arXiv:2602.03763v1 [math.OC] 3 Feb 2026

单纯复形上加权霍奇拉普拉斯流的优化

Mathias Hudoba de Badyn 和 Tyler Summers

摘要——**单纯复形是图的推广，用于描述图中节点之间的高阶网络交互。网络科学和控制理论已广泛研究由图拉普拉斯流描述的网络动力学，而利用霍奇拉普拉斯算子可将其推广到单纯复形。我们研究单纯复形上的加权霍奇拉普拉斯流。具体而言，我们基于加权霍奇拉普拉斯流构建了加权一致性动力学框架，并给出了加权霍奇拉普拉斯算子的若干分解结果。随后我们证明，加权霍奇拉普拉斯算子的两个关键谱函数——伪逆的迹和最小非零特征值——关于上、下单纯形权重联合凸，且可表示为半定规划。因此，可以高效地确定全局最优权重，从而依据这些函数优化流。数值实验表明，与均匀权重相比，最优权重能够显著改善这些指标。**

I. 引言

分布在网络上的动力系统应用于机器人学、自然科学（例如，鸟类群集和鱼群游动）、基础物理、观点动力学与社会科学、分布式优化算法以及编队飞行等领域。一致性协议在使这些系统中的控制架构就共同变量达成一致方面取得了巨大成功，例如编队飞行中的全局坐标系、群集中的共同速度向量，或分布式优化中的共同对偶变量。一个自然的问题是，图结构如何影响网络上系统的底层动力学；围绕这一问题，人们对一致性协议进行了广泛研究。

控制领域尤其关注性能特征，例如可控性/可观测性，以及性能指标，例如扰动与噪声抑制，如 $\mathcal{H}_2$ 和 $\mathcal{H}_\infty$ 范数。一个尤为优雅的结果是对源于图自同构的图对称性的刻画，这些对称性会在一致性 [7]中产生不可控模态。该结果被推广到一致性协议 [8], [9]的非线性变体。 [10], 研究了生成可控图的算法，并将可控性分析扩展到具有正负权重的网络，发现结构平衡是一致性中对称性施加不可控性的关键因素 [11]。

系统范数在一致性网络中具有物理意义。 $\mathcal{H}_2$ 范数可以解释为图上的有效电阻，其中边权重表示电阻器的电导（即电阻的倒数） [12]。 [13] 利用了这种电阻解释，在串并联图上定义了快速图优化算法；这些算法采用类似于电阻串并联相加的串并联公式来计算和优化 $\mathcal{H}_2$ 范数。$\mathcal{H}_\infty$ 范数在节点权重和边权重上构成一个非凸优化问题，但 [14]研究了一种紧致松弛。 [13], [15]对矩阵加权网络（即向量值一致性）中的这些分析进行了扩展。

边一致性是对一致性协议的一种变体，它通过考虑节点之间的相对状态（称为边状态 [16]），投影消去连通图的图拉普拉斯算子的零空间。 [17]研究了边权重和节点权重（后者也称为时间尺度）的优化问题。另一项研究表明，边权重和时间尺度分别影响 $\mathcal{H}_2$ 范数，由此得出一种*分离原理*，即可以独立选择（或优化）边权重和时间尺度 [18]。本文深入探讨一种上同调理论，说明这种分离源于单纯复形的开创性霍奇分解。

单纯复形是图的一种推广，也可以看作是在超图上施加了额外结构。这种“额外结构”使得我们能够在单纯复形上严格定义离散微积分，因此可以轻松引入类似于高维导数的辛（保持守恒定律）离散算子。这使得单纯复形及其相关拓扑理论成为许多计算领域的重要研究方向，例如量子引力 [3], 网络中的高阶相互作用排序 [19], 以及物理仿真 [20]。

单纯复形上的一致性最早在 [21]中得到研究。近年来，拓扑信号处理领域的发展使单纯复形成为一种自然的数据结构，适用于高阶相互作用（即超越成对相互作用）会影响系统动力学的数据。 [22]中的开创性工作研究了单纯复形上的信号应用，随后又扩展至从数据中寻找加权单纯复形的研究 [23]。 [24],[25]对加权单纯复形及其关联的霍奇拉普拉斯矩阵进行了上同调和谱分析。

本文旨在弥补现有文献中的主要空白：阐明权重在单纯复形上的拉普拉斯流一致性性能中所起的作用，

MHdB 隶属于 DAS Lab 和奥斯陆大学技术系统系。TS 隶属于德克萨斯大学达拉斯分校机械工程系。电子邮箱：mathias.hudoba@its.uio.no，tyler.summers@utdallas.edu。本研究得到挪威研究理事会通过空间系统与传感器中心（309835）和 FME SOLAR（350244）提供的资助，以及美国空军科学研究办公室通过编号为 FA9550-23-1-0424 和 FA2386-24-1-4014 的资助，并得到美国国家科学基金会编号为 ECCS-2047040 的资助。

以及这些权重能否以适用于控制理论性能指标的方式进行优化。本文的贡献如下:

1）基于加权霍奇拉普拉斯流的一致性动力学框架（扩展了 [21],以及关于图上的共识动力学的文献，例如 [26]）；2）陈述并数值计算加权单纯复形上的霍奇分解；3）提出优化问题并进行分析，以找到能优化霍奇拉普拉斯流谱函数的单纯复形权重。

