平面上具有临界质量的完全抛物型Keller–Segel系统的整体存在性

TATSUYA HOSONO

摘要。我们研究二维完全抛物型Keller–Segel系统在临界质量下的柯西问题解的整体存在性。已知在径向对称或满足适当矩条件时，具有临界质量的初始数据对应的解全局存在；而临界区域中一般解的行为仍较为微妙。本文证明，对于具有临界质量的一般初始数据，即使不施加任何对称性或矩假设，解也全局存在。证明基于重构李雅普诺夫泛函的构造，并结合对相关耗散项的精细正则性估计，从而能够控制临界区域中的解的动力学。

arXiv:2602.03768v1 [math.AP] 3 Feb 2026

关键词： Keller–Segel 系统；趋化性；整体存在性；临界质量

2020 数学 学科分类： 主要：35K45，次要：35Q92，35A01，35A2

1. 引言

我们研究 $\mathbb{R}$ 中抛物—抛物型 Keller–Segel 系统的柯西问题

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u - \nabla \cdot (u \nabla v), & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^2, \\ \partial_t v = \Delta v - \lambda v + u, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^2, \\ (u, v)(0, x) = (u_0, v_0)(x), & x \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \tag{1.1}$$

其中常数为 $\lambda \geq 0$，$u_0, v_0 \geq 0$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上且 $u_0, v_0 \not\equiv 0$。Keller–Segel 系统 (1.1) 是趋化性的基本数学模型，描述细胞黏菌 Dictyostelium discoideum 在其生命周期[16, 33]中的趋化聚集。在该模型中，$u = u(t, x)$ 和 $v = v(t, x)$ 分别表示细胞和化学引诱物的密度。参数 λ 表示化学物质的降解率。细胞会向细胞自身分泌的化学物质浓度较高的区域迁移。从生物学角度看，假设初始数据为非负函数是自然的。从数学角度看，细胞聚集被解释为解在 $t = T$ 处爆破解，其意义是 $\lim_{t \to T} \|u(t)\|_\infty = \infty$.

这类系统的核心数学特征之一是临界质量现象。对于足够光滑的正解 (u, v) 满足（1.1）的解，其第一分量 u 满足质量守恒定律

$$\|u(t)\|_1 = \|u_0\|_1 \quad \text{for } t > 0.$$

此外，在二维空间中，解的整体行为由 u 的初始质量大小决定。具体而言，存在一个阈值：初始质量低于该阈值的解可在整个时间范围内存在，而初始质量高于该阈值的解可能在有限时间内爆破。这种临界质量现象在文献中引起了广泛关注。

本文旨在建立初始质量恰好等于该阈值的方程 (1.1) 解的整体行为。

（1.1）中的第二个方程考虑了细胞自身会产生化学引诱物，同时化学引诱物也会向周围环境扩散。由于化学引诱物达到平衡所需的时间尺度远短于细胞，因此简化后的抛物-椭圆型系统也得到了研究 [15, 24]:

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u - \nabla \cdot (u \nabla v), & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^2, \\ 0 = \Delta v - \lambda v + u, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^2, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{1.2}$$

系统（1.2）也与粒子引力相互作用模型有关 [5, 36]。在（1.2）中，第二个方程可以写成 $v = (-\Delta + \lambda)^{-1} u$. 因此，系统（1.2）可以化简为关于 u 的单个方程。由于这种椭圆结构，抛物-椭圆型系统（1.2）比全抛物型系统（1.1）更易于分析，因此得到了广泛研究，在许多方面已有深入理解。特别是，大量研究致力于临界质量现象。事实上，当 $\|u_0\|_1 \leq 8\pi$ 时，解在全局时间内存在 [4, 6, 7, 8, 10, 19, 20, 26, 27,28, 32, 34], ；而当 $\|u_0\|_1 > 8\pi$ [10, 17, 18, 34]时，解可能在有限时间内爆破。关于有界区域中配以齐次诺伊曼边界条件的相应柯西–诺伊曼问题，参见 [3, 5, 11, 24, 25] ，例如。

与抛物-椭圆型系统（1.2）不同，全抛物型系统（1.1）是一个强耦合抛物型系统，许多为（1.2）发展的方法不再适用。尽管如此，通过结合李雅普诺夫泛函、Trudinger–Moser 型不等式及其最优常数，已经证明了次临界质量下解的整体存在性 $\|u_0\|_1 < 8\pi$ 。更确切地说，已知以下结果:

（i）若 $\|u_0\|_1 < 8\pi$，则（1.1）的相应解在全时间范围内存在 [9, 21,27]。（ii）若 $\|u_0\|_1 > 8\pi$ 且 （u_0， v_0）径向对称，则存在一个在有限时间内爆破的径向对称解 [22, 23]。（iii）若 $\|u_0\|_1 = 8\pi$ 且 （u_0， v_0）径向对称，或满足附加的矩条件 $u_0 \mathrm{l}\mathrm{n}(1 + |x|^2) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ ，则相应解整体存在。相比之下，对于一般初始数据，临界情形下的整体行为仍然十分微妙，解要么整体存在，要么在平面上爆破 [9, 21]。

关于（1.1）的正向自相似解，参见 [2]。关于有界区域中相应的柯西–诺伊曼问题，例如可参见 [1, 13, 14, 30], 。

如上所述，尽管已有若干部分结果，但对于具有临界质量且一般初始数据、不含任何对称性或矩假设的解，尚未得到完整的整体存在性结果。主要困难之一在于控制解在 $|x| \to \infty$处的行为。此外，在临界质量情形下，目前对于（1.1）在有界区域中相应的柯西–诺伊曼问题，尚无已知的整体存在性结果。

本文针对一般初始数据 (u_0, v_0)，证明了临界质量下解的整体存在性。为此，我们先回顾解的定义。

定义。设 $4/3 < p < 2$ 和 $q = p/(p-1)$。给定 $T \in (0, \infty]$ 和 $(u_0, v_0) \in L^1(\mathbb{R}^2) \times \dot{H}^1(\mathbb{R}^2)$，称定义在 $[0,T)\times\mathbb{R}^2$ 上的一对函数 (u, v) 是 *(1.1)* 在 $[0,T)$ 上的温和解，若

(1) $u \in C\big([0,T);\ L^1(\mathbb{R}^2)\big) \cap C\big((0,T);\ L^p(\mathbb{R}^2)\big)$;
(2) $v \in C\big([0,T);\ \dot{H}^1(\mathbb{R}^2)\big) \cap C\Big((0,T);\ \dot{W}^{1,q}(\mathbb{R}^2)\Big)$;(3) $\sup_{0<t<T} t^{1-\frac{1}{p}}\|u(t)\|_p + \sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\nabla v(t)\|_q$;
(4) (u, v) 满足积分形式

$$u(t) = e^{t\Delta}u_0 - \int_0^t \nabla \cdot e^{(t-s)\Delta}\big(u(s)\nabla v(s)\big)\,\mathrm{d}s,$$

$$v(t) = e^{t(\Delta-\lambda)}v_0 + \int_0^t e^{(t-s)(\Delta-\lambda)}u(s)\,\mathrm{d}s$$

对于 $0 < t < T$，其中 $e^{t\Delta}$ 是由下式给出的热半群

$$e^{t\Delta}f(x) := G_t * f(x) = \int_{\mathbb{R}^2} G_t(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y, \quad G_t(x) = \frac{1}{4\pi t}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$$

对于 $x \in \mathbb{R}^2$ 和 $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$。

勒贝格空间 $L^p(\mathbb{R}^2)$ 配备范数 $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$；在不致混淆时，简记为 $\|\cdot\|_p$。我们定义齐次索伯列夫空间如下：

$$\dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^2) := \overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^2)}^{\|\nabla(\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}}$$

且 $\dot{H}^1(\mathbb{R}^2) := \dot{W}^{1,\ 2}(\mathbb{R}^2)$ 当 $p = 2$ 时。 $L^1_+(\mathbb{R}^2) := \{f \in L^1(\mathbb{R}^2);\ f \geq 0$ 并且 $f \neq 0$ 在 $\mathbb{R}^2\}$ 上。

我们分析的出发点是方程 (1.1) 的局部适定性，而基于上述定义的解 (u, v) 在 $(0, T)$ 上以经典意义满足方程 (1.1)，参见下文第 3.1 节中的命题 3。

现在我们可以陈述本文的主要结果。本文的主要结果如下。

定理 *1.1.* *对于 $(u_0, v_0) \in L^1_+(\mathbb{R}^2) \times L^1_+(\mathbb{R}^2) \cap \dot{H}^1(\mathbb{R}^2)$，设 (u, v) 是方程 (1.1) 在 $(0, T) \times \mathbb{R}^2$ 上的解。假设 $\|u_0\|_1 = 8\pi$。那么，方程 (1.1) 的解在整个时间范围内存在。*

注 1.1。 在定理1.1中，初始数据只需满足

$$(u_0, v_0) \in L^1_+(\mathbb{R}^2) \times \big(L^1_+(\mathbb{R}^2) \cap \dot{H}^1(\mathbb{R}^2)\big) \quad with\ \|u_0\|_1 = 8\pi.$$

特别是，不要求额外的对称性或矩假设。

如上所述，在没有任何对称性或矩假设的情况下，临界质量下解的整体存在性问题仍然棘手。在[21, 定理 1。2], 中，通过反证法证明，对于具有临界质量的一般初始数据，解要么在时间上整体存在，要么在平面上爆破。事实上，尽管在亚临界情形下，可以通过结合（修正的）李雅普诺夫泛函与 Trudinger–Moser 不等式得到正则性估计，但由于解的正则性不足，在临界情形下已无法直接得到此类估计，见下文（4.3）。这一困难阻碍了经典熵方法的直接推广。

为克服这一困难，我们引入了重构李雅普诺夫泛函。本工作的主要创新在于构造了一种精细李雅普诺夫泛函，专门

针对全空间情形进行了调整，使我们能够控制解在 $|x| \to \infty$ 处的行为，并且即使在临界质量区域，也能推导出正则性估计，而无需对初始数据施加任何对称性或矩假设。因此，我们证明了临界质量下对一般初始数据的全局存在性，这是现有方法此前无法实现的结果，详情请参见小节4.1 此外，预计目前的方法也适用于全空间情形下的一大类趋化系统。

本文其余部分组织如下。在第2节中，我们回顾证明主要结果所需的若干预备引理。第3 节致力于（1.1）的局部适定性，基于上述解的定义。最后，在第4节中，我们给出定理1.1的证明。

2. 预备知识

在本节中，我们汇集一些工具以证明我们的主要结果。

Lemma 2.1. 对于任意 $f \in H^1(\mathbb{R}^2)$ 以及非负截断函数 $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ ，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} |f|^2\phi \,\mathrm{d}x \le 2\left(\int_{\{|f|>1\}\cap\{supp\ \phi\}} |f| \,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\{|f|>1\}} \frac{|\nabla f|^2}{1+|f|}\phi \,\mathrm{d}x\right)\\ + 4\left(\int_{\mathbb{R}^2} |f\nabla\phi^{\frac12}| \,\mathrm{d}x\right)^2 + 4\left(\int_{\mathbb{R}^2} |f|\phi \,\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

以及对任意 $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} |f|^3\phi \,\mathrm{d}x \le \varepsilon\left(\int_{\{supp\ \phi\}} (1+|f|)\ln(1+|f|) \,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla f|^2\phi \,\mathrm{d}x\right)\\ + C\left(\int_{\mathbb{R}^2} |f^{\frac32}\nabla\phi^{\frac12}| \,\mathrm{d}x\right)^2 + C_\varepsilon\left(\int_{\mathbb{R}^2} |f|\phi \,\mathrm{d}x\right),\end{aligned}$$

其中常数 $C_\varepsilon \to \infty$ *as* $\varepsilon \to 0$。

引理的证明 2.1 可见于 [28, 引理 2.2]。

引理 2.2。 对于 $1 \le q \le p \le \infty$，令 $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ 并令 α 为一个多重指标。则可得

$$\|\partial_x^\alpha e^{t\Delta} f\|_p \le Ct^{-\frac{n}{2}\left(\frac1q-\frac1p\right)-\frac{|\alpha|}{2}}\|f\|_q$$

对所有 $t > 0$。

利用杨氏不等式以及热演化通过热核卷积表示式可立即得到证明，例见 [12]。

引理 2.3。 对于 $v_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap \dot{H}^1(\mathbb{R}^2)$ 和 $f \in L^\infty(0,\infty; L^1(\mathbb{R}^2))$，设 v 是 $\partial_t v = \Delta v - \lambda v + f$ 在 $(0,\infty) \times \mathbb{R}^2$ 上的解，其初始数据为 v_0 和 $\lambda \ge 0$。那么，对于任意$1 \le p < \infty$,

$$\|v(t)\|_p \le \begin{cases} \|v_0\|_p + \dfrac{1}{p}\|f\|_{L^\infty(0,\infty;L^1(\mathbb{R}^2))} t^{\frac1p} & \text{if } \lambda = 0, \\ \|v_0\|_p + \lambda^{-\frac1p}\|f\|_{L^\infty(0,\infty;L^1(\mathbb{R}^2))}\Gamma\left(\dfrac1p\right) & \text{if } \lambda > 0. \end{cases}$$

当 $p=1$ 时，

$$\int_{\mathbb{R}^2} v\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \|v_0\|_1 + t\|u_0\|_1 & if\ \lambda = 0, \\ e^{-\lambda t}\|v_0\|_1 + \dfrac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda}\|u_0\|_1 & if\ \lambda > 0. \end{cases}$$

引理 2.3 的证明是利用 v 的积分表述进行直接计算得到的。

3. 局部时间解

本节讨论局部时间解 (u,v) 之于（1.1），其对应于初始数据 $(u_0,v_0) \in L^1(\mathbb{R}^2) \times \dot{H}^1(\mathbb{R}^2)$。

命题 3.1（局部时间解）。设 $4/3 < p < 2$ 与 $q = p/(p-1)$。对于 $(u_0,v_0) \in L^1(\mathbb{R}^2) \times \dot{H}^1(\mathbb{R}^2)$，存在 $T \in (0,\infty]$ 以及 (1.1) 在 $[0,T)$ 上依定义意义的唯一温和解 (u,v)。此外，解 (u,v) 在 $(0,T)$ 上具有高阶正则性，并在 $(0,T) \times \mathbb{R}^2$ 上以经典意义满足方程组 (1.1)。另外，

$$either\ T=\infty\ or\ T<\infty\ and\ \lim_{t\to T}\{\|u(t)\|_r + \|\nabla v(t)\|_{r+1}\} = \infty,\ 1 < r \le \infty \tag{3.1}$$

此外，若 u_0，$v_0 \ge 0$ 则 u，$v > 0$ 在 $(0,\ T) \times \mathbb{R}^2$ 且

$$\|u(t)\|_1 = \|u_0\|_1, \qquad t \in [0,T).$$

我们来证明命题3.1。我们固定常数 $\eta > 0$ 与 $T > 0$，它们稍后将根据初始数据选取。设 $M = 4(\|u_0\|_1 + \|\nabla v_0\|_2)$，并设 $4/3 < p < 2$ 与$q = p/(p-1)$。定义空间 $\mathcal{X}_T$ 为

$$\mathcal{X}_T := \left\{ \begin{array}{l} u \in L^\infty\left(0,T;L^1(\mathbb{R}^2)\right) \cap C\left((0,T);L^p(\mathbb{R}^2)\right), \\ v \in L^\infty\left(0,T;\dot{H}^1(\mathbb{R}^2)\right) \cap C\left((0,T);\dot{W}^{1,q}(\mathbb{R}^2)\right); \\ \sup\limits_{0<t<T}\|u(t)\|_1 + \sup\limits_{0<t<T}\|\nabla v(t)\|_2 \le M, \\ \sup\limits_{0<t<T} t^{1-\frac{1}{p}}\|u(t)\|_p \le \eta_1,\ \sup\limits_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\nabla v(t)\|_q \le \eta_2 \end{array} \right\}$$

以及距离为

$$d_{\mathcal{X}_T}\left((u,v),(\widetilde{u},\widetilde{v})\right) := \sup_{0<t<T} t^{1-\frac{1}{p}}\|u(t)-\widetilde{u}(t)\|_p + \sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\nabla v(t)-\widetilde{v}(t)\|_q.$$

于是我们看出，$(\mathcal{X}_T, d_{\mathcal{X}_T})$是一个完备度量空间。接下来，映射 $\Phi = (\Phi_1,\Phi_2)$: $\mathcal{X}_T \to \mathcal{X}_T$ 记为

$$\Phi_1[u,v](t) := e^{t\Delta}u_0 - \int_0^t \nabla \cdot e^{(t-s)\Delta}\left(u(s)\nabla v(s)\right)\mathrm{d}s,$$

$$\Phi_2[u,v](t) := e^{t(\Delta-\lambda)}v_0 + \int_0^t e^{(t-s)(\Delta-\lambda)}u(s)\,\mathrm{d}s$$

对于$(u,v) \in \mathcal{X}_T$以及 $t \in (0,T)$。

我们将通过适当选取 (η_1,η_2,T)，证明 Φ 是从 X_T到自身的压缩映射，从而应用巴拿赫不动点定理。

引理 3.2. 设 $(u,v) \in \mathcal{X}_T$。那么，存在充分小的常数 $(\eta_1, \eta_2, T) > 0$，使得

$$\sup_{0<t<T} \|\Phi_1[u,v](t)\|_1 + \sup_{0<t<T} \|\nabla\Phi_2[u,v](t)\|_2 \le M$$

and

$$\sup_{0<t<T} t^{1-\frac{1}{p}} \|\Phi_1[u,v](t)\|_p \le \eta_1, \quad \sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \|\nabla\Phi_2[u,v](t)\|_q \le \eta_2.$$

此外，对于$(u,v) \in \mathcal{X}_T$以及$(\widetilde{u},\widetilde{v}) \in \mathcal{X}_T$,

$$d_{\mathcal{X}_T}(\Phi[u,v], \Phi[\widetilde{u},\widetilde{v}]) \le \frac{1}{2} d_{\mathcal{X}_T}((u,v),(\widetilde{u},\widetilde{v})). \tag{3.2}$$

引理的证明3.2。 设$(u,v) \in \mathcal{X}_T$。由于Hölder不等式以及热核的性质,

$$\begin{aligned}
&\|\Phi_1[u,v](t)\|_1 \\
&\le \|e^{t\Delta}u_0\|_1 + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u(s)\nabla v(s)\|_1 \,\mathrm{d}s \\
&\le \|u_0\|_1 + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u(s)\|_p \|\nabla v(s)\|_q \,\mathrm{d}s \\
&\le \|u_0\|_1 + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} s^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \,\mathrm{d}s \left(\sup_{0<s<t} s^{1-\frac{1}{p}} \|u(s)\|_p\right) \left(\sup_{0<s<t} s^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \|\nabla v(s)\|_q\right) \\
&\le \frac{M}{4} + C_1 \mathsf{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \eta_1\eta_2,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

