arXiv:2602.03774v1 [math.CO] 3 Feb 2026

随机图的单色子图最小数量

BY YATIN DANDI[a] AND DAVID GAMARNIK[b] AND HAODONG ZHU[c]

洛桑联邦理工学院（*EPFL*）计算统计物理实验室，a*yatin.dandi@epfl.ch*

麻省理工学院剑桥校区运筹学中心和斯隆管理学院，b*gamarnik@mit.edu*

埃因霍温理工大学数学与计算机科学系，c*h.zhu1@tue.nl*

我们研究这样一个问题：当宿主图的每个节点被赋予两种颜色中的一种时，如何使随机图中的单色子图数量最小化。利用最近发现的随机图中严格平衡子图出现与随机超图之间的相邻性，其中随机超图的副本是独立生成的，我们证明了，当 F 的期望副本数与节点数 $|V|$ 呈线性关系时，最小值收敛于一个极限。此外，利用其与平均场自旋玻璃模型之间的联系，我们获得了该极限的渐近表达式，该表达式适用于 F 的归一化期望副本数和 F 的大小均趋于无穷大的情形。

1. 引言。图的二分划分中的单色子图研究，是极值组合学和拉姆齐理论中一个受到广泛研究的问题。古德曼 [8] 的一项经典结果指出，在完全图 K_n的任意二分划分中，单色三角形的数量都有一个紧确的下界

$$T(n)=\begin{cases}\dfrac{u(u-1)(u-2)}{3}, & \text{if } n=2u;\\ \dfrac{2u(u-1)(4u+1)}{3}, & \text{if } n=4u+1;\\ \dfrac{2u(u+1)(4u-1)}{3}, & \text{if } n=4u+3.\end{cases}$$

尽管这些确定性情形已受到广泛关注，并得出了一些引人入胜的结果，但在随机图（如 Erd˝os–Rényi 随机图）背景下，同一问题仍远未得到充分理解，即便是三角形这一特殊情形也是如此。本文研究如何求出随机图的二分划分中单色子图数量的最小值。我们在一个一般框架下开展研究，其中只要求子图是严格平衡的。

首先，设 F 是一个具有 r 个顶点的图。F-图 H 定义为任意一对（$V=V$（H） $E=E$（H））， 其中 V是一个顶点集， E 是由 e 个 F的副本组成的集合，称为超边；对于每个 e， e 的顶点集都是 V的子集。随机 F-图$\mathbb{H}_F$（n， q）是顶点集为 $V=[n]=\{1,2,\dots,n\}$的 F-图，其中每个

$$\binom{n}{r}\cdot\frac{r!}{\mathrm{aut}(F)} \tag{1.1}$$

在 $[n]$ 的顶点上， F 的潜在副本中的边 E 以概率 q 独立地包含在边集中。这里，自同构（H）表示图 H 的自同构集合。在特殊

关键词和短语：随机图、单色子图、严格 1-平衡图。

情况下，当 F 是 K_2（两个由一条边连接的节点）时，我们使用更常见的记法 $\mathbb{G}(n,\ q)$。

给定一个简单图 $G=(V,E)$（因此 F 就是 K_2），并给定其二分划分 $V=V_1\cup V_2, V_1\cap V_2=\emptyset$，与该二分划分相关的割，更具体地说是一个 F-割，定义为 G 的子图 e 的集合，这些子图与 F 同构，且其顶点集与 V_1 和 V_2 均有非空交集。也就是说，割中的每条超边既不完全包含于 V_1，也不完全包含于 V_2。与一个割相关的割值定义为该集合的基数。最大割值记为 $\mathsf{MaxC}(G,F)$，定义为对 V 的所有可能二分划分取上述值所得的最大值。将 V_1 和 V_2 视为对应两种不同颜色，则与该二分划分相关的割，就是在着色方案 V_1,V_2 下，G 中所有与 F 同构的非单色子图组成的集合。反过来，根据定义，G 中所有未参与割的 F-子图都是单色的。单色 F-子图的最小数量记为 $\mathsf{MinM}(G,F)$。自然地，$\mathsf{MinM}(G,F)+\mathsf{MaxC}(G,F)$ 等于 G 中 F- 子图的总数，因为对于每个二分划分，情况都是如此。

在组合优化和理论计算机科学领域，人们长期以来一直关注这样一个问题：通过改变图的整体二分划分，能够达到的单色子图最小数量是多少；这既包括与 $F=K_2$相关的最大割值这一特殊情形，也包括更一般的情形 [3, 4, 7, 9, 11]。这正是我们在本文中探讨的问题。

设 F 为一个图。若对于 F 的任意子图 F'，只要满足 $F'\neq F$，就有 $\mathrm{d}_1(F')<\mathrm{d}(F)$，则称 F 为严格 1-平衡图。这里

$$\mathrm{d}_1(G)=\frac{|E(G)|}{|V(G)|-1}.$$

严格 1-平衡图有许多例子，包括圈和完全图。然而，任何非连通图都不是严格 1-平衡图，树图也不是。

最近，人们在理解 $\mathbb{G}(n,p)$ 与 $\mathbb{H}_F(n,q)$ 之间的关系方面取得了重大进展，其中 q 被谨慎地选为 $q=p^{|E(F)|}$。具体而言，如 [2] 所示（见下文命题 2.3），当 p 至多为 $n^{-1/d_1(F)}$ 时，可以对图 $\mathbb{G}(n,p)$ 和 $\mathbb{H}(n,q)$ 进行耦合，使得 $\mathbb{H}$ 中 F-超边的数量几乎与 $\mathbb{G}(n,p)$ 中自然出现的 F 副本数量相匹配。因此，研究 $\mathbb{G}(n,p)$ 中单色 F-子图最小数量这一困难问题，可以化简为一个更简单的问题：在 $\mathbb{H}$ 上研究该问题，其中 F-s 的出现按设计彼此独立。我们利用这一洞见，得到了 $\mathbb{G}(n,p)$ 中一般图 F 的最大割值的一些渐近结果。

我们的第一个结果如下。

定理 1.1. 设 F 是一个具有 $s>0$ 条边、$r\geq 2$ 个顶点的严格 *1*-平衡图。给定 $c>0$，令 $p=cn^{-1/\mathrm{d}_1(F)}$ 和 $q=p^s=c^sn^{1-r}$。存在一个常数 $m(F,\ c)$ 使得

$$\frac{\mathrm{MinM}(\mathbb{G}(n,p),F)}{n}\to m(F,c),$$

当 $n\to\infty$ 时，以高概率成立。

我们的证明方法基于文献中已知的连续模型 $\mathbb{H}(n,\ q)$ $q=p^s$的类似结果。具体而言，存在 $m(F,\ c)$ 使得

$$\frac{\mathrm{MinM}(\mathbb{H}(n,q),F)}{n}\to m(F,c),$$

已基于 [11]中引入的组合插值技术得到证明，并用于确立此类极限的存在性。基于类似的相邻性理由，我们还有：当 c 是充分小的正数常量 c 时， $m(F,\ c) = 0$；当 c 足够大时， $m(F,\ c) > 0$。前一个结论可通过将 c 取得足够小来得到，从而随机图 $\mathbb{H}(n,\ q)$ 不含巨型连通分量。在这种情况下，图的局部树状结构使得几乎每条 F-边都可以被割掉。反之，当 c 足够大时，利用简单的并合界即可推出近完美二分不存在。我们认为这些观察属于常识，因此不再对这些结论作正式验证。

我们猜想，数值 $\mathrm{MinM}(\mathbb{G}(n,\ p)\ F)n$ 也会经历另一种类型的相变。具体而言，我们猜想存在一个 c^*，它仅依赖于 F，使得当 $c < c^*$时，随着 $n \to \infty$，该数值以高概率为 0；而当 $c > c^*$ 时，该数值也以高概率为正。此猜想的依据是关于随机 K-SAT（以及若干其他相关模型，例如随机图的正常着色）的类似猜想。该猜想已在 K [5] 较大时得到证明，但对一般的 K 仍未解决。

我们的下一个结果关注于当宿主图 F 的规模增大时，如何获得明确的渐近极限值。引入一个简写记号

$$\kappa(F, c, s, r) = \frac{c^s}{2^{r-1}\mathrm{aut}(F)}.$$

定理 1.2. 在定理 *1.1*的假设下，

$$m(F, c) = \kappa(F, c, s, r) + (1 + o_r(1))\sqrt{(2\log 2)\kappa(F, c, s, r)} + o_c(c^{s/2}).$$

也就是说，当宿主图的节点数F和随机图参数的首项系数 c 都趋于无穷时，我们可以得到明确的极限值。证明思路借鉴了近期在 [6]，中采用的针对 p 自旋玻璃模型的大-p 近似技术，并将这些结果推广到稀疏随机图，正如 [4] 和 [9] 中所做的那样。后两项工作利用林德伯格插值法，将 p 自旋模型与稀疏图联系起来。与此不同，我们采用 [6] 中用于均值场 p 自旋模型的二阶矩方法，直接推导稀疏图的相关渐近行为。

