arXiv:2602.03789v1 [stat.ML] 3 Feb 2026

惰性与点质量随机插值的流与扩散快速采样

Gabriel Damsholt [1] **Jes Frellsen** [2] **Susanne Ditlevsen** [1]

摘要

随机插值统一了流与扩散这两种广受欢迎的生成建模框架。这些方法中的一个主要超参数是插值调度，它决定了如何将标准高斯分布基准测度桥接到任意目标测度。我们证明，对于任意调度和扩散系数，如何将具有任意扩散系数的随机微分方程（SDE）样本路径转换为另一任意调度和扩散系数下的唯一样本路径。随后，我们将随机插值框架扩展至更广泛的一类点质量调度，在这类调度中，高斯分布基准测度会坍缩为点质量测度。在高斯数据的假设下，我们找到了使漂移恒为零的惰性调度族，并证明采用确定性采样时可得到扩散模型中常用的方差保持调度，而采用统计最优的随机微分方程采样时则可得到我们的点质量调度。最后，为了展示这些理论结果在真实且高度非高斯数据上的实用性，我们将惰性调度转换应用于一个最先进的预训练流模型，并表明无需重新训练模型即可用更少的步骤生成图像。

1. 背景

生成式人工智能的一个基本目标是从一个复杂的目标分布中采样，该分布可能位于非常高维的空间中，且只能通过有限的样本数据集获取。具体而言，设 $X^{(1)}$、$X^{(2)}$、……、$X^{(N)} \in \mathbb{R}^d$ 是从密度为 ρ_X 的未知分布中独立同分布抽取的样本。然后，我们希望生成新的样本 $X \sim \rho_X$。

解决这一基本生成问题的方法有很多。许多现代方法都基于动力系统。其思路是学习一个动力系统的动力学：该系统具有可通过解析方式采样的初始概率分布（通常取为标准高斯分布），以及最终概率分布 ρ_X。随后，可以通过从标准高斯分布中采样，并对动力学进行积分，使其从初始时刻演化至最终时刻，从而生成来自 ρ_X 的样本。

我们将采用灵活的随机插值（Albergo 等人，2025年）框架，该框架统一了基于流和扩散的生成模型。我们将简要介绍这一框架，然后陈述我们的贡献。

1.1. 空间线性随机插值

随机插值框架允许对任意分布进行耦合，甚至可以耦合任意多个分布（Albergo 等人，2024），耦合方式可以是空间非线性的，甚至可以使用矩阵系数（Negrel 等人，2025年）。我们将仅研究最简单且最常见的情形，即“空间线性单边随机插值”（Albergo 等人，2025年，式4.15），我们称之为随机插值，或简称插值。下面我们回顾其定义和一些核心结果。

定义 1.1（随机插值）。给定相互独立的随机变量 Z，$X \in \mathbb{R}^d$ 满足 $Z \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ $X \sim \rho_X$，以及非负标量函数 α，β：$[0,1] \to [0,\infty)$ 满足以下判据，则随机插值 或简称插值 是如下随机过程

$$I_t = \alpha_t Z + \beta_t X, \quad t \in [0,1],$$

满足 α，$\beta \in C^1([0,1])$ 的边界条件$\alpha_0 = \beta_1 = 1$，$\alpha_1 = \beta_0 = 0$ 以及单调性条件 $\dot{\alpha}_t < 0$ 和 $\dot{\beta}_t > 0$，对所有 $t \in (0, 1)$ 均成立。[1]

注意，对于 α，β 的所有有效取值，$I_0 \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ 和 $I_1 \sim \rho_X$ 均成立。

以下是一个主要关注对象。

[1]哥本哈根大学数学科学系，丹麦哥本哈根 [2]丹麦技术大学机器学习与信号处理系，丹麦灵比。通讯作者：Gabriel Damsholt<gnd@math.ku.dk>。

预印本。*2026*年*2*月*4*日。

[1]可以允许 α 和 β 的单侧导数在任一端点发散，只要这些单侧导数在扩展实数中存在，相关讨论见Albergo 等人（2025年）。为简单起见，我们要求导数有界。

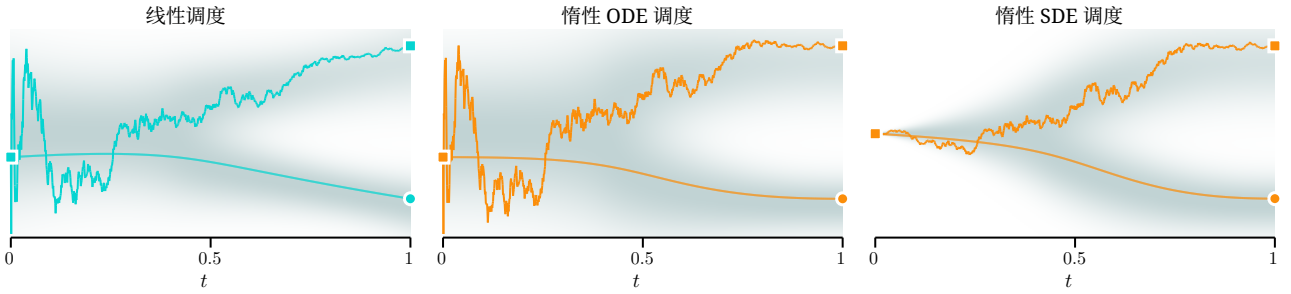


图 1. 常微分方程 ($\varepsilon \equiv 0$) 与统计最优 SDE ($\varepsilon = \varepsilon^*$) 在三种不同插值调度下的样本路径，针对 ρ_X 一个动力学解析已知的高斯混合密度 (Albergo 等人, 2025年, 附录 A)。所有路径均从相同的初始条件出发；对于最左侧两个采用允许密度调度的插值，该条件位于初始位置（青色圆圈），而对于最右侧的点质量调度，则位于初始漂移处。三个 SDE 解共享同一次维纳过程实现。最左侧为定义 5.1 中的线性调度；中间和最右侧分别为例 7.4 中用于 ODE 和统计最优 SDE 的惰性插值。由于 $u_t = t$ 对三种调度均成立，因此所有样本路径在空间重参数化后等价。请注意，ODE 和 SDE 的所有样本路径分别终止于相同位置。三种调度及其统计最优扩散尺度的图示见图 4 。

定义 1.2 (调度)。 定义 $(\alpha,\ \beta)$ 1.1 中的函数对 称为插值调度，也简称为调度。

调度是一个超参数，它决定$\mathcal{N}(0、\mathbf{I})$与 ρ_X 如何在时间上建立桥接。一个典型的选择是$\alpha_t = 1-t,\ \beta_t = t$；流匹配采用的正是这种选择。

接下来，我们定义以下函数。

定义 1.3。 对于定义 1.1 中具有密度 $\rho:\ [0,1]\times\mathbb{R}^d \to (0,\infty)$和 $\varepsilon:\ [0,1]\to[0,\infty)$的插值，我们对 $(t,\ x)\in[0,1]\times\mathbb{R}^d$定义以下函数:

$$\eta_Z(t,x) := \mathbb{E}[Z \mid I_t = x], \qquad \text{“噪声预测器”}$$
$$\eta_X(t,x) := \mathbb{E}[X \mid I_t = x], \qquad \text{“data predictor”}$$
$$s(t,x) := \nabla \log \rho(t,x), \qquad \text{“score”}$$
$$b^\varepsilon(t,\ x) := \dot\alpha_t\eta_Z(t,\ x) + \beta_t\eta_X(t,\ x) + \varepsilon_t s(t,\ x)。\ \text{“漂移”}$$

随机插值框架的核心思想是，构造一族由任意随时间变化的加性扩散尺度 随机微分方程（SDE）索引的 $\varepsilon:\ [0,1]\to[0,\infty)$，其解与 I_t 具有相同的边缘分布（但联合分布不同），如下述定理所述（Albergo 等人, 2025年, 推论 18）。

定理 1.4 （随机微分方程）。 设 $\varepsilon_t \in C^1([0,1])$ 是任意非负标量函数。那么，随机微分方程的解

$$\mathrm{d}X_t^\varepsilon = b^\varepsilon(t,X_t^\varepsilon)\,\mathrm{d}t + \sqrt{2\varepsilon_t}\,\mathrm{d}W_t, \tag{1}$$

在向前时间演化中求解 t，其中 $X_0^\varepsilon \sim \mathcal{N}(0,\ \mathbf{I})$ 与W相互独立，则对所有 $t\in[0,1]$，均满足 概率分布(X_t^ε) = 概率分布(I_t)。

有了上述结果，我们可以选择任意非负的扩散尺度 ε，采样 $X_0^\varepsilon \sim \mathcal{N}(0,\ \mathbf{I})$，并在已知漂移$b^\varepsilon$的情况下，从 $t=0$ 到 $t=1$ 向前时间演化求解随机微分方程。于是 $X_1^\varepsilon \sim \rho_X$，正如所需。特别地，令 $\varepsilon\equiv 0$即可得到确定性的概率流常微分方程。

定义 1.3 中的每个函数都可以刻画为一个简单平方损失目标函数的极小化元，从而无需模拟随机微分方程，即可根据数据进行无偏蒙特卡洛估计。随后，利用学得的动力学 $\hat{}$估计来生成数据，例如，根据数据学习 $b^\varepsilon \approx b^\varepsilon$ ，再将 $b^\varepsilon \approx b^\varepsilon$ $\hat{}$代入，并求解随机微分方程（1），其中将 b^ε 替换为 b^ε ，以采样$\hat{}X \sim \hat{}\rho_X \approx \rho_X$。