其中

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

且对于 x、 $y > 0$，贝塔函数B(x,y)由下式给出

$$\mathsf{B}(x,y) := \int_0^1 (1-\tau)^{x-1}\tau^{y-1} \,\mathrm{d}\tau, \quad (x,y) \in (0,\infty)^2.$$

选取足够小的 $\eta_1 > 0$，使得

$$C_1 \mathsf{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \eta_1\eta_2 \le \frac{M}{4},$$

我们看到

$$\sup_{0<t<T} \|\Phi_1[u,v](t)\|_1 \le \frac{M}{2}.$$

对于 $\Phi_2[u,v]$的估计，热核的平滑性质意味着

$$\begin{aligned}
\|\nabla\Phi_2[u,v](t)\|_2 &\le \|\nabla v_0\|_2 + C\int_0^t (t-s)^{-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}} s^{-1+\frac{1}{p}} \,\mathrm{d}s \left(\sup_{0<s<t} s^{1-\frac{1}{p}} \|u(s)\|_p\right) \\
&\le \frac{M}{4} + C_2 \mathsf{B}\left(1-\frac{1}{p},\frac{1}{p}\right) \eta_1.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

取 $\eta_1 > 0$ 使得

$$C_2 \mathsf{B}\left(1-\frac{1}{p},\frac{1}{p}\right) \eta_1 \le \frac{M}{4},$$

由此可得

$$\sup_{0<t<T}\|\nabla\Phi_2[u,v](t)\|_2\le\frac{M}{2}.$$

接下来，由Hölder不等式,

$$\begin{aligned}
&t^{1-\frac{1}{p}}\left\|\int_0^t\nabla\cdot e^{(t-s)\Delta}(u(s)\nabla v(s))ds\right\|_p\\
\le& Ct^{1-\frac{1}{p}}\int_0^t(t-s)^{-\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}}\|u(s)\nabla v(s)\|_1\,\mathrm{d}s\\
\le& Ct^{1-\frac{1}{p}}\int_0^t(t-s)^{\frac{1}{p}-\frac{3}{2}}\|u(s)\|_p\|\nabla v(s)\|_q\,\mathrm{d}s\\
\le& Ct^{1-\frac{1}{p}}\int_0^t(t-s)^{\frac{1}{p}-\frac{3}{2}}s^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\,\mathrm{d}s\left(\sup_{0<s<t}s^{1-\frac{1}{p}}\|u(s)\|_p\right)\left(\sup_{0<s<t}s^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\nabla v(s)\|_q\right)\\
\le& C_4\mathsf{B}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\eta_2\left(\sup_{0<s<t}s^{1-\frac{1}{p}}\|u(s)\|_p\right).
\end{aligned}\tag{3.5}$$

取

$$C_4\mathsf{B}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\eta_2\le\frac{1}{2}$$

在（3.5）中，可得

$$t^{1-\frac{1}{p}}\|\Phi_1[u,v](t)\|_p\le t^{1-\frac{1}{p}}\|e^{t\Delta}u_0\|_p+\frac{1}{2}\left(\sup_{0<s<t}s^{1-\frac{1}{p}}\|u(s)\|_p\right),$$

由此我们推得

$$\sup_{0<t<\tau}t^{1-\frac{1}{p}}\|\Phi_1[u,v](t)\|_p\le\sup_{0<t<\tau}t^{1-\frac{1}{p}}\|e^{t\Delta}u_0\|_p+\frac{1}{2}\left(\sup_{0<t<\tau}t^{1-\frac{1}{p}}\|u(t)\|_p\right)\tag{3.6}$$

对所有 $\tau\in(0,T]$均成立。特别地，由于

$$\lim_{t\to0}t^{1-\frac{1}{p}}\|e^{t\Delta}u_0\|_p=0\tag{3.7}$$

根据 Weissler [35, 方程（3.4）], ，我们可以选择 T 足够小，使得

$$t^{1-\frac{1}{p}}\|e^{t\Delta}u_0\|_p\le\frac{\eta_1}{2},\quad t\in(0,T).\tag{3.8}$$

结合（3.6）和（3.8），可得

$$\sup_{0<t<T}t^{1-\frac{1}{p}}\|\Phi_1[u,v](t)\|_p\le\frac{\eta_1}{2}+\frac{\eta_1}{2}=\eta_1.$$

至于 $\Phi_2[u,v]$的估计，证明与（3.4）类似。事实上，由于 Φ_2的线性

$$t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\nabla\Phi_2[u,v](t)\|_q\le t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\nabla e^{t\Delta}v_0\|_q+C_5\mathsf{B}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q},\frac{1}{p}\right)\eta_1,\tag{3.9}$$

注意到（3.9）的右端项因约束条件 $q<2p/(2-p)$ 而有限。由于

$$\lim_{t\to0}t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\nabla e^{t\Delta}v_0\|_q=0,$$

我们可以选取足够小的 $\eta_1,T>0$ ，使得

$$C_5\mathsf{B}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q},\frac{1}{p}\right)\eta_1\le\frac{\eta_2}{2},$$

and

$$\sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\nabla e^{t\Delta}v_0\|_q \le \frac{\eta_2}{2},$$

并由此从（3.9）推出

$$\sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\nabla \Phi_2[u,v](t)\|_q \le \eta_2.$$

最后，类似的论证可得出断言（3.2）。 □

引理 3.2 表明 $\Phi: \mathcal{X}_T \to \mathcal{X}_T$ 是一个压缩映射，因此可以找到唯一的不动点 $(u, v) \in \mathcal{X}_T$ 满足 $\Phi_1[u,v] = u$ 且 $\Phi_2[u,v] = v$。接下来，我们将证明对初始数据的连续依赖。

引理 3.3. *存在 (1.1) 的唯一温和解 (u, v)，其定义在最大时间区间 $[0, T)$ 上，且满足 $T \in (0, \infty]$，并且该解对初始数据连续依赖。更准确地说，给定 $L^1(\mathbb{R}^2)\times\dot{H}^1(\mathbb{R}^2)$ 中的 (u_0, v_0) 和 $(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0)$，分别以 (u, v) 和 $(\widetilde{u}, \widetilde{v})$ 表示相应的 (1.1) 解，其最大存在时间分别为 T 和 $\widetilde{T}$。对于任意 $0 < t_0 < \min\{T, \widetilde{T}\}$，存在 $C(t_0) > 0$，使得*

$$\sup_{0<t<t_0} \|u(t) - \widetilde{u}(t)\|_1 \le C(t_0)\left(\|u_0 - \widetilde{u}_0\|_1 + \|\nabla(v_0 - \widetilde{v}_0)\|_2\right),$$
$$\sup_{0<t<t_0} \|\nabla(v(t) - \widetilde{v}(t))\|_2 \le C(t_0)\left(\|u_0 - \widetilde{u}_0\|_1 + \|\nabla(v_0 - \widetilde{v}_0)\|_2\right).$$

引理的证明 3.3。 我们来证明 (u, v) 在引理 3.2 中构造的解关于初始数据连续。回顾（3.6），取 $\Phi_1[u,v] = u$，我们有

$$\sup_{0<s<t} t^{1-\frac{1}{p}}\|u(t)\|_p \le 2 \sup_{0<s<t} t^{1-\frac{1}{p}}\|e^{t\Delta}u_0\|_p$$

对于 $0 < t < T$。根据 （3.7），对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个常数 $t_\varepsilon \in (0, T)$ 使得 t

$$\sup_{0<t<t_\varepsilon} t^{1-\frac{1}{p}}\|e^{t\Delta}u_0\|_p \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

结合上述估计，我们得到

$$\sup_{0<t<t_\varepsilon} t^{1-\frac{1}{p}}\|u(t)\|_p \le \varepsilon,$$

也就是说，

$$\lim_{t\to 0}\sup_{0<s<t} t^{1-\frac{1}{p}}\|u(t)\|_p = 0. \tag{3.10}$$

采用与（3.3）类似的论证，

$$\|u(t) - u_0\|_1 \le \|e^{t\Delta}u_0 - u_0\|_1 + C_1\mathsf{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\left(\sup_{0<s<t} s^{1-\frac{1}{p}}\|u(s)\|_p\right)\left(\sup_{0<s<t} s^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\nabla v(s)\|_q\right),$$

由此可根据热核的连续性得出

$$\lim_{t\to 0}\|u(t) - u_0\|_1 = 0,$$

这意味着 $u \in C([0, T); L^1(\mathbb{R}^2))$. 类似地，由 (3.9) 以及 $\Phi_2[u,v] = v$ 和 (3.10)

$$\lim_{t\to 0}\sup_{0<s<t} s^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\nabla v(s)\|_q = 0,$$

从而 $v \in C\left([0, T); \dot{H}^1(\mathbb{R}^2)\right)$，由此证明了在 (u, v) 上方程 (1.1) 在 $(0, T)$上的温和解。

接下来，证明解的唯一性。设 (u,v) 和 $(\widetilde{u},\widetilde{v})$ 是方程 (1.1) 在 $[0,T)$ 上对应于初始数据 (u_0,v_0) 的两个解。注意到，温和解形式给出了以下对象的表示公式： v

$$v(t)-\widetilde{v}(t)=\int_0^t e^{(t-s)(\Delta-\lambda)}(u(s)-\widetilde{u}(s))ds,$$

我们通过与（3.9）相似的方法得到

$$\sup_{0<s<t} s^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\nabla(v(s)-\widetilde{v}(s))\|_q \le C\sup_{0<s<t} s^{1-\frac{1}{p}}\|u(s)-\widetilde{u}(s)\|_p.$$

利用该估计，并由 $u-\widetilde{u}$ 的表示公式可得

$$\begin{aligned}
&\sup_{0<s<t} s^{1-\frac{1}{p}}\|u(s)-\widetilde{u}(s)\|_p\\
\le& C\left(\sup_{0<s<t} s^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\nabla v(s)\|_q\right)\left(\sup_{0<s<t} s^{1-\frac{1}{p}}\|u(s)-\widetilde{u}(s)\|_p\right)\\
&+C\left(\sup_{0<s<t} s^{1-\frac{1}{p}}\|u(s)\|_p\right)\left(\sup_{0<s<t} s^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\nabla(v(s)-\widetilde{v}(s))\|_q\right)\\
\le& C\left(\sup_{0<s<t} s^{1-\frac{1}{p}}\|u(s)\|_p+\sup_{0<s<t} s^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\nabla v(s)\|_q\right)\left(\sup_{0<s<t} s^{1-\frac{1}{p}}\|u(s)-\widetilde{u}(s)\|_p\right).
\end{aligned}$$

由于存在充分小的 $t_0\in(0,T)$使得

$$C\left(\sup_{0<s<t_0} s^{1-\frac{1}{p}}\|u(s)\|_p+\sup_{0<s<t_0} s^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\nabla v(s)\|_q\right)\le\frac{1}{2},$$

我们有

$$\sup_{0<t<t_0} t^{1-\frac{1}{p}}\|u(t)-\widetilde{u}(t)\|_p=0,$$

因此，我们得出结论：当 $0<t<t_0$时， $u(t)=\widetilde{u}(t)$，进而可知，当 $0<t<t_0$时， $v(t)=\widetilde{v}(t)$。定义 $t_1\ge 0$ 为

$$t_1:=\sup\left\{\tau>0\,;\,(u,v)(t)=(\widetilde{u},\widetilde{v})(t),\text{ for all } 0\le t<\tau\right\}.$$

显然 $0<t_0\le t_1\le T$。因此，我们反设 $t_1<T$。对初始数据 $(u,v)(t_1)$ 重复上述论证，存在 $t_2\in(0,T-t_1)$，使得 $(u,v)(t)=(\widetilde{u},\widetilde{v})(t)$ 对所有 $0\le t\le t_1+t_2$ 都成立，这与 t_1 的定义相矛盾。因此，对于 $0<t<T$，$(u,v)(t)=(\widetilde{u},\widetilde{v})(t)$，从而我们证明了所声称的唯一性。

给定 (u_0,v_0) 和 $(\widetilde{u}_0,\widetilde{v}_0)$ 属于 $L^1(\mathbb{R}^2)$ 我们分别用 (u,v) 和 $(\widetilde{u},\widetilde{v})$ 表示方程（1.1）的相应解，其最大存在时间分别为 T

~ ¯和 T。对于 $0<t_0<\min\{T,T\}$和 $0<t<t_0$，通过与上述类似的论证可得

$$\begin{aligned}
&\sup_{0<s<t} s^{1-\frac{1}{p}}\|u(s)-\widetilde{u}(s)\|_p\\
\le& C\|u_0-\widetilde{u}_0\|_1 + C\left(\sup_{0<s<t} s^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\nabla v(s)\|_q\right)\left(\sup_{0<s<t} s^{1-\frac{1}{p}}\|u(s)-\widetilde{u}(s)\|_p\right)\\
&+ C\left(\sup_{0<s<t} s^{1-\frac{1}{p}}\|u(s)\|_p\right)\left(\sup_{0<s<t} s^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\nabla(v(s)-\widetilde{v}(s))\|_q\right)\\
\le& C\|u_0-\widetilde{u}_0\|_1 + C\left(\sup_{0<s<t} s^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\nabla v(s)\|_q\right)\left(\sup_{0<s<t} s^{1-\frac{1}{p}}\|u(s)-\widetilde{u}(s)\|_p\right)\\
&+ C\left(\sup_{0<s<t} s^{1-\frac{1}{p}}\|u(s)\|_p\right)\left(\|\nabla(v_0-\widetilde{v}_0)\|_2 + \sup_{0<s<t} s^{1-\frac{1}{p}}\|u(s)-\widetilde{u}(s)\|_p\right),
\end{aligned}$$

这意味着

$$\sup_{0<s<t} s^{1-\frac{1}{p}}\|u(s)-\widetilde{u}(s)\|_p \le C(t_0)\left(\|u_0-\widetilde{u}_0\|_1 + \|\nabla(v_0-\widetilde{v}_0)\|_2\right).$$

此外，我们注意到

$$\begin{aligned}
\sup_{0<s<t}\|\nabla(v(t)-\widetilde{v}(s))\|_2 &\le C\|\nabla(v_0-\widetilde{v}_0)\|_2 + C\sup_{0<s<t} s^{1-\frac{1}{p}}\|u(s)-\widetilde{u}(s)\|_p\\
&\le C(t_0)\left(\|u_0-\widetilde{u}_0\|_1 + \|\nabla(v_0-\widetilde{v}_0)\|_2\right).
\end{aligned}$$

因此，

$$\sup_{0<s<t}\|u(s)-\widetilde{u}(s)\|_1 \le C(t_0)\left(\|u_0-\widetilde{u}_0\|_1 + \|\nabla(v_0-\widetilde{v}_0)\|_2\right).$$

因此，方程（1.1）的局部适定性得以成立。 □

命题 3.1 的证明。根据引理 3.2 和引理 3.3，我们已证明方程 (1.1) 存在唯一的温和解，该解定义在最大时间区间 $[0,T)$ 上，且满足 $T\le\infty$。关于解的正则性，我们针对导数采用标准的迭代论证。定义 $|\nabla|^\alpha f(x) := \mathcal{F}^{-1}[|\xi|^\alpha \mathcal{F}f(\xi)](x)$，其中 $x\in\mathbb{R}^2$和 $\alpha>0$，这里 $\mathcal{F}$ 表示傅里叶变换。令 $\tau\in(0,T)$ 和 $t\in(0,\tau)$。回顾一下，对于 $4/3<p<2$,

$$U_{p,0}(\tau) := \sup_{0<s<\tau} s^{1-\frac{1}{p}}\|u(s)\|_p < +\infty, \quad V_{q,0}(\tau) := \sup_{0<s<\tau} s^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\nabla v(s)\|_q < +\infty,$$

根据引理3.2，我们可以仿照（3.5）的证明进行论证，从而得到

$$\begin{aligned}
&t^{1-\frac{1}{p}+\frac{\alpha}{2}}\||\nabla|^\alpha u(t)\|_p\\
\le& t^{1-\frac{1}{p}+\frac{\alpha}{2}}\||\nabla|^\alpha e^{t\Delta}u_0\|_p + CU_{p,0}(\tau)V_{q,0}(\tau)t^{1-\frac{1}{p}+\frac{\alpha}{2}}\int_0^t (t-s)^{-1+\frac{1}{p}-\frac{1+\alpha}{2}} s^{-1+\frac{1}{p}} s^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}}\,\mathrm{d}s\\
\le& C\|u_0\|_1 + CU_{p,0}(\tau)V_{q,0}(\tau)\mathsf{B}\left(\frac{1}{p}-\frac{1+\alpha}{2},\frac{1}{2}\right),
\end{aligned}$$

其中 $4/3<p<2$ 和

$$\alpha < \frac{2}{p} - 1 < \frac{1}{2},$$

这意味着

$$U_{p.\alpha}(\tau) := \sup_{0<t<\tau} t^{1-\frac{1}{p}+\frac{\alpha}{2}}\||\nabla|^\alpha u(t)\|_p < +\infty, \quad \alpha < \frac{2}{p} - 1.$$

该性质给出了关于 v 的额外正则性估计。事实上，对于 $\beta \geq \alpha$,

$$\begin{aligned}\||\nabla|^{1+\beta}v(t)\|_q \leq & Ct^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}-\frac{\beta}{2}}\|\nabla v_0\|_2 + CU_{p,\alpha}(\tau)\int_0^t (t-s)^{-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-\frac{1+\beta-\alpha}{2}} s^{-1+\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{2}}\,\mathrm{d}s \\ = & Ct^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}-\frac{\beta}{2}}\|\nabla v_0\|_2 + CU_{p,\alpha}(\tau)t^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}-\frac{\beta}{2}}\mathsf{B}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{\beta-\alpha}{2}, \frac{1}{p}-\frac{\alpha}{2}\right),\end{aligned}$$

只要搭配好

$$\alpha \leq \beta < \alpha + 3 - \frac{4}{p} < 2 - \frac{2}{p} < 1,$$

由此可得

$$V_{q,\beta}(\tau) := \sup_{0<t<\tau} t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}+\frac{\beta}{2}}\||\nabla|^{1+\beta}v(t)\|_q < +\infty, \quad \beta < \alpha + 3 - \frac{4}{p} \in (\alpha, 1).$$