组织结构。 本文其余部分组织如下。在第2节，我们引入随机 F图与Erd˝os–Rényi 随机图之间的耦合，并证明定理1.1。在第3节，我们将对 $m(F,\ p)$ 的研究归结为一族高斯随机变量最大值的分析。第4 节提供推导该最大值所需的辅助结果。最后，我们证明定理1.2 于第5节。

2. 极限存在性。 在本节中，我们证明定理1.1。为了计数一个图中特定子图的数目，我们引入有序副本的概念如下：

定义 2.1（有序副本）。 设 F是一个图，其顶点集为 $V(F) = \{f_1, \ldots, f_r\}$。对任意顶点元组$(v_1,\ \ldots,\ v_r)$，我们将有序副本 $F(v_1,\ \ldots,\ v_r)$ 定义为顶点集 $\{v_1, \ldots, v_r\}$上的一个图，其中对所有 $i,\ j \in [r]$，当且仅当 F中 f_i 与 f_j 之间存在一条边时，在 v_i与v_j之间放置一条边。

我们强调，即使元组 $(v_1, \ldots, v_r)$ 和 $(v'_1, \ldots, v'_r)$ 不同， $F(v_1, \ldots, v_r)$ 和 $F(v'_1, \ldots, v'_r)$ 仍可能同构，在这种情况下我们不区分它们。特别是在子图计数中，这些副本只计数一次。

举个例子。

例 2.2。 考虑下面的图 G 和 F：

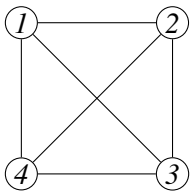
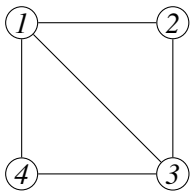


图 G



子图 F

图 G 恰好包含 F 的两个有序副本，因为 $F(1，2，3，4)$ 在交换 1 和3的位置，或交换2和4的位置后保持不变，而 $F(1，2，3，4)$和 $F(2，3，4，1)$ 则代表 G 中不同的有序副本。

以下关键结果来自 [2]，有助于我们理解严格 1-平衡图 F 在 $\mathbb{G}（n，p）$中的有序副本，并建立其与随机F-图 $\mathbb{H}_F（n，q）$中超边的联系：

命题 *2.3*（[2, 定理 *1.6*]）。设 F 是一个在 $r \geq 2$ 个顶点上具有 $s>0$条边的严格 *1*-平衡图。存在常数 δ、$\varepsilon>0$，使得下述结论成立。固定任意两个满足 $p \leq n^{-1/m_1(F)+\varepsilon}$ 和 $q \leq (1-n^{-\delta})p^s$的序列 p、q。当 $n \to \infty$时，以高概率存在一个置换 $\tau：[n] \to [n]$，使得对每一个 $F(v_1, \ldots, v_r) \in E(\mathbb{H}_F(n,q))$，也有 $F(\tau(v_1) \ldots, \tau(v_r)) \subset \mathbb{G}(n,p)$。

在上述情形中，$A \subset B$ 表示 A 是 B 的子图（不一定是诱导子图）。定理2.3 意味着，若我们选取 $q=(1-n^{-\delta})p^s$，则 $\mathbb{H}_F(n,q)$ 中的每条 F-超边都对应于 $\mathbb{G}(n,p)$中的一个 F 有序副本。若改为选取 $q=p^s$，那么一方面，$\mathbb{H}_F(n,q)$ 中的 F-超边数量不会增加太多；另一方面，它接近于 $\mathbb{G}(n,p)$中 F 有序副本的期望数量。特别地，我们提出如下结论。

推论 *2.4.* 设 F 是一个严格 *1*-平衡图，具有 $r \geq 2$ 个顶点上的 $s>0$ 条边。固定 $c>0$，并令 $p=cn^{-1/m_1(F)}$，$q=p^s=c^s n^{1-r}$。当 $n \to \infty$时，以高概率存在一个置换 $\tau：[n] \to [n]$，使得满足以下条件的不同的有序副本 $F(v_1, \ldots, v_r)$的数量为 $o(n)$：事件 $F(v_1, \ldots, v_r) \in E(\mathbb{H}_F(n,q))$与 $F(\tau(v_1) \ldots, \tau(v_r)) \subset \mathbb{G}(n,p)$中恰有一个成立。

证明关键地利用了这样一个事实：对于严格 1-平衡图，当 $p=O(n^{-1/m_1(F)})$ 时，F在 $\mathbb{G}(n,p)$ 中的不同有序副本对里，至少共享一条边的数量很少。

具体而言，类似定理 2.2 中的情形很少出现。这一性质是定理2.3和定理 2.4成立的关键。

推论2.4的证明。设 $\delta>0$ 如命题 2.3 所述。我们将 $H' \triangleq \mathbb{H}_F(n,(1-n^{-\delta})q)$ 视为 $\mathbb{H}_F(n,q)$的一个子图。

Let

$$g(n)=\binom{n}{r}\frac{r!}{\mathrm{aut}(F)}p^s=\binom{n}{r}\frac{r!}{\mathrm{aut}(F)}c^s n^{1-r}=\Theta(n)$$

表示 $\mathbb{H}_F(n,q)$ 中 F 条边的期望数量。设 τ 为使命题 2.3 中的事件以高概率成立的置换。设 $\mathcal{F}$ 表示以下事件：对于每个 $F(v_1,\dots,v_r)\in E(H')$，都有 $F(\tau(v_1)\dots,\tau(v_r))\subset\mathbb{G}(n,p)$，并且

$$\left|E(H')\right|\geq g(n)(1-n^{-\delta})-n^{2/3}.$$

于是，定理2.3给出

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{F}^c\right)\leq o(1)+\mathbb{P}\left(\left|E(H')\right|\leq g(n)(1-n^{-\delta})-n^{2/3}\right). \tag{2.1}$$

我们有 $E(H')$ 服从二项分布，试验次数由（1.1）给出，成功概率为 $(1-n^{-\delta})q$。均值和方差分别为 $\Theta(n)$，因此根据切比雪夫不等式，（2.1）中的概率项也为 $o(1)$。我们得到 $\mathbb{P}(\mathcal{F}^c)=o(1)$。

令 $N(\mathbb{G},F)$ 表示 $\mathbb{G}(n,p)$ 中与 F 同构的子图数量。我们有$\mathbb{E}[N(\mathbb{G},F)]=g(n)=\Theta(n)$，且方差也为 $\Theta(n)$。因此，同样地，根据切比雪夫界，几乎必然有 $N(\mathbb{G},F)\leq g(n)+n^{\frac{2}{3}}$。将其与 $\mathbb{P}(\mathcal{F})=1-o(1)$ 以及 $g(n)n^{-\delta}=o_n(n)$ 结合，我们得到所要证明的结果。□

现在证明定理1.1。

定理 1.1 的证明。我们引用 [11, 定理 1]，该定理陈述如下。考虑一个随机 r-均匀超图 $\mathbb{H}_{K_r}(n,\bar{q})$，其中 $\bar{q}=\bar{c}n^{1-r}$，对某个固定的 $\bar{c}>0$ 成立。存在 $m(r,\bar{c})$，使得

$$\frac{\mathrm{MinM}(\mathbb{H}_{K_r}(n,\bar{q}),K_r)}{n}\to m(r,\bar{c}), \tag{2.2}$$

当 $n\to\infty$ 时，以高概率成立。换言之，该定理的结论对 $F=K_r$ 成立。

我们设 $\bar{c}=r!/\mathrm{aut}(F)c$，并令对应的 $\bar{q}=\bar{c}n^{1-r}$，再考虑 $\mathbb{H}_F(n,q)$ 与 $\mathbb{H}_{K_r}(n,\bar{q})$ 的一种自然耦合，构造如下。给定 $\mathbb{H}_F(n,q)$ 的一个样本，对于 $[n]$ 的每个 r 元子集 B，若至少有一个 $r!/\mathrm{aut}(F)$ 个 F 的副本支撑在 $\mathbb{H}_F$ 中的 B 上，我们就由 B 创建一条 K_r 边。显然，在此构造中，不同集合 B 对应的超边出现彼此独立。此外，对于每个固定的 B，这类副本的数量为 1 的概率是 $(r!/\mathrm{aut}(F))q(1+o(1))=\Theta(n^{1-r})$，至少为 2 的概率是 $O(n^{2-2r})$，为 0 的概率是 $1-(r!/\mathrm{aut}(F))q(1+o(1))$。因此，我们得到一个随机图 $\mathbb{H}_{K_r}(n,\tilde{q})$，其中 $\tilde{q}=\bar{q}(1+o(1))$。我们还可以通过添加或删除 K_r 的副本，将该图与 $\mathbb{H}_{K_r}(n,\bar{q})$ 耦合。这类副本的数量为 $o(n)$，当 $n\to\infty$ 时以高概率成立，因为 $\tilde{q}-\bar{q}=o(1)$。根据我们的构造，以高概率，

$$\mathrm{MinM}(\mathbb{H}_F(n,q))=\mathrm{MinM}(\mathbb{H}_{K_r}(n,\tilde{q}))+o(n)=\mathrm{MinM}(\mathbb{H}_{K_r}(n,\bar{q}))+o(n).$$