在全文中，我们作如下假设，其成立与否取决于 ρ_X的性质、（$\alpha,\ \beta$）的光滑性以及 ε 的选取（详见 Albergo 等人（2025年））。

假设 1.5。数据密度满足 $\rho_X(x) > 0$，对所有 $x\in\mathbb{R}^d$ 均成立；插值的密度 $\rho:\ [0,1]\times\mathbb{R}^d \to (0,\infty)$ 满足 $\rho(\cdot,x)\in C^1([0,1])$，对所有 $x\in\mathbb{R}^d$ 均成立；$\rho(t,\cdot)\in C^2(\mathbb{R}^d)$，对所有 $t\in[0,1]$ 均成立；定义 1.3 中的函数也满足类似条件。此外，对于所有初始条件，随机微分方程（1）都有唯一的强解。

2. 贡献

1. 在定理 5.5中，我们将已有结果从常微分方程推广到随机微分方程框架，并证明：对于任意调度和扩散尺度，任何随机微分方程（1）的强解都可以唯一地转换为具有任意不同调度和扩散尺度的随机微分方程（1）的相应强解。

2. 在定义 6.1 和定理 6.3 中，我们将插值调度扩展到包含点质量边界条件 $\alpha_0 = 0$，并给出随机微分方程在这一扩展框架下存在的充分条件，其中正态分布初始条件位于初始漂移中，而非初始位置。我们强调，该结果在常微分方程情形下同样成立，即当 $\varepsilon\equiv 0$。

3. 假设 $X\sim\mathcal{N}(0,\ \mathbf{I})$，我们在命题7.1中证明，惰性调度族——即使动力学恒为零的调度族——对于

常微分方程满足方差保持性质 $\alpha_t^2+\beta_t^2=1$，而对于具有统计最优扩散尺度的随机微分方程，它满足 $\alpha_t^2+\beta_t^2=\beta_t$。特别地，$\alpha_0=0$ 在后一种情形下成立，这促使我们将调度扩展到点质量情形。

4. 在命题7.5 和7.6 以及算法1 和2 中，我们针对任何采用线性调度的预训练流匹配模型，推导出特别简单且理论依据充分的空间（但非时间）重参数化公式 $\alpha_t=1-t$，$\beta_t=t$ 分别得到惰性常微分方程和统计最优随机微分方程调度。

5. 在第8 节中，我们使用最先进的自然图像生成流匹配模型开展实证实验，并表明采用这种重参数化后，常微分方程情形下可以用更少的步数进行数值采样；对于统计最优随机微分方程，效果尤为显著，而该方程在 $t=0$处在数值上原本是未定义的。

3. 相关工作

随机插值框架（Albergo 等人，2025）统一了现有基于动力系统的连续时间生成范式，即流匹配（Lipman 等，2023）和扩散模型[2]（Sohl-Dickstein 等，2015；Song 与 Ermon，2019；Song 等，2021）；该框架将两个主要超参数区分开来：在时间上耦合高斯分布与数据分布的插值调度，以及对这一耦合进行采样的随机过程的随机性。随机性的最优水平主要在随机插值文献中得到探讨（Albergo 等人，2025；Chen 等，2024；Ma 等，2024；Chen 等，2025），而关于调整插值调度以简化数值积分的研究则更多，不过往往基于启发式方法或实证结果（Nichol 与 Dhariwal，2021；Karras 等，2022；Song 与 Ermon，2020；Xue 等，2024）。我们的工作主要受到 Chen 等（2025）的启发，但我们考虑的是统计最优随机微分方程，而不只是常微分方程，因此得到了相关研究较少的点质量调度（Albergo 等人，2025；Chen 等，2024）。我们的工作也与 Sabour 等（2024）相似，但除了时间重参数化，我们还考虑了空间重参数化，甚至将其拓展到点质量调度。

训练后改变插值调度，近来已被用于常微分方程采样（Liu，2024；Lai 等人，2025；Chen 等人，2025），但据我们所知，此前尚未为随机微分方程采样建立路径等价性。

还存在更复杂的方法，可用更少的步数从流模型和扩散模型中采样；一些值得注意的例子包括流校正（Liu 等人，2023年）、一致性模型（Song 等人，2023年；Boffi 等人，2025年）以及基于（熵正则化）最优传输的方法（Pooladian 等人，2023年；Shi 等人，2023年；Bortoli 等人，2021年；Pooladian & Niles-Weed，2025年）。这些方法大多是对我们所探讨的调度选择的补充。

[2]基于分数的生成模型是去噪扩散概率模型（Ho 等人，2020年）在连续时间下的对应形式。

4. 插值函数内部转换公式

本节固定调度（α，β），并说明如何在定义1.3中的各个函数之间进行转换。证明见附录A。

以下扩散尺度在我们的工作中起着重要作用。我们现在对其进行定义，并在后文说明其动机。

定义 4.1。给定一个（α，β）满足定义1.1 中判据的插值调度，我们将 $\varepsilon_t^*\colon\ [0,1]\to[0,\infty]$ 定义为标量函数

$$\varepsilon_t^*=\alpha_t^2\frac{\dot\beta_t}{\beta_t}-\alpha_t\dot\alpha_t,$$

其中在 $t=0$ 处，该方程被解释为扩展实数中的右极限。

我们首先证明，对于固定的插值调度（α，β），定义1.3 中的任一函数都通过仿射变换唯一确定其余所有函数，而这些变换可利用上述关于 ε^* 的定义加以简化。该结果推广了将得分与噪声预测器联系起来的著名结果（Albergo 等人，2025年，定理 8），以及Lai 等人（2025年，命题 6.3.1）针对常微分方程情形 $\varepsilon\equiv0$。

命题 4.2（插值函数内部转换公式）。对于固定的插值调度（α，β）以及非负的$\varepsilon\in C^1([0,1])$，函数 η_Z、η_X、s、b^ε 中的每一个都在（0，1）$\times\mathbb{R}^d$ 上唯一确定其余所有函数。特别地，每个函数都可以用得分表示为

$$\begin{aligned}\eta_Z(t,x)&=-\alpha_t s(t,x),\\ \eta_X(t,x)&=\big(x+\alpha_t^2 s(t,x)\big)/\beta_t,\\ b^\varepsilon(t,x)&=(\varepsilon_t^*+\varepsilon_t)s(t,x)+(\dot\beta_t/\beta_t)x.\end{aligned}$$

下一个定理将刻画 ε^* 在何种精确意义上是统计最优的扩散尺度。这基本上就是 Chen 等人(2024中的公式 13，但我们的证明更简单。

定理 4.3。假设我们已获得统计学习得到的估计值$\hat{}\ \hat{}\eta_Z$、$\hat{}\eta_X$、$\hat s$ 或 b^ε，它们对应定义 *1.3* 中的真实函数；其余估计值由命题 *4.2*给出。令 X_t^ε满足随机微分方程 (1)，并考虑代入式随机微分方程

$$\mathrm{d}\hat X_t^\varepsilon=\hat b^\varepsilon(t,\hat X_t^\varepsilon)\,\mathrm{d}t+\sqrt{2\varepsilon_t}\,\mathrm{d}W_t,$$

已向前时间演化求解 t，且$\hat{}\ X_0^\varepsilon\sim\mathcal{N}(0、\mathbf{I})$ 独立于W。那么，*Kullback-Leibler* 散度的极小化元

$\hat{}$ X^ε 与 X^ε 在扩散尺度 ε上的路径测度之间的

$$\operatorname*{argmin}_{\varepsilon\geq 0,\varepsilon\in C^1((0,1])} \mathrm{KL}\Big(X^\varepsilon, \hat{X}^\varepsilon\Big) = \varepsilon^*,$$

且最小值为

$$\mathrm{KL}\Big(X^{\varepsilon^*}, \hat{X}^{\varepsilon^*}\Big) = \int_0^1 \varepsilon_t^* \mathbb{E}\big[\|s(t,I_t) - \hat{s}(t,I_t)\|^2\big]\,\mathrm{d}t.$$

遗憾的是，统计最优扩散尺度 ε^*在数值上表现不佳：对于任何调度（α，β），只要其满足定义1.1，该尺度在 $t=0$ 处为无穷且不可积（命题B.1）。尽管如此，统计最优随机微分方程，即随机微分方程（1），其中取 $\varepsilon=\varepsilon^*$，在 $t\in(0,1]$）上是良定义的，并且当 $t\to 0_+$时表现得像（非连续的）白噪声过程。见命题B.5，它证明了 ε^*、奥恩斯坦-乌伦贝克过程与扩散模型之间的等价性。

5. 插值间转换公式

现在我们说明如何把定义1.3 中的函数从一个调度转换到另一个调度，以及如何在各随机微分方程的解之间进行转换。如下线性调度用于流匹配，从而简化了转换公式。

定义 5.1（线性插值）。设 $\alpha_t := 1-t$，$\beta_t := t$。记 $I_t := \alpha_t Z + \beta_t X$ 为线性插值。记 η_Z，η_X，s，b^ε 为其关联函数，如定义 1.3所示；并记 X_t^ε 为其关联的随机微分方程（1）。