前面的分析使我们得到了关于 u 的高阶正则性估计。事实上，令 $\theta \geq \alpha$。由于$\alpha \leq \beta \leq \gamma$,

$$\begin{aligned}&\||\nabla|^{\theta}u(t)\|_p \\ \leq & Ct^{-\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{\theta}{2}}\|u_0\|_1 \\ & + C\int_0^t (t-s)^{-\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1+\theta-\alpha}{2}}\left(\||\nabla|^{\alpha}u(s)\|_p\|\nabla v(s)\|_q + \|u(s)\|_p\||\nabla|^{1+\alpha}v(s)\|_q\right)\mathrm{d}s \\ \leq & Ct^{-\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{\theta}{2}}\|u_0\|_1 \\ & + C\big(U_{p,\alpha}(\tau)V_{q,0}(\tau) + U_{p,0}(\tau)V_{q,\alpha}(\tau)\big)\int_0^t (t-s)^{-\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1+\theta-\alpha}{2}} s^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{\alpha}{2}}\,\mathrm{d}s \\ = & Ct^{-\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{\theta}{2}}\|u_0\|_1 \\ & + C\big(U_{p,\alpha}(\tau)V_{q,0}(\tau) + U_{p,\alpha}(\tau)V_{q,0}(\tau)\big)t^{-\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{\theta}{2}}\mathsf{B}\left(\frac{1}{p}-\frac{1+\theta-\alpha}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right),\end{aligned}$$

其中

$$\alpha \leq \theta < \alpha + \frac{2}{p} - 1 < 1, \quad \alpha < \frac{2}{p} - 1.$$

因此,

$$U_{p,\theta}(\tau) = \sup_{0<t<\tau} t^{1-\frac{1}{p}+\frac{\theta}{2}}\||\nabla|^{\theta}u(t)\|_p < +\infty, \quad \alpha \leq \theta < \alpha + \frac{2}{p} - 1 < 1, \quad \alpha < \frac{2}{p} - 1.$$

进一步迭代上述论证，我们得到该解具有高阶正则性。事实上，利用引理 3.3 中建立的唯一性结果，我们可以对某个 $t_0 \in (0, T)$，以初始数据 $(u(t_0)\ v(t_0))$ 求解问题 (1.1)。由此我们最终证明，对于$s > 0$，$u(t) \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap W^s$，$^p(\mathbb{R}^2)$，$v(t) \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^2) \cap W^s$，$^q(\mathbb{R}^2)$ 对 $t_0 < t < T$ 成立，并且在 $(0, T) \times \mathbb{R}^2$ 上以经典意义满足方程组 (1.1)。此外，基于引理 3.2 之证明的经典论证可导出爆破判据 (3.1)。

设 (u_0, v_0) 为非负初始条件，且 $u_0, v_0 \not\equiv 0$和 $\{u_{0,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$和 $\{v_{0,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$是 $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ 中的非负函数序列，分别在 $k \to \infty$时于 $L^1(\mathbb{R}^2)$ 中收敛到 u_0 ，并于$\dot{H}^1(\mathbb{R}^2)$ 中收敛到 v_0 。那么，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，我们都可以构造出与初始数据 $(u_{0,k}, v_{0,k})$ 相对应的方程 (1.1) 的唯一的光滑可积解。由抛物正则性理论，解 (u_k, v_k) 属于 $C^\infty([0, T) \times \mathbb{R}^2)$，并且在 $(0, T) \times \mathbb{R}^2$ 上为正。此外，由引理 3.3 中建立的对初始数据的连续依赖性，我们得到如下收敛关系： $u_k \to u$ 在 $C\big([0, T)$ 中； $L^1(\mathbb{R}^2)\big)$ 以及 $v_k \to v$

在 $C\big([0,T)$ 中； $\dot{H}^1(\mathbb{R}^2)\big)$，当 $k\to\infty$ 时，其中 (u,v) 是方程 (1.1) 在初始数据 (u_0,v_0) 下的解。因此，可以找到近似解的子序列，使其在 $(0,T)\times\mathbb{R}^2$ 上几乎处处收敛到 (u,v)，这意味着 u 和 v 在 $(0,T)\times\mathbb{R}^2$ 上为正。此外，对 u 在 $\mathbb{R}^2$ 上积分，也可得到质量守恒定律。 ❑

4. 临界质量下解的整体存在性

本节中，我们证明定理 1.1所述的临界质量下方程 (1.1) 解的整体存在性。为此，我们将证明分为几个步骤。

在第 4.1 小节中，我们引入一个恰当重构的李雅普诺夫泛函，并推导相关耗散项的正则性估计。在第 4.2 小节中，我们利用第 4.1 小节中得到的估计，在外部区域内建立若干正则性估计。借助前面各小节的结果，我们随后在第 4.3 小节中推导内部正则性估计。最后，在第 4.4 小节中，我们结合外部和内部估计，完成定理 1.1 的证明。

在本节中，我们用 (u,v) 表示方程 (1.1) 的解，其最大存在时间为 $T\le\infty$。下文中，对于任意t_0,τ满足 $t_0<\tau$，我们将推导 $[t_0,\tau]\cap(0,T)$ 上的先验估计，从而通过反证法得出整体存在性。此外， C 表示仅依赖于 λ 和初始数据 (u_0,v_0)的一般正数常数，该常数可能随行而变化。若 C 还依赖于其他参数，则会明确指出。

4.1. **精细李雅普诺夫泛函**。 这里我们引入一个适当重构的李雅普诺夫泛函，它沿着解的演化单调不增，并推导与相应耗散机制相关的正则性估计。这些估计进一步揭示了方程 (1.1) 的解所具有的精细正则性。

众所周知，李雅普诺夫泛函在分析解的长期行为（包括整体存在性和有限时间爆破现象）方面发挥着基础作用。然而，在全空间情形下，由于必须控制当 $|x|\to\infty$ 时的行为，将基于李雅普诺夫泛函的方法应用于方程 (1.1) 面临着内在困难。在临界质量下，这一问题尤为棘手。

首先值得一提的是，系统 (1.1) 具有通常的李雅普诺夫泛函 $\mathcal{L}(t)$，其形式如下：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L}(t)+\mathcal{D}(t)=0, \tag{4.1}$$

其中

$$\mathcal{L}(t):=\int_{\mathbb{R}^2}u\ln u\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^2}uv\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\|\nabla v\|_2^2+\frac{\lambda}{2}\|v\|_2^2$$

且耗散项 $\mathcal{D}(t)$ 定义为

$$\mathcal{D}(t):=\int_{\mathbb{R}^2}u\,|\nabla(\ln u-v)|^2\,\mathrm{d}x+\|\partial_t v\|_2^2.$$

.....的上界 $\mathcal{L}(t)$ 可由单调性（4.1）推出，而其下界则可通过初始质量的最优约束得到 $\|u_0\|_1$ ，该约束源自 Trudinger–Moser 型不等式及其最佳常数，参见 [30] 以及 [9, 21, 27] 等文献。另一方面，为了确保通常熵$\int_{\mathbb{R}^2}u\ln u\,\mathrm{d}x$ 在全空间上定义良好，至少需要对初始

数据 $u_0\ln(1+|x|^2) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ 满足对数矩假设，以控制解在 $|x| \to \infty$ 时的行为，也就是说，

$$-\int_{\mathbb{R}^2} u(\ln u)_- \,\mathrm{d}x \le C\int_{\mathbb{R}^2} u\ln(1+|x|^2)\,\mathrm{d}x,$$

其中 $(\ln u)_-$ ：$=$最小值$\{\ln u,\ 0\}$，根据 [9, 引理 2。4]。随后，为了摆脱任何矩假设，Nagai 对修正熵进行了调整 [26]；

$$\int_{\mathbb{R}^2}(1+u)\ln(1+u)\,\mathrm{d}x,$$

并引入了修正李雅普诺夫泛函 $\mathcal{L}_m(t)$ 的如下恒等式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L}_m(t)+\mathcal{D}_m(t)=\frac{1}{4}\|\nabla v(t)\|_2^2, \tag{4.2}$$

其中

$$\mathcal{L}_m(t):=\int_{\mathbb{R}^2}(1+u)\ln(1+u)\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^2}uv\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\|\nabla v\|_2^2+\frac{\lambda}{2}\|v\|_2^2$$

and

$$\mathcal{D}_m(t):=\int_{\mathbb{R}^2}u\left|\nabla(\ln(1+u)-v)\right|^2\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}\left|\nabla\left(\ln(1+u)-\frac{1}{2}v\right)\right|^2\,\mathrm{d}x+\|\partial_t v\|_2^2.$$

泛函 $\mathcal{L}_m(t)$ 不再是李雅普诺夫泛函，但它仍有助于证明次临界质量下方程 (1.1) 的解的整体存在性。事实上，由 $\mathcal{L}_m(t)$ 的下界可知，对于任意 $\alpha\in[0,1)$

$$\begin{aligned}\alpha\int_{\mathbb{R}^2}(1+u)\ln(1+u)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\left[1-\frac{\|u_0\|_1}{8\pi(1-\alpha)}\right]\|\nabla v\|_2^2+\int_0^t\mathcal{D}_m(s)\,\mathrm{d}s&\\ \le\mathcal{L}_m(0)+C(\tau,\alpha)+\frac{1}{4}\int_0^t\|\nabla v\|_2^2\,\mathrm{d}s&\end{aligned} \tag{4.3}$$

对于任意 $\tau>0$ 和某个 $C(\tau,\alpha)>0$（参见 [9, 21]），有 $t\in[0,\tau]\cap(0,T)$。因此，若 $\|u_0\|<8\pi$，则选择充分小的 $\alpha>0$（其取值取决于 $\|u_0\|_1$）后，(4.3) 左端的所有项均为正。由格朗沃尔不等式可得 $\nabla v\in L^2((0,T)\times\mathbb{R}^2)$，从而还可得到修正熵的界 $\int_{\mathbb{R}^2}(1+u)\ln(1+u)\,\mathrm{d}x$。然而，对于临界质量 $\|u_0\|_1=8\pi$，这必然导致 $\alpha=0$，因此，

$$\int_0^t\mathcal{D}_m(s)\,\mathrm{d}s\le\mathcal{L}_m(0)+C(\tau)+\frac{1}{4}\int_0^t\|\nabla v\|_2^2\,\mathrm{d}s, \tag{4.4}$$

由于缺乏解的正则性，这种做法毫无用处，甚至无法得到 $\mathcal{D}_m(t)$ 的估计。因此，我们引入重构李雅普诺夫泛函 $\mathcal{F}_m(t)$，以展示与耗散项相对应的正则性估计。令 $\mathcal{F}_m(t)$ 为方程 (1.1) 的解所对应的泛函，定义如下：

$$\mathcal{F}_m(t):=\mathcal{L}_m(t)+\int_{\mathbb{R}^2}\ln(1+u)\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^2}v\,\mathrm{d}x. \tag{4.5}$$

于是，以下泛函微分不等式成立：

命题 4.1. 设 (u,v) 为 (1.1) 的解。则泛函 $\mathcal{F}_m(t)$ 在 (4.5) 中定义，并满足如下恒等式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{F}_m(t)+\int_{\mathbb{R}^2}u\left|\nabla\left(\ln(1+u)-v\right)\right|^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\|\partial_t v\|_2^2\le\lambda\int_{\mathbb{R}^2}v\,\mathrm{d}x.$$

因此，若 $\lambda = 0$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{F}_m(t) + \int_{\mathbb{R}^2} u\left|\nabla\left(\ln(1+u) - v\right)\right|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\|\partial_t v\|_2^2 \leq 0.$$

若 $\lambda > 0$ 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{F}_m(t) + \int_{\mathbb{R}^2} u\left|\nabla\left(\ln(1+u) - v\right)\right|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\|\partial_t v\|_2^2 \leq \|v_0\|_1 + \|u_0\|_1.$$

值得强调的是，$\mathcal{F}_m(t)$ 在满足 $\lambda = 0$ 时随时间单调不增；此外，与基于通常修正泛函的恒等式（4.2）$\mathcal{L}_m(t)$ 不同，命题 4.1 右端出现的误差项可由初始数据轻易控制。这使我们能够证明与 $\mathcal{F}_m(t)$ 相关的耗散项的正则性估计，见下文命题 4.3 。

引理 4.2。 假设与定理 *1.1* 中的假设相同。则，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{F}_m(t) + \widetilde{\mathcal{D}}(t) = -\int_{\mathbb{R}^2} \partial_t v \frac{u}{1+u}\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{u}{1+u}\,\mathrm{d}x + \lambda\int_{\mathbb{R}^2} \frac{v}{1+u}\,\mathrm{d}x,$$

~其中 $\mathcal{F}_m(t)$ 是式 （4.5）中定义的修正泛函，而耗散项 $\mathcal{D}(t)$ 定义如下

$$\widetilde{\mathcal{D}}(t) := \int_{\mathbb{R}^2} u\left|\nabla\left(\ln(1+u) - v\right)\right|^2 \mathrm{d}x + \|\partial_t v\|_2^2.$$

引理 4.2 的证明。 以下计算已广为人知：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^2}(1+u)\ln(1+u)\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^2}(1+u)|\nabla\ln(1+u)|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^2} u\nabla\ln(1+u)\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x$$

以及

$$\begin{aligned}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^2} uv\,\mathrm{d}x = &\int_{\mathbb{R}^2}(1+u)\nabla\ln(1+u)\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} u|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\\ &- \|\partial_t v\|_2^2 - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla v\|_2^2 - \frac{\lambda}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v\|_2^2,\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{\mathbb{R}^2}(1+u)\ln(1+u)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} uv\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left(\|\nabla v\|_2^2 + \lambda\|v\|_2^2\right)\right]\\ &+\int_{\mathbb{R}^2} u\left|\nabla\left(\ln(1+u) - v\right)\right|^2\mathrm{d}x + \|\partial_t v\|_2^2\\ =&-\|\nabla\ln(1+u)\|_2^2 + \int_{\mathbb{R}^2}\nabla\ln(1+u)\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

接下来,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^2}\ln(1+u)\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{1+u}\left[\Delta u-\nabla\cdot(u\nabla v)\right]\,\mathrm{d}x\\ &= -\int_{\mathbb{R}^2}\nabla\left(\frac{1}{1+u}\right)\cdot\nabla u\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}u\nabla\left(\frac{1}{1+u}\right)\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{R}^2}|\nabla\ln(1+u)|^2\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^2}\frac{u}{1+u}\nabla\ln(1+u)\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{R}^2}|\nabla\ln(1+u)|^2\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^2}\nabla\ln(1+u)\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x\\ &\quad+\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{1+u}\nabla\ln(1+u)\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因此，结合上述计算可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{\mathbb{R}^2}(1+u)\ln(1+u)\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^2}uv\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\left(\|\nabla v\|_2^2+\lambda\|v\|_2^2\right)+\int_{\mathbb{R}^2}\ln(1+u)\,\mathrm{d}x\right]\\ &+\int_{\mathbb{R}^2}u\left|\nabla\left(\ln(1+u)-v\right)\right|^2\,\mathrm{d}x+\|\partial_t v\|_2^2\\ =&\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{(1+u)^2}\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{(1+u)^2}\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x &= -\int_{\mathbb{R}^2}\nabla\left(\frac{1}{1+u}\right)\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{1+u}\Delta v\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\frac{\partial_t v}{1+u}\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^2}\frac{u}{1+u}\,\mathrm{d}x+\lambda\int_{\mathbb{R}^2}\frac{v}{1+u}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^2}v\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^2}\partial_t v\frac{u}{1+u}\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^2}\frac{u}{1+u}\,\mathrm{d}x+\lambda\int_{\mathbb{R}^2}\frac{v}{1+u}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

我们最终得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{F}_m(t)+\int_{\mathbb{R}^2}u\left|\nabla\left(\ln(1+u)-v\right)\right|^2\,\mathrm{d}x+\|\partial_t v\|_2^2\\ =&-\int_{\mathbb{R}^2}\partial_t v\frac{u}{1+u}\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^2}\frac{u}{1+u}\,\mathrm{d}x+\lambda\int_{\mathbb{R}^2}\frac{v}{1+u}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

如所期望的。 □

现在我们可以证明命题4.1。

命题的证明 4.1。 由杨氏不等式,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^2}\partial_t v\frac{u}{1+u}\,\mathrm{d}x\right| &\le\frac{1}{2}\|\partial_t v\|_2^2+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{u^2}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}x\\ &\le\frac{1}{2}\|\partial_t v\|_2^2+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{u}{1+u}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中我们对 $x \geq 0$ 使用 $x/(1+x) \leq 1$。此外，当 $\lambda > 0$

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^2} \frac{v}{1+u}\,\mathrm{d}x \leq \lambda \int_{\mathbb{R}^2} v\,\mathrm{d}x = \lambda e^{-\lambda t} \int_{\mathbb{R}^2} v_0\,\mathrm{d}x + (1-e^{-\lambda t})\|u_0\|_1 \leq \|v_0\|_1 + \|u_0\|_1.$$

因此，引理4.2得出该结论。 □

利用命题4.1 及 $\|u_0\|_1 = 8\pi$，考察以下正则性估计。**命题 4.3**。设 $\|u_0\|_1 = 8\pi$。那么，对任意 t_0，$\tau > 0$ 满足 $t_0 < \tau$，存在常数 $C(t_0,\tau) = C(t_0,\tau,\|u_0\|_1,\|v_0\|_1) > 0$ 使得对任意 $t \in [t_0,\tau] \cap (0,T)$

$$\mathcal{F}_m(t) \geq -C(t_0,\tau).$$

这意味着

$$\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^2} u\left|\nabla\left(\ln(1+u)-v\right)\right|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t}\|\partial_t v\|_2^2\,\mathrm{d}s \leq \mathcal{F}_m(t_0) + C(t_0,\tau), \quad t \in [t_0,\tau]\cap(0,T).$$

如上所述，由于解的正则性不足，不能期待从通常的修正泛函 $\mathcal{L}_m(t)$（定义见式（4.2））中得到命题4.3 中的此类估计，参见式（4.4）。对于临界质量的情形，我们也不期待能得到 u的修正熵估计。尽管如此，引入的泛函 $\mathcal{F}_m(t)$ 具有这样的性质：对这类耗散项的估计在后续分析中建立进一步的先验估计时发挥着重要作用，见下文第4.2小节。

为了证明命题 4.3，我们回顾一个由 Trudinger–Moser 不等式推导出的泛函不等式，参见例如 [30]:

引理 4.4。设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个区域，满足 $|D| < \infty$。那么，存在一个与 D 无关的常数 $C_{TM} > 0$，使得对于 $f \in H_0^1(D)$，

$$\int_D \exp\left(|f|\right)\,\mathrm{d}x \leq C_{TM}|D|\exp\left(\frac{1}{16\pi}\|\nabla f\|_{L^2(D)}^2\right),$$