本文结构如下。第 II 节介绍单纯复形的记号与预备知识。第 III 节给出与研究单纯复形上的拉普拉斯流相关的加权单纯复形理论结果。第 IV 节讨论如何针对各种谱函数优化 k-面上的权重，这些谱函数与控制理论性能指标的推广形式相关。第 V 节展示数值结果，第 VI 节总结全文。

II. 数学预备知识

我们沿用 [22] 中的记号和术语。请注意， [24], [25] 对边界算子矩阵的定义所采用的记号在指标和转置方面有所不同。

A. 单纯复形

给定一组 N点 $\{v_0,\dots,v_{N-1}\}$，我们将 k-单纯形 σ_i^k定义为由 $k+1$顶点 $\{v_{i_0},\dots,v_{i_k}\}$组成的集合，其中 $0\le i_j\le N-1$对所有 $j=0,..,N-1$成立，且 $v_{i_j}\neq v_{i_l}$对所有 $i_j\neq i_l$成立。单纯形的阶 比其基数小一。 σ_i^k的一个面是指满足某个 $v_{i_j}\in\sigma_i^k$的集合 $\sigma_{i^k}\setminus\{v_{i_j}\}$，即包含于 σ_i^k中的一个（$k-1$）-单纯形；因此，每个 σ_i^k恰有 $k+1$ 个不同的面。由此，我们可以将单纯复形 $\mathcal{K}$ 定义为一个在包含关系下封闭的（有限）单纯形集合：若 $\sigma_i^k\in\mathcal{K}$，则 $\sigma_i^k\in\mathcal{K}$的每个面也属于该集合。单纯复形的维数 是该复形中所有单形的最高阶。面的定向由其元素的置换决定——如果一种定向可以通过偶数次置换由另一种定向构造得到，则这两种定向相容 。给定一个面 $\sigma_j^{k-1}\subset\sigma_j^k$，若 σ_j^{k-1} 的定向与 σ_i^k的定向相容，则记作 $\sigma_j^{k-1}\sim\sigma_i^k$；否则记作 $\sigma_j^{k-1}\not\sim\sigma_i^k$。

对于每个 k， $\mathcal{K}$ 的有向 k-面的（实）线性组合所构成的向量空间记为 $C_k(\mathcal{K},\mathbb{R})$，而 $C_k(\mathcal{K},\mathbb{R})$中的元素称为 k-链。边界算子 是一个映射 ∂_k：$C_k(\mathcal{K},\mathbb{R})\mapsto C_{k-1}(\mathcal{K},\mathbb{R})$，用于定义本文所考虑的拉普拉斯流的拉普拉斯矩阵，其定义如下:

$$\partial_k\left[v_{i_0},\dots,v_{i_k}\right]=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\left[v_{i_0},\dots,v_{i_k}\right]\setminus\left[v_{i_j}\right]. \quad (1)$$

B. 单纯复形的代数表示

对于图而言，关联矩阵描述顶点之间的边，尤其指出每条边对应哪一对索引。随后利用关联矩阵构造图拉普拉斯算子。这一方法可以推广到单纯复形，如下所示。

设 $\mathcal{K}$ 为维数为 K 的单纯复形。对于每个$k=1,.....,K$，关联矩阵 B_k 将指出哪些k-单形与其 $k+1$ 个（$k-1$）维面[1]相邻。我们将关联矩阵 B_k 定义为:

$$B_k(i,j)=\begin{cases}0 & \sigma_i^{k-1}\not\subset\sigma_j^k\\ 1 & \sigma_i^{k-1}\subset\sigma_j^k \text{ and } \sigma_i^{k-1}\sim\sigma_j^k\\ -1 & \sigma_i^{k-1}\subset\sigma_j^k \text{ and } \sigma_i^{k-1}\not\sim\sigma_j^k\end{cases}$$

由(1)可知， $B_kB_{k+1}=\mathbf{0}$。现在，我们将 L_k 阶的霍奇拉普拉斯算子定义如下:

$$\begin{aligned}L_0&=B_1B_1^T\\ L_k&=B_k^TB_k+B_{k+1}B_{k+1}^T,\ k=1,\dots,K-1\\ L_K&=B_K^TB_K.\end{aligned}$$

$k=1,..,K-1$ 阶的霍奇拉普拉斯算子包含两项：下拉普拉斯算子 $B_k^TB_k$，它编码了 k-单形与$(k-1)$-单形之间的邻接信息；以及上拉普拉斯算子 $B_{k+1}B_{k+1}^T$，它编码了 k 单形与$(k+1)$-单形之间的邻接信息[2]。

C. 加权单纯复形

我们首先通过介绍图上的较简单情形，阐释加权 单纯复形的概念。在图 $\mathcal{G}=(\mathcal{N},\ \mathcal{E})$ 上的一致性问题中，可以为节点 $n\in\mathcal{N}$ 和边 $e\in\mathcal{E}$ 赋予权重，从而形成加权一致性动力学，

$$w_i^n\dot{x}_i=\sum_{ij\in\mathcal{E}}w_{ij}^e(x_j-x_i). \quad (2)$$

权重 w_i^n表示节点的时间尺度 ，可用于调整节点从其邻居 [15], [18], 获取并整合信息的速度，也可用于校正节点 i 所处动力系统的相对时间尺度 [14]。优化节点权重和边权重，可以改善 $\mathcal{H}_2$ 和 $\mathcal{H}_\infty$ 性能指标 [13], [17]。