应用（2.2），通过定义 $m(F,\ c)=m(r,\ \bar{c})$，即可得到该结果。□

3. 化归为自旋玻璃模型。本节将最小化单色子图数量的问题，重新表述为一个相关的自旋玻璃问题。

给定 $p=cn^{-1/d_1(F)}$、$q=p^s=c^sn^{1-r}$、$\mathbb{G}(n,p)$ 和 $\mathbb{H}_F(n,q)$，我们为每个顶点$i\in[n]$ 赋予一个自旋 $\sigma_i\in\{1,-1\}$，从而在顶点集 $[n]$上诱导出一种双色着色。令 $\sigma=(\sigma_i)_{i\in[n]}$。定义 $H(\sigma)$ 为满足以下条件的超边 $e\in E(\mathbb{H}_F(n,q))$ 的数量：e 中的所有顶点都具有相同的自旋值。也就是说，对于所有对 $H(\sigma)$ 有贡献的 e（视为 $[n]$的 r 子集），以及所有 $i,j\in e$，均有 $\sigma_i=\sigma_j$。特别地，$\min_\sigma H(\sigma)=\mathrm{MinM}(\mathbb{H}_F(n,q))$。

令 $\mathcal{S}[k]$ 表示由 k 个元素组成的置换群。

引理 3.1。对于任意 $\sigma \in \{-1,1\}^n$,

$$H(\sigma) = \frac{1}{\mathrm{aut}(F)\cdot 2^{r-1} r!} \sum_{v_1 \neq \cdots \neq v_r} \sum_{\rho \in \mathcal{S}[r]} \mathbb{1}_{\{F(v_{\rho(1)},\ldots,v_{\rho(r)}) \in E(\mathbb{H}_F(n,q))\}} \left(\sum_{m=1}^{\lfloor r/2 \rfloor} \sum_{\substack{R \subset [r] \\ |R|=2m}} \prod_{j \in R} \sigma_{v_j} \right) + \frac{|E(\mathbb{H}_F(n,q))|}{2^{r-1}}.$$

证明。我们有

$$H(\sigma) = \sum_{e \in E(\mathbb{H}_F)} \left[\mathbb{1}_{\{\sigma_i = 1 \ \forall i \in e\}} + \mathbb{1}_{\{\sigma_i = -1 \ \forall i \in e\}} \right].$$

由于每条超边对应于 F 的一个有序副本，我们可以将这个和表示为

$$H(\sigma) = \frac{1}{\mathrm{aut}(F)} \sum_{v_1 \neq \cdots \neq v_r \in [n]} \mathbb{1}_{\{F(v_1,\ldots,v_r) \in E(\mathbb{H}_F)\}} \left[\mathbb{1}_{\{\sigma_{v_j} = 1 \ \forall j \in [r]\}} + \mathbb{1}_{\{\sigma_{v_j} = -1 \ \forall j \in [r]\}} \right].$$

接下来，利用 $\sigma_i \in \{-1,1\}$，指示函数可以改写为代数形式：

$$\mathbb{1}_{\{\sigma_{v_j} = 1 \ \forall j \in [r]\}} = \prod_{j=1}^{r} \frac{1+\sigma_{v_j}}{2}, \qquad \mathbb{1}_{\{\sigma_{v_j} = -1 \ \forall j \in [r]\}} = \prod_{j=1}^{r} \frac{1-\sigma_{v_j}}{2}.$$

将这些表达式代入，我们得到

$$H(\sigma) = \frac{1}{\mathrm{aut}(F)} \sum_{v_1 \neq \cdots \neq v_r} \mathbb{1}_{\{F(v_1,\ldots,v_r) \in E(\mathbb{H}_F)\}} \left[\prod_{j=1}^{r} \frac{1+\sigma_{v_j}}{2} + \prod_{j=1}^{r} \frac{1-\sigma_{v_j}}{2} \right].$$

我们现在将乘积之和展开如下：

$$\prod_{j=1}^{r} \frac{1+\sigma_{v_j}}{2} + \prod_{j=1}^{r} \frac{1-\sigma_{v_j}}{2} = \frac{1}{2^{r-1}} \left(\sum_{m=1}^{\lfloor r/2 \rfloor} \sum_{\substack{R \subset [r] \\ |R|=2m}} \prod_{j \in R} \sigma_{v_j} \right) + \frac{1}{2^{r-1}}.$$

我们得到

$$H(\sigma) = \frac{1}{\mathrm{aut}(F)\cdot 2^{r-1}} \sum_{v_1 \neq \cdots \neq v_r \in [n]} \mathbb{1}_{\{F(v_1,\ldots,v_r) \in E(\mathbb{H}_F)\}} \left(\sum_{m=1}^{\lfloor r/2 \rfloor} \sum_{\substack{R \subset [r] \\ |R|=2m}} \prod_{j \in R} \sigma_{v_j} \right) + \frac{|E(\mathbb{H}_F)|}{2^{r-1}}.$$

令 $\mathcal{S}[m]$ 表示 $[m]$上所有置换的集合。为了对 F的标记进行对称化，我们对 $\mathcal{S}[r]$中的置换取平均。由此得到：

$$H(\sigma) = \frac{1}{\mathrm{aut}(F)\cdot 2^{r-1} r!} \sum_{v_1 \neq \cdots \neq v_r} \sum_{\rho \in \mathcal{S}[r]} \mathbb{1}_{\{F(v_{\rho(1)},\ldots,v_{\rho(r)}) \in E(\mathbb{H}_F)\}} \left(\sum_{m=1}^{\lfloor r/2 \rfloor} \sum_{\substack{R \subset [r] \\ |R|=2m}} \prod_{j \in R} \sigma_{v_j} \right) + \frac{|E(\mathbb{H}_F)|}{2^{r-1}},$$

如所声称。 □

证明的其余部分基于以下思路。我们用均值和方差相匹配的高斯随机变量替换随机变量 $\{\sum_{\rho\in\mathcal{S}[r]} \mathbb{1}_{\{F(v_{\rho(1)},\dots,v_{\rho(r)})\in E(\mathbb{H}_F)\}}\}_{v_1\neq\dots\neq v_r}$。

那么，对于每个固定的配置 σ， $H(\sigma)$ 本身也服从高斯分布。

由于共有 2^n 种可能的自旋配置 $\sigma\in\{-1,1\}^n$，因此得到一族 2^n相关高斯随机变量 $\{H(\sigma)\}_{\sigma\in\{-1,1\}^n}$。接下来，我们将控制这些高斯随机变量的协方差矩阵，并将优化问题化简为关于相关高斯变量的变分问题，从而求得渐近值。对于 $c\to\infty$，如 [9] 中所述，我们使用 Lindeberg 插值法来证明高斯替代的合理性。因此，接下来的目标是按照 [9] 所给出的框架重新表述这个问题。

令 $\kappa_1=\frac{1}{\mathrm{aut}(F)\cdot 2^{r-1}}$，$\kappa_2=\frac{1}{2^{2r-2}r!\,\mathrm{aut}(F)}$，并令 $d=c^s$。定义对称多项式

$$f(x_1,\dots,x_r)=\sum_{m=1}^{\lfloor r/2\rfloor}\sum_{\substack{R\subset[r]\\|R|=2m}}\prod_{j\in R}x_j. \tag{3.1}$$

设 $\{J_{v_1,\dots,v_r}\colon v_1,\dots,v_r\in[n]\}$ 是一个随机变量对称数组，其中

$$\{J_{v_1,\dots,v_r}:1\le v_1\le\dots\le v_r\le n\}$$

是独立的标准正态变量。即，$J_{v_1,\dots,v_r}\sim\mathcal{N}(0,1)$ 在 $1\le v_1\le\dots\le v_r\le n$ 上独立。定义高斯随机变量

$$U_n(\sigma)=\sqrt{r!}\sum_{1\le v_1\le\dots\le v_r\le n} g(v_1,\dots,v_r)\,J_{v_1,\dots,v_r}\,f(\sigma_{v_1},\dots,\sigma_{v_r}),$$

其中对称因子 $g(v_1,\dots,v_r)$ 定义为

$$g(v_1,\dots,v_r)=\sqrt{\left|\left\{(v_{\rho(1)},\dots,v_{\rho(r)}):\rho\in\mathcal{S}_r\right\}\right|}.$$

我们注意到， g仅仅是 $v_1,\dots,v_r$ 中不同元素个数的函数。我们注意到，上述对 $g(v_1,\dots,v_r)$ 的定义确保对于任意函数 $h\colon[n]^r\to\mathbb{R}$，成立

$$\sum_{1\le v_1\le\dots\le v_r\le n} g^2(v_1,\dots,v_r)h(v_1,\dots,v_r)=\sum_{v_1,\dots,v_r\in[n]} h(v_1,\dots,v_r). \tag{3.2}$$

引入约束变分问题[1]

$$\begin{aligned} T_n^\alpha &= n^{-(r+1)/2}\sqrt{\kappa_2}\max_{\sigma\in\{-1,1\}^n} U_n(\sigma),\\ \text{subject to}\quad & n^{-r}\sum_{v_1,\dots,v_r\in[n]}\kappa_1 f(\sigma_{v_1},\dots,\sigma_{v_r})=\alpha. \end{aligned} \tag{3.3}$$

为完整起见，若上述约束不可行，则将最优值设为 $-\infty$.