其中 16π 是最佳常数。

命题 4.3的证明。对于 $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} uv\,\mathrm{d}x &= \int_{\{v>\alpha\}} uv\,\mathrm{d}x + \int_{\{v\leq\alpha\}} uv\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_{\{v>\alpha\}} u(v-\alpha)_+\,\mathrm{d}x + \alpha\int_{\mathbb{R}^2} u\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中 $(v-\alpha)_+ := \max\{(v-\alpha)\ \ 0\}$。采用与 [21, 引理 2.1], 类似的论证，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_{\{v\geq\alpha\}} u(v-\alpha)_+\,\mathrm{d}x \\ \leq &\int_{\{v>\alpha\}} u\ln u\,\mathrm{d}x + \left(\int_{\{v>\alpha\}} u\,\mathrm{d}x\right)\ln\left(\int_{\{v>\alpha\}}\exp\left((v-\alpha)_+\right)\,\mathrm{d}x\right) \\ &-\left(\int_{\{v>\alpha\}} u\,\mathrm{d}x\right)\ln\left(\int_{\{v>\alpha\}} u\,\mathrm{d}x\right) \\ \leq &\int_{\mathbb{R}^2}(1+u)\ln(1+u)\,\mathrm{d}x + \|u_0\|_1\ln\left(\int_{\{v>\alpha\}}\exp\left((v-\alpha)_+\right)\,\mathrm{d}x\right) + \frac{1}{e},\end{aligned}$$

其中我们使用

$$\int_D gh\ \mathrm{d}x \le \int_D g\log g\ \mathrm{d}x + M\log\left(\int_D e^h\ \mathrm{d}x\right) - M\log M,\quad M := \int_D g\ \mathrm{d}x, \tag{4.6}$$

见[29,引理 5。4]和 [21,命题 2。3]。由于 $(v-\alpha)_+ \in H_0^1(\{v>\alpha\})$，由引理 4.4中所述的二维 Trudinger–Moser 型不等式可得

$$\int_{\{v>\alpha\}} \exp\left((v-\alpha)_+\right)\ \mathrm{d}x \le C_{TM}|\{v>\alpha\}|\exp\left(\frac{\|\nabla v\|_2^2}{16\pi}\right),$$

这意味着

$$\|u_0\|_1 \ln\left(\int_{\{v>\alpha\}} \exp\left((v-\alpha)_+\right)\ \mathrm{d}x\right) \le \frac{\|u_0\|_1}{16\pi}\|\nabla v\|_2^2 + \|u_0\|_1\log(C_{TM}|\{v>\alpha\}|),$$

从而

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} uv\,\mathrm{d}x \le& \int_{\mathbb{R}^2}(1+u)\ln(1+u)\ \mathrm{d}x\\ &+\frac{\|u_0\|_1}{16\pi}\|\nabla v\|_2^2 + \|u_0\|_1\log(C_{TM}|\{v>\alpha\}|) + \frac{1}{e} + \alpha\|u_0\|_1\end{aligned} \tag{4.7}$$

对任意 $\alpha>0$。因此，结合 4.7式以及 $\|u_0\|_1 = 8\pi$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_m(t) :=& \int_{\mathbb{R}^2}(1+u)\ln(1+u)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} uv\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left(\|\nabla v\|_2^2 + \lambda\|v\|_2^2\right)\\ &+\int_{\mathbb{R}^2}\ln(1+u)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} v\,\mathrm{d}x\\ \ge& \frac{\lambda}{2}\|v\|_2^2 + \int_{\mathbb{R}^2}\ln(1+u)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} v\,\mathrm{d}x - \|u_0\|_1\ln(C_{TM}|\{v>\alpha\}|) - \frac{1}{e} - \alpha\|u_0\|_1\\ \ge& -\int_{\mathbb{R}^2} v\,\mathrm{d}x - \|u_0\|_1\ln\left(\frac{C_{TM}\|v\|_1}{\alpha}\right) - \frac{1}{e} - \alpha\|u_0\|_1.\end{aligned}$$

最后，由（1.1）的第二个方程可得

$$\int_{\mathbb{R}^2} v\,\mathrm{d}x = \begin{cases}\|v_0\|_1 + t\|u_0\|_1 & \text{if } \lambda = 0,\\ e^{-\lambda t}\|v_0\|_1 + \dfrac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda}\|u_0\|_1 & \text{if } \lambda>0,\end{cases}$$

最终我们得到 $\mathcal{F}_m(t)$ 的下界：对于任意满足 $t_0<\tau$ 的 $t_0>0$ 和 $\tau>0$，存在一个常数 $C(t_0,\tau)>0$，使得

$$\mathcal{F}_m(t) \ge -C(t_0,\tau)$$

对于 $t\in[t_0,\tau]\cap(0,T)$。接下来，根据命题 4.1

$$\mathcal{F}_m(t) + \int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^2} u\left|\nabla\left(\ln(1+u)-v\right)\right|^2\ \mathrm{d}x\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_{t_0}^t\|\partial_t v\|_2^2\,\mathrm{d}s \le \mathcal{F}_m(t_0) + \lambda\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^2} v\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s$$

对于 $t\in[t_0,\tau]\cap(0,T)$。利用 $\mathcal{F}_m(t)$ 的下界，我们推导出所需的估计：

$$\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^2} u\left|\nabla\left(\ln(1+u)-v\right)\right|^2\ \mathrm{d}x\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_{t_0}^t\|\partial_t v\|_2^2\,\mathrm{d}s \le \mathcal{F}_m(t_0) + C(t_0,\tau),$$

至此，证明完成。 □

4.2. **外部区域中的正则性估计。** 本小节旨在研究外部区域中解的正则性估计。对于1.1中的 $\mathbb{R}^2$全抛物型系统的临界质量情形，我们注意到，由第 $\mathcal{F}_m$（t）小节4.1中引入的精细李雅普诺夫泛函导出的耗散项界限，在建立外部区域中的进一步正则性估计方面发挥着关键作用，进而得到（1.1）解的整体存在性。

定义截断函数 φ，其中 $C^\infty([0,\infty))$，使得

$$\varphi=\varphi(|x|)=\begin{cases}0, & |x|<1\\ \text{smooth}, & 1\le|x|\le 2,\\ 1, & |x|>2,\end{cases} \tag{4.8}$$

其中 $|\nabla\varphi|$、$|\nabla^2\varphi|\le C\varphi$ 是某个常数 $C>0$。令 $\varphi_R=\varphi_R(|x|)=\varphi(|x|/R)$，其中 $R>0$。

命题 4.5. 设 $\|u_0\|_1=8\pi$。对每个 t_0，$\tau>0$ 且满足 $t_0<\tau$ 的情形，存在一个常数 $C(t_0,\tau)>0$，使得对每个 $R>0$

$$\int_{\mathbb{R}^2}u\varphi_{\frac{R}{2}}\,\mathrm{d}x\le\int_{\mathbb{R}^2}u(t_0)\varphi_{\frac{R}{2}}\,\mathrm{d}x+\frac{C(t_0,\tau)}{R}+\frac{C(t_0,\tau)}{R^2}$$

对于 $t\in[t_0,\tau]\cap(0,\ T)$。这一推论表明

$$\int_{|x|>R}u\,\mathrm{d}x\le\int_{\mathbb{R}^2}u(t_0)\varphi_{\frac{R}{2}}\,\mathrm{d}x+\frac{C(t_0,\tau)}{R}+\frac{C(t_0,\tau)}{R^2}.$$

注 4.1. 命题 *4.5* 说明，对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $R_0=R_0(\varepsilon,\ t_0,\ \tau)>0$足够大，使得对于任意 $R>R_0$

$$\int_{|x|>R}u\,\mathrm{d}x<\varepsilon$$

对于 $t\in[t_0,\tau]\cap(0,\ T)$ 因为这可由控制收敛定理得出 ***th*** at

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2}u(t_0)\varphi_{\frac{R}{2}}\,\mathrm{d}x=0.$$

注 4.2. 根据 [28,式 (3.21)] 和 [31,引理 3.2]，，抛物-椭圆型系统的命题 *4.5* 的对应结果（即系统 (1.2)）可直接由基于作用于第二个分量的椭圆算子 $(-\Delta+\lambda)^{-1}$ 的著名积分对称性得出。相比之下，在 (1.1) 中，为完全抛物型***Keller–Segel*** 系统 $\mathbb{R}^2$ 建立类似结果，在临界质量条件 $\|u_0\|_1=8\pi$下并非易事；尤其是在初始数据不满足任何矩假设时，由于解的正则性不足，这一任务更具挑战性。

命题 4.5 的证明。 对 L^1 范数 $u\varphi_{R/2}$ 关于 t 求导并分部积分，可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^2} u\varphi_{\frac{R}{2}}\,\mathrm{d}x &= -\int_{\mathbb{R}^2} u\nabla\left(\ln u - v\right)\cdot\nabla\varphi_{\frac{R}{2}}\,\mathrm{d}x\\ &= -\int_{\mathbb{R}^2} u\nabla\left(\ln(1+u) - v\right)\cdot\nabla\varphi_{\frac{R}{2}}\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} u\nabla\ln u\cdot\nabla\varphi_{\frac{R}{2}}\,\mathrm{d}x\\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} u\nabla\ln(1+u)\cdot\nabla\varphi_{\frac{R}{2}}\,\mathrm{d}x\\ &= -\int_{\mathbb{R}^2} u\nabla\left(\ln(1+u) - v\right)\cdot\nabla\varphi_{\frac{R}{2}}\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} \nabla\ln(1+u)\cdot\nabla\varphi_{\frac{R}{2}}\,\mathrm{d}x\\ &= -\int_{\mathbb{R}^2} u\nabla\left(\ln(1+u) - v\right)\cdot\nabla\varphi_{\frac{R}{2}}\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+u)\Delta\varphi_{\frac{R}{2}}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

注意到 $|\nabla\varphi_{R/2}| \le C\varphi_{R/2}/R$ 和 $|\Delta\varphi_R| \le C\varphi_{R/2}/R^2$，因此由杨氏不等式和质量守恒可得

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^2} u\nabla\left(\ln(1+u) - v\right)\cdot\nabla\varphi_{\frac{R}{2}}\,\mathrm{d}x\right| &\le \frac{C}{R}\int_{\mathbb{R}^2} u|\nabla(\ln(1+u)-v)|\varphi_{\frac{R}{2}}\,\mathrm{d}x\\ &\le \frac{C}{R}\int_{\mathbb{R}^2} u\varphi_{\frac{R}{2}}\,\mathrm{d}x + \frac{C}{R}\int_{\mathbb{R}^2} u|\nabla(\ln(1+u)-v)|^2\varphi_{\frac{R}{2}}\,\mathrm{d}x\\ &\le \frac{C\|u_0\|_1}{R} + \frac{C}{R}\int_{\mathbb{R}^2} u|\nabla(\ln(1+u)-v)|^2\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

以及

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+u)\Delta\varphi_{\frac{R}{2}}\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{C}{R^2}\int_{\mathbb{R}^2}\ln(1+u)\varphi_{\frac{R}{2}}\,\mathrm{d}x \le \frac{C\|u_0\|_1}{R^2}.$$

因此，在 (t_0, t) 上对其积分可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} u\varphi_{\frac{R}{2}}\,\mathrm{d}x &\le \int_{\mathbb{R}^2} u(t_0)\varphi_{\frac{R}{2}}\,\mathrm{d}x + \frac{C\|u_0\|_1}{R}t + \frac{C\|u_0\|_1}{R^2}t + \frac{C}{R}\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^2} u|\nabla(\ln(1+u)-v)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\ &\le \int_{\mathbb{R}^2} u(t_0)\varphi_{\frac{R}{2}}\,\mathrm{d}x + \frac{C\|u_0\|_1}{R}\tau + \frac{C\|u_0\|_1}{R^2}\tau + \frac{C}{R}\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^2} u|\nabla(\ln(1+u)-v)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s\end{aligned}$$

当 $t \in [t_0, \tau]\cap(0,\ T)$ 任意取 $t_0,\ \tau > 0$。根据命题 4.3,

$$\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^2} u|\nabla(\ln(1+u)-v)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s \le C(t_0,\tau).$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} u\varphi_{\frac{R}{2}}\,\mathrm{d}x &\le \int_{\mathbb{R}^2} u(t_0)\varphi_{\frac{R}{2}}\,\mathrm{d}x + \frac{C\|u_0\|_1}{R}t + \frac{C\|u_0\|_1}{R^2}t + \frac{C}{R}\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^2} u|\nabla(\ln(1+u)-v)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\ &\le \int_{\mathbb{R}^2} u(t_0)\varphi_{\frac{R}{2}}\,\mathrm{d}x + \frac{C(t_0,\tau)}{R} + \frac{C(t_0,\tau)}{R^2}\end{aligned}$$

对于 $t \in [t_0, \tau]\cap(0, T)$。此外，由于 $\varphi_{R/2} \equiv 1$ 在 $|x| \ge R$ 上,

$$\int_{|x|>R} u\,\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^2} u\varphi_{\frac{R}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

证明完毕。 ∎

借助引理 4.5，外部区域上的约束质量可视需要取得任意小，这取决于 $R>0$。由此我们得到进一步的正则性估计。

引理 4.6。 设满足定理 *1.1*中的假设。对于 t_0，$\tau>0$ 满足 $t_0<\tau$，存在一个常数 $R_0=R_0(t_0,\tau,\|u_0\|_1)\gg 1$ 充分大，使得对于所有 $R>R_0$，存在一个常数 $C(t_0,\tau,R)>0$ 满足

$$\int_{|x|>2R}(1+u)\ln(1+u)\,\mathrm{d}x+\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^2\varphi_R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s\le C(t_0,\tau,R)$$

对于 $t\in[t_0,\tau]\cap(0,T)$。

引理 4.6 的证明。 设 φ_R 为 (4.8) 中定义的截断函数。通过分部积分，我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\mathbb{R}^2}(1+u)\ln(1+u)\varphi_R\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^2}u\varphi_R\,\mathrm{d}x\right)\\
=&\int_{\mathbb{R}^2}\ln(1+u)\varphi_R\left[\Delta u-\nabla\cdot(u\nabla v)\right]\,\mathrm{d}x\\
=&-\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|\nabla u|^2}{1+u}\varphi_R\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^2}\ln(1+u)\nabla u\cdot\nabla\varphi_R\,\mathrm{d}x\\
&+\int_{\mathbb{R}^2}\frac{u}{1+u}\varphi_R\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}u\ln(1+u)\nabla v\cdot\nabla\varphi_R\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

根据 (1.1) 中的第二个方程,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^2}v^2\varphi_R\,\mathrm{d}x&=\int_{\mathbb{R}^2}v\varphi_R\left[\Delta v-\lambda v+u\right]\,\mathrm{d}x\\
&=-\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^2\varphi_R\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^2}v\nabla v\cdot\nabla\varphi_R\,\mathrm{d}x-\lambda\int_{\mathbb{R}^2}v^2\varphi_R\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}uv\varphi_R\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\mathbb{R}^2}(1+u)\ln(1+u)\varphi_R\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^2}u\varphi_R\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}v^2\varphi_R\,\mathrm{d}x\right)\\
=&-\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|\nabla u|^2}{1+u}\varphi_R\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^2\varphi_R\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^2}\ln(1+u)\nabla u\cdot\nabla\varphi_R\,\mathrm{d}x\\
&+\int_{\mathbb{R}^2}\frac{u}{1+u}\varphi_R\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}u\ln(1+u)\nabla v\cdot\nabla\varphi_R\,\mathrm{d}x\\
&-\int_{\mathbb{R}^2}v\nabla v\cdot\nabla\varphi_R\,\mathrm{d}x-\lambda\int_{\mathbb{R}^2}v^2\varphi_R\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}uv\varphi_R\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}\tag{4.9}$$

由杨氏不等式以及 $\ln(1+x)\le x/(\sqrt{1+x})$（对 $x\ge 0$），对任意 $\varepsilon>0$ 我们看到

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^2}\ln(1+u)\nabla u\cdot\nabla\varphi_R\,\mathrm{d}x\right|&\le\varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|\nabla u|^2}{1+u}\varphi_R\,\mathrm{d}x+\frac{C_\varepsilon}{R^2}\int_{\mathbb{R}^2}(1+u)\left(\ln(1+u)\right)^2\varphi_R\,\mathrm{d}x\\
&\le\varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|\nabla u|^2}{1+u}\varphi_R\,\mathrm{d}x+\frac{C_\varepsilon}{R^2}\int_{\mathbb{R}^2}u^2\varphi_R\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} u\ln(1+u)\nabla v\cdot\nabla\varphi_R\,\mathrm{d}x\\
=&-\int_{\mathbb{R}^2} u\ln(1+u)\nabla(\ln(1+u)-v)\cdot\nabla\varphi_R\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}\frac{u}{1+u}\ln(1+u)\nabla u\cdot\nabla\varphi_R\,\mathrm{d}x\\
\le&\frac{C}{R^2}\int_{\mathbb{R}^2} u(\ln(1+u))^2\varphi_R\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2} u\left|\nabla(\ln(1+u)-v)\right|^2\varphi_R\,\mathrm{d}x\\
&+\varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|\nabla u|^2}{1+u}\varphi_R\,\mathrm{d}x+\frac{C_\varepsilon}{R^2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{u^2}{1+u}\left(\ln(1+u)\right)^2\varphi_R\,\mathrm{d}x\\
\le&\varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|\nabla u|^2}{1+u}\varphi_R\,\mathrm{d}x+\frac{C_\varepsilon}{R^2}\int_{\mathbb{R}^2} u^2\varphi_R\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2} u\left|\nabla(\ln(1+u)-v)\right|^2\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

以及由引理 2.3

$$\begin{aligned}
&-\int_{\mathbb{R}^2} v\nabla v\cdot\nabla\varphi_R\,\mathrm{d}x-\lambda\int_{\mathbb{R}^2} v^2\varphi_R\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2} uv\varphi_R\,\mathrm{d}x\\
\le&\varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} u^2\varphi_R\,\mathrm{d}x+C_\varepsilon\sup_{t>0}\|v(t)\|_2^2.
\end{aligned}$$

利用（1.1）中的第二个方程，我们推导出

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2}\frac{u}{1+u}\varphi_R\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x=&\int_{\mathbb{R}^2}\varphi_R\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^2}\varphi_R\nabla\ln(1+u)\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x\\
=&-\int_{\mathbb{R}^2} u\varphi_R\left[\partial_t v+\lambda v-u\right]\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^2} u\nabla v\cdot\nabla\varphi_R\,\mathrm{d}x\\
&-\int_{\mathbb{R}^2}\varphi_R\nabla\ln(1+u)\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x\\
\le&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} u^2\varphi_R\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|\partial_t v|^2\,\mathrm{d}x-\lambda\int_{\mathbb{R}^2} uv\varphi_R\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2} u^2\varphi_R\,\mathrm{d}x\\
&+\frac{C_\varepsilon}{R^2}\int_{\mathbb{R}^2} u^2\varphi_R\,\mathrm{d}x+\varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^2\varphi_R\,\mathrm{d}x\\
&+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla\ln(1+u)|^2\varphi_R\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^2\varphi_R\,\mathrm{d}x\\
\le&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|\nabla u|^2}{1+u}\varphi_R\,\mathrm{d}x+\left(\frac{3}{2}+\frac{C_\varepsilon}{R^2}\right)\int_{\mathbb{R}^2} u^2\varphi_R\,\mathrm{d}x\\
&+\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\right)\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^2\varphi_R\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|\partial_t v|^2\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

