u_jy)\right) \text{ is piecewise syndetic} \right\}$$

是 $(R,+)$ 中的 IP^*-集。选取 $y_{k+1} \in A$ 使得

$$FP(\langle y_t\rangle_{t=1}^{k+1}) \subseteq S \setminus \{0,1\}$$

并且有限乘积唯一性成立。定义

$$D_{k+1} = \bigcap_{j=1}^{k} \bigcap_{f \in F} \left(B_k - u_j f(u_j y_{k+1})\right).$$

根据引理 3.3, $y_{k+1}D_{k+1}$ 是分段稠密的。选择 $t_{k+1} \in \{1, 2, \ldots, r\}$，使得 $y_{k+1}D_{k+1} \cap C_{t_{k+1}}$ 是分段稠密的，并设

$$B_{k+1} = y_{k+1}D_{k+1} \cap C_{t_{k+1}}.$$

归纳完成。

选择 $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$，使得

$$G = \{k \in \mathbb{N} : t_k = i\}$$

是无限的。令 $\langle k(n)\rangle_{n=0}^{\infty}$ 为 G中的一个递增序列，并定义

$$z_n = y_{k(n)}y_{k(n)-1}\cdots y_{k(n-1)+1}.$$

那么 $\langle z_n\rangle_{n=1}^{\infty}$ 是单射。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $E_n = B_{k(n)}$。每个 E_n 都是分段稠密的，并且

$$E_n \subseteq z_n S.$$

令 $w \in E_n$，并假设 $xz_n = w$。那么 $xz_n \in C_i$。还需证明，对于所有 $f \in F$，$x + f(z_n) \in C_i$。我们计算

$$\begin{aligned} z_n(x + f(z_n)) &= w + z_n f(z_n) \\ &\in B_{k(n)} + z_n f(z_n) \\ &\subseteq y_{k(n)}D_{k(n)} + z_n f(z_n) \\ &\subseteq y_{k(n)}B_{k(n)-1}. \end{aligned}$$

因此 $x + f(z_n) \in B_{k(n)-1} \subseteq C_i$。 □

定理 *1.7* 的证明。 令 i、$\langle z_n\rangle_{n=1}^{\infty}$ 和 $\langle E_n\rangle_{n=1}^{\infty}$ 为定理 3.7 所给定的对象。对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $y = z_n$。于是

$$E_n y^{-1} \subseteq \{x \in \mathbb{N} : \{xy, x + f(y) : f \in F\} \subseteq C_i\}.$$

由引理 3.4, $E_n y^{-1}$ 是分段稠密的。 □

参考文献

[1] V. Bergelson 和 A. Leibman，范德瓦尔登定理与 Sze- mer´edi 定理的多项式扩展。《美国数学会杂志》，9（1996），725–753。[2] V. Bergelson 和 A. Leibman，集合多项式与海尔斯-杰维特定理的多项式扩展。《数学年刊》，150（1999），33–75。[3] A. W. Hales 和 R. I. Jewett，正则性与位置博弈，《美国数学会汇刊》106（1963），222-229。[4] N. Hindman，整数的划分、和与积。《美国数学会汇刊》247（1979），227-245。[5] N. Hindman，Beta S 代数与拉姆齐理论中的问题和新结果，载于《21世纪数学未解问题》，J. Abe 和 S. Tanaka 编，IOS出版社，阿姆斯特丹（2001），295-305。[6] N. Hindman、I. Leader 和 D. Strauss，分划正则性中的未解问题，《组合学、概率与计算》12（2003），571-583。[7] N. Hindman 和 D. Strauss，《Stone-ˇCech紧化中的代数：理论与应用》，第二版，德古意特出版社，柏林，2012。[8] N. Hindman 和 D. Strauss，交换半群上矩阵的像分划正则性，《拓扑学及其应用》259（2019），179-202。[9] N. Hindman 和 D. Strauss，《Stone-ˇCech紧化中的代数——更新》，《拓扑学论文集》64（2024），1-69。[10] J. Moreira，交换半群中的分划正则多项式模式。博士论文，俄亥俄州立大学，2016。[11] J. Moreira，N 中的单色和与积，《数学年刊》185（2017），1069-1090。[12] M. Walter，多项式范德瓦尔登定理与多项式海尔斯-杰维特定理的组合证明，《伦敦数学会杂志》61（2000），1-12。[13] B. van der Waerden，鲍代特猜想的证明，《新数学档案》，第二辑，15（1927），212-216。