[1]项 $\sqrt{r!}g(v_1,\dots,v_r)$ 出现是因为求和是有序的（带有 $v_1\le\dots\le v_r$）。在 [9, 方程 (1.3)], 中，Sen 定义 T_n^α 时没有这一排序条件（而是使用 $v_1\neq\dots\neq v_r$）：

$$T_n^\alpha=\frac{1}{n^{(r+1)/2}}\max_{\sigma\in\{-1,1\}^n}\sum_{v_1\neq\dots\neq v_r} J_{v_1,\dots,v_r}f(\sigma_{v_1},\cdots,\sigma_{v_r}).$$

因此，与（3.3）比较后，我们需要为每个无序元组 $r!$ $v_1\neq\dots\neq v_r$。

最后，定义

$$V_n = \mathbb{E}\left[\max_{\alpha}\left(\alpha c^s + T_n^{\alpha} c^{s/2}\right)\right]. \tag{3.4}$$

现在，我们将 $\frac{1}{n}\min_{\sigma\in\{-1,1\}^n} H(\sigma)$ 的值化归为优化问题（3.4）。

命题 3.2. 以高概率，当 $n\to\infty$

$$\frac{1}{n}\min_{\sigma\in\{-1,1\}^n} H(\sigma) = -V_n + \frac{c^s}{2^{r-1}\mathrm{aut}(F)} + o(1) + o_c(c^{s/2}).$$

定理 3.2 的证明。设

$$A_{v_1,\dots,v_r} = -\frac{1}{\mathrm{aut}(F)2^{r-1}r!}\sum_{\rho\in\mathcal{S}[r]} \mathbb{1}_{\{F(v_{\rho(1)},\dots,v_{\rho(r)})\in E(\mathbb{H}_F)\}}. \tag{3.5}$$

Then

$$\mathbb{E}\left[A_{v_1,\dots,v_r}\right] = -\frac{1}{\mathrm{aut}(F)2^{r-1}}c^s n^{1-r} = \kappa_1 c^s n^{1-r}. \tag{3.6}$$

根据定义，对于任意 $\rho_0\in\mathcal{S}[r]$，恰有$\mathrm{aut}(F)$ 个元素 $\rho\in\mathcal{S}[r]$ 满足 at

$$F(v_{\rho(1)},\dots,v_{\rho(r)}) = F(v_{\rho_0(1)},v_{\rho_0(2)},\dots,v_{\rho_0(r)}).$$

因此,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(A_{v_1,\dots,v_r}\right) &= \frac{1}{(2^{r-1}r!)^2}\frac{r!}{\mathrm{aut}(F)}p^s(1-p^s) = \frac{1}{2^{2r-2}r!\mathrm{aut}(F)}(1-p^s)c^s n^{1-r}\\ &= \frac{1}{2^{2r-2}r!\mathrm{aut}(F)}c^s n^{1-r}(1+o_n(1)) = \kappa_2 c^s n^{1-r}(1+o_n(1)).\end{aligned}$$

Let

$$\begin{aligned}L_n &= \frac{1}{n}\max_{\sigma\in\{-1,1\}^n} -H(\sigma) + \frac{|E(\mathbb{H}_F)|}{2^{r-1}n}\\ &= \frac{1}{n}\max_{\sigma\in\{-1,1\}^n}\sum_{v_1\neq\dots\neq v_r} A_{v_1,\dots,v_r} f(\sigma_{v_1},\dots,\sigma_{v_r}).\end{aligned}$$

那么，以高概率,

$$\frac{1}{n}\min_{\sigma\in\{-1,1\}^n} H(\sigma) = -L_n + \frac{c^s}{2^{r-1}\mathrm{aut}(F)} + o_n(1).$$

介绍

$$\hat{U}_n(\sigma) = \sum_{v_1\neq\dots\neq v_r} J_{v_1,\dots,v_r} f(\sigma_{v_1},\dots,\sigma_{v_r}), \tag{3.7}$$

and

$$\hat{T}_n^{\alpha} = \max_{\sigma\in\{-1,1\}^n} n^{-(r+1)/2}\sqrt{\kappa_2}\hat{U}_n(\sigma), \tag{3.8}$$

$$\text{subject to } n^{-r}\sum_{v_1\neq\dots\neq v_r}\kappa_1 f(\sigma_{v_1},\dots,\sigma_{v_r}) = \alpha.$$

由 [9, 定理 1.1],

$$L_n = \mathbb{E}\left[\max_{\alpha}(\alpha c^s + \hat{T}_n^{\alpha} c^{s/2})\right] + o_c(c^{s/2}).$$

因此，尚需证明

$$\mathbb{E}\left[\max_{\alpha}\left(\alpha c^s+\hat{T}_n^{\alpha}c^{s/2}\right)\right]=\mathbb{E}\left[\max_{\alpha}\left(\alpha c^s+T_n^{\alpha}c^{s/2}\right)\right]+o_n(1).$$

为此，只需验证

$$\mathbb{E}\left[\max_{\alpha}\left|T_n^{\alpha}c^{s/2}-\hat{T}_n^{\alpha}c^{s/2}\right|\right]=o_n(1),$$

或者等价地

$$\mathbb{E}\left[\max_{\sigma\in\{-1,1\}^n} n^{-(r-1)/2}\left|U_n(\sigma)-\hat{U}_n(\sigma)\right|\right]=o(n).$$

我们有

$$U_n(\sigma)-\hat{U}_n(\sigma)=\sqrt{r!}\sum_{\substack{1\le v_1\le\cdots\le v_r\le n\\ \exists\, 1\le i<j\le r: v_i=v_j}} g(v_1,\ldots,v_r)\,J_{v_1,\ldots,v_r}\,f(\sigma_{v_1},\ldots,\sigma_{v_r}).$$

因此， $U_n(\sigma)-\hat{}U_n(\sigma)$ 是一个方差为 $O(n^{r-1})$ 的中心高斯随机变量。我们回顾以下众所周知的事实。对于任意 $x>0$,

$$\frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)\le\mathbb{P}\left[\mathcal{N}(0,1)\ge x\right]\le\frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}. \tag{3.9}$$

根据 (3.9)，我们得到一个尾界：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\max_{\sigma\in\{-1,1\}^n} n^{-(r-1)/2}\left|U_n(\sigma)-\hat{U}_n(\sigma)\right|\ge x\right]&\le 2^n\cdot\mathbb{P}\left[n^{-(r-1)/2}\left|U_n(\sigma)-\hat{U}_n(\sigma)\right|\ge x\right]\\&=\exp\left(-O(x^2)+n\log 2\right).\end{aligned}$$

对所有 $x>n^{2/3}$ 求和，我们得到

$$\sum_{x\ge n^{2/3},\, x\in\mathbb{Z}}\mathbb{P}\left[\max_{\sigma\in\{-1,1\}^n} n^{-(r-1)/2}\left|U_n(\sigma)-\hat{U}_n(\sigma)\right|\ge x\right]=o_n(1).$$

因此，

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\max_{\sigma\in\{-1,1\}^n} n^{-(r-1)/2}\left|U_n(\sigma)-\hat{U}_n(\sigma)\right|\right]\\&\le\lceil n^{2/3}\rceil+\sum_{x\ge n^{2/3},x\in\mathbb{Z}}\mathbb{P}\left[\max_{\sigma\in\{-1,1\}^n} n^{-(r-1)/2}\left|U_n(\sigma)-\hat{U}_n(\sigma)\right|\ge x\right]=o(n),\end{aligned}$$

如所声称。 □

4. 极值高斯变量。 鉴于定理3.2，我们的下一个目标是求得 V_n 的渐近结果。为此，我们首先研究使 α 达到最大值的 $\alpha c^s+T_n^{\alpha}c^{s/2}$。为简化记号，令 $d=c^s$。