命题 5.2. 对于定义 I_t *5.1* 中的线性插值，有 $\varepsilon_t^* = (1-t)/t$。因此

$$\int_s^t 2\bar{\varepsilon}_u^*\,\mathrm{d}u = 2(\log(t) - t - \log(s) + s)$$

对于 $0<s\leq t\leq 1$，积分为无穷大（$s=0$）。

定义 5.3. 对于 $t\in[0,1]$，我们定义函数

$$c_t := \alpha_t + \beta_t, \quad u_t := \beta_t/c_t.$$

其含义是：c 是一个（通常不可逆的）空间变换，而 u 则是一个适当的时间变换。事实上，定义 1.1 中关于调度的单调性假设 $(\alpha,\ \beta)$ 意味着 $u\in C^1([0,1])$，并且在（0, 1）上严格递增，因此其反函数 $t_u := u^{-1}(u)$ 存在。

下面的命题可视为对命题 4.2 的补充。它对 Chen 等人 (2025年) 的命题 3.1 和 Lai 等人 (2025 年) 的命题 6.3.3 进行了改述和推广，而这两个命题仅考虑常微分方程的情形（$\varepsilon\equiv 0$）。

命题 5.4（相互转换公式）。对于一个调度（α,β）以及非负的 $\varepsilon\in C^1([0,1])$，函数 $\eta_Z, \eta_X, s, b^\varepsilon$ 均可由与线性插值相关的任意函数$\eta_Z, \eta_X, s, b^\varepsilon$ 唯一确定。特别是，

$$\begin{aligned}
\eta_Z(t,x) &= \bar{\eta}_Z(u_t, x/c_t), \quad \eta_X(t,x) = \bar{\eta}_X(u_t, x/c_t),\\
s(t,x) &= (1/c_t)\bar{s}(u_t, x/c_t),\\
b^\varepsilon(t,x) &= \frac{\dot{c}_t}{c_t}x + c_t\dot{u}_t\bar{b}^{\bar{\varepsilon}}\left(u_t, \frac{x}{c_t}\right) \quad \textit{for} \quad \bar{\varepsilon}_{u_t} = \frac{\alpha_t\varepsilon_t}{\beta_t\varepsilon_t^*}.
\end{aligned}$$

最后，我们证明了最强的转换结果；据我们所知，这一结果对 $\varepsilon\neq 0$而言是全新的。

定理 *5.5*（路径级转换）。设 (α,β) 是满足定义 *1.1* 要求的调度，设 $z\in\mathbb{R}^d$，并设 $(W_t)_{t\in[0,1]}$ 是一个维纳过程实现。令 X_t^ε 在物理时间 t 中从 $X_0^\varepsilon = z$ 出发，由扩散尺度为 ε的 W 驱动，满足随机微分方程 *(1)*。令 X_u^ε 在重参数化时间 $u=u_t$ 中从$X_0^\varepsilon = z$ 出发，在采用线性调度时满足随机微分方程 *(1)*，并由

$$\overline{W}_u = \int_0^{t_u} \sqrt{\dot{u}_s}\,\mathrm{d}W_s, \quad u\in[0,1]$$

扩散尺度为 $\varepsilon_u = (\bar{\alpha}_{t_u}\varepsilon_{t_u})/(\beta_{t_u}\varepsilon^*_{t_u})$。那么，解 X_t^ε 可由与线性插值相关的解 $X_{u_t}^{\bar{\varepsilon}}$ 通过以下公式得到

$$X_t^\varepsilon = c_t\overline{X}_{u_t}^{\bar{\varepsilon}}, \quad t\in[0,1].$$

In particular, $X_1^\varepsilon = \overline{X}_1^{\bar{\varepsilon}}$ *(since* $c_1=1$*).*

有了这一结果，只要能够从线性插值中采样样本路径，就可以从具有任意调度和任意扩散尺度的插值中采样样本路径（只需两次应用定理 5.5，将任意调度转换为线性调度）。图 1 中最左侧的两个图分别展示了常微分方程和统计最优随机微分方程的情况。

注 5.6。我们将看到，恒等时间变换$u_t = t$ 特别值得关注。此时，定理 5.5 会大大简化，具体而言，$W = W$。

6. 点质量调度

我们利用前述结果，将定义 1.1 扩展为从点质量而非（非退化）高斯分布输运到目标分布。我们将动机留到下一节再讨论。

定义 6.1（点质量调度和插值）。满足以下条件的函数对 $\alpha,\beta\in C^1([0,1])$

1. $\alpha_0 = \alpha_1 = \beta_0 = 0, \beta_1 = 1$,
2. $\alpha_t > 0, \beta_t > 0$ 对所有 $t\in(0,1)$,

3. $\beta_t = o(\alpha_t)$ 作为 $t \to 0_+$ (等价地说 $u_0 = 0$)，4. $\alpha_t^2 = O(\beta_t)$ 作为 $t \to 0_+$，5. $\dot{u}_0 :=$ 极限 $_{t\to 0_+}\, \dot{u}_t < \infty$，6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\beta_t/\alpha_t) > 0$ 对所有 $t \in (0,1)$ （等价地说 $\dot{u}_t > 0$），

我们称之为点质量调度。相应的插值称为点质量插值。

注6.2。条件 $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ 是插值的密度在 $t = 0$处收缩为点质量的充要条件。条件 $u_0 = 0$ 是初始漂移可通过解析方式采样的充要条件；否则 $u_0 > 0$我们就必须对 $I_{u_0} \neq I_0$ 的非平凡概率分布进行采样才能采样初始漂移，这在实践中是不可能的。条件 $\alpha_t^2 = O(\beta_t)$ 当 $t \to 0_+$ 时属于技术性条件，可以放宽；参见定理6.3证明末尾的注释。假设 $\dot{u}_0 < \infty$给出 $u \in C^1([0,1])$，这并非绝对必要，但为简便起见我们仍作此假设。最后一个假设等价于 $\dot{u}_t > 0$ 对所有 $t \in (0,\ 1)$ 成立，从而 $t \mapsto u_t$ 是一个适当的时间变换。

值得注意的是，即使在常微分方程情形下，点质量插值的初始漂移也可以根据线性插值的初始条件逐点定义，如下所示。

定理 *6.3.* 设 (α, β) 是定义 *6.1* 中的点质量调度。那么，对于任意非负有界的扩散尺度 $\varepsilon \in C^1([0,1])$，随机微分方程 *(1)* 对 $t \in (0,1]$ 且初始位置为 $X_0^\varepsilon = 0$ 在经典意义下是良定义的，且初始漂移在分布意义下是良定义的。对所有 $t \in [0,1]$，均有概率分布(X_t^ε) $=$ 概率分布(I_t)，并且定理 *5.5* 仍然适用：特别地，点质量随机微分方程解及其初始漂移与线性插值的解及其初始条件之间的关系为 $X_t^\varepsilon = c_t X^\varepsilon_{u_t}$，其中 $t \in [0,1]$ 且 $b^\varepsilon(0, X_0^\varepsilon) = \big(\dot{c}_0 - \lim_{t\to 0_+}(\varepsilon_t/\alpha_t)\big) X_0^\varepsilon$。

注6.4。定理 6.3 中的初始漂移在常微分方程情形下始终有界 $\varepsilon \equiv 0$，而在随机微分方程情形下，当且仅当我们选择的扩散尺度满足 $\varepsilon_t \in O(\alpha_t)$ 当 $t \to 0_+$时，它才有界。

定理 6.3 表明，对于定义1.1中的、允许密度存在的随机插值，正态分布的初始条件位于初始位置；而对于定义 6.1中的点质量插值，初始条件则位于初始随机微分方程漂移（或当 $\varepsilon \equiv 0$时的常微分方程速度）。据我们所知，这种非标准的常微分方程此前未曾在流或扩散文献中出现过；而随机微分方程则在略有不同的设定下由 Albergo 等人 (2025年)；Chen 等人 (2024) 研究过。

图中绘出了点质量插值的一个样本路径，以及与之对应的线性插值路径，分别针对常微分方程1 和统计最优随机微分方程。

最后，我们将Chen 等人(2025年) 的命题 2.5 推广到点质量情形。

命题 6.5。 设 $(\alpha,\ \beta)$ 为任意有效调度，也可以是点质量调度。在定理 *4.3*的假设下，当 $\varepsilon = \varepsilon^*$ 时取得的最小路径测度 *KL* 散度与调度的选择无关。

命题6.5指出，我们必须针对某种不同于统计最优性的准则来优化调度，这正是我们在下一节所做的。

7. 高斯数据假设下的惰性调度

本节中，我们作出一个过度简化的假设，即 $X \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$。这使我们能够确定一些调度族，使得随机微分方程漂移恒为零；其动机在于，这类调度能最大限度地减少从基准测度输运至目标测度所需的能量。我们将这些调度称为惰性调度。在实验部分，我们通过实验证明，即使在现实、高维且高度非高斯的情形下，在高斯数据假设下得到的结果仍然有用。

7.1. 与流和扩散的关系

为简化表述，我们重点考察扩散尺度的两种自然选择：$\varepsilon \equiv 0$ 和 $\varepsilon = \varepsilon^*$。前者对应常微分方程采样；在线性插值下，它简化为标准流匹配（见定义5.1）。后者则简化为对时间反向的奥恩斯坦-乌伦贝克过程进行采样，如扩散模型中所述（命题B.5）；下文将其称为“统计最优随机微分方程采样”。常微分方程采样的数值积分较为简单，但根据定理4.3，统计最优随机微分方程采样对学习得到的漂移估计中的近似误差具有最大的鲁棒性。全文采用以下记号：$b := b^{\varepsilon\equiv 0}$ 表示常微分方程速度，而$b^* := b^{\varepsilon=\varepsilon^*}$ 表示统计最优随机微分方程漂移。