在本文中，我们将一致性扩展到加权单纯复形，并遵循 [24]中提出的惯例。为正式定义加权单纯复形，我们定义权重函数 $w:\mathcal{K}\mapsto\mathbb{R}^+$，将权重 $w(\sigma)$赋给一个面 $\sigma\in\mathcal{K}$。我们定义$W_i=\mathrm{diag}(w(\sigma_{i^1})\dots,\ w(\sigma_{i^{n_i}}))$，其中 n_i是 $\mathcal{K}$中阶数为 i 的面的数量。于是，单纯复形上的一种自然内积是上链上的内积$f,\ g\in C^i(\mathcal{K},\ \mathbb{R})$,

$$(f,g)_{C^i}=\sum_{i=1}^{n_i}w(\sigma_i)f(\sigma_i)g(\sigma_i)=g^TW_if.$$

由 $(\cdot,\ \cdot)_{C^i}$ 诱导的内积空间中的边界算子矩阵表示，将使我们能够定义拉普拉斯算子，以刻画加权单纯复形上的一致性的形式化概念。

加权边界算子的矩阵表示 ∂_k， $\partial_k^\dagger$ 见 [24]。

[1]对于图的情形，关联矩阵的列指出哪些两个节点（0-单形）与一条边（1-单形）关联。[2]文献中有时将上/下拉普拉斯算子称为上/下拉普拉斯算子。

定理*1*（ *[24]*）：设 B_i 表示无权边界算子 ∂_i的矩阵表示，设W_i 表示诱导 C^i上内积的面权重（对角）矩阵。那么，由 $(\cdot,\ \cdot)_{C^i}$ 诱导的内积空间中，加权边界算子 $\partial_i^\dagger$ 的矩阵表示为 B_i^T，而 ∂_i 的矩阵表示为 $W_{i-1}^{-1}B_iW_i$。

推论 *2*：注意到，$B_i=0$ 对于 $i<0$，且 $i>k$ 对于一个k维单纯复形，第 k个加权上/下拉普拉斯算子分别为，

$$L_k^{\mathrm{d}}=B_k^TW_{k-1}^{-1}B_kW_k,\ L_k^{\mathrm{u}}=W_k^{-1}B_{k+1}W_{k+1}B_{k+1}^T,$$

因此，第 k个加权霍奇拉普拉斯算子为，

$$L_k=L_k^{\mathrm{u}}+L_k^{\mathrm{d}}.$$

证明：我们将 L_k^{u}，L_k 分别定义为 $\partial_{k+1}\partial_{k+1}^\dagger$ 与 $\partial_k^\dagger\partial_k$ 的矩阵表示。■

1）单纯复形与霍奇拉普拉斯算子示例：考虑一个具有面（$k=2$）的单纯形示例。三个霍奇拉普拉斯算子为，

$$\begin{aligned}L_0&=W_0^{-1}B_1W_1B_1^T\\L_1&=W_1^{-1}B_2W_2B_2^T+B_1^TW_0^{-1}B_1W_1\\L_2&=B_2^TW_1^{-1}B_2W_2.\end{aligned}$$

注意，x^0上的动力学，

$$\dot{x}^0=-L_0x^0=-W_0^{-1}B_1W_1B_1^Tx^0$$

可以写成，

$$W_0\dot{x}^0=-B_1W_1B_1^Tx^0,$$

这正是方程（2）中的加权一致性动力学。关于相对于 $\mathcal{H}_2$ 范数优化权重 W_0 和 W_1 的问题，已在 [18]中讨论。

2) 单纯复形和边一致性示例：考虑一个具有边（$k=1$）的单纯形示例。两个霍奇拉普拉斯算子为：

$$\begin{aligned}L_0&=W_0^{-1}B_1W_1B_1^T\\L_1&=B_1^TW_0^{-1}B_1W_1.\end{aligned}$$

拉普拉斯算子 L_1 称为边拉普拉斯算子，边一致性已在 [16] 中得到广泛研究。在这一设置下，关于相对于 $\mathcal{H}_2$ 范数优化权重 W_0 和 W_1 的问题，已在 [17]中进行了分析。

III. 加权霍奇拉普拉斯算子的性质

本节讨论加权霍奇拉普拉斯算子的谱性质，首先介绍其特征值和特征向量的性质。随后，我们讨论霍奇分解的数值计算，该分解可以将 k-拉普拉斯流分解为作用于（$k-1$）-单形和（$k+1$）-单形上的动力学，以及 L_k 的零空间。