令 $\bar{\sigma}\equiv\frac{1}{n}\sum_{i\in[n]}\sigma_i\in[-1,1]$ 表示自旋构型 $\sigma\in\{-1,1\}^n$ 的经验平均值。接下来，我们将 α 表示为 $\bar{\sigma}$ 的形式。我们有

$$\sum_{v_1,\ldots,v_r\in[n]} f(\sigma_{v_1},\ldots,\sigma_{v_r})=\sum_{v_1,\ldots,v_r\in[n]}\sum_{m=1}^{\lfloor r/2\rfloor}\sum_{\substack{R\subset[r]\\|R|=2m}}\prod_{j\in R}\sigma_{v_j} \tag{4.1}$$

$$= \sum_{m=1}^{\lfloor r/2 \rfloor} n^r \binom{r}{2m} \left(\frac{1}{n} \sum_{i \in [n]} \sigma_i \right)^{2m}$$
$$= n^r \cdot \frac{(1+\bar{\sigma})^r + (1-\bar{\sigma})^r - 2}{2}.$$

注意，$\kappa_1 = -\frac{1}{\mathrm{aut}(F) \cdot 2^{r-1}}$。将其与（4.1）结合，可得

$$\alpha = \kappa_1 \cdot \frac{(1+\bar{\sigma})^r + (1-\bar{\sigma})^r - 2}{2} \leq 0. \tag{4.2}$$

引理 4.1. 当 $n \to \infty$ 时，以最大化 $\alpha d + T_n^\alpha \sqrt{d}$ 的 $\alpha_{\max}$ 满足

$$\alpha_{\max} = O(1/\sqrt{d}). \tag{4.3}$$

证明。考虑高斯随机变量 $\{U_n(\sigma)\}_{\sigma \in \{-1,1\}^n}$ 的协方差。注意，$(\sum_{m=1}^{\lfloor r/2 \rfloor} \sum_{R \subset [r],\ |R|=2m} 1)$ 计算的是一个大小为 r 的集合的非空偶数子集数量，该数量上界为 2^r。因此，对于任意 $x,\ y \in \{-1,1\}^n$，我们得到

$$\mathbb{E}[U_n(x)U_n(y)] = r! \sum_{v_1,\ldots,v_r \in [n]} \left(\sum_{m=1}^{\lfloor r/2 \rfloor} \sum_{\substack{R \subset [r] \\ |R|=2m}} \prod_{j \in R} x_{v_j} \right) \left(\sum_{m=1}^{\lfloor r/2 \rfloor} \sum_{\substack{R \subset [r] \\ |R|=2m}} \prod_{j \in R} y_{v_j} \right) \tag{4.4}$$
$$\leq r! \cdot 2^{2r} \cdot n^r = C n^r.$$

因此，每个 T_n^α 都是 2^n 个高斯相关变量的最大值，其方差和协方差均上界为 $C\kappa_2 n^{-1}$。通过标准论证，例如将（3.9）与并合界相结合，正如定理3.2的证明中所做的那样，我们得到：当 时，

$$T_n^\alpha = O(\sqrt{n^{-1}}\sqrt{\log 2^n}) = O(1).$$

反设，对于充分大的 n 和 $d = c^s$，存在一个序列 $t_n \to \infty$ n α $|\alpha| >$，使得对于无穷多个，$t_n/\sqrt{d}$ 4 2 $\alpha < -t_n/\sqrt{d}$ 其最大值满足。于是，由（.），我们有，因此，对于这无穷多个 n，以高概率，当 $n \to \infty$时，

$$\max_\alpha \left(\alpha d + T_n^\alpha \sqrt{d} \right) \leq -t_n \sqrt{d} + O(\sqrt{d}).$$

另一方面，将表达式代入 $\alpha = 0$，我们以高概率得到

$$\max_\alpha \left(\alpha d + T_n^\alpha \sqrt{d} \right) \geq T_n^0 \sqrt{d} = O(\sqrt{d}),$$

这与先前的上界矛盾。因此，不存在这样的序列 $t_n \to \infty$。定理 4.1 中的结论由 t_n的任意性得出。 □

因此，剩下要分析的是 T_n^α 在 α 接近零的情形下的情况，即 $\bar{\sigma}$ 接近零。不过，据我们所知，目前尚无已知方法可以求得它的显式公式。我们转而考察其渐近行为：先令 $d \to \infty$，再令 $r \to \infty$。

定理4.1 表明，当 α 最大化 $\alpha d + T_n^\alpha \sqrt{d}$ 的值接近于零时，d<style id='14}很大。本节受此启发，旨在建立.....的上界和下界

$$\max_{\sigma \in \{-1,1\}^n} U_n(\sigma),$$

满足约束 $\sum_{i\in[n]}\sigma_i\in[-nh_0,nh_0]$，其中 $h_0>0$较小。

鉴于（1.1），不妨设 n 可被4整除。固定$t>0$和 $x,\ y\in\{-1,1\}^n$ 使得

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i\in[n]}x_i\right|,\quad \left|\frac{1}{n}\sum_{i\in[n]}y_i\right|\le t.$$

固定 $R_1,\ R_2\subset[r]$ 满足 $1\in R_1\setminus R_2$。那么，

$$\sum_{v_1,\dots,v_r\in[n]}\prod_{j\in R_1}x_{v_j}\prod_{j\in R_2}y_{v_j}=\sum_{v_1\in[n]}x_{v_1}\sum_{v_2,\dots,v_r\in[n]}\prod_{j\in R_1\setminus\{1\}}x_{v_j}\prod_{j\in R_2}y_{v_j}=O(tn^r).$$

因此，（4.4）给出

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[U_n(x)U_n(y)\right]&=r!\sum_{v_1,\dots,v_r\in[n]}\left(\sum_{m=0}^{\lfloor r/2\rfloor}\sum_{\substack{R\subset[r]\\|R|=2m}}\prod_{j\in R}x_{v_j}\right)\left(\sum_{m=1}^{\lfloor r/2\rfloor}\sum_{\substack{R\subset[r]\\|R|=2m}}\prod_{j\in R}y_{v_j}\right)\\&=r!\sum_{v_1,\dots,v_r\in[n]}\left(\sum_{m=1}^{\lfloor r/2\rfloor}\sum_{\substack{R\subset[r]\\|R|=2m}}\prod_{j\in R}x_{v_j}y_{v_j}\right)+O(tn^r)\\&=r!n^r\sum_{m=1}^{\lfloor r/2\rfloor}\binom{r}{2m}\left(\frac{1}{n}\sum_{i\in[n]}x_iy_i\right)^{2m}+O(tn^r).\end{aligned}\tag{4.5}$$

设 $o(x,\ y)=\frac{1}{n}\sum_{i\in[n]}x_iy_i$，则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[U_n(x)U_n(y)\right]&=r!n^r\sum_{m=1}^{\lfloor r/2\rfloor}\binom{r}{2m}o(x,y)^{2m}+O(tn^r)\\&=r!n^r\cdot\frac{(1+o(x,y))^r+(1-o(x,y))^r-2}{2}+O(tn^r).\end{aligned}\tag{4.6}$$

具体而言，若 $\sum_{i\in[n]}x_i=\sum_{i\in[n]}y_i=0$，则 $t=0$，并且

$$\mathbb{E}\left[U_n(x)U_n(y)\right]=r!n^r\cdot\frac{(1+o(x,y))^r+(1-o(x,y))^r-2}{2}.\tag{4.7}$$

若进一步有 $x=y$，则 $o(x,\ y)=1$，并且

$$\mathbb{E}\left[U_n(x)^2\right]=\mathbb{E}\left[U_n(x)U_n(y)\right]=r!n^r(2^{r-1}-1).$$

为了研究最大值$_{\sigma\in\{-1,1\}^n}U_n(\sigma)$，我们使用以下关于二元标准正态分布联合尾概率的事实，该事实也称为 Slepian界 [10]:

引理 4.2. 设$(Z,\ Z_\rho)$为一个二元正态向量，其中 $Z,\ Z_\rho\sim\mathcal{N}(0,\ 1)$，相关$(-1,\ 1)$。那么，对于任意 $u>0$,

$$\mathbb{P}(Z>u,Z_\rho>u)\le\frac{(1+\rho)^2}{2\pi u^2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{u^2}{1+\rho}\right).$$

为进行归一化，定义

$$W_n(\sigma)=\frac{U_n(\sigma)}{\sqrt{r!}\cdot n^{(r+1)/2}\cdot\sqrt{2^{r-1}-1}}.$$

那么，由4.7）结合 $o(x,y)=1$，可得 $W_n(\sigma)\sim\mathcal{N}(0,n^{-1})$，当 $\sum_{i\in[n]}\sigma_i=0$ 时。