7.2. 识别惰性调度

在高斯数据假设下，要求速度和漂移恒为零，会减少调度中的一个自由度。

命题 7.1 (惰性调度族)。 假设 $X \sim \mathcal{N}(0,\ \mathbf{I})$。那么对于所有 $(t, x) \in [0,1] \times \mathbb{R}^d$，均有

1. $$b(t,x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_t^2 + \beta_t^2 = 1.$$
   换言之，当且仅当调度为方差保持时，常微分方程速度恒为零。
2. $$b^*(t,x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_t^2 + \beta_t^2 = \beta_t.$$

这意味着 $\alpha_0 = 0$，$\beta_t = o(\alpha_t)$ $\alpha_t^2 = O($ β_t $t \to)$ 当0_+。我们有 $\dot{u}_0 < \infty \iff \beta_t = O(\sqrt{\beta_t})$ 此时，根据定义 *6 1* $t \in [0,1]$ $\varepsilon_t^* =$ ，它也对所有满足$\beta_t/2$ 的情况成立，因此

$$\int_s^t 2\varepsilon_u^* \,\mathrm{d}u = \beta_t - \beta_s \quad \textit{for} \quad 0 \le s \le t \le 1.$$

命题 7.1 有趣地表明，在高斯分布数据假设下，要求常微分方程的速度恒为零，等同于选择方差保持调度。这种调度通常用于扩散模型，而非流模型。另一方面，对于统计最优随机微分方程采样，这会导向点质量调度，而这一方向在文献中尚未得到充分探索。

注 7.2. 根据命题 7.1，结合不可避免的边界条件 $\beta_0 = 0$，$\beta_1 = 1$，我们看到$\int_0^1 2\varepsilon_u^* \,\mathrm{d}u = 1$，即从 $t = 0$ 到 $t = 1$ 的随机微分方程解中鞅部分的二次变差固定为 1。这一点颇为显著，因为根据命题 B.1，对于 $\alpha_0 = 1$，同一积分固定为 ∞。即使 X 不服从正态分布，这一结论仍然成立。然而，很容易证明，将该二次变差除以总方差进行归一化后，对于所有$t \in$，有 $\int_0^t (2\varepsilon_u^*)/\beta_u \,\mathrm{d}u = [\log(\beta_u)]_0^t = \infty$ $(0,1],$，这与命题 B.1 的结果相似。

接下来一个自然的问题是如何消除最后一个自由度。下面我们给出两个自然的例子，然后讨论为什么第二个例子在实践中很有用。

示例 7.3 ($\beta_t = t$)。在 *ODE* 情形下，设定 $\beta_t = t$ 可得 $\alpha_t = \sqrt{1-t^2}$。有趣的是，这并非流匹配模型中常用的线性调度。此外 $\dot{\alpha}_1 = -\infty$。转而考虑 *SDE* 情形，可得 $\alpha_t = \sqrt{t}$ $(1-t)$和 $2\varepsilon_t^* = 1$。当 $X \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I})$ 时，*SDE* 的解是一个标准的 d 维布朗运动$(W_t)_{t\in[0,1]}$，且 $W_0 = 0$。此外 $\dot{\alpha}_0 = \infty$，并且 $\dot{\alpha}_1 = -\infty$。这些调度中 $\dot{\alpha}$ 的端点爆炸令人担忧。

例 *7.4* ($u_t = t$)。定义 $d_t := (1-t)^2 + t^2$。那么，对于要求 $u_t = t$ 的 *ODE* 情形，可得调度 $\alpha_t = (1-t)/\sqrt{d_t}$，$\beta_t = t/\sqrt{d_t}$。于是 $\dot{\alpha}_0 = 0$、$\dot{\alpha}_1 = -1$，且 . ,$\beta_0 = 1$、$\beta_1 = 0$。转而考虑 *SDE* 情形，可得调度 $\alpha_t = t(1-t)/d_t$，$\beta_t = t^2/d_t$；根据命题 *7.1*，这是一个点质量调度，因为当 . $t \to 0_+$ $\dot{\alpha}_0 = 1$ $\dot{\alpha}_1 = -1$ $\beta_0 =$ 时，$\dot{\beta}_t = O(\sqrt{\beta_t})$。现在我们有 ，以及$\beta_1 = \varepsilon_0^* = \varepsilon_1^* = 0$，并且还有 $\dot{c}_0 = 1 = \lim_{t\to 0_+} \varepsilon_t^*/\alpha_t$，因此根据定理 *6.3*，初始漂移为零。两个调度中的所有函数处处有界，这一点从数值角度看颇具吸引力。

我们可以进一步刻画并说明$u_t = t$ 示例7.4 中的约束如下。考虑对数信号噪声比 $\lambda_t := \log(\beta_t^2/\alpha_t^2)$。因此，$\lambda_0 = -\infty$ 且$\lambda_1 = \infty$。[3] 要求 λ_t 为线性函数似乎是很自然的

[3]即使调度是点质量调度，我们仍然有

在*logit*时间中。具体而言，定义 $\tau(t) := 2\log(t/(1-t))$，其逆函数为 $t(\tau) = (1+\exp(-\tau/2))^{-1}$，即增长率为 $1/2$ 的逻辑函数。那么，要求 $\lambda_t = \tau(t)$ 等价于要求 $u_t = t$。

7.3. 预训练流匹配模型的惰性调度转换

基于目前为止我们所展示的内容，我们可以将任意具有任意调度的流或扩散模型（更一般地说，任意随机插值）转换为其对应的惰性调度变体（在高斯假设下）。这样做的动机在于，当动力学较为平缓时，对常微分方程或随机微分方程进行数值求解会更加容易。下一节中的实证结果强烈表明，即使我们严重违背高斯数据假设，在实践中，采用惰性调度后动力学也会变得更加平缓。为使调度转换尤其简单，我们聚焦于示例 $u_t = t$ 中所考虑的7.4情形。我们专注于将流匹配模型速度 v^{flow}转换为线性插值的常微分方程速度b，该插值 I_t 定义见5.1（另见附录B.1）。

命题 7.5 （线性速度到惰性常微分方程速度）。定义调度

$$\alpha_t := (1-t)/\sqrt{d_t}, \quad \beta_t := t/\sqrt{d_t}, \quad d_t := (1-t)^2 + t^2,$$

如例 *7.4*所示，并假设我们可以访问线性插值（定义 $b = v^{flow}$ *5.1*）的常微分方程速度。那么，该速度满足

$$b(t,x) = ((1-2t)/(d_t))x + (1/\sqrt{d_t})\bar{b}(t, \sqrt{d_t}x),$$

对所有 $(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}^d$均成立。特别地，初始速度满足

$$b(0,z) = z + \bar{b}(0,z) = \mathbb{E}[X] \quad \forall z \in \mathbb{R}^d.$$

命题 7.6 （线性速度到惰性 SDE 漂移）。定义调度

$$\alpha_t := t(1-t)/d_t, \quad \beta_t := t^2/d_t, \quad d_t := (1-t)^2 + t^2,$$

如例 *7.4*所示，并假设我们可以访问线性插值（定义 $b = v^{flow}$ *5.1*）的常微分方程速度。那么，统计最优随机微分方程漂移满足

$$b^*(t,x) = (2/d_t)((1-2t)x + t\bar{b}(t, (d_t/t)x)),$$

对所有 $(t,x) \in (0,1] \times \mathbb{R}^d$均成立，且初始漂移恒为零，即 $b^*(0,0) = 0$。

我们可以将命题7.5 和7.6 重述为特别简单的算法，用于求解惰性常微分方程和随机微分方程，这些算法使用

limit $\lim_{t\to 0_+} \beta_t/\alpha_t = 0.$



图2. 分别针对常微分方程与统计最优随机微分方程，以不同数量的预测-校正步从 PRX 流模型采样得到的图像；采样分别使用原始线性流模型调度，以及转换为惰性调度。所用文本提示为“一辆汽车停在红灯前”。正如预期，随着求解器步数增加，图像质量提高，并似乎收敛到“真值”参考图像；该参考图像取决于使用的是常微分方程还是随机微分方程，而对所用调度的依赖较小。参见此 Zenodo 链接查看动画。

线性常微分方程速度。伪代码见算法1 和2。

我们强调，我们可以证明与命题7.5 和7.6 类似的结果，但其出发点是预训练扩散模型而非流模型，或者更一般地，是具有任意调度和任意训练目标的预训练随机插值。为简洁起见，此处省略。

注记 7.7。 请注意，命题7.5和7.6 在我们仅能获得近似线性流速度 $\hat{v}^{\text{flow}} \approx v^{\text{flow}}$ （由数据学习得到）时通常并不精确成立，而实践中情况总是如此。

8. 实验

为了研究我们的惰性调度在具有高度非高斯数据的真实高维情形中的实用性，我们在最新、规模最大的 Photoroom Experimental（PRX）文生图无分类器引导潜空间流模型（Photoroom，2025年；Almaz´等人，2025年；Lipman等人，2023年；Ho与Salimans，2022年）上进行了实验。该模型约有13亿个参数，目前处于测试阶段[4]。我们将引导强度固定为推荐值 5，并希望研究：如算法 1 和 2中所详述，利用命题 7.5 和 7.6 动态切换至惰性调度，能否使我们使用常微分方程和统计最优随机微分方程，分别以更少的步数生成优质图像。我们采用预测-校正格式，它大致结合了显式欧拉（-Maruyama）格式与 Heun 格式，并且我们发现它是三种格式中效率最高的。关于每种格式的精确定义以及一些图像对比示例，请参见附录 E。