引理*3*（命题*2.6*，见 *[24]*）：令 ∂_k 表示加权k-边界算子。于是，$\partial_k\partial_{k+1}=0$。

定理*4*（ *[22]* 中命题*1*的加权类比）：拉普拉斯矩阵 L_k 以及相关的上/下拉普拉斯算子 L_k^{u}，L_k^{d} 满足：

1） L_k^{d} 的非零特征值对应的特征向量与 L_k^{u}的非零特征值对应的特征向量正交，反之亦然。2）如果 v 是 L_{k-1}^{u}的特征向量，那么 B_k^Tv 就是 L_k^{d} 的特征向量，且特征值相同。3） L_k 的非零特征值λ 对应的特征向量，要么是 L_k^{d} 的特征向量，要么是 L_k^{u}的特征向量。

4） L_k 的非零特征值要么是 L_k^{d} 的特征值，要么是 L_k^{u}的特征值。

证明：性质1可由简单计算得出。设 $L_k^{\mathrm{d}}v=\lambda v$。于是，

$$\begin{aligned}L_k^{\mathrm{u}}\lambda v&=L_k^{\mathrm{u}}L_k^{\mathrm{d}}v\\&=W_k^{-1}B_{k+1}W_{k+1}\underbrace{B_{k+1}^TB_k^T}_{=0}W_{k+1}^{-1}B_kW_kv=0.\end{aligned}$$

对于性质2，设 $L_{k-1}^{\mathrm{u}}v=\lambda v$。于是，

$$L_k^{\mathrm{d}}B_k^Tv=B_k^TW_{k-1}^{-1}B_kW_kB_k^Tv=B_k^TL_{k-1}^{\mathrm{u}}v=\lambda B_k^T\lambda v.$$

性质3和性质4可直接由性质1推出。■

定理 *5*：霍奇分解（加权单纯复形的霍奇分解）设 $s^k\in C_k(\mathcal{K},\ \mathbb{R})$ 是单纯复形 $\mathcal{K}$ 上的一个 k-链。向量空间 $\mathbb{R}^{D_k}$（其中 D_k 是 $\mathcal{K}$ 中阶数为 k 的单形数）可以分解为：

$$\mathbb{R}^{D_k}=\mathrm{Im}(\partial_k^\dagger)\oplus\mathrm{Ker}(L_k)\oplus\mathrm{Im}(\partial_{k+1})$$

因此，定义在 $\mathcal{K}$的 k-单形上的信号 s^k 可以分解为：

$$s^k=B_k^Ts^{k-1}+s_H^k+W_k^{-1}B_{k+1}W_{k+1}s^{k+1}.$$

我们可以将 [19] 中的结果推广到加权拉普拉斯算子的情形，从而计算霍奇分解。

定理*6*（ *[19]* 中定理*6.2* 的加权类比）：以下条件等价：

1) 在 k 个面上存在如下形式的信号 $s^k\in C_i(\mathcal{K},\ \mathbb{R})$ 的分解：

$$\begin{aligned}s^k&=B_k^Ts^{k-1}+s_H^k+W_k^{-1}B_{k+1}W_{k+1}s^{k+1}\\s_H^k&\in\mathrm{Ker}(L_k)\end{aligned}$$

2) 方程组存在一个解 $\{\alpha,\beta\}=\{s^{k-1},s^{k+1}\}$：

$$\begin{aligned}L_k^{\mathrm{u}}\alpha&=W_{k-1}^{-1}B_kW_ks^k\\L_{k+1}^{\mathrm{d}}\beta&=B_{k+1}^Ts^k\end{aligned}$$

3）以下这对最小二乘问题的解为 $\{\alpha,\beta\}=\{s^{k-1},s^{k+1}\}$，其中 $\|s^k\|_{W_k}^2=(s^k,\ s^k)_{W_k}$ 是由 k-余链内积 $(\cdot,\ \cdot)_{W_k}$ 诱导的范数：

$$\min_\alpha\quad\|\partial_1\alpha-s^k\|_{W_k}^2\tag{3}$$

$$\min_\beta\quad\|\partial_2^T\beta-s^k\|_{W_k}^2\tag{4}$$

证明：方程 (3) 和 (4) 的最优性条件分别为：

$$\begin{aligned}\partial_k\partial_k^T\alpha&=\partial_ks^k\\\partial_{k+1}^T\partial_{k+1}\beta&=\partial_{k+1}^Ts^k,\end{aligned}$$

代入推论 2 中的恒等式后，可得

$$L_k^{\mathrm{u}}\alpha = W_{k-1}^{-1}B_kW_ks^k$$
$$L_{k+1}^{\mathrm{d}}\beta = B_{k+1}^Ts^k.$$

由此可得 $B_k^T\alpha \in \mathrm{Im}(\partial_k^\dagger)$ 和 $W_k^{-1}B_{k+1}W_{k+1}\beta \in \mathrm{Im}(\partial_{k+1})$。根据定理 4.1，可知 $s_H^K \in \ker(L_k)$ 与 $B_k^Ts^{k-1}$ 和 $W_k^{-1}B_{k+1}W_{k+1}s^{k+1}$均正交，证明完毕。

■

IV. 单纯复形的霍奇拉普拉斯流优化

本节研究单纯复形霍奇拉普拉斯流的优化问题。我们证明，霍奇拉普拉斯算子的两个关键谱函数——伪逆的迹和最小非零特征值——关于上层和下层权重是凸函数，并且可以表示为半定规划。因此，可以高效地确定全局最优权重，以这些函数为指标优化流。这些结果将 [12] 中的一些结果推广到了单纯复形。