令 $S_j=\left\{\sigma\in\{-1,1\}^n:\ \sum_{i\in[n]}\sigma_i=j\right\}$。由（4.5）可知，$W_n(\sigma)$ 的方差对所有 $\sigma\in S_{nh}$ 都相同。由（4.6）结合 $o(x,y)=1$，还可知，对于 $\sigma\in S_{nh}$，$W_n(\sigma)$ 服从正态分布 $\mathcal{N}(0,(1+f(n,h))/n)$，其中

$$\lim_{h\to 0}\limsup_{n\to\infty}|f(n,h)|=0.$$

根据上述概念，接下来我们推导 $\max_{\sigma\in S_0}W_n(\sigma)$ 和 $\max_{\sigma\in\cup_{|h|\le h_0}S_{nh}}W_n(\sigma$):

引理EMMA 4.3. 对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $h(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ 使得对于 $h_0<h(\varepsilon)$，以及 $4\mid n$，我们有

$$\mathbb{P}\left((1-\varepsilon)\sqrt{2\log 2}\le\max_{\sigma\in S_0}W_n(\sigma)\le\max_{\sigma\in\cup_{|h|\le h_0}S_{nh}}W_n(\sigma)\le(1+\varepsilon)\sqrt{2\log 2}\right)\ge 1-o_n(1)-o_r(1).$$

证明。在此证明中，我们应用一阶矩方法建立上界，并使用二阶矩方法建立下界。

上界： 由（3.9），我们有：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\max_{\sigma\in\bigcup_{|h|\le h_0}S_{nh}}W_n(\sigma)\ge(1+\varepsilon)\sqrt{2\log 2}\right)&\le 2^n\sup_{|h|\le h_0}\mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1)\ge\frac{(1+\varepsilon)\sqrt{2n\log 2}}{\sqrt{1+f(n,h)}}\right)\\&\le\sqrt{\frac{1+f(n,h)}{4\pi(1+\varepsilon)^2n\log 2}}\cdot 2^{n\left(1-\frac{(1+\varepsilon)^2}{1+f(n,h_0)}\right)}.\end{aligned}$$

现在选择 $h(\varepsilon)>0$ 使得

$$\sup_{|h|\le h(\varepsilon)}\limsup_{n\to\infty}|f(n,h)|<\varepsilon.$$

于是可得

$$\mathbb{P}\left(\max_{\sigma\in\bigcup_{|h|\le h_0}S_{nh}}W_n(\sigma)\ge(1+\varepsilon)\sqrt{2\log 2}\right)=o_n(1).\tag{4.8}$$

下界。为建立下界，我们应用二阶矩方法。考虑集合

$$X=\left\{\sigma\in S_0:\ W_n(\sigma)\ge(1-\varepsilon)\sqrt{2\log 2}\right\}.$$

我们使用斯特林近似

$$m!=(1+o_m(1))\sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m.\tag{4.9}$$

特别地，对于任意 $\beta\in(0,1)$，

$$\binom{m}{\beta m}=(1+o_m(1))(2\pi m\beta(1-\beta))^{-1/2}\exp\left(-m\left(\beta\log\beta+(1-\beta)\log(1-\beta)\right)\right).\tag{4.10}$$

对于任意 $\sigma \in S_0$，变量 $W_n(\sigma)$ 服从 $\mathcal{N}(0,1/n)$。由（3.9）和（4.10），我们计算 $|X|$ 的一阶矩为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|X|\right] &= \binom{n}{n/2} \cdot \mathbb{P}\left(W_n(\sigma) \geq (1-\varepsilon)\sqrt{2\log 2} \,\middle|\, \sum_{i\in[n]} \sigma_i = 0 \right) \\ &= (1+o_n(1))n^{-1}\sqrt{\frac{1}{2\pi^2(1-\varepsilon)^2\log 2}} \cdot 2^{n(1-(1-\varepsilon)^2)}.\end{aligned} \tag{4.11}$$

固定 $\eta \in (0,\ 1)$。接下来我们将 $|X|$ 的二阶矩分解为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|X|^2\right] &= \sum_{\sigma\in S_0}\sum_{\sigma'\in S_0} \mathbb{P}\left(W_n(\sigma), W_n(\sigma') \geq (1-\varepsilon)\sqrt{2\log 2} \right) \\ &\leq \sum_{\sigma\in S_0} \sum_{\substack{\sigma'\in S_0 \\ |\sigma\cdot\sigma'|\geq \eta n}} \mathbb{P}\left[W_n(\sigma) \geq (1-\varepsilon)\sqrt{2\log 2} \right] \\ &\quad + \sum_{\sigma\in S_0} \sum_{\substack{\sigma'\in S_0 \\ |\sigma\cdot\sigma'|\leq \eta n}} \mathbb{P}\left[W_n(\sigma), W_n(\sigma') \geq (1-\varepsilon)\sqrt{2\log 2} \right].\end{aligned} \tag{4.12}$$

对于 $\sigma,\ \sigma' \in S_0$，由 $4 \mid n$ 可知 $4 \mid \sum_{i\in[n]} \sigma_i\sigma'_i$。为了对（4.12）右端的第一项给出上界，对于给定的 $\sum_{i\in[n]} \sigma_i = 0$，我们需要计算满足以下条件的 σ' 的数量

$$\sum_{i\in[n]} \sigma'_i = 0 \quad \text{and} \quad \sum_{i\in[n]} \sigma_i\sigma'_i = 4y. \tag{4.13}$$

注意到

$$\sum_{i\in[n]} \sigma_i\sigma'_i = 2 \cdot \sum_{i\in[n]} \mathbb{1}_{\{\sigma_i=\sigma'_i\}} - n.$$

因此，我们推得：

1. $|\{i\in[n] : (\sigma_i,\sigma'_i) = (1,1)\}| = |\{i\in[n] : (\sigma_i,\sigma'_i) = (-1,-1)\}| = \frac{n}{4} + y.$
2. $|\{i\in[n] : (\sigma_i,\sigma'_i) = (1,-1)\}| = |\{i\in[n] : (\sigma_i,\sigma'_i) = (-1,1)\}| = \frac{n}{4} - y.$

因此，这类 σ' 的数量为

$$\binom{n/2}{n/4-y}^2. \tag{4.14}$$

因此，我们可以估计（4.12）右端的第一项，得到

$$\begin{aligned}&\sum_{\sigma\in S_0} \sum_{\substack{\sigma'\in S_0 \\ |\sigma\cdot\sigma'|\geq \eta n}} \mathbb{P}\left[W_n(\sigma) \geq (1-\varepsilon)\sqrt{2\log 2} \right] \\ &= \mathbb{E}\left[|X|\right] \cdot \sum_{|y|\geq \eta n} \binom{n/2}{n/4-y}^2 \leq \mathbb{E}\left[|X|\right] \cdot n \cdot \binom{n/2}{(1/4-\eta)n}^2 \\ &= (1+o_n(1))\mathbb{E}\left[|X|\right] \cdot \frac{4}{\pi(1-16\eta^2)} \exp\left(-n\left[\left(\tfrac{1}{2}-2\eta\right)\log\left(\tfrac{1}{2}-2\eta\right) + \left(\tfrac{1}{2}+2\eta\right)\log\left(\tfrac{1}{2}+2\eta\right)\right]\right).\end{aligned} \tag{4.15}$$

注意，

$$\lim_{x\downarrow 0}(x\log x+(1-x)\log(1-x))=0.$$

因此，存在 $\eta=\eta(\varepsilon)\in(0,1/4)$ 使得

$$\left(\frac{1}{2}-2\eta\right)\log\left(\frac{1}{2}-2\eta\right)+\left(\frac{1}{2}+2\eta\right)\log\left(\frac{1}{2}+2\eta\right)>-\left(1-(1-\varepsilon)^2\right)\log 2.$$

对于这样的 η，将此不等式与（4.11）和（4.15）结合，得到

$$\sum_{\sigma\in S_0}\sum_{\substack{\sigma'\in S_0\\ |\sigma\cdot\sigma'|\geq\eta n}}\mathbb{P}\left[W(\sigma)\geq(1-\varepsilon)\sqrt{2\log 2}\right]=o_n(1)\cdot\mathbb{E}\left[|X|\right]^2. \tag{4.16}$$

现在考虑（4.12）右端的第二项。对于 $\sigma,\ \sigma'\in S_0$，令 $\sum_{i\in[n]}\sigma_i\sigma'_i=4y$，其中 y 为整数。于是，（4.6）（取 $t=0$）意味着

$$\mathbb{E}\left[W_n(\sigma)W_n(\sigma')\right]=\frac{(1+4y/n)^r+(1-4y/n)^r-2}{(2^r-2)n}.$$

定义

$$\rho=\frac{(1+4y/n)^r+(1-4y/n)^r-2}{2^r-2}.$$

由于 $W(\sigma)$ 和 $W(\sigma')$ 都满足 $\mathcal{N}(0,1/n)$，定理 4.2 给出

$$\mathbb{P}\left[W(\sigma),W(\sigma')\geq(1-\varepsilon)\sqrt{2\log 2}\right]\leq\frac{(1+\rho)^2}{4\pi(1-\varepsilon)^2n\sqrt{1-\rho^2}\log 2}\cdot 2^{-\frac{2(1-\varepsilon)^2}{1+\rho}n}. \tag{4.17}$$