我们不采用 Fr 等标准但任意的图像质量指标´échet Inception 距离（Heusel等人，2017年）和 Inception 分数（Salimans等人，2016年），而是考察预测-校正求解器收敛到理想化“真值”参考图像的速度，具体取决于数值求解器的总步数 n_i。由于理想化的“真值”参考图像在实践中无法获得，我们将其定义为经过 $n_k = 4096 \approx \infty$个求解器步数后图像的平均值，即

$$\texttt{img}^{\text{ODE}}_{\text{reference}} := (\texttt{img}^{\text{ODE,flow}}_{4096} + \texttt{img}^{\text{ODE,lazy}}_{4096})/2,$$

对于随机微分方程（SDE）也同理。这是合理的，因为在理想化的设定下，若 $\hat{v}^{\text{flow}} = v^{\text{flow}}$，即流速度被完美学习时，则$\texttt{img}^{\text{ODE flow}}_{\infty} =, \texttt{img}^{\text{ODE lazy}}_{\infty},$，随机微分方程亦然。使用$\texttt{img}^{\text{ODE}}_{\text{reference}} : = \texttt{img}^{\text{ODE flow}}_{4096},$代替时的结果见图9。

文本提示采用 COCO 验证数据集中的前 100 条图注（Lin 等人，2014年；Chen 等人，2015年），具体列于附录 G。每次实验中，我们从数据集中固定一条文本提示，并随机采样一个初始条件，以及（对于随机微分方程生成）一个维纳过程实现。我们让数值求解器步数在 $n_1 = 4$、 $n_2 = 8$、.....、 $n_k = 4096$的范围内变化。这样一来，四种配置 生成的图像质量会逐步提升 （常微分方程，随机微分方程） $\times$ （流，惰性）共享相同的提示词、初始条件和维纳过程实现，如图 2所示。随后，我们计算生成图像与参考图像之间的像素均方根误差（RMSE）[5]，即比较由 n_i 个数值求解器步数生成的图像与参考图像，并计算

$$\text{RMSE}(\texttt{img}^{\text{ODE,flow}}_{n_i}, \texttt{img}^{\text{ODE}}_{\text{reference}})$$

对于每个 i，对于 图像$\texttt{img}^{\text{ODE lazy}}_{n_i}$也同样如此，对于随机微分方程也如此。我们针对 100 条不同的提示词、初始条件和维纳过程实现重复此实验，并计算平均均方根误差。该指标衡量了各配置下求解器的数值收敛性。[6] 结果绘于图 3，所有 100 条提示词生成的图像动画可通过此 Zenodo 链接访问。

在线性流模型调度下，统计最优的随机微分方程具有无限大的初始漂移和扩散尺度

[4]可在 HuggingFace 上获取：https://huggingface.co/Photoroom/prx-1024-t2i-beta。

[5]这对应于像素空间中的维度归一化欧几里得距离。[6]准确地说，它衡量的是潜在表示在 解码后的收敛，这在语义上比潜在空间中的收敛更有意义。

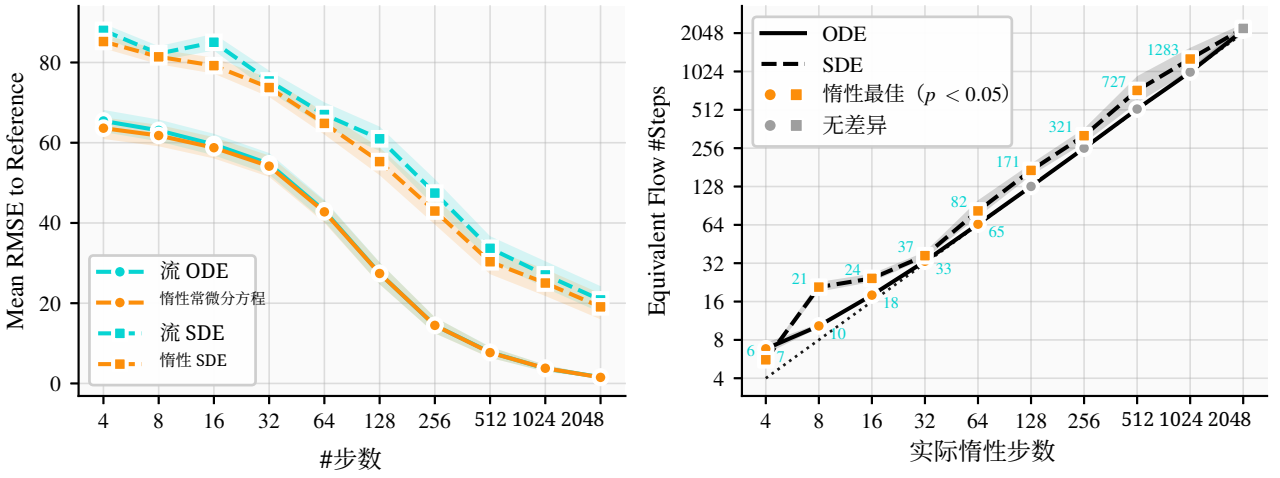


图3。 **左图：** 常微分方程（圆形标记和实线曲线）与统计最优随机微分方程（方形标记和虚线曲线）生成的逐像素均方根误差预测-校正收敛图，其中使用原始线性 流 模型调度与转换后的 惰性 调度，如图 2所示。平均值和95%置信区间（阴影带）基于 100 个提示词、初始条件和维纳过程实现。可以看到，对于所有四种配置，收敛性随求解器步数增加而（几乎）单调。请与图 8进行比较。 **右图：** 对问题“使用 n_i 个采用惰性调度的数值求解器步数时，平均需要使用线性流模型调度中的多少个求解器步数，才能达到与参考图像相同的均方根误差？”的可视化回答。对于 n_i，在 x轴上的每个值，都将其绘制在 y轴上（青色 标签表示四舍五入后的最近整数）。阴影带表示 95% 置信区间。对于常微分方程和随机微分方程生成，惰性调度几乎总是具有统计显著的更好表现（从不更差），但对于随机微分方程生成，改进幅度大得多。所有置信区间均通过自助抽样计算，使用 10,000 个样本。

（命题B.1）因此在数值上无法定义。为了解决这个问题，我们在惰性调度下采样第一步；很容易证明，这等价于设定 $X^*_{\Delta t} = \sqrt{(1-\Delta t)^2 + (\Delta t)^2} W_{\Delta t}$ 其中 $W_{\Delta t}$ 是固定维纳过程的初始增量。

在图3 （左）中可以看到，四种配置都以或多或少单调的方式收敛到各自的参考图像，但常微分方程生成的收敛速度显著快于随机微分方程生成，这表明数值求解随机微分方程的难度。另请参见图8 ，其中显示两个随机微分方程向共同参考图像收敛得更慢。

为了检验转换为惰性调度对 ODE 和 SDE 生成是否分别具有统计显著的正向影响，我们提出以下问题：“使用n_i 步数值求解器步数并采用惰性调度时，若要达到与参考图像相同的均方根误差，采用线性流模型调度平均需要多少个求解器步数？”这个问题的答案如图3 （右）所示。对于常微分方程积分，这种改进在统计上显著，但幅度仍然较小；与原始线性流模型调度相比，采用惰性调度最多可节省三个求解器步数（对于 $n_i = 64$ 而言，采样时间几乎减半）。对于 SDE 生成，改进幅度则大得多；例如，采用惰性调度进行128个预测-校正步，平均可达到与采用线性流模型调度进行171个求解器步相近的性能。

9. 讨论

需要强调的是，由于 PRX 模型输出的是学习得到的近似值$\hat{v}^{\text{flow}} \approx v^{\text{flow}}$ ，因此，如备注7.7所述，流到惰性调度的转换并不精确。因此，惰性调度的表现统计上优于 PRX 模型训练时使用的线性流调度，这一事实相当有说服力，并促使我们推测，从头开始训练模型（例如采用例7.4 中的惰性常微分方程调度），将显著提升采样质量。

我们还要强调，随机微分方程收敛缓慢，并不意味着统计最优随机微分方程生成的图像比常微分方程更差。更值得关注、但也更难衡量的指标是与测试数据集的分布拟合度，以及常微分方程与随机微分方程在这一指标和数值积分简易程度之间的权衡。我们将此留待未来工作，但注意到附录F 中的样例图像表明，使用适量的求解器步数（例如 $n_i \geq 64$）时，统计最优随机微分方程能够生成美观且细节丰富的图像，尤其是在采用惰性调度时。

在理论方面，若能将惰性调度族推广到高斯分布数据假设之外，将会很有价值。我们推测，在对数据密度 ρ_X 作出合理假设的情况下，统计最优随机微分方程最终会采用点质量调度。

软件与数据

代码将在论文被接收后发布。

影响声明

本文旨在推动机器学习领域的发展。我们的工作可能带来许多社会影响，但我们认为其中没有任何影响需要在此特别强调。

参考文献

Albergo, M., Boffi, N., Lindsey, M. 和 Vanden-Eijnden, E. 基于随机插值的多边缘生成建模。载于 Kim, B., Yue, Y., Chaudhuri, S., Fragkiadaki, K., Khan, M. 和 Sun, Y.（编），国际学习表征会议，第 2024 卷，第 55884–55901 页，2024 年。