A. 霍奇拉普拉斯流

霍奇拉普拉斯流表示在单纯复形上按照微分方程演化的信号

$$\dot{x}^k(t) = -L_kx^k(t), \tag{5}$$

其中，$x^k(t) \in C_k(\mathcal{K}, \mathbb{R}) \times \mathcal{T}$是与 k-单形相关的时变状态（此处，$\mathcal{T}$表示时间域）。例如，L_0 描述顶点流，L_1 描述边流，L_2 描述面流，依此类推。霍奇拉普拉斯算子的谱提供了有关这些流的重要信息（5）。L_k 的特征向量揭示了模态形状或流模式，而特征值则确定了各模态的衰减率。L_k 的核展示了流的基本结构，代表了不会随时间衰减的调和 k-形式。关于无权单纯复形上由霍奇拉普拉斯流支配的单纯复形上的一致性动力学，最早在 [21]中进行了研究。

根据定理 5，我们得到加权霍奇分解上流的如下刻画。

推论 7（霍奇拉普拉斯流分解）：设 $x^k(t) \in C_k(\mathcal{K}, \mathbb{R}) \times \mathcal{T}$为根据方程（5）的拉普拉斯流。则 $x^k(t)$ 按照微分方程演化，

$$\dot{x}^k(t) = L_k^{\mathrm{d}}x^{k-1}(t) + L_{k+1}^{\mathrm{u}}x^{k+1}(t),$$

其中 $x^{k-1}(t) \in C_{k-1}(\mathcal{K}, \mathbb{R}) \times \mathcal{T}$、$x^{k+1}(t) \in C_{k+1}(\mathcal{K}, \mathbb{R}) \times \mathcal{T}$分别为 $(k-1)$-面和 $(k+1)$-面上的流。

我们考虑支配流动力学的霍奇拉普拉斯算子的两个关键谱函数：伪逆的迹和最小非零特征值。霍奇拉普拉斯算子的伪逆的迹由下式给出

$$\mathbf{tr}L_k^+ = \sum_{\lambda_i \neq 0} \frac{1}{\lambda_i}.$$

此函数与流的 $\mathcal{H}_2$ 范数有关，可将其解释为衡量流相对于核中的调和流的扩散程度。对于图拉普拉斯算子L_0，它与图的有效电阻成正比。最小非零特征值 $\lambda_{\min}(L_k) = \min_{\lambda \neq 0} \lambda(L_k)$ 决定了最慢的非调和流消散的速度。

B. 优化霍奇拉普拉斯流

我们证明，霍奇拉普拉斯算子 L_k伪逆的迹和最小非零特征值是上层和下层权重的凸函数，并且可以表述为半定规划。我们从以下结果开始。

命题 8：考虑加权霍奇拉普拉斯算子 $L_k = B_k^TW_{k-1}^{-1}B_kW_k + W_k^{-1}B_{k+1}W_{k+1}B_{k+1}^T$，其中$k$层的权重 W_k 固定，而下层和上层权重$W_{k-1} = \mathrm{diag}(w_{k-1})$和 $W_{k+1} = \mathrm{diag}(w_{k+1})$ 为变量。设 K 是一个矩阵，其列构成 L_k的核的标准正交基。将权重优化为使霍奇拉普拉斯伪逆最小的问题可表示为以下半定规划

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \mathbf{tr}\ Y \\ \text{subject to} & \mathbf{1}^Tw_{k-1} = 1, \quad \mathbf{1}^Tw_{k+1} = 1 \\ & w_{k-1} \geq 0, \quad w_{k+1} \geq 0 \\ & \begin{bmatrix} L_k + KK^T & I \\ I & Y \end{bmatrix} \succeq 0, \end{array} \tag{6}$$

其中变量为权重 w_{k-1} 和 w_{k+1}，以及松弛对称矩阵 Y。

证明：霍奇拉普拉斯算子的伪逆可表示为

$$L_k^+ = (L_k + KK^T)^{-1} - KK^T.$$

因此，$\mathbf{tr}(L_k^+) = \mathbf{tr}((L_k + KK^T)^{-1}) - m$，其中 m 是 L_k的核的维数。（若 L_k 为满秩，则可省略 $m = 0$和 K。由于 $L_k + KK^T \succ 0$，根据舒尔补

$$\begin{bmatrix} L_k + KK^T & I \\ I & Y \end{bmatrix} \succeq 0 \quad \Leftrightarrow \quad Y \succeq (L_k + KK^T)^{-1}. \tag{7}$$

松弛变量的最优值为 $Y = L_k + KK^T)^{-1}$，因此目标函数变为 **迹**$L_k^+ + m$。由于霍奇拉普拉斯算子关于上层和下层权重 w_{k+1} 和w_{k-1} 呈线性，且 k 层权重 w_k 固定，因此式 (7) 左侧是一个线性矩阵不等式。因此，问题 (6) 是一个半定规划。