结合上述结果，由（4.9）可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\mathbb{R}^2}(1+u)\ln(1+u)\varphi_R\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^2} u\varphi_R\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} v^2\varphi_R\,\mathrm{d}x\right)\\
\le&-\left(1-2\varepsilon-\frac{1}{2}\right)\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|\nabla u|^2}{1+u}\varphi_R\,\mathrm{d}x-\left(1-2\varepsilon-\frac{1}{2}\right)\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^2\varphi_R\,\mathrm{d}x\\
&+\left(2+\frac{C_\varepsilon}{R^2}\right)\int_{\mathbb{R}^2} u^2\varphi_R\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2} u\left|\nabla(\ln(1+u)-v)\right|^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|\partial_t v|^2\,\mathrm{d}x+C_\varepsilon.
\end{aligned}$$

根据引理 2.1，当 $|f| = u$ 且 $\phi = \varphi_R$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} u^2\varphi_R\,\mathrm{d}x \le& 2\left(\int_{\{u>1\}\cap\{\text{supp }\varphi_R\}} u\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\{u>1\}}\frac{|\nabla u|^2}{1+u}\varphi_R\,\mathrm{d}x\right)\\ &+4\left(\int_{\mathbb{R}^2}|u\nabla\varphi_R^{\frac12}|\,\mathrm{d}x\right)^2+4\left(\int_{\mathbb{R}^2}u\varphi_R\,\mathrm{d}x\right)\\ \le& 2\left(\int_{|x|>R}u\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|\nabla u|^2}{1+u}\varphi_R\,\mathrm{d}x\right)+C(\|u_0\|_1,R)\end{aligned}$$

由于 $\text{supp }\varphi_R\subset\{x;|x|>R\}$。因此，

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\mathbb{R}^2}(1+u)\ln(1+u)\varphi_R\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^2}u\varphi_R\,\mathrm{d}x+\frac12\int_{\mathbb{R}^2}v^2\varphi_R\,\mathrm{d}x\right)\\ \le&-\left(\frac12-2\varepsilon-2\left(2+\frac{C_\varepsilon}{R^2}\right)\int_{|x|>R}u\,\mathrm{d}x\right)\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|\nabla u|^2}{1+u}\varphi_R\,\mathrm{d}x-\left(\frac12-2\varepsilon\right)\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^2\varphi_R\,\mathrm{d}x\\ &+\int_{\mathbb{R}^2}u\left|\nabla(\ln(1+u)-v)\right|^2\,\mathrm{d}x+\frac12\int_{\mathbb{R}^2}|\partial_t v|^2\,\mathrm{d}x+C_\varepsilon\end{aligned}\tag{4.10}$$

对于 $t\in[t_0,\tau]\cap(0,T)$。取 $\varepsilon=1/8$ 可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\mathbb{R}^2}(1+u)\ln(1+u)\varphi_R\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^2}u\varphi_R\,\mathrm{d}x+\frac12\int_{\mathbb{R}^2}v^2\varphi_R\,\mathrm{d}x\right)\\ \le&-\left(\frac14-2\left(2+\frac{C}{R^2}\right)\int_{|x|>R}u\,\mathrm{d}x\right)\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|\nabla u|^2}{1+u}\varphi_R\,\mathrm{d}x-\frac14\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^2\varphi_R\,\mathrm{d}x\\ &+\int_{\mathbb{R}^2}u\left|\nabla(\ln(1+u)-v)\right|^2\,\mathrm{d}x+\frac12\int_{\mathbb{R}^2}|\partial_t v|^2\,\mathrm{d}x+C\end{aligned}$$

并且根据命题 4.5，可以找到一个常数 $R_0=R_0(t_0,\ \tau,\ \|u_0\|_1)\gg1$ 使得对所有 $R>R_0$

$$\frac14-2\left(2+\frac{C}{R^2}\right)\sup_{t_0\le t\le\tau}\int_{|x|>R}u(t)\,\mathrm{d}x>0.$$

因此，在 4.10上对式（$(t_0,\ t)$）积分，并结合质量守恒、引理 2.3和命题4.3，可得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^2}(1+u)\ln(1+u)\varphi_R\,\mathrm{d}x+\frac14\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^2\varphi_R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\ \le&\int_{\mathbb{R}^2}(1+u(t_0))\ln(1+u(t_0))\,\mathrm{d}x+\frac12\|v(t_0)\|_2^2+\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^2}u\left|\nabla(\ln(1+u)-v)\right|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\ &+\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^2}|\partial_t v|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s+Ct\\ \le&\int_{\mathbb{R}^2}(1+u(t_0))\ln(1+u(t_0))\,\mathrm{d}x+\frac12\|v(t_0)\|_2^2+C(t_0,\tau)\end{aligned}$$

对于 $t\in[t_0,\tau]\cap(0,T)$。因此，我们有

$$\int_{|x|>2R}(1+u)\ln(1+u)\,\mathrm{d}x\le\int_{\mathbb{R}^2}(1+u)\ln(1+u)\varphi_R\,\mathrm{d}x\le C(t_0,\tau)$$

当 $t\in[t_0,\tau]\cap(0,T)$ 时。证明完成。 ∎

引理 4.7。 设定理 *1.1*中的假设成立。令 $1 < p < \infty$。对于任意 t_0， $\tau > 0$满足 $t_0 < \tau$，令 $R_0 = R_0(t_0, \tau) > 0$如引理 *4.6*中所取。则存在一个常数$R_1 \geq R_0 > 0$，使得对所有 $R > R_1$，存在一个常数 $C(t_0, \tau, R) > 0$满足

$$\|(u\varphi_{2R})\|_2 + \|(u\varphi_{4R})\|_p \leq C(t_0, \tau, R)$$

以及

$$\int_{|x|>4R} u^2 \,\mathrm{d}x + \int_{|x|>8R} u^p \,\mathrm{d}x \leq C(t_0, \tau, R)$$

对于 $t \in [t_0, \tau] \cap (0, T)$。

引理4.7的证明。我们来计算 L^p-能量估计。通过对（1.1）的第一个方程进行分部积分，可知对于 $p > 1$

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^2}(u\varphi_{2R})^p \,\mathrm{d}x \\
=& p\int_{\mathbb{R}^2} u^{p-1}\varphi_{2R}^p(\Delta u - \nabla\cdot(u\nabla v))\,\mathrm{d}x \\
=& -\frac{4(p-1)}{p}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u^{\frac{p}{2}}|^2\varphi_{2R}^p\,\mathrm{d}x - 2\int_{\mathbb{R}^2} u^{\frac{p}{2}}\nabla u^{\frac{p}{2}}\cdot\nabla\varphi_{2R}^p\,\mathrm{d}x \\
&-(p-1)\int_{\mathbb{R}^2} u^p\Delta v\varphi_{2R}^p\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^2} u^p\nabla v\cdot\nabla\varphi_{2R}^p\,\mathrm{d}x \\
=& -\frac{4(p-1)}{p}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u^{\frac{p}{2}}|^2\varphi_{2R}^p\,\mathrm{d}x - 2\int_{\mathbb{R}^2} u^{\frac{p}{2}}\nabla u^{\frac{p}{2}}\cdot\nabla\varphi_{2R}^p\,\mathrm{d}x \\
&-(p-1)\int_{\mathbb{R}^2} u^p\partial_t v\varphi_{2R}^p\,\mathrm{d}x + (p-1)\int_{\mathbb{R}^2} u^{p+1}\varphi_{2R}^p\,\mathrm{d}x - (p-1)\lambda\int_{\mathbb{R}^2} u^p v\varphi_{2R}^p\,\mathrm{d}x \\
&-2\int_{\mathbb{R}^2} vu^{\frac{p}{2}}\nabla u^{\frac{p}{2}}\cdot\nabla\varphi_{2R}^p\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} vu^p\Delta\varphi_{2R}^p\,\mathrm{d}x. \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

我们首先推导 L^2-估计，针对 $u\varphi_{2R}$，对于（4.11），在 $p = 2$的情形下，即，

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^2}(u\varphi_{2R})^2\,\mathrm{d}x =& -2\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u|^2\varphi_{2R}^2\,\mathrm{d}x - 2\int_{\mathbb{R}^2} u\nabla u\cdot\nabla\varphi_{2R}^2\,\mathrm{d}x \\
&-\int_{\mathbb{R}^2} u^2\partial_t v\varphi_{2R}^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^2} u^3\varphi_{2R}^2\,\mathrm{d}x - \lambda\int_{\mathbb{R}^2} u^2 v\varphi_{2R}^p\,\mathrm{d}x \\
&-2\int_{\mathbb{R}^2} vu\nabla u\cdot\nabla\varphi_{2R}^2\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} vu^2\Delta\varphi_{2R}^2\,\mathrm{d}x. \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

至于（4.12）右侧的第二项，

$$\begin{aligned}
2\left|\int_{\mathbb{R}^2} u\nabla u\cdot\nabla\varphi_{2R}^2\,\mathrm{d}x\right| \leq& \frac{C}{R}\int_{\mathbb{R}^2} u|\nabla u|\varphi_{2R}^2\,\mathrm{d}x \\
\leq& \varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u|^2\varphi_{2R}^2\,\mathrm{d}x + \frac{C_\varepsilon}{R^2}\int_{\mathbb{R}^2} u^2\varphi_{2R}^2\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

对任意 $\varepsilon>0$。对于第三项，

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^2} u^2\partial_t v\varphi_{2R}^2\,\mathrm{d}x\right| &\le \|u\varphi_{2R}\|_4^2\|\partial_t v\|_2\\ &\le C\|u\varphi_{2R}\|_2\|\nabla(u\varphi_{2R})\|_2\|\partial_t v\|_2\\ &\le C\|u\varphi_{2R}\|_2\||\nabla u|\varphi_{2R}\|_2\|\partial_t v\|_2+\frac{C}{R^2}\|u\varphi_{2R}\|_2^2\|\partial_t v\|_2\\ &\le \varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u|^2\varphi_{2R}^2\,\mathrm{d}x+C_\varepsilon\|u\varphi_{2R}\|_2^2\left(1+\frac{\|\partial_t v\|_2^2}{R^2}\right).\end{aligned}$$

第六项也可估计为

$$\begin{aligned}2\left|\int_{\mathbb{R}^2} vu\nabla u\cdot\varphi_{2R}^2\,\mathrm{d}x\right| &\le \frac{C}{R}\int_{\mathbb{R}^2} vu|\nabla u|\varphi_{2R}^2\,\mathrm{d}x\\ &\le \varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u|^2\varphi_{2R}^2\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}u^3\varphi_{2R}^3\,\mathrm{d}x+\frac{C_\varepsilon}{R^6}\int_{\mathbb{R}^2}v^6\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

对于最后一项

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^2} vu^2\Delta\varphi_{2R}^2\,\mathrm{d}x\right| &\le \frac{C}{R^2}\int_{\mathbb{R}^2} vu^2\varphi_{2R}^2\,\mathrm{d}x\\ &\le \int_{\mathbb{R}^2}u^3\varphi_{2R}^3\,\mathrm{d}x+\frac{C}{R^6}\int_{\mathbb{R}^2}v^3\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

因此，由上述结果可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^2}(u\varphi_{2R})^2\,\mathrm{d}x+(2-3\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u|^2\varphi_{2R}^2\,\mathrm{d}x\\ &\le\int_{\mathbb{R}^2}u^3\varphi_{2R}^2\,\mathrm{d}x+2\int_{\mathbb{R}^2}(u\varphi_{2R})^3\,\mathrm{d}x+C_\varepsilon\|u\varphi_{2R}\|_2^2\left(1+\frac{1+\|\partial_t v\|_2^2}{R^2}\right)+\frac{C_\varepsilon\|v\|_6^6+C\|v\|_3^3}{R^6}.\end{aligned}$$

利用引理2.1，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}u^3\varphi_{2R}^2\,\mathrm{d}x \le{}&\varepsilon\left(\int_{\{\mathrm{supp}\ \varphi_{2R}\}}(1+u)\ln(1+u)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u|^2\varphi_{2R}^2\,\mathrm{d}x\right)\\ &+C\left(\int_{\mathbb{R}^2}|u^{\frac{3}{2}}\nabla\varphi_{2R}|\,\mathrm{d}x\right)^2+C_\varepsilon\left(\int_{\mathbb{R}^2}u\varphi_{2R}^2\,\mathrm{d}x\right)\\ \le{}&\varepsilon\left(\sup_{t_0\le t\le\tau}\int_{|x|>2R}(1+u(t))\ln(1+u(t))\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u|^2\varphi_{2R}^2\,\mathrm{d}x\right)\\ &+\frac{C\|u_0\|_1}{R^2}\|u\varphi_{2R}\|_2^2+C_\varepsilon\|u_0\|_1,\end{aligned}$$

由 Gagliardo–Nirenberg 不等式可得

$$\|u\varphi_{2R}\|_3^3\le C\|u\varphi_{2R}\|_1\|\nabla(u\varphi_{2R})\|_2^2\le\ C\|u\varphi_{2R}\|_1\||\nabla u|\varphi_{2R}\|_2^2+\frac{C\|u_0\|_1}{R^2}\|u\varphi_R\|_2^2.$$

此外，根据引理2.3中的标准抛物正则性，

$$\|v\|_r\le C(\tau,r,\|v_0\|_r,\|u_0\|_1),\quad r\in[1,\infty).$$

因此，

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^2}(u\varphi_{2R})^2\,\mathrm{d}x+(2-3\varepsilon-\varepsilon C(\tau,R)-C\|u\varphi_{2R}\|_1)\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u|^2\varphi_{2R}\,\mathrm{d}x\\&\leq C_\varepsilon\|u\varphi_{2R}\|_2^2\left(1+\frac{1+\|\partial_t v\|_2^2}{R^2}\right)+\frac{C_\varepsilon}{R^6}\end{aligned}$$

对于 $t\in[t_0,\tau]\cap(0,T)$ 以及任意 $\varepsilon>0$。根据命题 4.5 和注 4.1，可以找到一个充分大的常数 $R_1=R_1(t_0,\tau,\|u_0\|_1)\geq R_0\gg 1$，使得对所有 $R>R_1$

$$2-3\varepsilon-\varepsilon C(t_0,\tau,R)-C\|u\varphi_{2R}\|_1>0,$$

同时取充分小的 $\varepsilon>0$。因此，我们有

$$\|u\varphi_{2R}\|_2^2\leq\|(u\varphi_{2R})(t_0)\|_2^2+C\int_{t_0}^t\|u\varphi_{2R}\|_2^2\left(1+\frac{1+\|\partial_t v\|_2^2}{R^2}\right)\mathrm{d}s+\frac{C}{R^6}t$$

对 (t_0,t)积分可得。根据命题 4.3，我们已经知道以下界

$$\int_{t_0}^t\|\partial_t v\|_2^2\,\mathrm{d}s\leq C(t_0,\tau),\quad t\in[t_0,\tau]\cap(0,T),$$

因此，在使用格朗沃尔不等式后，我们得到 $u\varphi_{2R}$ 的 L^2 界，即

$$\|u\varphi_{2R}\|_2^2\leq C(t_0,\tau,R)\exp\left(\int_{t_0}^t\left(1+\frac{1+\|\partial_t v\|_2^2}{R^2}\right)\mathrm{d}s\right)\leq C(t_0,\tau,R),\quad t\in[t_0,\tau]\cap(0,T).$$

因此，我们有

$$\int_{|x|>4R}u^2\,\mathrm{d}x\leq\int_{\mathbb{R}^2}(u\varphi_{2R})^2\,\mathrm{d}x\leq C(t_0,\tau,R).\tag{4.13}$$

随后，我们转向 $u\varphi_{4R}$的 L^p-估计。通过上述几乎相同的论证，我们最终得到如下微分不等式

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^2}(u\varphi_{4R})^p\,\mathrm{d}x+(2-3\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u^{\frac{p}{2}}|^2\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x\\&\leq\int_{\mathbb{R}^2}u^{p+1}\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x+2\int_{\mathbb{R}^2}u^{p+1}\varphi_{4R}^{p+1}\,\mathrm{d}x+C_\varepsilon\|u\varphi_{4R}\|_p^p\left(1+\frac{1+\|\partial_t v\|_2^2}{R^2}\right)\\&\quad+\frac{C_\varepsilon\|v\|_{2(p+1)}^{2(p+1)}+C\|v\|_{p+1}^{p+1}}{R^{2(p+1)}}.\end{aligned}$$

现在，注意到 supp $\varphi_{4R}\subset\{x;|x|>4R\}$，因此，结合 Hölder 不等式、Gagliardo–Nirenberg 不等式和 Young 不等式以及 L^2-估计（4.13），可得对任意 $\varepsilon>0$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}u^{p+1}\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x&=\int_{|x|>4R}u^{p+1}\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x\\&\leq\left(\int_{|x|>4R}u^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\|(u\varphi_{4R})^{\frac{p}{2}}\|_4^2\\&\leq C(t_0,\tau,R)\|(u\varphi_{4R})^{\frac{p}{2}}\|_2\|\nabla(u\varphi_{4R})^{\frac{p}{2}}\|_2\\&\leq C\|u\varphi_{4R}\|_p^{\frac{p}{2}}\left(\||\nabla u^{\frac{p}{2}}|\varphi_{4R}^{\frac{p}{2}}\|_2+\|u^{\frac{p}{2}}|\nabla\varphi_{4R}^{\frac{p}{2}}|\|_2\right)\\&\leq\varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u^{\frac{p}{2}}|^2\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x+C_\varepsilon\|u\varphi_{4R}\|_p^p\left(1+\frac{1}{R^2}\right).\end{aligned}$$

采用与上述估计类似的方法,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} u^{p+1}\varphi_{4R}^{p+1}\,\mathrm{d}x &\le \|u\varphi_{4R}\|_2\|(u\varphi_{4R})^{\frac{p}{2}}\|_4^2\\ &\le C\left(\sup_{t_0\le t\le\tau}\|u\varphi_{4R}\|_2\right)\|(u\varphi_{4R})^{\frac{p}{2}}\|_2\|\nabla(u\varphi_{4R})^{\frac{p}{2}}\|_2\\ &\le C\left(\sup_{t_0\le t\le\tau}\|u\varphi_{4R}\|_2\right)\|u\varphi_R\|_p^{\frac{p}{2}}\left(\||\nabla u^{\frac{p}{2}}|\varphi_R^{\frac{p}{2}}\|_2+\|u^{\frac{p}{2}}|\nabla\varphi_R^{\frac{p}{2}}|\|_2\right)\\ &\le \varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u^{\frac{p}{2}}|^2\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x + C_\varepsilon\|u\varphi_{4R}\|_p^p\left(\|u\varphi_{4R}\|_2^2+\frac{1}{R^2}\right),\end{aligned}$$

由此可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^2}(u\varphi_{4R})^p\,\mathrm{d}x+(2-4\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u^{\frac{p}{2}}|^2\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x\le C_\varepsilon\|u\varphi_{4R}\|_p^p\left(1+\frac{1+\|\partial_t v\|_2^2}{R^2}\right)+\frac{C_\varepsilon}{R^{2(p+1)}}.$$