Albergo, M., Boffi, N. M., 和 Vanden-Eijnden, E. 随机插值：流与扩散的统一框架。机器学习研究期刊，26 (209):1–80，2025年。

Almaz´an, J., Bertoin, D., andFrigg, R. 我们开源了文生图模型及其背后的流程。https://huggingface.co/blog/Photoroom/prx-open-source-t2i-model，2025年11月。

Anderson, B. D. 反向时间扩散方程模型。随机过程及其应用，12(3):313– 326，1982年。doi: 10.1016/0304-4149(82)90051-5。

Boffi, N. M., Albergo, M. S., 和 Vanden-Eijnden, E. 基于随机插值的流映射匹配：一致性模型的数学框架。机器学习研究汇刊，2025年。ISSN 2835-8856。

Bortoli, V. D., Thornton, J., Heng, J. 和 Doucet, A. 带有应用于基于得分的生成建模的扩散 Schrödinger 桥。载于 Beygelzimer, A., Dauphin, Y., Liang, P. 和 Vaughan, J. W.（编），神经信息处理系统进展，2021年。

Chen, X., Fang, H., Lin, T.-Y., Vedantam, R., Gupta, S., Dollar, P. 和 Zitnick, C. L. Microsoft COCO 图像描述：数据收集与评估服务器，2015年。

Chen, Y., Goldstein, M., Hua, M., Albergo, M. S., Boffi, N. M. 和 Vanden-Eijnden, E. 使用随机插值和 f¨ ollmer 过程进行概率预测。载于 Salakhutdinov, R., Kolter, Z., Heller, K., Weller, A., Oliver, N., Scarlett, J. 和 Berkenkamp, F.（编），第 *41* 届国际机器学习大会论文集，第 235 卷，机器学习研究论文集，第 6728–6756 页。PMLR，2024年7月21日至27日。

Chen, Y., Vanden-Eijnden, E. 和 Xu, J. 生成模型中插值调度的Lipschitz引导设计，2025年。Heusel, M., Ramsauer, H., Unterthiner, T., Nessler, B. 和 Hochreiter, S. 通过双时间尺度更新规则训练的生成对抗网络会收敛到局部纳什均衡。载于 Guyon, I., Luxburg, U. V., Bengio, S., Wallach, H., Fergus, R., Vish- wanathan, S. 和 Garnett, R.（编），神经信息处理系统进展，第 30 卷。Curran Associates, Inc.，2017年。Ho, J. 和 Salimans, T. 无分类器扩散引导。https://arxiv.org/abs/2207.12598，2022年。

Ho, J., Jain, A. 和 Abbeel, P. 去噪扩散概率模型。载于 Larochelle, H., Ranzato, M., Hadsell, R., Balcan, M. 和 Lin, H.（编），神经信息处理系统进展，第33卷，第6840–6851页。Curran Associates, Inc.，2020年。

Karras, T., Aittala, M., Aila, T. 和 Laine, S. 阐明基于扩散的生成模型的设计空间。载于 Koyejo, S., Mohamed, S., Agarwal, A., Belgrave, D., Cho, K. 和 Oh, A.（编），神经信息处理系统进展，第 35 卷，第 26565–26577 页。Curran Associates, Inc., 2022年。

Lai, C.-H., Song, Y., Kim, D., Mitsufuji, Y. 和 Ermon, S. 扩散模型原理。*arXiv* 预印本 *arXiv:2510.21890*，2025年。

Le Gall, J.-F. 布朗运动、鞅与随机微积分。数学研究生教材。Springer Cham，第一版，2016年。ISBN 978-3-319-31089-3。doi：10.1007/ 978-3-319-31089-3。

Lin, T.-Y., Maire, M., Belongie, S., Hays, J., Perona, P., Ramanan, D., Doll´ar, P., 和 Zitnick, C. L. Microsoft COCO：上下文中的常见物体。载于 Fleet, D., Pajdla, T., Schiele, B., 和 Tuytelaars, T.（编），计算机视觉 – *ECCV 2014*，第 740–755 页，沙姆，2014年。施普林格国际出版公司。

Lipman, Y., Chen, R. T. Q., Ben-Hamu, H., Nickel, M., 和 Le, M. 用于生成建模的流匹配。载于第十一届国际学习表征会议，2023年。

Liu, Q. 让我们一起流动。https://www.cs.utexas.edu/~lqiang/PDF/flow_book.pdf，2024年12月。工作草稿（日期为2024年12月24日）。

Liu, X.、Gong, C. 和 Liu, Q. 流动直接且快速：通过整流流学习生成和迁移数据。发表于第十一届国际学习表征会议，2023年。

Ma, N.、Goldstein, M.、Albergo, M.S.、Boffi, N.M.、Vanden- Eijnden, E. 和 Xie, S. SiT：利用可扩展的插值变换器探索基于流和扩散的生成模型。载于 Leonardis, A.、Ricci, E.、Roth, S.、Rus- sakovsky, O.、Sattler, T. 和 Varol, G.（编），计算机视觉 – *ECCV 2024*，第 23–40 页，沙姆，2024年。瑞士施普林格·自然。ISBN 978-3-031-72980-5。

Negrel, H., Coeurdoux, F., Albergo, M. S. 和 Vanden- Eijnden, E. 基于随机插值的多任务学习。载于神经信息处理系统进展（*NeurIPS 2025*年），2025年。已被 NeurIPS 2025年接收为 Spotlight 论文；最终定稿托管于 OpenReview。

Nichol, A. Q. 和 Dhariwal, P. 改进的去噪扩散概率模型，2021年。

Photoroom。PRX：开放式文生图生成模型（prx-1024-t2i-beta）。https://huggingface.co/Photoroom/prx-1024-t2i-beta，2025年。Hugging Face 模型卡。Github 提交 ID：84772b42065c4ffcfc10a7269e1aebf104fc0ef1。

Pooladian, A.-A. 与 Niles-Weed, J. schr¨odinger 桥的插件估计。*SIAM* 数据科学数学期刊，7(3):1315–1336，2025年。doi: 10.1137/ 24M1687340.

Pooladian, A.-A.、Ben-Hamu, H.、Domingo-Enrich, C.、Amos, B.、Lipman, Y. 与 Chen, R. T. Q. 多样本流匹配：用小批量耦合拉直流。见 Krause, A.、Brunskill, E.、Cho, K.、Engelhardt, B.、Sabato, S. 与 Scarlett, J.（编），第*40*届国际机器学习大会论文集，机器学习研究论文集第202卷，第28100–28127页。PMLR，2023年7月23–29日。

Sabour, A.、Fidler, S. 与 Kreis, K. 对齐你的步：优化扩散模型中的采样调度。见第*41*届国际机器学习大会论文集，ICML'24。JMLR.org，2024年。

Salimans, T.、Goodfellow, I.、Zaremba, W.、Cheung, V.、Rad- ford, A.、Chen, X. 和 Chen, X. 改进生成对抗网络的训练技术。载于 Lee, D.、Sugiyama, M.、Luxburg, U.、Guyon, I. 和 Garnett, R.（编），神经信息处理系统进展，第 29 卷。Curran Associates, Inc.，2016年。

Shi, Y., De Bortoli, V., Campbell, A., and Doucet, A. 扩散薛定谔桥匹配。载于 Oh, A., Naumann, T., Globerson, A., Saenko, K., Hardt, M., and Levine, S.（编），神经信息处理系统进展，第 36 卷，第 62183–62223 页。Curran Associates, Inc., 2023年。

Sohl-Dickstein, J., Weiss, E., Maheswaranathan, N., and Ganguli, S. 使用非平衡热力学进行深度无监督学习。载于 Bach, F. and Blei, D.（编），第 *32* 届国际机器学习会议论文集，机器学习研究论文集第 37 卷，第 2256–2265 页，法国里尔，2015年 7 月 7–9 日。PMLR。

Song, Y. 和 Ermon, S. 通过估计数据分布的梯度进行生成建模。载于 Wallach, H.、Larochelle, H.、Beygelzimer, A.、d'Alch´e-Buc, F.、Fox, E. 和 Garnett, R.（编），神经信息处理系统进展，第 32 卷。Curran Associates, Inc.，2019年。

Song, Y. 和 Ermon, S. 改进基于分数的生成模型的训练技术。载于 Larochelle, H.、Ran- zato, M.、Hadsell, R.、Balcan, M. 和 Lin, H.（编），神经信息处理系统进展，第 33 卷，第 12438–12448 页。Curran Associates, Inc.，2020年。

Song, Y., Sohl-Dickstein, J., Kingma, D. P., Kumar, A., Er- mon, S., and Poole, B. 通过随机微分方程进行基于得分的生成建模。载于国际学习表征会议，2021年。

Song, Y., Dhariwal, P., Chen, M., and Sutskever, I. 一致性模型。载于 Krause, A., Brunskill, E., Cho, K., Engelhardt, B., Sabato, S., and Scarlett, J.（编），第 *40* 届国际机器学习会议论文集，第 202 卷，收录于机器学习研究论文集，第 32211–32252 页。PMLR，2023 年 7 月 23–29 日。