■

关于最小的非零特征值，我们有如下结果。

命题 9：考虑加权霍奇拉普拉斯算子 $L_k = B_k^TW_{k-1}^{-1}B_kW_k + W_k^{-1}B_{k+1}W_{k+1}B_{k+1}^T$，其中$k$层权重 W_k 固定，而下层和上层权重$W_{k-1} = \mathrm{diag}(w_{k-1})$和 $W_{k+1} = \mathrm{diag}(w_{k+1})$ 为变量。设 K 是一个矩阵，其列构成 L_k核的标准正交基。确定权重以最大化霍奇拉普拉斯算子最小非零特征值的问题可表述为以下半定规划

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \gamma \\ \text{subject to} & \mathbf{1}^Tw_{k-1} = 1, \quad \mathbf{1}^Tw_{k+1} = 1 \\ & w_{k-1} \geq 0, \quad w_{k+1} \geq 0 \\ & \gamma I \preceq L_k + \beta KK^T. \end{array} \tag{8}$$

变量为权重 w_{k-1} 和 w_{k+1}，以及松弛变量 γ 和 β。

证明：对于任意对称矩阵 A，约束 $\gamma I \preceq A$ 确保 A 的所有特征值（包括最小特征值）都至少为 γ。由于相关单纯复形中的结构性“孔洞”可能导致霍奇拉普拉斯算子 L_k 秩亏，而我们希望优化问题关注最小非零特征值，因此加入约束 $\gamma I \preceq L_k + \beta K K^T$。项 $\beta K K^T$ 将 L_k 的零特征值移离原点，这些特征值与权重无关。该约束确保无约束松弛变量 β 满足 $\beta \geq \gamma$，从而在最优时，L_k 的最小非零特征值为 γ。 ■

V. 数值示例

本节根据第 III 节的结果，说明如何计算单纯复形的最优权重。为构造问题实例，我们生成 Vietoris–Rips复形。Vietoris–Rips复形是一类根据点之间的两两距离构建的单纯复形，可用于探索网络和数据集的高阶拓扑与代数结构。当这些点从度量空间中随机采样时，Vietoris–Rips复形可视为几何随机图的推广。

令 $p = [p_1, p_2, ..., p_N]$ 为度量空间中的一组 N 个点。给定阈值 ϵ，Vietoris–Rips复形按如下方式构造。每个点 p_i 表示一个顶点。如果 $d(p_i, p_j) \leq \epsilon$，则这对点构成一条边。若一个 k-单纯形中所有顶点两两之间都有边相连，则该单纯形会被纳入复形，最高阶数由所需阶数决定。因此，如果一组 $k+1$ 个点在对应的距离图中构成一个完全连通子图，那么它就会作为一个 k-单纯形纳入复形。

为说明第 III 节所述最优高阶权重的计算方法，我们通过在单位正方形上均匀采样点，生成了随机 Vietoris–Rips复形。图 1 展示了一个基于 30 个点构造的 Vietoris–Rips复形，其阈值为 $\epsilon = 0.5$，包含 30 个顶点、151 条边和 339 个面。我们求解半定规划 (6)，以计算加权霍奇拉普拉斯算子 L_1 的面权重；在顶点权重和边权重均固定为 1 的条件下，使伪逆最小化。图 2 展示了这 339 个面的最优面权重；与无权霍奇拉普拉斯算子（面权重均为 1）相比，这些权重使伪逆改善了 8.9%。我们还求解了半定规划 (8)，以最大化最小非零特征值

加权霍奇拉普拉斯算子 L_1。图3展示了与图2中面排序相同的最优权重。与无权霍奇拉普拉斯算子相比，这些权重将最小非零特征值提高了228%。可以看出，这些权重与优化伪逆迹所得的权重有显著差异。图4展示了无权情形与最优加权情形下相应的边流（ $\dot{x}^1(t) = -L_1 x^1(t)$的解）。可以看出，采用最优权重的边流表现出快得多的收敛。

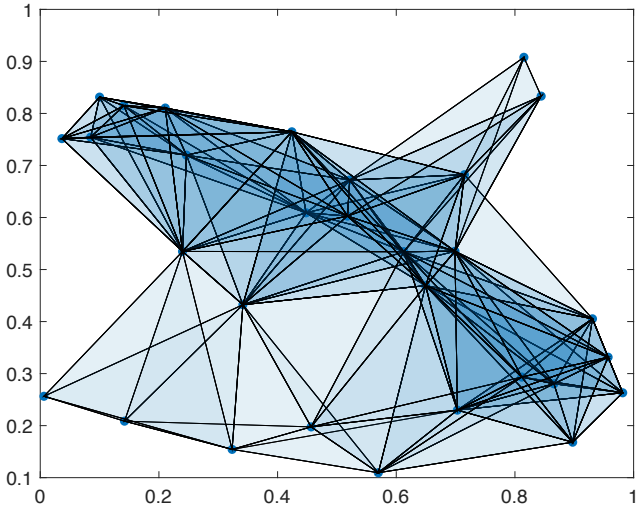


图1：由在单位正方形上以阈值0.5均匀采样的30个点生成的Vietoris–Rips复形。该复形包含30个节点、151条边和339个面。复形中的每个面根据针对加权霍奇拉普拉斯算子 L_1用半定规划(6)计算得到的最优面权重进行着色。