因此，通过令 $\varepsilon>0$ 充分小并应用格朗沃尔不等式，可得 L^p关于 $u\varphi_{4R}$ 的估计:

$$\|u\varphi_{4R}\|_p^p\le C(t_0,\tau,R,\|u(t_0)\|_p)\exp\left(\int_{t_0}^t\left(1+\frac{1+\|\partial_t v\|_2^2}{R^2}\right)\mathrm{d}s\right)\le C(t_0,\tau,R)$$

对 $t\in[t_0,\tau]\cap(0,T)$成立。证明完成。 ❑

引理 4.8。 假设与定理 *1.1*中的假设相同。对于 t_0, $\tau>0$ 满足 t_0, τ, 令$R_1=R_1(t_0,\tau)>0$ 如引理 *4.7*所取。则对于所有 $R>R_1$, 存在常数$C(t_0,\tau,R)>0$ 满足

$$\|\nabla(v\varphi_{4R})\|_\infty+\|(u\varphi_{8R})\|_\infty\le C(t_0,\tau,R)$$

对 $t\in[t_0,\tau]\cap(0,T)$。

引理的证明 4.8。 我们首先证明 L^p-估计，以便证明 $\nabla v\varphi_{4R}$ 的 L^∞-界 $\nabla(v\varphi_{4R})$。利用式 (1.1中的第二个方程、分部积分以及众所周知的博赫纳公式 $2\nabla v\cdot\nabla\Delta v=-2|D^2v|^2+\Delta|\nabla v|^2$,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^p\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x\\ =&\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^{p-2}\nabla v\cdot\nabla(\partial_t v)\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x\\ =&\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^{p-2}\nabla v\cdot\nabla(\Delta v-\lambda v+u)\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x\\ =&-\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^{p-2}|D^2v|^2\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^{p-2}\Delta|\nabla v|^2\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x\\ &-\lambda\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^p\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^{p-2}\nabla v\cdot\nabla u\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x\\ =&-(p-1)\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^{p-2}|D^2v|^2\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^{p-2}(\nabla\varphi_{4R}^p)^TD^2v\nabla v\,\mathrm{d}x\\ &-\lambda\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^p\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^{p-2}\Delta vu\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x\\ &-(p-2)\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^{p-4}(\nabla v)^TD^2v\nabla vu\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^{p-2}\nabla v\cdot\nabla\varphi_{4R}^pu\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由于$|\nabla\varphi_{4R}^p| \le C\varphi_{4R}^p/R$，由杨氏不等式可知，对于任意 $\varepsilon>0$

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^{p-2}(\nabla\varphi_{4R}^p)^T D^2v\nabla v\,\mathrm{d}x\right| &\le \frac{C}{R}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^{p-1}|D^2v|\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x\\ &\le \varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^{p-2}|D^2v|^2\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x+\frac{C_\varepsilon}{R^2}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^p\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

并且利用迹估计 $|\Delta v|\le\sqrt{2}|D^2v|$,

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^{p-2}\Delta v u\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x\right|\\ \le&\sqrt{2}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^{p-2}|D^2v|u\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x\\ \le&\varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^{p-2}|D^2v|^2\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x+C_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^{p-2}u^2\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x\\ \le&\varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^{p-2}|D^2v|^2\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x+C_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^p\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}(u\varphi_{4R})^p\,\mathrm{d}x\\ \le&\varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^{p-2}|D^2v|^2\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x+C_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^p\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x+C(t_0,\tau,R)\end{aligned}$$

多亏引理4.7。类似地,

$$\begin{aligned}\left|(p-2)\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^{p-4}(\nabla v)^T D^2v\nabla v u\varphi_{4R}\,\mathrm{d}x\right| &\le (p-2)\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^{p-2}|D^2v|u\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x\\ &\le\varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^{p-2}|D^2v|^2\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x\\ &\quad+C_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^p\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x+C(t_0,\tau,R)\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^{p-2}\nabla v\cdot\nabla\varphi_{4R}^p u\,\mathrm{d}x\right| &\le\frac{C}{R}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^{p-1}u\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x\\ &\le\frac{C}{R^{\frac{p}{p-1}}}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^p\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}(u\varphi_{4R})^p\,\mathrm{d}x\\ &\le\frac{C}{R^{\frac{p}{p-1}}}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^p\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x+C(t_0,\tau,R)\end{aligned}$$

对于 $t\in[t_0,\tau]\cap(0,T)$。因此，由上述计算可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^p\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x+[(p-1)-3\varepsilon]\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^{p-2}|D^2v|^2\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x\\ \le&C(R)\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^p\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x+C(t_0,\tau,R).\end{aligned}$$

通过选取 $6\varepsilon=(p-1)$，格朗沃尔不等式推出

$$\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^p\varphi_{4R}^p\,\mathrm{d}x\le C(t_0,\tau,R),\quad\int_{|x|>8R}|\nabla v|^p\,\mathrm{d}x\le C(t_0,\tau,R)\tag{4.14}$$

对于 $t\in[t_0,\tau]\cap(0,T)$。

接下来，由1.1的第二个方程可得（针对 v），

$$\partial_t(v\varphi_{4R})=\Delta(v\varphi_{4R})-\lambda v\varphi_{4R}-2\nabla v\cdot\nabla\varphi_{4R}-v\Delta\varphi_{4R}+u\varphi_{4R}\tag{4.15}$$

并利用积分形式

$$\begin{aligned} v\varphi_{4R} =& e^{-\lambda t}e^{(t-t_0)\Delta}((v\varphi_{4R})(t_0)) \\ &+ \int_{t_0}^{t} e^{-(t-s)\lambda}e^{(t-s)\Delta}\left[-2\nabla v(s)\cdot\nabla\varphi_{4R} - v(s)\Delta\varphi_{4R} + u(s)\varphi_{4R}\right]\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

对于 $t\in[t_0,\tau]\cap(0,\ T)$。由引理 2.3

$$\sup_{0<t\le\tau}\|v(t)\|_p<\infty,\quad p\in[1,\infty),$$

由引理 4.7 和（4.14）可知

$$\begin{aligned} \|\nabla(v\varphi_{4R})\|_\infty \le& e^{-\lambda t}\|\nabla(v(t_0)\varphi_{4R})\|_\infty + \frac{C}{R}\int_{t_0}^{t} e^{-(t-s)\lambda}(t-s)^{-\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\|\varphi_{4R}\nabla v(s)\|_p\,\mathrm{d}s \\ &+ \frac{C}{R^2}\int_{t_0}^{t} e^{-(t-s)\lambda}(t-s)^{-\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\|v(s)\|_p\,\mathrm{d}s \\ &+ C\int_{t_0}^{t} e^{-(t-s)\lambda}(t-s)^{-\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\|(u\varphi_{4R})(s)\|_p\,\mathrm{d}s \\ \le& \|\nabla v(t_0)\|_\infty + \frac{C}{R}\|v(t_0)\|_\infty + \frac{C}{R}\left(\sup_{t_0\le s\le\tau}\|\varphi_{4R}\nabla v(s)\|_p\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right) \\ &+ \frac{C}{R^2}\left(\sup_{t_0\le s\le\tau}\|v(s)\|_p\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right) \\ &+ C\left(\sup_{t_0\le s\le\tau}\|(u\varphi_{4R})(s)\|_p\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right) \end{aligned}$$

对于 $t\in[t_0,\tau]\cap(0,T)$，若 $p\in(2,\infty)$，其中 $\Gamma(\cdot)$ 是定义在 $(0,\infty)$ 上的伽马函数，这表明

$$\|\nabla(v\varphi_{4R})\|_\infty\le\ C(t_0,\tau,R).$$

接下来，按照上述论证的类似方法

$$\partial_t(u\varphi_{8R}) = \Delta(u\varphi_{8R}) + u(\Delta\varphi_{8R}+\nabla v\cdot\nabla\varphi_{8R}) - 2\nabla\cdot(u\nabla\varphi_{8R}), \tag{4.16}$$

并且利用积分形式可得

$$\begin{aligned} u\varphi_{8R} =& e^{(t-t_0)\Delta}((u\varphi_{8R})(t_0)) \\ &+ \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)\Delta}\left[u(s)(\Delta\varphi_{8R}+\nabla v(s)\cdot\nabla\varphi_{8R}) - 2\nabla\cdot(u(s)\nabla\varphi_{8R})\right]\,\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{4.17}$$

因此，根据引理2.2

$$\begin{aligned}\|(u\varphi_{8R})\|_\infty \le& \|u(t_0)\|_\infty + \frac{C}{R^2}\int_{t_0}^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|(u\varphi_{8R})(s)\|_2\,\mathrm{d}s\\ &+\frac{C}{R}\int_{t_0}^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|(u\varphi_{8R})(s)\|_p\|\nabla v(s)\|_{L^q(|x|>8R)}\,\mathrm{d}s\\ &+\frac{C}{R}\int_{t_0}^t (t-s)^{-\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\|(u\varphi_{8R})(s)\|_p\,\mathrm{d}s\\ \le& \|u(t_0)\|_\infty + \frac{C}{R^2}t^{\frac{1}{2}}\left(\sup_{t_0\le s\le\tau}\|(u\varphi_{8R})(s)\|_p\right)\\ &+\frac{C}{R}t^{\frac{1}{2}}\left(\sup_{t_0\le s\le\tau}\|(u\varphi_{8R})(s)\|_p\right)\left(\sup_{t_0\le s\le\tau}\|\nabla v(s)\|_{L^q(|x|>8R)}\right)\\ &+\frac{C}{R}t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\left(\sup_{t_0\le s\le\tau}\|(u\varphi_{8R})(s)\|_p\right),\end{aligned}$$

只要

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2},\quad p,q>2.$$

因此，借助引理 4.7，我们得到 L^∞-估计，关于 $u\varphi_{4R}$，即

$$\|(u\varphi_{8R})\|_\infty \le C(t_0,\tau,R),$$

证毕。 ❑

引理 4.9. 设 (u,v) 为 (1.1) 的解。设 R 如引理 4.7 中所取。则对任意 $t_0,\tau>0$，满足 $t_0<\tau$，存在常数 $C(t_0,\tau,R)>0$，使得

$$\begin{aligned}&\|\nabla(u\varphi_{8R})\|_2+\|\Delta(u\varphi_{8R})\|_2+\|\nabla\Delta(u\varphi_{8R})\|_2\\ &\quad+\|\Delta(v\varphi_{8R})\|_2+\|\nabla\Delta(v\varphi_{8R})\|_2\le C(t_0,\tau,R)\end{aligned}$$

对于 $t\in[t_0,\tau]\cap$（0，T）。

引理 4.9 的证明。 我们首先证明 L^2-估计，其中 $\nabla(u\varphi_{8R})$，并使用迭代论证得到进一步的正则性估计。利用（4.16），可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla(u\varphi_{8R})|^2\,\mathrm{d}x\\ =&2\int_{\mathbb{R}^2}\nabla(u\varphi_{8R})\cdot\nabla\partial_t\left(u\varphi_{8R}\right)\,\mathrm{d}x\\ =&2\int_{\mathbb{R}^2}\nabla(u\varphi_{8R})\cdot\nabla\left[\Delta(u\varphi_{8R})+u(\Delta\varphi_{8R}+\nabla v\cdot\nabla\varphi_{8R})-2\nabla\cdot(u\nabla\varphi_{8R})\right]\,\mathrm{d}x\\ =&-2\int_{\mathbb{R}^2}|\Delta(u\varphi_{8R})|^2\,\mathrm{d}x-2\int_{\mathbb{R}^2}\Delta(u\varphi_{8R})(u\Delta\varphi_{8R}+u\nabla v\cdot\nabla\varphi_{8R})\,\mathrm{d}x\\ &+4\int_{\mathbb{R}^2}\Delta(u\varphi_{8R})\nabla\cdot(u\nabla\varphi_{8R})\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

对于右端的第二项，杨氏不等式结合引理 4.7可得

$$\begin{aligned}2\left|\int_{\mathbb{R}^2}\Delta(u\varphi_{8R})u\Delta\varphi_{8R}\,\mathrm{d}x\right| &\le \varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}|\Delta(u\varphi_{8R})|^2\,\mathrm{d}x+\frac{C_\varepsilon}{R^4}\int_{\mathbb{R}^2}(u\varphi_{8R})^2\,\mathrm{d}x\\ &\le \varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}|\Delta(u\varphi_{8R})|^2\,\mathrm{d}x+\frac{C_\varepsilon}{R^4}\left(\sup_{t_0\le t\le\tau}\|(u\varphi_{2R})(t)\|_2\right)^2\end{aligned}$$

并由引理4.8

$$\begin{aligned}&2\left|\int_{\mathbb{R}^2}\Delta(u\varphi_{8R})u\nabla v\cdot\nabla\varphi_{8R}\,\mathrm{d}x\right|\\ \le&\frac{C}{R}\int_{\mathbb{R}^2}|\Delta(u\varphi_{8R})|u|\nabla v|\varphi_{8R}\,\mathrm{d}x\\ \le&\varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}|\Delta(u\varphi_{8R})|^2\,\mathrm{d}x+\frac{C_\varepsilon}{R^2}\int_{|x|>8R}u^2(|\nabla(v\varphi_{8R})|+v|\nabla\varphi_{8R}|)^2\,\mathrm{d}x\\ \le&\varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}|\Delta(u\varphi_{8R})|^2\,\mathrm{d}x+\frac{C_\varepsilon}{R^2}\left(\sup_{t_0\le t\le\tau}\|\nabla(v\varphi_{8R})(t)\|_\infty\right)\|u\|^2_{L^2(|x|>8R)}\\ &+\frac{C_\varepsilon}{R^4}\left(\sup_{t_0\le t\le\tau}\|(u\varphi_{8R})(t)\|_\infty\right)^2\|v\|_2^2\\ \le&\varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}|\Delta(u\varphi_{8R})|^2\,\mathrm{d}x+\frac{C_\varepsilon(t_0,\tau,R)}{R^2}+\frac{C_\varepsilon(t_0,\tau,R)}{R^4}.\end{aligned}$$

此外，

$$\begin{aligned}\left|4\int_{\mathbb{R}^2}\Delta(u\varphi_{8R})\nabla\cdot(u\nabla\varphi_{8R})\,\mathrm{d}x\right| \le&\varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}|\Delta(u\varphi_{8R})|^2\,\mathrm{d}x\\ &+\frac{C_\varepsilon}{R^2}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla(u\varphi_{8R})|^2\,\mathrm{d}x+\frac{C\varepsilon}{R^4}\int_{\mathbb{R}^2}(u\varphi_{8R})^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因此，综合上述计算可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla(u\varphi_{8R})|^2\,\mathrm{d}x+(2-3\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^2}|\Delta(u\varphi_{8R})|^2\,\mathrm{d}x\le\frac{C_\varepsilon}{R^2}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla(u\varphi_{8R})|^2\,\mathrm{d}x+C_\varepsilon(t_0,\tau,R).$$

选取 $\varepsilon=1/3$ 并应用格朗沃尔不等式，我们得到

$$\|\nabla(u\varphi_{8R})\|_2^2+\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^2}|\Delta(u\varphi_{8R})|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s\le C(t_0,\tau,R)(\|\nabla u(t_0)\|_2^2+1)\tag{4.18}$$

当 $t\in[t_0,\tau]\cap$（0，T）时，由式（4.15）和杨氏不等式可得 t

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^2}|\Delta(v\varphi_{8R})|^2\,\mathrm{d}x\\ =&-2\int_{\mathbb{R}^2}\nabla\Delta(v\varphi_{8R})\cdot\nabla\left(\Delta(v\varphi_{8R})-2\nabla v\cdot\nabla\varphi_{8R}-v\Delta\varphi_{8R}-\lambda v\varphi_{8R}+u\varphi_{8R}\right)\,\mathrm{d}x\\ \le&-(2-\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla\Delta(v\varphi_{8R})|^2\,\mathrm{d}x+C_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla(\nabla v\cdot\nabla\varphi_{8R})|^2\,\mathrm{d}x+C_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla(v\Delta\varphi_{8R})|^2\,\mathrm{d}x\\ &+C_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla(v\varphi_{8R})|^2\,\mathrm{d}x+C_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla(u\varphi_{8R})|^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{4.19}$$

至于式（4.19）右端的第二项,

$$
\begin{aligned}
&C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla(\nabla v \cdot \nabla \varphi_{8R})|^2 \, \mathrm{d}x \\
\leq & \frac{C_\varepsilon}{R^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi_{8R} \nabla^2 v|^2 \, \mathrm{d}x + \frac{C_\varepsilon}{R^4} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 \varphi_{8R}^2 \, \mathrm{d}x \\
\leq & \frac{C_\varepsilon}{R^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla^2 (v\varphi_{8R})|^2 \, \mathrm{d}x + \frac{C_\varepsilon}{R^4} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 \varphi_{8R}^2 \, \mathrm{d}x + \frac{C_\varepsilon}{R^6} \int_{\mathbb{R}^2} v^2 \varphi_{8R}^2 \, \mathrm{d}x \\
\leq & \frac{C_\varepsilon}{R^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\Delta (v\varphi_{8R})|^2 \, \mathrm{d}x + \frac{C_\varepsilon}{R^4} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 \varphi_{2R} \, \mathrm{d}x + \frac{C_\varepsilon}{R^6} \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|v(t)\|_2^2
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

对于 $t \in [t_0, \tau] \cap (0, T)$，其中我们使用 $\varphi_{8R} \nabla^2 v = \nabla^2 (v\varphi_{8R}) - 2(\nabla v)^T \nabla \varphi_{8R} - v \nabla^2 \varphi_{8R}$。同理，(4.19) 中的第三项估计为

$$
\begin{aligned}
C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla (v \Delta \varphi_{8R})|^2 \, \mathrm{d}x &\leq \frac{C_\varepsilon}{R^4} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 \varphi_{8R}^2 \, \mathrm{d}x + \frac{C_\varepsilon}{R^6} \int_{\mathbb{R}^2} v^2 \, \mathrm{d}x \\
&\leq \frac{C_\varepsilon}{R^4} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 \varphi_{2R} \, \mathrm{d}x + \frac{C_\varepsilon}{R^6} \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|v(t)\|_2^2.
\end{aligned}
$$

因此，将 (4.19) 在 (t_0, t) 上积分并取 $\varepsilon = 1$ 可得

$$
\int_{\mathbb{R}^2} |\Delta (v\varphi_{8R})|^2 \, \mathrm{d}x \leq C(t_0, \tau, R)
$$

在应用格朗沃尔不等式后，对于 $t \in [t_0, \tau] \cap (0, T)$，因为我们已知估计

$$
\int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 \varphi_{2R} \, \mathrm{d}x \mathrm{d}s + \|(u\varphi_{2R})\|_2 \leq C(t_0, \tau, R)
$$