Stein, C. M. 多元正态分布均值的估计。统计学年刊，9(6):1135 – 1151，1981年。doi: 10.1214/aos/1176345632。

Xue, S., Liu, Z., Chen, F., Zhang, S., Hu, T., Xie, E., 和 Li, Z. 通过优化时间步加速扩散采样。载于*2024*年*IEEE/CVF*计算机视觉与模式识别会议 *(CVPR)*，第 8292–8301 页，2024 年。doi: 10.1109/CVPR52733.2024.00792。

A. 证明

命题 4.2 (插值函数内部转换公式)。 对于固定的插值调度(α, β) 和非负$\varepsilon \in C^1([0,1])$，函数 $\eta_Z, \eta_X, s, b^\varepsilon$ 中的任意一个都能唯一确定其他所有函数，定义域为$(0,\ 1) \times \mathbb{R}^d$。特别地，每个函数都可以表示为得分的形式：

$$\begin{aligned}\eta_Z(t,x) &= -\alpha_t s(t,x),\\ \eta_X(t,x) &= \big(x + \alpha_t^2 s(t,x)\big)/\beta_t,\\ b^\varepsilon(t,x) &= (\varepsilon_t^* + \varepsilon_t)s(t,x) + (\dot\beta_t/\beta_t)x.\end{aligned}$$

证明。 对于 $t \in (0,1)$，显然可以在命题中的每个关系式里分离出得分 s。因此，只需证明这些关系式对所有 $(t,x) \in (0,1) \times \mathbb{R}^d$ 均成立，如所述。

第一个关系式是一个标准结果，可由 Stein 引理（亦称高斯分部积分）(Stein, 1981) 证明，该引理表明 $s(t,x) = -\eta_Z(t,x)/\alpha_t$ 对于 $(t,x) \in [0,1) \times \mathbb{R}^d$ 成立，参见 Albergo 等（2025）的定理 8。第二个关系式可由随机插值的定义（定义 1.1） $I_t = \alpha_t Z + \beta_t X$ 以及期望的线性性质轻易推出。事实上，在 I_t 的定义中对 $I_t = x$ 取条件期望可得

$$\eta_X(t,x) = \frac{1}{\beta_t}(x - \alpha_t \eta_Z(t,x)) = \frac{1}{\beta_t}\big(x + \alpha_t^2 s(t,x)\big),$$

其中，我们利用第一个关系得到了最后一个等式。

将前面的关系代入漂移的定义，即可得到最后一个关系

$$\begin{aligned}b^\varepsilon(t,x) &= \dot\alpha_t \eta_Z(t,x) + \dot\beta_t \eta_X(t,x) + \varepsilon_t s(t,x)\\ &= \dot\alpha_t(-\alpha_t s(t,x)) + \dot\beta_t\left(\frac{1}{\beta_t}\big(x + \alpha_t^2 s(t,x)\big)\right) + \varepsilon_t s(t,x)\\ &= \left(\alpha_t^2\frac{\dot\beta_t}{\beta_t} - \alpha_t\dot\alpha_t + \varepsilon_t\right)s(t,x) + \frac{\dot\beta_t}{\beta_t}x.\end{aligned}$$

根据定义 4.1 $\varepsilon_t^* = \alpha_t^2\dot\beta_t/\beta_t - \alpha_t\dot\alpha_t$ 这就完成了该命题的证明。 □

定理 4.3。 假设我们已获得统计学习得到的估计 $\hat\eta_Z$、 $\hat\eta_X$、 $\hat s$ 或 b^ε，这些估计对应于定义 *1.3*中的真实函数，其余估计由命题 *4.2*给出。令 X_t^ε 满足随机微分方程 (1)，并考虑代入式随机微分方程

$$\mathrm{d}\hat X_t^\varepsilon = \hat b^\varepsilon(t, \hat X_t^\varepsilon)\,\mathrm{d}t + \sqrt{2\varepsilon_t}\,\mathrm{d}W_t,$$

向前时间演化 t，其中 $\hat X_0^\varepsilon \sim \mathcal{N}(0,\ \mathbf{I})$ 与 W 相互独立。于是，在扩散尺度 ε 上， X^ε 和 X^ε 的路径测度之间的 *Kullback-Leibler* 散度的极小化元为

$$\operatorname*{argmin}_{\varepsilon \ge 0, \varepsilon \in C^1((0,1])} \mathrm{KL}\Big(X^\varepsilon, \hat X^\varepsilon\Big) = \varepsilon^*,$$

且最小值为

$$\mathrm{KL}\Big(X^{\varepsilon^*}, \hat X^{\varepsilon^*}\Big) = \int_0^1 \varepsilon_t^* \mathbb{E}\big[\|s(t,I_t) - \hat s(t,I_t)\|^2\big]\,\mathrm{d}t.$$

证明。 应用 Girsanov 定理可得

$$\begin{aligned}\mathrm{KL}(X^\varepsilon, \hat X^\varepsilon) &= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{\varepsilon_t}\mathbb{E}\Big[\Big\|b^\varepsilon(t,X_t^\varepsilon) - \hat b^\varepsilon(t,X_t^\varepsilon)\Big\|^2\Big]\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{\varepsilon_t}\mathbb{E}\Big[\Big\|b^\varepsilon(t,I_t) - \hat b^\varepsilon(t,I_t)\Big\|^2\Big]\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{(\varepsilon_t^* + \varepsilon_t)^2}{\varepsilon_t}\mathbb{E}\big[\|s(t,I_t) - \hat s(t,I_t)\|^2\big]\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

其中，第二个等式利用了 概率分布 X_t^ε = 概率分布 I_t，第三个等式利用了命题 4.2 以及本定理中关于$\hat{}$的假设 b 和 $\hat{s}$ 。由最后一个表达式可知，在扩散尺度 ε 上最小化 KL散度$(\varepsilon_t^* + \varepsilon_t)^2/\varepsilon_t$ 等价于对所有 $t \in [0,1]$ 最小化表达式 ε_t，因为期望项与 ε_t无关。对该表达式关于 ε_t 求导，并令所得表达式为零，可得（唯一的）极小化元 $\varepsilon_t = \varepsilon_t^*$ 对所有 $t \in [0,1]$均成立，定理得证。 □

命题 5.2. 对于线性插值 I_t，由定义 *5.1* 可知 $\varepsilon_t^* = (1-t)/t$。因此

$$\int_s^t 2\bar{\varepsilon}_u^* \, \mathrm{d}u = 2(\log(t) - t - \log(s) + s)$$

对于 $0 < s \le t \le 1$，且积分对于 $s = 0$为无穷大。

证明。 我们有 $\alpha_t = 1 - t$， $\beta_t = t$ 从而 $\dot{\alpha}_t = -1$ 且 $\dot{\beta}_t = 1$。于是

$$\bar{\varepsilon}_t^* = \bar{\alpha}_t^2 \frac{\dot{\bar{\beta}}_t}{\bar{\beta}_t} - \bar{\alpha}_t \dot{\bar{\alpha}}_t = \frac{(1-t)^2}{t} + (1-t) = \frac{1-t}{t}.$$

该命题的其余部分容易得出。 □

回顾定义 5.3。

定义 5.3. 对于 $t \in [0,1]$，我们定义函数

$$c_t \coloneqq \alpha_t + \beta_t, \quad u_t \coloneqq \beta_t / c_t.$$

对于其余的证明，我们将经常引用下面这个包含一些有用代数恒等式的引理。**引理A.1.** 对于 $t \in (0,1]$ 以下恒等式成立。

$$1 - u_t = \frac{\alpha_t}{c_t}, \tag{2}$$

$$\frac{\dot{u}_t}{u_t} = \frac{\dot{\beta}_t}{\beta_t} - \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{\varepsilon_t^*}{\alpha_t c_t}. \tag{3}$$

证明。 等式 (2) 显然成立:

$$1 - u_t = \frac{c_t - \beta_t}{c_t} = \frac{\alpha_t}{c_t}.$$

为得到等式 (3) 中最左边的等号，注意到

$$\dot{u}_t = \frac{\dot{\beta}_t c_t - \beta_t \dot{c}_t}{c_t^2},$$

so

$$\frac{\dot{u}_t}{u_t} = \frac{\dot{\beta}_t c_t - \beta_t \dot{c}_t}{c_t \beta_t} = \frac{\dot{\beta}_t}{\beta_t} - \frac{\dot{c}_t}{c_t}.$$

最后,

$$c_t \frac{\dot{u}_t}{u_t} = \alpha_t \frac{\dot{\beta}_t}{\beta_t} + \dot{\beta}_t - \dot{\alpha}_t - \dot{\beta}_t = \frac{\varepsilon_t^*}{\alpha_t},$$

这就证明了等式 (3) 中最右边的等号。 □

命题 5.4 （相互转换公式）。 对于调度 (α, β) 和非负的 $\varepsilon \in C^1([0,1])$，函数$\eta_Z, \eta_X, s, b^\varepsilon$ 可由与线性插值相关的任意函数 $\eta_Z, \eta_X, s, b^\varepsilon$ 唯一确定。特别是，

$$\begin{aligned}
\eta_Z(t,x) &= \bar{\eta}_Z(u_t, x/c_t), \quad \eta_X(t,x) = \bar{\eta}_X(u_t, x/c_t), \\
s(t,x) &= (1/c_t)\bar{s}(u_t, x/c_t), \\
b^\varepsilon(t,x) &= \frac{\dot{c}_t}{c_t} x + c_t \dot{u}_t \bar{b}^{\bar{\varepsilon}}\left(u_t, \frac{x}{c_t}\right) \quad \textit{for} \quad \bar{\varepsilon}_{u_t} = \frac{\alpha_t \varepsilon_t}{\beta_t \varepsilon_t^*}.
\end{aligned}$$