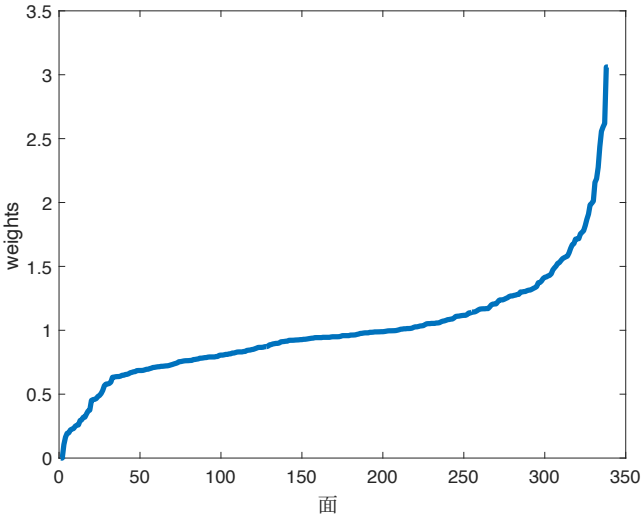


图 2：图 1 中 Vietoris–Rips复形的 339 个面的最优面权重。与无权霍奇拉普拉斯算子（权重均为 1）相比，最优权重使霍奇拉普拉斯伪逆提升了 8.9%。

VI. 结论与未来工作

本文中，我们基于加权霍奇拉普拉斯算子建立了加权一致性动力学的框架

流，并展示了一些分解结果。我们证明，加权霍奇拉普拉斯算子的两个关键谱函数——伪逆的迹和最小非零特征值——关于上、下单纯形权重联合凸，因此可以表述为半定规划并实现全局优化。未来的工作将进一步探索单纯复形上动力学的系统理论性质，并开发更多互补的优化算法，以设计具有所需性质的单纯复形。

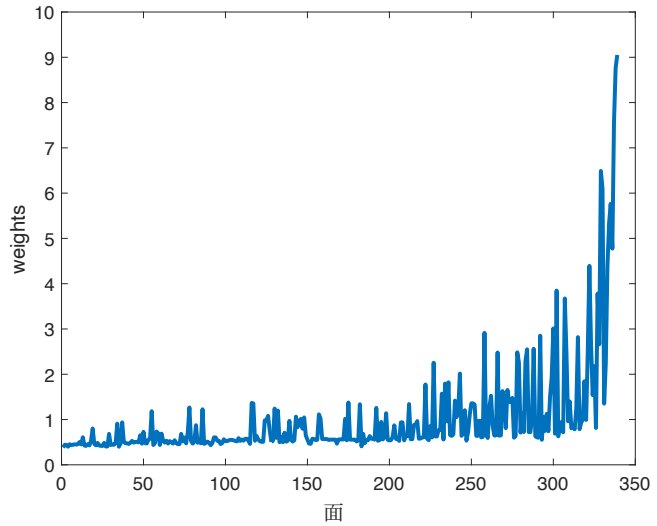


图 3：使用半定规划 (8) 计算得到的图 1 中 Vietoris–Rips复形的 339 个面对应的最优面权重；该规划旨在最大化加权霍奇拉普拉斯算子 L_1 的最小非零特征值，面次序与图 2 相同。与无权霍奇拉普拉斯算子（权重均为 1）相比，最优权重使最小非零特征值提高了 228%。

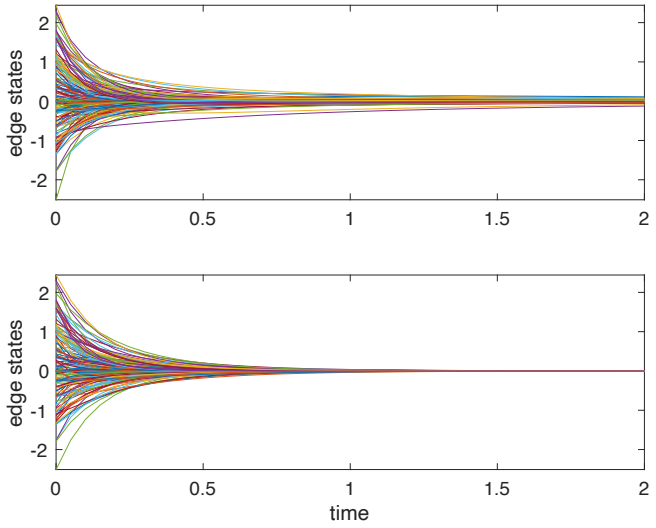


图 4：（上）无权霍奇拉普拉斯算子对应的边流；（下）使用半定规划 (6) 计算得到的加权霍奇拉普拉斯算子对应的边流，该规划旨在最大化加权霍奇拉普拉斯算子 L_1 的最小非零特征值，采用最优权重后收敛速度显著加快。