根据勒　　引理 4.6 和4.7。接下来，再次使用 (4.16)，由杨氏不等式可得　　y

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathbb{R}^2} |\Delta (u\varphi_{8R})|^2 \, \mathrm{d}x \\
=& 2 \int_{\mathbb{R}^2} \Delta (u\varphi_{8R}) \Delta (\partial_t (u\varphi_{8R})) \, \mathrm{d}x \\
=& -2 \int_{\mathbb{R}^2} \nabla \Delta (u\varphi_{8R}) \cdot \nabla \left([\Delta (u\varphi_{8R}) + u(\Delta \varphi_{8R} + \nabla v \cdot \nabla \varphi_{8R}) - 2\nabla \cdot (u \nabla \varphi_{8R})] \right) \, \mathrm{d}x \\
\leq & -(2 - \varepsilon) \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \Delta (u\varphi_{8R})|^2 \, \mathrm{d}x + C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla (u \Delta \varphi_{8R})|^2 \, \mathrm{d}x + C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla (\nabla v \cdot \nabla \varphi_{8R})|^2 \, \mathrm{d}x \\
&+ C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \left(\nabla \cdot (u \nabla \varphi_{8R}) \right)|^2 \, \mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{4.21}
$$

（4.21）中的第二项由引理 4.7 和（4.18）估计为

$$
\begin{aligned}
C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla (u \Delta \varphi_{8R})|^2 \, \mathrm{d}x &\leq \frac{C_\varepsilon}{R^4} \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi_{8R} \nabla u|^2 \, \mathrm{d}x + \frac{C_\varepsilon}{R^6} \int_{\mathbb{R}^2} (u\varphi_{8R})^2 \, \mathrm{d}x \\
&\leq \frac{C_\varepsilon}{R^4} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla (u\varphi_{8R})|^2 \, \mathrm{d}x + \frac{C_\varepsilon}{R^6} \int_{\mathbb{R}^2} (u\varphi_{8R})^2 \, \mathrm{d}x \leq C(t_0, \tau, R)
\end{aligned}
$$

对 $t \in [t_0, \tau] \cap (0, T)$。按照与（4.20）相同的方法，

$$\begin{aligned} C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla(\nabla v \cdot \nabla \varphi_{8R})|^2 \,\mathrm{d}x &\leq \frac{C_\varepsilon}{R^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\Delta(v\varphi_{8R})|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{C_\varepsilon}{R^4} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 \varphi_{2R} \,\mathrm{d}x + \frac{C_\varepsilon}{R^6} \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|v(t)\|_2^2 \\ &\leq C_\varepsilon(t_0, \tau, R) \end{aligned}$$

当 $t \in [t_0, \tau] \cap (0, T)$时，对于（4.21）中的最后一项，类似的论证可得

$$\begin{aligned} C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \left(\nabla \cdot (u \nabla \varphi_{8R})\right)|^2 \,\mathrm{d}x &\leq \frac{C_\varepsilon}{R^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi_{8R} \nabla^2 u|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{C_\varepsilon}{R^4} \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi_{8R} \nabla u|^2 \,\mathrm{d}x \\ &\quad + \frac{C_\varepsilon}{R^6} \int_{\mathbb{R}^2} (u\varphi_{8R})^2 \,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{C_\varepsilon}{R^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\Delta(u\varphi_{8R})|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{C_\varepsilon}{R^4} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla(u\varphi_{8R})|^2 \,\mathrm{d}x \\ &\quad + \frac{C_\varepsilon}{R^6} \int_{\mathbb{R}^2} (u\varphi_{8R})^2 \,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{C_\varepsilon}{R^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\Delta(u\varphi_{8R})|^2 \,\mathrm{d}x + C(t_0, \tau, R) \end{aligned}$$

当 $t \in [t_0, \tau] \cap (0, T)$时，我们利用引理 4.7和（4.18）。因此，结合上述关于 $\varepsilon = 1$ 的计算，由（4.21）可知，格朗沃尔不等式意味着

$$\|\Delta(u\varphi_{8R})\|_2 \leq C(t_0, \tau, R).$$

由于

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \Delta(v\varphi_{8R})|^2 \,\mathrm{d}x \\ =& -2 \int_{\mathbb{R}^2} \Delta^2(v\varphi_{8R}) \Delta \left[\Delta(v\varphi_{8R}) - 2\nabla v \cdot \nabla \varphi_{8R} - v\Delta\varphi_{8R} - \lambda v \varphi_{8R} + u\varphi_{8R}\right] \,\mathrm{d}x \\ \leq& -\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \Delta(v\varphi_{8R})|^2 \,\mathrm{d}x + C \int_{\mathbb{R}^2} |\Delta(\nabla v \cdot \nabla \varphi_{8R})|^2 \,\mathrm{d}x + C \int_{\mathbb{R}^2} |\Delta(v\Delta\varphi_{8R})|^2 \,\mathrm{d}x \\ &+ C \int_{\mathbb{R}^2} |\Delta(v\varphi_{8R})|^2 \,\mathrm{d}x + C \int_{\mathbb{R}^2} |\Delta(u\varphi_{8R})|^2 \,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

通过与上述估计类似的方式，我们最终得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \Delta(v\varphi_{8R})|^2 \,\mathrm{d}x \leq \frac{C}{R^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \Delta(v\varphi_{8R})|^2 \,\mathrm{d}x + C(t_0, \tau, R)$$

对于 $t \in [t_0, \tau] \cap (0, T)$。因此，也得到了 $\nabla\Delta(v\varphi_{8R})$ 的 L^2-范数估计，即，

$$\|\nabla \Delta(v\varphi_{8R})\|_2 \leq C(t_0, \tau, R).$$

最后，我们来证明 $\nabla\Delta(u\varphi_{8R})$ 的 L^2-范数估计。通过上述类似论证，

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla\Delta(u\varphi_{8R})|^2\,\mathrm{d}x\\
=&-2\int_{\mathbb{R}^2}\Delta^2(u\varphi_{8R})\Delta\left([\Delta(u\varphi_{8R})+u(\Delta\varphi_{8R}+\nabla v\cdot\nabla\varphi_{8R})-2\nabla\cdot(u\nabla\varphi_{8R})]\right)\,\mathrm{d}x\\
\leq&-\int_{\mathbb{R}^2}|\Delta^2(u\varphi_{8R})|^2\,\mathrm{d}x+C\int_{\mathbb{R}^2}|\Delta(u\Delta\varphi_{8R})|^2\,\mathrm{d}x+C\int_{\mathbb{R}^2}|\Delta(\nabla v\cdot\nabla\varphi_{8R})|^2\,\mathrm{d}x\\
&+C\int_{\mathbb{R}^2}|\Delta\left(\nabla\cdot(u\nabla\varphi_{8R})\right)|^2\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

这意味着

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla\Delta(u\varphi_{8R})|^2\,\mathrm{d}x\leq\frac{C}{R^2}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla\Delta(u\varphi_{8R})|^2\,\mathrm{d}x+C(t_0,\tau,R)$$

对于 $t\in[t_0,\tau]\cap(0,T)$，因为我们已经证明所有适当的估计都是受控的。因此，我们得到本断言中的最终估计，即

$$\|\nabla\Delta(u\varphi_{8R})\|_2\leq C(t_0,\tau,R)$$

对于 $t\in[t_0,\tau]\cap(0,T)$，此即所求。 □

引理 4.10. 设 (u,v) 为 (1.1)的解。设 R 如引理 *4.7* 中所取，且 α 为满足 $1\leq|\alpha|\leq2$ 的多重指标。则对任意 $t_0,\tau>0$，其中 $t_0<\tau$，存在常数$C(t_0,\tau,R,\alpha)>0$使得

$$\|\partial_x^\alpha(u\varphi_{8R})\|_\infty\leq C(t_0,\tau,R,\alpha)$$

对于 $t\in[t_0,\tau]\cap(0,T)$。

引理的证明 4.10。我们只证明 L^∞-范数的估计，其中 $\nabla^2(u\varphi_{8R})$ 低阶导数估计可用类似方法得到。回顾 (4.17) 可知

$$\begin{aligned}
u\varphi_{8R}=&e^{(t-t_0)\Delta}((u\varphi_{8R})(t_0))\\
&+\int_{t_0}^t e^{(t-s)\Delta}\left[u(s)(\Delta\varphi_{8R}+\nabla v(s)\cdot\nabla\varphi_{8R})-2\nabla\cdot(u(s)\nabla\varphi_{8R})\right]\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}
\|\nabla^2(u\varphi_{8R})\|_\infty\leq&\|\nabla^2(u\varphi_{8R})(t_0)\|_\infty\\
&+\int_{t_0}^t\|\nabla^2e^{(t-s)\Delta}\left[u(s)(\Delta\varphi_{8R}+\nabla v(s)\cdot\nabla\varphi_{8R})-2\nabla\cdot(u(s)\nabla\varphi_{8R})\right]\|_\infty\,\mathrm{d}s\\
\leq&\|\nabla^2(u\varphi_{8R})(t_0)\|_\infty+C\int_{t_0}^t(t-s)^{-\frac{1}{2}}\|\nabla^2(u(s)\Delta\varphi_{8R})\|_2\,\mathrm{d}s\\
&+C\int_{t_0}^t(t-s)^{-\frac{1}{2}}\|\nabla^2(\nabla v(s)\cdot\nabla\varphi_{8R})\|_2\,\mathrm{d}s\\
&+C\int_{t_0}^t(t-s)^{-\frac{1}{2}}\|\nabla^2(\nabla\cdot(u(s)\nabla\varphi_{8R})\|_2\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

注意到 $|\nabla^k\varphi_{8R}|\leq C\varphi_{8R}/R^k$ $(k\in\mathbb{N})$ 和

$$\varphi_{8R}\nabla^2u=\nabla^2(u\varphi_{8R})-2(\nabla u)^T\nabla\varphi_{8R}-u\nabla^2\varphi_{8R}$$

由于 $\|\nabla^2(u\varphi_{8R})\|_2 = \|\Delta(u\varphi_{8R})\|_2$，我们看到

$$\begin{aligned}\|\nabla^2(u(s)\Delta\varphi_{8R})\|_2 \le& \frac{C}{R^2}\|\Delta(u\varphi_{8R})(s)\|_2 + \frac{C}{R^3}\|\nabla(u\varphi_{8R})(s)\|_2 + \frac{C}{R^4}\|(u\varphi_{8R})(s)\|_2\\ \le& C(t_0,\tau,R)\end{aligned}$$

对于 $s \in [t_0,\tau]\cap(0,\ T)$，根据引理 4.7和引理 4.9，因此 ，

$$C\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\frac{1}{2}}\|\nabla^2(u(s)\Delta\varphi_{8R})\|_2\,\mathrm{d}s \le\ C(t_0,\tau,R).$$

接下来，引理 4.9结合引理 2.3 也可推出

$$\begin{aligned}\|\nabla^2(\nabla v(s)\cdot\nabla\varphi_{8R})\|_2 \le& \frac{C}{R}\|\nabla\Delta(v\varphi_{8R})(s)\|_2\\ &+ \frac{C}{R^2}\|\Delta(v\varphi_{8R})(s)\|_2 + \frac{C}{R^3}\|\nabla(v\varphi_{8R})(s)\|_2 + \frac{C}{R^4}\|(v\varphi_{8R})(s)\|_2\\ \le& C(t_0,\tau,R)\end{aligned}$$

对于 $s \in [t_0,\tau]\cap(0,T)$，因此

$$C\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\frac{1}{2}}\|\nabla^2(\nabla v(s)\cdot\nabla\varphi_{8R})\|_2\,\mathrm{d}s \le\ C(t_0,\tau,R).$$

随后，用几乎相同的方法可由引理 4.7 和引理 4.9

$$\begin{aligned}\|\nabla^2(\nabla\cdot(u(s)\nabla\varphi_{8R})\|_2 \le& \frac{C}{R}\|\nabla\Delta(u\varphi_{8R})(s)\|_2 + \frac{C}{R^2}\|\Delta(u\varphi_{8R})(s)\|_2\\ &+ \frac{C}{R^3}\|\nabla(u\varphi_{8R})(s)\|_2 + \frac{C}{R^4}\|(u\varphi_{8R})(s)\|_2\\ \le& C(t_0,\tau,R)\end{aligned}$$

对于 $s \in [t_0,\tau]\cap(0,T)$，由此可得

$$C\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\frac{1}{2}}\|\nabla^2(\nabla\cdot(u(s)\nabla\varphi_{8R})\|_2\,\mathrm{d}s \le\ C(t_0,\tau,R).$$

综合上述结果，可得所需的估计，即

$$\|\nabla^2(u\varphi_{8R})\|_\infty \le\ C(t_0,\tau,R).$$

因此，该断言得证。 □

由于 $\partial_x^\alpha u\ (1\le\alpha\le 2)$ 在 $|x|\ge 16R$ 上的有界性（基于引理 4.10），由抛物正则性理论可知下述引理成立。

引理 4.11. 设 (u,v) 为 (1.1)的解。设 R 如引理 4.7中所取。则对所有 $t_0,\tau>0$（满足 $t_0<\tau$），存在 $x_0\in\mathbb{R}^2$ 满足 $|x_0|>16R$, $\varepsilon_0\in(0,1)$ 以及 $\delta>0$ 使得

$$u(t,x)\ge\delta,\ t\in[t_0,\tau]\cap(0,T),\ |x-x_0|\le\varepsilon_0.$$

证明见[28, 命题 3。12]由于论证基本相同，且所需估计已在前面的引理中得到，我们省略细节。若 $T<\infty$，则引理 4.11中的常数可对所有 $\tau<T$一致选取，因为（线性）第一方程（1.1）中 u在 $\{|x|>16R\}$ 上的系数 ∇v 和 Δv 有界于 $[t_0,T)$，其界决定了抛物正则性估计中的常数。

4.3. 内部区域中的正则性估计。本小节给出内部先验估计。对于 $R>0$，定义内部截断函数 ψ_R 如下

$$\psi_R \equiv 1-\varphi_{8R}, \tag{4.22}$$

其中 φ_{8R} 是 (4.8) 中定义的外部截断函数。在此情形下，我们注意到 supp $\psi_R \subset \{x;\ |x|\le 16R\}$。这里，我们引入如下截断李雅普诺夫泛函 $\mathcal{L}_R(t)$ 记作

$$\mathcal{L}_R(t) := \int_{\mathbb{R}^2} u(\ln u-1)\psi_R^2\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} uv\psi_R^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^2\psi_R^2\,\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^2} v^2\psi_R^2\,\mathrm{d}x.$$

泛函 $\mathcal{L}_R(t)$ 满足以下恒等式。

引理 4.12。 设 (u,v) 是方程 (1.1)的解。那么，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L}_R(t)&+\int_{\mathbb{R}^2} u|\nabla(\ln u-v)|^2\psi_R^2\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}|\partial_t v|^2\psi_R^2\,\mathrm{d}x\\ &=-\int_{\mathbb{R}^2} u(\ln u-v)\nabla(\ln u-v)\cdot\nabla\psi_R^2\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^2}\partial_t v\nabla v\cdot\nabla\psi_R^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

引理 4.12 中 $\psi_R\equiv 1$ 成立已是众所周知的；泛函 $\mathcal{L}(t)$ 是 (1.1) 的通常李雅普诺夫泛函，因此这里给出简要证明，参见 (4.1)。

引理 4.12 的证明。 由 (1.1) 中的第一个方程，通过分部积分可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\mathbb{R}^2} u(\ln u-1)\psi_R^2\,\mathrm{d}x\right)&=\int_{\mathbb{R}^2}\partial_t u\ln u\psi_R^2\,\mathrm{d}x\\ &=-\int_{\mathbb{R}^2} u|\nabla\ln u|^2\psi_R^2\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^2} u\ln u\nabla\ln u\cdot\nabla\psi_R^2\,\mathrm{d}x\\ &\quad+\int_{\mathbb{R}^2} u\nabla\ln u\cdot\nabla v\psi_R^2\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2} u\ln u\nabla v\cdot\nabla\psi_R^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

接下来，利用（1.1）中的第一和第二个方程，我们得到

$$\begin{aligned}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^2} uv\psi_R^2\,\mathrm{d}x&=\int_{\mathbb{R}^2} u\nabla\ln u\cdot\nabla v\psi_R^2\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2} uv\nabla\ln u\cdot\nabla\psi_R^2\,\mathrm{d}x\\ &\quad-\int_{\mathbb{R}^2} u|\nabla v|^2\psi_R^2\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^2} uv\nabla v\cdot\nabla\psi_R^2\,\mathrm{d}x\\ &\quad-\int_{\mathbb{R}^2}|\partial_t v|^2\psi_R^2\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^2\psi_R^2\,\mathrm{d}x\\ &\quad-\int_{\mathbb{R}^2}\partial_t v\nabla v\cdot\nabla\psi_R^2\,\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^2} v^2\psi_R^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因此，结合上述两个恒等式可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L}_R(t)&+\int_{\mathbb{R}^2} u|\nabla(\ln u-v)|^2\psi_R^2\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}|\partial_t v|^2\psi_R^2\,\mathrm{d}x\\ &=-\int_{\mathbb{R}^2} u(\ln u-v)\nabla(\ln u-v)\cdot\nabla\psi_R^2\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^2}\partial_t v\nabla v\cdot\nabla\psi_R^2\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由此得证。 ❑

引理 4.13。 假设满足定理*1.1*中的条件。取 R 如引理 *4.7*中所述。则对于任意 t_0， $\tau > 0$ 满足 $t_0 < \tau$，存在一个常数 $C(t_0, \tau, R) > 0$ 使得

$$\mathcal{L}_R(t) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^2} u|\nabla(\ln u - v)|^2\psi_R^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_t v|^2\psi_R^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}s \le \mathcal{L}_R(t_0) + C(t_0, \tau, R)$$

对于 $t \in [t_0, \tau] \cap (0, T)$。

Pro引理 4.13 中的结论。 回顾引理 4.12 中的结论，即

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L}_R(t) + \int_{\mathbb{R}^2} u|\nabla(\ln u - v)|^2\psi_R^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_t v|^2\psi_R^2 \,\mathrm{d}x \\ = -\int_{\mathbb{R}^2} u(\ln u - v)\nabla(\ln u - v)\cdot\nabla\psi_R^2 \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t v\nabla v\cdot\nabla\psi_R^2 \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

注意，根据 $\nabla\psi_R^2 = 2\psi_R\nabla\varphi_{8R}$ 的定义， ψ_R 在（4.22）中。一方面，由杨氏不等式

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^2} u(\ln u - v)\nabla(\ln u - v)\cdot\nabla\psi_R^2 \,\mathrm{d}x\right| &\le \frac{C}{R}\int_{\mathbb{R}^2} u|\ln u - v||\nabla(\ln u - v)|\psi_R\varphi_{8R} \,\mathrm{d}x \\ &\le \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} u|\nabla(\ln u - v)|^2\psi_R^2 \,\mathrm{d}x \\ &\quad + \frac{C}{R^2}\int_{\mathbb{R}^2} u(\ln u - v)^2\varphi_{8R}^2 \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

得益于小节 4.2 中的外部估计，最后一项有界，即

$$\frac{C}{R^2}\int_{\mathbb{R}^2} u(\ln u - v)^2\varphi_{8R}^2 \,\mathrm{d}x \le C(t_0, \tau, R)$$

对于 $t \in [t_0, \tau] \cap (0, T)$。另一方面，

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^2} \partial_t v\nabla v\cdot\nabla\psi_R^2 \,\mathrm{d}x\right| &\le \frac{C}{R}\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_t v||\nabla v|\psi_R\varphi_{8R} \,\mathrm{d}x \\ &\le \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_t v|^2\psi_R^2 \,\mathrm{d}x + \frac{C}{R^2}\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2\varphi_{8R}^2 \,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其第二 项同样由外部估计所控制。因此，我们观察到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L}_R(t) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} u|\nabla(\ln u - v)|^2\psi_R^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_t v|^2\psi_R^2 \,\mathrm{d}x \le C(t_0, \tau, R)$$

对于 $t \in [t_0, \tau] \cap (0, T)$。最后，在 (t_0, t) 上对此积分，即得所需不等式。 □

We a便能够证明 u 的熵的内部先验估计 .