因此，由（4.9）和（4.14），满足 $\sigma,\ \sigma'\in S_0$ 和 $\sum_{i\in[n]}\sigma_i\sigma'_i=4y$ 的数对 (σ,σ') 的数量为

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{n/2}\binom{n/2}{n/4-y}^2=\frac{n!}{((n/4+y)!)^2\left((n/4-y)!\right)^2} \qquad (4.18)\\
&=(1+o_n(1))(2\pi n)^{-3/2}\cdot\frac{16}{1-16y^2/n^2}\cdot\left(\frac{4}{1+4y/n}\right)^{n/2+2y}\left(\frac{4}{1-4y/n}\right)^{n/2-2y}\\
&=(1+o_n(1))(2\pi n)^{-3/2}\cdot\frac{16}{1-16y^2/n^2}\cdot 2^{2n}\\
&\quad\times\exp\left(-\frac{n}{2}\left[\left(1+\frac{4y}{n}\right)\log\left(1+\frac{4y}{n}\right)+\left(1-\frac{4y}{n}\right)\log\left(1-\frac{4y}{n}\right)\right]\right).
\end{aligned}$$

另一方面，对于 $K>0$，结合（4.17）和（4.18）可得

$$\sum_{\sigma\in S_0}\sum_{\substack{\sigma'\in S_0\\ |\sigma\cdot\sigma'|\in[K\sqrt{n},\eta n]}}\mathbb{P}\left[W(\sigma),W(\sigma')\geq(1-\varepsilon)\sqrt{2\log 2}\right] \tag{4.19}$$

$$\leq(1+o_n(1))(2\pi n)^{-5/2}\cdot\frac{1}{2(1-\varepsilon)^2\log 2}\cdot 2^{2n(1-(1-\varepsilon)^2)}\cdot\sum_{|y|\in[K\sqrt{n}/4,\eta n/4]}\frac{(1+\rho)^2}{\sqrt{1-\rho^2}}\frac{16}{1-\frac{16y^2}{n^2}}$$

$$\times\exp\left(\frac{n}{2}\left[\frac{4\rho\log 2}{1+\rho}-\left(1+\frac{4y}{n}\right)\log\left(1+\frac{4y}{n}\right)-\left(1-\frac{4y}{n}\right)\log\left(1-\frac{4y}{n}\right)\right]\right).$$

令 $t = \frac{4y}{n} \in [-\eta, \eta] \setminus (-K/\sqrt{n}, K/\sqrt{n})$。那么，

$$\begin{aligned}
&\frac{4\rho \log 2}{1+\rho} - (1+t)\log(1+t) - (1-t)\log(1-t) \\
&\le 4\log 2 \cdot \frac{(1+t)^r + (1-t)^r - 2}{2^r - 2} - (1+t)\log(1+t) - (1-t)\log(1-t).
\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}
&4\log 2 \cdot \frac{(1+t)^r + (1-t)^r - 2}{2^r - 2} - (1+t)\log(1+t) - (1-t)\log(1-t) \qquad (4.20) \\
&= -(1+o_r(1))\, t^2 + o_{1/|t|}(t^2).
\end{aligned}$$

当 η 足够小时，存在仅依赖于 r 的 $D > 0$，使得对于所有 $t \in [-\eta, \eta]$，

$$\begin{aligned}
&4\log 2 \cdot \frac{(1+t)^r + (1-t)^r - 2}{2^r - 2} - (1+t)\log(1+t) - (1-t)\log(1-t) \qquad (4.21) \\
&\le -(D + o_r(1))t^2.
\end{aligned}$$

Let

$$\rho_{\max} := \sup_{t \in [-\eta, \eta]} \frac{(1+t)^r + (1-t)^r - 2}{2^r - 2}.$$

然后结合（4.19）和（4.21），我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma \in S_0} \sum_{\substack{\sigma' \in S_0 \\ |\sigma \cdot \sigma'| \in [K\sqrt{n}, \eta n]}} \mathbb{P}\left[W(\sigma), W(\sigma') \ge (1-\varepsilon)\sqrt{2\log 2}\right] \\
&\le (1+o_n(1))(2\pi n)^{-5/2} \cdot \frac{1}{2(1-\varepsilon)^2 \log 2} \cdot 2^{2n(1-(1-\varepsilon)^2)} \cdot \frac{(1+\rho_{\max})^2}{\sqrt{1-\rho_{\max}^2}} \cdot \frac{16}{1-\eta^2} \\
&\quad \times 2 \sum_{y = K\sqrt{n}/4}^{\infty} \exp\left(-8(D + o_r(1)) \cdot \frac{y^2}{n}\right).
\end{aligned}$$

与此同时，尾和可估计为

$$\begin{aligned}
\sum_{y = K\sqrt{n}/4}^{\infty} \exp\left(-8(D + o_r(1)) \cdot \frac{y^2}{n}\right) &= (1+o_n(1))\sqrt{n} \int_{K/4}^{\infty} \exp\left(-8(D+o_r(1))x^2\right) \mathrm{d}x \\
&= o_{K,r}(1) \cdot \sqrt{n}.
\end{aligned}$$

因此，

$$\sum_{\sigma \in S_0} \sum_{\substack{\sigma' \in S_0 \\ |\sigma \cdot \sigma'| \in [K\sqrt{n}, \eta n]}} \mathbb{P}\left[W(\sigma), W(\sigma') \ge (1-\varepsilon)\sqrt{2\log 2}\right] = o_{K,r}(1) \cdot \mathbb{E}\left[|X|\right]^2. \qquad (4.22)$$

最后，我们处理 $|\sigma \cdot \sigma'| \in [-K\sqrt{n}, K\sqrt{n}]$ 的情形。在此范围内，$t = \frac{4y}{n} \in [-K/\sqrt{n}, K/\sqrt{n}]$，并且有

$$\rho = \frac{(1+t)^r + (1-t)^r - 2}{2^r - 2} = o_n(1). \qquad (4.23)$$

于是，由（4.20）以及 $t\in[-K/\sqrt{n},K/\sqrt{n}]$,

$$4\log 2\cdot\frac{(1+t)^r+(1-t)^r-2}{2^r-2}-(1+t)\log(1+t)-(1-t)\log(1-t) \tag{4.24}$$
$$=-(1+o_r(1)+o_n(1))t^2.$$

结合（4.23）和（4.24），再结合（4.19），可得

$$\sum_{\sigma\in S_0}\sum_{\sigma'\in S_0,\,|\sigma\cdot\sigma'|\in[K\sqrt{n}]}\mathbb{P}\left[W(\sigma),W(\sigma')\geq(1-\varepsilon)\sqrt{2\log 2}\right]$$
$$\leq(1+o_n(1))(2\pi n)^{-5/2}\cdot\frac{1}{2(1-\varepsilon)^2\log 2}\cdot 2^{2n(1-(1-\varepsilon)^2)}$$
$$\times\sum_{y=-K\sqrt{n}/4}^{K\sqrt{n}/4}16\exp\left(-(1+o_r(1)+o_n(1))\cdot\frac{8y^2}{n}\right).$$

我们用积分估计该和，得到

$$\sum_{y=-K\sqrt{n}/4}^{K\sqrt{n}/4}\exp\left(-(1+o_r(1)+o_n(1))\cdot\frac{8y^2}{n}\right)$$
$$=(1+o_n(1))\sqrt{n}\int_{-K/4}^{K/4}\exp\left(-(1+o_r(1)+o_n(1))\cdot 8z^2\right)\mathrm{d}z$$
$$\leq(1+o_r(1)+o_n(1))\cdot\frac{\sqrt{2\pi n}}{4}.$$

因此，

$$\sum_{\sigma\in S_0}\sum_{\sigma'\in S_0,\,|\sigma\cdot\sigma'|\in[K\sqrt{n}]}\mathbb{P}\left[W(\sigma),W(\sigma')\geq(1-\varepsilon)\sqrt{2\log 2}\right] \tag{4.25}$$
$$\leq(1+o_n(1)+o_r(1))\cdot\frac{1}{2\pi^2(1-\varepsilon)^2n^2\log 2}\cdot 2^{2n(1-(1-\varepsilon)^2)}$$
$$=(1+o_n(1)+o_r(1))\cdot\mathbb{E}\left[|X|\right]^2.$$

结合（4.12）、（4.16）、（4.22）和（4.25）中的估计，我们得到：

$$\mathbb{E}\left[|X|^2\right]=(1+o_n(1)+o_r(1)+o_{K,r}(1))\cdot\mathbb{E}\left[|X|\right]^2.$$

由于 $\mathbb{E}\left[|X|^2\right]$ 和 $\mathbb{E}\left[|X|\right]^2$ 都独立于 K，我们可以令 $K\to\infty$，从而得到：

$$\mathbb{E}\left[|X|^2\right]=(1+o_n(1)+o_r(1))\cdot\mathbb{E}\left[|X|\right]^2.$$