参考文献

[1] M. A. Joordens 和 M. Jamshidi，“水下群体机器人一致性控制”，载于*IEEE*系统、人类与控制论国际会议论文集，第 3163–3168 页，圣安东尼奥，2009 年 10 月。[2] T. Vicsek、A. Czirok、E. Ben-Jacob、I. Cohen 和 O. Shochet，“自驱动粒子系统中的新型相变”，纽约，第 75 卷，第 6 期，第 1226–1229 页，1995 年。[3] R. Loll，“因果动力学三角剖分中的量子引力：综述”，《经典与量子引力》，第 37 卷，013002，2019 年 1 月。[4] C. Altafini，“结构平衡社会网络中的意见形成动力学”，《公共科学图书馆·综合》，第 7 卷，第 6 期，第 5876–5881 页，2012 年。[5] Y. Wang、L. Wu 和 S. Wang，“一种用于含需求响应的直流最优潮流的完全分布式一致性 ADMM 方法”，《*IEEE*智能电网汇刊》，第 8 卷，第 6 期，第 2637–2647 页，2016 年。[6] H. G. Tanner 、 G. J. Pappas 和 V. Kumar，“领导者到队形稳定性”，《*IEEE*机器人学与自动化汇刊》，第 20 卷，第 3 期，第 443–455 页，2004 年。[7] A. Rahmani，“ 从图论视角看多智能体系统的可控性”，第 52 卷，第 6 期，第 2599–2622 页，2014 年。[8] C. O. Aguilar 和 B. Gharesifard，“非线性网络化控制系统可控性的必要条件”，载于*2014*年美国控制会议。IEEE，2014 年，第 5379–5383 页。[9] M. Hudoba de Badyn、S. Alemzadeh 和 M. Mesbahi，“非线性符号网络中二部一致性的可控性与数据驱动辨识”，载于*2017*年*IEEE*第*56*届决策与控制年会（*CDC*）。IEEE，2017 年，第 3557–3562 页。[10] M. Hudoba de Badyn 和 M. Mesbahi，“通过添须法和次模优化构建可控网络”，载于*IEEE*第*55*届决策与控制会议论文集，美国拉斯维加斯，2016 年，第 867–872 页。[11] S. Alemzadeh、M. Hudoba de Badyn 和 M. Mesbahi，“符号一致性网络的可控性与可稳定性分析”，载于*IEEE*控制技术与应用会议论文集，美国科哈拉海岸，2017 年，第 55–60 页。

[12] A. Ghosh、S. Boyd 和 A. Saberi，《最小化图的有效电阻》，《*SIAM*评论》，第50卷，第1期，第37–66页，2008年。[13] M. Hudoba de Badyn 和 M. Mesbahi，《串并联网络的$\mathcal{H}_2$ 性能：组合视角》，《*IEEE*自动控制汇刊》，第66卷，第1期，第354–361页，2020年。[14] O. Farhat、D. Abou Jaoude 和 M. Hudoba de Badyn，《边一致性的H_∞ 网络优化》，《欧洲控制学报》，第62卷，第2–13页，2021年。[15] D. R. Foight、M. Hudoba de Badyn 和 M. Mesbahi，《矩阵加权和时间尺度化图上的一致性性能与设计》，《*IEEE*网络系统控制汇刊》，第7卷，第4期，第1812–1822页，2020年。[16] D. Zelazo 和 M. Mesbahi，《边一致：图论性能界与无源性分析》，《*IEEE*自动控制汇刊》，第56卷，第3期，第544–555页，2010年。[17] M. Hudoba de Badyn、D. R. Foight、D. Calderone、M. Mesbahi 和 R. S. Smith，《边一致性的图论优化》，*IFAC- PapersOnLine*，第54卷，第9期，第533–538页，2021年。[18] D. R. Foight、M. Hudoba de Badyn 和 M. Mesbahi，《网络韧性的时间尺度设计》，载于*2019*年*IEEE*第*58*届决策与控制会议（*CDC*）。IEEE，2019年，第2096–2101页。[19] A. N. Hirani、K. Kalyanaraman 和 S. Watts，《图上的最小二乘排序》，*arXiv*预印本 *arXiv:1011.1716*，2010年。[20] L. J. Grady 和 J. R. Polimeni，《离散微积分：面向计算科学的图上应用分析》。Springer，2010年，第3卷。[21] A. Muhammad 和 M. Egerstedt，《在网络拓扑中使用高阶拉普拉斯算子进行控制》，载于第*17*届国际网络与系统数学理论研讨会论文集。Citeseer，2006年，第1024–1038页。[22] S. Barbarossa 和 S. Sardellitti，《单纯复形上的拓扑信号处理》，《*IEEE*信号处理汇刊》，第68卷，第2992–3007页，2020年。[23] C. Battiloro、S. Sardellitti、S. Barbarossa 和 P. Di Lorenzo，《加权单纯复形上的拓扑信号处理》，载于*ICASSP 2023-2023 IEEE*国际声学、语音与信号处理会议（*ICASSP*）。IEEE，2023年，第1–5页。[24] C. Wu、S. Ren、J. Wu 和 K. Xia，《加权（上）同调与加权拉普拉斯算子》，*arXiv*预印本 *arXiv:1804.06990*，2018年。[25] D. Horak 和 J. Jost，《单纯复形上组合拉普拉斯算子的谱》，《数学进展》，第244卷，第303–336页，2013年。[26] M. Mesbahi 和 M. Egerstedt，多智能体网络中的图论方法。普林斯顿大学出版社，2010年。