命题 4.14. 设假设如同定理 *1.1*。令 R 如引理 *4.7* 中所取。则对任意 t_0， $\tau > 0$ 满足 $t_0 < \tau$，存在常数 $C(t_0, \tau, R) > 0$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}^2} (u\ln u)\psi_R^2 \,\mathrm{d}x \le C(t_0, \tau, R)$$

对于 $t \in [t_0, \tau] \cap (0, T)$。

命题的证明4.14。证明与命题4.3的证明类似。回顾不等式（4.6）：

$$\int_D gh \,\mathrm{d}x \le \int_D g\log g \,\mathrm{d}x + M\log\left(\int_D e^h \,\mathrm{d}x\right) - M\log M, \quad M := \int_D g \,\mathrm{d}x,$$

其中 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是一个有界区域。由于 supp $\psi_R \subset \{x; |x| \le 16R\}$，因此有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} uv\psi_R^2 \,\mathrm{d}x &= \int_{|x|\le 16R} (u\psi_R)(v\psi_R)\,\mathrm{d}x \\ &\le (1-\alpha)\int_{|x|\le 16R} (u\psi_R)\ln(u\psi_R)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + (1-\alpha)\left(\int_{|x|\le 16R} u\psi_R\,\mathrm{d}x\right)\ln\left(\int_{|x|\le 16R}\exp\left[\frac{(v\psi_R)}{1-\alpha}\right]\,\mathrm{d}x\right) \\ &\quad - (1-\alpha)\left(\int_{|x|\le 16R} u\psi_R\,\mathrm{d}x\right)\ln\left(\int_{|x|\le 16R} u\psi_R\,\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

对任意 $\alpha \in (0,1)$。这里，注意到 $(v\psi_R) \in H_0^1(\{|x| \le 16R\})$，我们意识到可以应用引理 4.4 中陈述的 Trudinger–Moser 型不等式，因此

$$\begin{aligned}\int_{|x|\le 16R}\exp\left[\frac{(v\psi_R)}{1-\alpha}\right]\,\mathrm{d}x &\le C_{TM}|B_{16R}(0)|\exp\left(\frac{1}{16\pi(1-\alpha)^2}\|\nabla(v\psi_R)\|_2^2\right) \\ &\le C_{TM}|B_{16R}(0)|\exp\left(\frac{1}{16\pi(1-\alpha)^2}\||\nabla v|\psi_R\|_2^2 + \frac{C}{R^2(1-\alpha)^2}\|v\|_2^2\right).\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^2} uv\psi_R^2\,\mathrm{d}x \\ &\le (1-\alpha)\int_{|x|\le 16R}(u\psi_R)\ln(u\psi_R)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{16\pi(1-\alpha)}\left(\int_{|x|\le 16R} u\psi_R\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{|x|\le 16R}|\nabla v|^2\psi_R^2\,\mathrm{d}x\right) \\ &\quad + \frac{C\|u_0\|_1}{R^2(1-\alpha)}\left(\sup_{0\le t\le\tau}\|v(t)\|_2\right)^2 + (1-\alpha)\|u_0\|_1\ln(C_{TM}|B_{16R}|) + \frac{1}{e} \\ &\le (1-\alpha)\int_{|x|\le 16R}(u\psi_R)\ln(u\psi_R)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \frac{1}{16\pi(1-\alpha)}\left(\int_{|x|\le 16R} u\psi_R\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^2\psi_R^2\,\mathrm{d}x\right) + C(R,\tau,\alpha).\end{aligned}$$

特别地，由 u的外部估计

$$\begin{aligned}\int_{|x|\le 16R}(u\psi_R)\ln(u\psi_R)\,\mathrm{d}x &= \int_{|x|\le 16R}(u\ln u)\psi_R\,\mathrm{d}x + \int_{|x|\le 16R} u(\psi_R\ln\psi_R)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{|x|\le 16R}(u\ln u)\psi_R^2\,\mathrm{d}x + \int_{8R\le|x|\le 16R}(u\ln u)\psi_R(1-\psi_R)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{|x|\le 16R} u(\psi_R\ln\psi_R)\,\mathrm{d}x \\ &\le \int_{\mathbb{R}^2}(u\ln u)\psi_R^2\,\mathrm{d}x + C(t_0,\tau,R) + \|u_0\|_1.\end{aligned}$$

此外，引理 4.11与质量转换一起意味着

$$\begin{aligned}\int_{|x|\le 16R} u\psi_R\,\mathrm{d}x &\le \int_{\mathbb{R}^2} u\,\mathrm{d}x - \int_{|x|>16R} u\,\mathrm{d}x\\ &\le \int_{\mathbb{R}^2} u_0\,\mathrm{d}x - \int_{|x-x_0|\le\varepsilon_0} u\,\mathrm{d}x\\ &\le 8\pi - \delta|B_{\varepsilon_0}(x_0)|\end{aligned}$$

对某些 $\delta>0$ 和 $\varepsilon_0>0$成立。因此，

$$\int_{\mathbb{R}^2} uv\psi_R^2\,\mathrm{d}x \le (1-\alpha)\int_{\mathbb{R}^2}(u\ln u)\psi_R^2\,\mathrm{d}x + \frac{8\pi-\delta|B_{\varepsilon_0}(x_0)|}{16\pi(1-\alpha)}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^2\psi_R^2\,\mathrm{d}x + C(R,\tau,\alpha)$$

对于 $t\in[t_0,\tau]\cap(0,T)$，由引理 4.13可知

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}(u\ln u)\psi_R^2\,\mathrm{d}x &= \mathcal{L}_R(t) + \int_{\mathbb{R}^2} uv\psi_R^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^2\psi_R^2\,\mathrm{d}x - \frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^2} v^2\psi_R^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^2} u\psi_R^2\,\mathrm{d}x\\ &\le \mathcal{L}_R(t_0) + C(t_0,\tau,R,\alpha) + (1-\alpha)\int_{\mathbb{R}^2}(u\ln u)\psi_R^2\,\mathrm{d}x\\ &\quad - \frac{1}{2}\left[1-\frac{8\pi-\delta|B_{\varepsilon_0}(x_0)|}{8\pi(1-\alpha)}\right]\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^2\psi_R^2\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

从而

$$\alpha\int_{\mathbb{R}^2}(u\ln u)\psi_R^2\,\mathrm{d}x \le -\frac{1}{2}\left[1-\frac{8\pi-\delta|B_{\varepsilon_0}(x_0)|}{8\pi(1-\alpha)}\right]\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^2\psi_R^2\,\mathrm{d}x + C(t_0,\tau,R,\alpha)$$

对于任意 $\alpha\in(0,1)$。取充分小的 $\alpha>0$，使得

$$1-\frac{8\pi-\delta|B_{\varepsilon_0}(x_0)|}{8\pi(1-\alpha)}>0$$

得到熵的先验估计

$$\int_{\mathbb{R}^2}(u\ln u)\psi_R^2\,\mathrm{d}x \le C(t_0,\tau,R)$$

对于 $t\in[t_0,\tau]\cap(0,T)$。因此，我们得出证明。 □

4.4. **解的整体存在性**。 在本小节中，我们最终给出定理 1.1 的证明。为此，我们收集内部区域和外部区域中的先验估计。

定理 1.1 的证明。 令 R 如引理 4.7 中所取。根据引理 4.6,

$$\int_{|x|>2R}(1+u)\ln(1+u)\,\mathrm{d}x \le C(t_0,\tau,R).$$

另一方面，引理 4.14 给出

$$\int_{\mathbb{R}^2}(u\ln u)\psi_R^2\,\mathrm{d}x \le C(t_0,\tau,R)$$

对于 $t\in[t_0,\tau]\cap(0,T)$。现在，根据 [28,引理 2。3],

$$\int_\Omega(1+u)\ln(1+u)\,\mathrm{d}x \le 2\int_\Omega u|\ln u|\,\mathrm{d}x + (2\ln 2)\int_\Omega u\,\mathrm{d}x,$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个可测集，因此由于 supp $\psi_R \subset \{x;\ |x| \le 16R\}$

$$\begin{aligned}\int_{|x|<8R}(1+u)\ln(1+u)\,\mathrm{d}x &\le 2\int_{|x|<8R}u|\ln u|\,\mathrm{d}x + (2\ln 2)\|u_0\|_1\\ &\le 2\int_{\mathbb{R}^2}u|\ln u|\psi_R^2\,\mathrm{d}x + (2\ln 2)\|u_0\|_1\\ &= 2\int_{\mathbb{R}^2}(u\ln u)\psi_R^2\,\mathrm{d}x - 4\int_{\mathbb{R}^2}(u\ln u)_-\psi_R^2\,\mathrm{d}x + (2\ln 2)\|u_0\|_1\\ &\le C(t_0,\tau,R) + \frac{4}{e}|B_{16R}(0)|\end{aligned}$$

对于 $t \in [t_0,\tau]\cap(0,T)$，其中我们对 $x \ge 0$ 使用 $x\ln x \ge -1/e$。这意味着

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^2}(1+u)\ln(1+u)\,\mathrm{d}x\\ =&\int_{|x|>2R}(1+u)\ln(1+u)\,\mathrm{d}x + \int_{|x|\le 2R}(1+u)\ln(1+u)\,\mathrm{d}x\\ \le&\int_{|x|>2R}(1+u)\ln(1+u)\,\mathrm{d}x + \int_{|x|<8R}(1+u)\ln(1+u)\,\mathrm{d}x\\ \le& C(t_0,\tau,R)\end{aligned}$$

对于 $t \in [t_0,\tau]\cap(0,\ T)$。因此，结合命题 4.3

$$\int_{\mathbb{R}^2}(1+u)\ln(1+u)\,\mathrm{d}x + \int_{t_0}^{t}\|\partial_t v\|_2^2\,\mathrm{d}s \le C(t_0,\tau,R) \tag{4.23}$$

对于 $t \in [t_0,\tau]\cap(0,\ T)$。通过抛物正则性论证，根据（4.23）（参见 [21, 30]），我们得到 -界在 u 于 $[t_0,\tau]\cap(0,\ T)$ 上的一致性，从而得到进一步的正则性估计。特别地，解 (u, v) 不会在有限时间内爆破。因此，方程（1.1）的解在整体时间上存在。 □

致谢。 作者获得 JSPS 青年科学家计划资助，资助编号为 25K17274，并获得 JSPS 研究员计划资助，资助编号为 25KJ0279。作者还获得法国政府“法国卓越日本奖学金 2025”项目的资助。

数据可用性。 本文没有相关数据。

利益冲突。 作者声明不存在利益冲突。

参考文献

[1] P. Biler，趋化建模中某些抛物型系统的局部与整体可解性，Adv. Math. Sci. Appl. **8** (1998)，第2期，715–743页。[2] P. Biler，L. Corrias 和 J. Dolbeault，趋化的抛物-抛物型 Keller-Segel 模型的大质量自相似解，J. Math. Biol. **63** (2011)，第1期，1–32页。[3] P. Biler，G. Karch，Ph. Laurençot 和 T. Nadzieja，圆盘中趋化模型的径向对称解的 8π问题，Topol. Methods Nonlinear Anal. **27** (2006)，第1期，133–147页。[4] P. Biler，G. Karch，Ph. Laurençot 和 T. Nadzieja，平面中趋化模型的径向对称解的 8π问题，Math. Methods Appl. Sci. **29** (2006)，第13期，1563–1583页。[5] P. Biler 和 T. Nadzieja，粒子引力相互作用模型解的存在性与不存在性。I，Colloq. Math. **66** (1994)，第2期，319–334页。

[6] A. Blanchet，E. A. Carlen 和 J. A. Carrillo，临界质量 Patlak-Keller-Segel模型的泛函不等式、厚尾与渐近行为，J. Funct. Anal. 262 (2012)，第5期，2142–2230页。[7] A. Blanchet，J. A. Carrillo 和 N. Masmoudi， $\mathbb{R}^2$中临界 Patlak-Keller-Segel模型的无限时间聚集，Comm. Pure Appl. Math. 61 (2008)，第10期，1449–1481页。[8] A. Blanchet，J. Dolbeault 和 B. Perthame，二维 Keller-Segel模型：最优临界质量与解的定性性质，Electron. J. Differential Equations 2006，第44号，32页。[9] V. Calvez 和 L. Corrias， $\mathbb{R}^2$中的抛物-抛物型 Keller-Segel 模型，Commun. Math. Sci. 6 (2008)，第2期，417–447页。[10] J. Dolbeault 和 B. Perthame， $\mathbb{R}^2$中二维 Keller-Segel模型的最优临界质量，C. R. Math. Acad. Sci. Paris 339 (2004)，第9期，611–616页。[11] H. Gajewski 和 K. Zacharias，趋化建模反应-扩散系统的整体行为，Math. Nachr. 195 (1998)，77–114页。[12] M.-H. Giga，Y. Giga 和 J. Saal，非线性偏微分方程，非线性微分方程及其应用进展丛书，第79卷，Birkhäuser Boston，Boston，MA，2010。[13] M. Á. Herrero 和 J. J. L. Velázquez，趋化模型的一种爆破解析机制，Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 24 (1997)，第4期，633–683页。[14] D. Horstmann 和 G. Wang，无对称性假设的趋化模型中的爆破，European J. Appl. Math. 12 (2001)，第2期，159–177页。[15] W. Jäger 和 S. Luckhaus，趋化偏微分方程组解的爆破，Trans. Amer. Math. Soc. 329 (1992)，第2期，819–824页。[16] E. F. Keller 和 L. A. Segel，将黏菌聚集的启动视为一种不稳定性，J. Theoret. Biol. 26 (1970)，第3期，399–415页。[17] H. Kozono 和 Y. Sugiyama，二维 Keller-Segel 系统中解的局部存在性与有限时爆破，J. Evol. Equ. 8 (2008)，第2期，353–378页。[18] M. Kurokiba 和 T. Ogawa，漂移-扩散型非线性抛物型方程解的有限时爆破，Differential Integral Equations 16 (2003)，第4期，427–452页。[19] J. López-Gómez，T. Nagai 和 T. Yamada，具有临界质量的 $\mathbb{R}^2$ 中趋化模型稳态的吸引域，Arch. Ration. Mech. Anal. 207 (2013)，第1期，159–184页。[20] J. López-Gómez，T. Nagai 和 T. Yamada，具有临界质量的 $\mathbb{R}^2$ 中趋化模型的非平凡 ω极限集与振荡解，J. Funct. Anal. 266 (2014)，第6期，3455–3507页。[21] N. Mizoguchi，平面上抛物-抛物型 Keller–Segel 系统柯西问题的整体存在性，Calc. Var. Partial Differential Equations 48 (2013)，491–505页。[22] N. Mizoguchi，抛物-抛物型趋化系统柯西问题的有限时爆破，J. Math. Pures Appl. (9) 136 (2020)，203–238页。[23] N. Mizoguchi，抛物-抛物型 Keller-Segel 系统有限时爆破的初始能量判据，SIAM J. Math. Anal. 52 (2020)，第 6 期，5840–5864 页。[24] T. Nagai，趋化系统径向对称解的爆破，Adv. Math. Sci. Appl. 5 (1995)，第2期，581–601页。[25] T. Nagai，二维区域中建模趋化的抛物-椭圆型系统非径向解的爆破，J. Inequal. Appl. 6 (2001)，第1期，37–55页。[26] T. Nagai， $\mathbb{R}^2$中漂移-扩散型抛物-椭圆型系统解的整体存在性与衰减估计，Differential Integral Equations 24 (2011)，第1–2期，29–68页。[27] T. Nagai 和 T. Ogawa，Brezis-Merle不等式及其在 Keller-Segel 系统柯西问题解的整体存在性中的应用，Commun. Contemp. Math. 13 (2011)，第5期，795–812页。[28] T. Nagai 和 T. Ogawa，R^2, 中漂移-扩散型抛物-椭圆型系统解的整体存在性，Funkcial. Ekvac. 59 (2016)，第1期，67–112页。[29] T. Nagai，T. Senba 和 T. Suzuki，数学生物学抛物型系统中的趋化性塌缩，Hiroshima Math. J. 30 (2000)，第3期，463–497页。[30] T. Nagai，T. Senba 和 K. Yoshida，Trudinger-Moser不等式在趋化抛物型系统中的应用，Funkcial. Ekvac. 40 (1997)，第3期，411–433页。[31] T. Nagai 和 T. Yamada，临界质量吸引占优情形下二维吸引-排斥趋化系统解的整体存在性，Nonlinear Anal. 190 (2020)，111615，25页。[32] Y. Naito 和 T. Senba，二维空间中抛物-椭圆型系统的有界与无界振荡解，Commun. Pure Appl. Anal. 12 (2013)，第5期，1861–1880页。

[33] C. S. Patlak，具有持续性和外部偏置的随机游走，《数学生物物理学通报》**15** (1953), 311–338。[34] D. Y. Wei，二维 Patlak-Keller-Segel 方程的整体适定性与爆破，《泛函分析杂志》**274** (2018), 第 2 期，388–401。[35] Weissler, F. B.，半线性抛物型方程的局部存在性与非存在性，见 L^p，《印第安纳大学数学杂志》**29** (1980), 79–102。[36] G. Wolansky，摩擦与涨落作用下自吸引簇的稳态分布，《理性力学与分析档案》**119** (1992), 第 4 期，355–391。

大阪公立大学大阪中央高级数学研究所，日本大阪 558-8585；萨瓦勃朗峰大学数学实验室（LAMA）UMR 5127，法国尚贝里 F–73000电子邮箱：tatsuya.hosono@omu.ac.jp