于是，由柯西–施瓦茨不等式，

$$\mathbb{P}\left[\max_{\sigma\in S_0}W_n(\sigma)\geq(1-\varepsilon)\sqrt{2\log 2}\right]=\mathbb{P}\left[|X|\geq 1\right]\geq\frac{\mathbb{E}\left[|X|\right]^2}{\mathbb{E}\left[|X|^2\right]}=1+o_n(1)+o_r(1). \tag{4.26}$$

结合（4.8）中的上界与（4.26）中的下界，即完成引理4.3的证明。

□

5. 定理1.2的证明。由于定理1.1可得$\mathrm{MinM}(\mathbb{G}(n,p)\ F)\,n \xrightarrow{\quad} m(F,c)$，因此要计算 $m(F,c)$，我们只需考虑 n，使得 $4 \mid n$。对于 $\sigma \in S_{nh}$，由（4.2），我们有

$$\alpha = \kappa_1 \cdot \frac{(1+h)^r + (1-h)^r - 2}{2}.$$

对于 h_0 如定理4.3所定义的，

$$\alpha_0 = \kappa_1 \cdot \frac{(1+h_0)^r + (1-h_0)^r - 2}{2} \le 0.$$

回顾（3.3）可知

$$T_n^\alpha = n^{-(r+1)/2} \cdot \sqrt{\kappa_2} \cdot \max_{\sigma\in\{-1,1\}^n} U_n(\sigma),$$

$$\text{subject to } n^{-r} \sum_{v_1,\dots,v_r\in[n]} \kappa_1 f(\sigma_{v_1},\dots,\sigma_{v_r}) = \alpha.$$

由定理 4.3，以概率 $1+o_n(1)+o_r(1)$，

$$(1-\varepsilon)\cdot\sqrt{2\kappa_2 r!(2^{r-1}-1)\log 2} \le T_n^0 \le \max_{\alpha\in[\alpha_0,0]} T_n^\alpha \le (1+\varepsilon)\cdot\sqrt{2\kappa_2 r!(2^{r-1}-1)\log 2}.$$

由此可得，以概率 $1+o_n(1)+o_r(1)$，

$$V_n = \mathbb{E}\left[\max_\alpha \left(\alpha d + T_n^\alpha \sqrt{d}\right)\right] \ge \mathbb{E}\left[T_n^0 \cdot \sqrt{d}\right] \ge (1-\varepsilon)\cdot\sqrt{2\kappa_2 r!(2^{r-1}-1) d\log 2}.$$

此外，由定理4.1，以高概率，

$$\max_{\alpha\in[\alpha_0,0]} \left(\alpha d + T_n^\alpha\sqrt{d}\right) = \max_\alpha \left(\alpha d + T_n^\alpha \sqrt{d}\right).$$

另一方面，由于 $\alpha \le 0$，

$$\max_\alpha \left(\alpha\sqrt{d} + T_n^\alpha\right) \le n^{-(r+1)/2}\sqrt{\kappa_2}\cdot \max_{\sigma\in\{-1,1\}^n} U_n(\sigma). \tag{5.1}$$

接下来，我们研究（5.1）的右端。由（4.6），可得

$$\mathbb{E}\left[U_n(\sigma)^2\right] = r!\cdot n^r \sum_{m=1}^{\lfloor r/2\rfloor} \binom{r}{2m} 1 + O_n(1) n^{r-1} \sum_{i\in[n]} \sigma_i$$

$$\le f(r)^2 \cdot n^r,$$

对于某个函数 f（r）>0。因此，由（3.9），

$$\mathbb{P}\left(n^{-r/2} \max_{\sigma\in\{-1,1\}^n} U_n(\sigma) \ge x\right) \le \sum_{\sigma\in\{-1,1\}^n} \mathbb{P}\left(n^{-r/2} U_n(\sigma) \ge x\right)$$

$$\le 2^n \cdot \frac{f(r)}{x\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2f(r)^2}\right).$$

因此，

$$\sum_{\substack{x\ge 2f(r)n^{1/2} \\ \sqrt{\kappa_2} n^{-1/2} x\in\mathbb{Z}}} \mathbb{P}\left(n^{-r/2} \max_{\sigma\in\{-1,1\}^n} U_n(\sigma) \ge x\right) = o_n(1),$$

结合（5.1）可知

$$\sum_{\substack{x\geq 2f(r)\sqrt{\kappa_2}\\ x\in\mathbb{Z}}} \mathbb{P}\left(\max_{\alpha}\left(\alpha d+T_n^{\alpha}\sqrt{d}\right)\geq x\right)=o_n(1).$$

因此，序列 $\left\{\text{最大值}_{\alpha}\left(\alpha\sqrt{d}+T_n^{\alpha}\right)\right\}_{n\geq 1}$ 是一致可积的。因此，以概率 $1+o_n(1)+o_r$(1)</style》，

$$V_n=\mathbb{E}\left[\max_{\alpha}\left(\alpha d+T_n^{\alpha}\sqrt{d}\right)\right]=\mathbb{E}\left[\max_{\alpha\in[\alpha_0,0]}\left(\alpha d+T_n^{\alpha}\sqrt{d}\right)\right]+o_n(\sqrt{d})$$

$$\leq(1+\varepsilon)\cdot\sqrt{2\kappa_2 r!(2^{r-1}-1)d\log 2}+o_n(\sqrt{d}).$$

于是，根据定理 3.2，以概率 $1+o_n(1)+o_r$(1)</style》，

$$\frac{1}{n}\min_{\sigma\in\{-1,1\}^n}H(\sigma)=(1+o_r(1))\cdot\sqrt{2\kappa_2 r!(2^{r-1}-1)d\log 2}+\frac{c^s}{2^{r-1}\mathrm{aut}(F)}+o_{n,d}(\sqrt{d}).$$

结论随即得证。 □

致谢。 作者感谢 Annika Heckel、Noela Müller、Connor Riddlesden 和 Lluís Vena 的有益讨论，尤其是关于定理 1.1。

经费支持。 作者在春季学期驻留于伯克利的西蒙斯·劳弗数学科学研究所期间，获得美国国家科学基金会 DMS-1928930 号拨款的支持。第二作者还获得美国国家科学基金会 CISE 2233897 号拨款的支持。第三作者还获得荷兰科学研究组织（NWO）通过 Gravitation NETWORKS 资助项目 024.002.003，以及欧盟地平线 2020 研究与创新计划通过玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助项目协议号 945045 提供的支持。

参考文献

[1] BAYATI, M., GAMARNIK, D. 和 TETALI, P. (2010). 稀疏随机图中插值法与标度极限的组合方法。载于《第四十二届 ACM 计算理论研讨会论文集》，105–114。[2] BURGHART, F., HECKEL, A., KAUFMANN, M., MÜLLER, N. 和 PASCH, M. (2024). 随机图中因子的尖锐阈值。arXiv 预印本 arXiv:2411.14138。[3] CUMMINGS, J., KRÁL', D., PFENDER, F., SPERFELD, K., TREGLOWN, A. 和 YOUNG, M. (2013). 三色图中的单色三角形。J. Combin. Theory Ser. B 103 489–503. https: //doi.org/ 10 1016 2013 05 002 3071377 . /j.jctb. . . MR DEMBO, A., MONTANARI, A. 和 SEN, S. ( ). [4] 2017 稀疏随机图的极值割。Ann. Probab. **45** 1190 1217 10 1214 15 1084 3630296 – . [5] 2022 https://doi.org/ . / -AOP MR DING, J., SLY, A. 和 SUN, N. ( ). 大 k 可满足性猜想的证明。Annals of Mathematics 196 1–388.[6] GAMARNIK, D., JAGANNATH, A. 和 KIZILDA ˘G, E. C. (2025). 伊辛 p 自旋玻璃模型中的碎裂。Probability Theory and Related Fields 1–53。[7] GAMARNIK, D. 和 LI, Q. (2018). 稀疏随机图的最大割。Random Structures Algorithms **52** 219 262 10 1002 20738 3758958 – . [8] 1959 https://doi.org/ . /rsa. MR GOODMAN, A. W. ( ). 关于任何聚会中的熟人与陌生人集合。Amer. Math. Monthly 66 778 783 10 2307 2310464 – . https://doi.org/ . / MR 1076140 . / MR [9] 2018 SEN, S. ( ). 稀疏随机超图与自旋玻璃上的优化。Random Structures Algorithms 53 504–536. https://doi.org/10.1002/rsa.20774 MR3854043

[10] SLEPIAN, D. (1962**41** 463 501). 高斯噪声的单侧屏障问题。 贝尔系统技术期刊 –.[11] ZAKHAROV, P. A. 和 SHABANOV, D. A. (2021).论随机超图中的最大割。 *Dokl. Math.* **104** 336–339. Dokl. Akad. Nauk 的译文 **501** (2021), 26–30. MR4440338