证明。 利用方程（2）可得

$$\begin{aligned}\overline{\eta}_Z\left(u_t, \frac{x}{c_t}\right) &= \mathbb{E}\left[Z \mid (1-u_t)Z + u_t X = \frac{x}{c_t}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[Z \mid \frac{\alpha_t}{c_t}Z + \frac{\beta_t}{c_t}X = \frac{x}{c_t}\right] \\ &= \mathbb{E}[Z \mid \alpha_t Z + \beta_t X = x] \\ &= \eta_Z(t,x).\end{aligned}$$

类似的推导证明了 $\eta_X(t,\ x) = \eta_X(u_t,\ \overline{x}/c_t)$。

根据关系 $s(t,\ x) = -(1/\alpha_t)\eta_Z(t,\ x)$ (如命题 4.2所示），结合 $\eta_Z(t,\ x) = \eta_Z(u_t,\ x/\overline{c_t})$ 可得

$$\overline{s}\left(u_t, \frac{x}{c_t}\right) = -\frac{1}{1-u_t}\overline{\eta}_Z\left(u_t, \frac{x}{c_t}\right) = -\frac{1}{1-u_t}\eta_Z(t,x).$$

注意到 $1/(1-u_t) = c_t/\alpha_t$，可得

$$\frac{1}{c_t}\overline{s}\left(u_t, \frac{x}{c_t}\right) = -\frac{1}{\alpha_t}\eta_Z(t,x) = s(t,x),$$

如所声称。

得到最终关系还需要多做一些工作，但总体策略与上述相同；我们先将漂移转化为得分函数，再将得分函数转化为线性得分函数，最后利用特定的线性扩散尺度将线性得分函数转化为线性漂移 $\varepsilon_{u_t} = (\alpha_t\varepsilon_t)/(\beta_t\varepsilon_t^*)$。具体而言，我们先应用命题 4.2，再应用刚刚证明的关系，然后再次应用命题4.2 得到

$$\begin{aligned}b^{\varepsilon}(t,x) &= (\varepsilon_t^* + \varepsilon_t)s(t,x) + \frac{\dot{\beta}_t}{\beta_t}x \\ &= \frac{\varepsilon_t^* + \varepsilon_t}{c_t}\overline{s}(u_t, \frac{x}{c_t}) + \frac{\dot{\beta}_t}{\beta_t}x \\ &= \frac{\varepsilon_t^* + \varepsilon_t}{c_t}\left(\frac{\overline{b}^{\overline{\varepsilon}}\left(u_t, \frac{x}{c_t}\right) - \frac{x}{u_t c_t}}{\overline{\varepsilon}_{u_t}^* + \overline{\varepsilon}_{u_t}}\right) + \frac{\dot{\beta}_t}{\beta_t}x.\end{aligned}$$

现在代入线性扩散尺度 $\varepsilon_{u_t} = (\alpha_t\varepsilon_t)/(\beta_t\varepsilon_t^*)$，其动机将在定理5.5的证明中说明。由命题5.2 和等式（2）可得 $\overline{\varepsilon}_{u_t}^* = (1-u_t)/u_t = \alpha_t/\beta_t$ 因此

$$\overline{\varepsilon}_{u_t}^* + \overline{\varepsilon}_{u_t} = \frac{\alpha_t}{\beta_t}\left(\frac{\varepsilon_t^* + \varepsilon_t}{\varepsilon_t^*}\right).$$

Thus

$$\begin{aligned}b^{\varepsilon}(t,x) &= \frac{\beta_t\varepsilon_t^*}{\alpha_t c_t}\left(\overline{b}^{\overline{\varepsilon}}\left(u_t, \frac{x}{c_t}\right) - \frac{x}{u_t c_t}\right) + \frac{\dot{\beta}_t}{\beta_t}x \\ &= c_t\dot{u}_t\left(\overline{b}^{\overline{\varepsilon}}\left(u_t, \frac{x}{c_t}\right) - \frac{x}{u_t c_t}\right) + \frac{\dot{\beta}_t}{\beta_t}x && \text{(using Equation (3))} \\ &= c_t\dot{u}_t\overline{b}^{\overline{\varepsilon}}\left(u_t, \frac{x}{c_t}\right) + \left(\frac{\dot{\beta}_t}{\beta_t} - \frac{\dot{u}_t}{u_t}\right)x \\ &= c_t\dot{u}_t\overline{b}^{\overline{\varepsilon}}\left(u_t, \frac{x}{c_t}\right) + \frac{\dot{c}_t}{c_t}x. && \text{(using Equation (3))}\end{aligned}$$

证明到此结束。 □

定理 *5.5*（路径级转换）。设 (α,β) 是满足定义 *1.1* 中要求的调度，设 $z\in\mathbb{R}^d$，且 $(W_t)_{t\in[0,1]}$ 是一个维纳过程实现。设 X_t^ε 在物理时间 t 中，从 $X_0^\varepsilon=z$ 出发，在扩散尺度为 ε 的 W 驱动下，满足随机微分方程 *(1)*。设 $X_u^{\bar\varepsilon}$ 在重参数化时间 $\bar u=u_t$ 中，从 $X_0^{\bar\varepsilon}=z$ 出发，在……驱动下满足采用线性调度的随机微分方程 *(1)*。

$$\overline{W}_u=\int_0^{t_u}\sqrt{\dot u_s}\,\mathrm{d}W_s,\quad u\in[0,1]$$

扩散尺度为 $\varepsilon_u=(\alpha_{t_u}\varepsilon_{t_u})/(\beta_{t_u}\varepsilon^*_{t_u})\,X_t^\varepsilon$。那么，解 X_t^ε 可通过以下公式由与线性插值相关的解 $X_{u_t}^{\bar\varepsilon}$ 得到

$$X_t^\varepsilon=c_t\overline{X}^{\bar\varepsilon}_{u_t},\quad t\in[0,1].$$

特别地，$X_1^\varepsilon=X_1^{\bar\varepsilon}$（因为 $c_1=1$）。

证明。首先，我们注意到 W 确实是重参数化时间 $u=u_t$ 下的维纳过程，这由 Lévy 特征定理可知（例如参见 Le Gall (2016年) 中的定理 5.12），因为它的二次变差为 $\langle W\rangle_u=\int_0^{t_u}\dot u_s\,\mathrm{d}s=\int_0^u\mathrm{d}\overline{u}=u$。因此，定理陈述中的两个随机微分方程均定义良好且解唯一，所以只需证明它们的动力学一致，即证明 $\mathrm{d}X_t^\varepsilon=\mathrm{d}\Big(c_tX^{\bar\varepsilon}_{u_t}\Big)$ 对所有 $t\in(0,1)$成立。根据 Itˆo 乘积法则，后一个无穷小量为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Big(c_t\overline{X}^{\bar\varepsilon}_{u_t}\Big)&=\dot c_t\overline{X}^{\bar\varepsilon}_{u_t}\,\mathrm{d}t+c_t\overline{b}^{\bar\varepsilon}\Big(u_t,\overline{X}^{\bar\varepsilon}_{u_t}\Big)\,\mathrm{d}u_t+c_t\sqrt{2\bar\varepsilon_{u_t}}\,\mathrm{d}\overline{W}_{u_t}\\&=\dot c_t\overline{X}^{\bar\varepsilon}_{u_t}\,\mathrm{d}t+c_t\dot u_t\overline{b}^{\bar\varepsilon}\Big(u_t,\overline{X}^{\bar\varepsilon}_{u_t}\Big)\,\mathrm{d}t+c_t\sqrt{2\bar\varepsilon_{u_t}\dot u_t}\,\mathrm{d}W_t.\end{aligned}$$

使用线性扩散尺度 $\varepsilon_{u_t}=(\alpha_t\bar\varepsilon_t)/(\beta_t\varepsilon^*_t)$ 结合方程（3）可得

$$\bar\varepsilon_{u_t}=\frac{u_t}{\dot u_t}\frac{\varepsilon_t}{\beta_tc_t}=\frac{\varepsilon_t}{c_t^2\dot u_t},$$

将其代入上述无穷小表达式，得到

$$\mathrm{d}\Big(c_t\overline{X}^{\bar\varepsilon}_{u_t}\Big)=\dot c_t\overline{X}^{\bar\varepsilon}_{u_t}\,\mathrm{d}t+c_t\dot u_t\overline{b}^{\bar\varepsilon}\Big(u_t,\overline{X}^{\bar\varepsilon}_{u_t}\Big)\,\mathrm{d}t+\sqrt{2\varepsilon_t}\,\mathrm{d}W_t.$$

现在利用命题5.4 可知

$$\mathrm{d}X_t^\varepsilon=b^\varepsilon(t,X_t^\varepsilon)\,\mathrm{d}t+\sqrt{2\varepsilon_t}\,\mathrm{d}W_t=\frac{\dot c_t}{c_t}X_t^\varepsilon\,\mathrm{d}t+c_t\dot u_t\overline{b}^{\bar\varepsilon}\Big(u_t,\frac{X_t^\varepsilon}{c_t}\Big)\,\mathrm{d}t+\sqrt{2\varepsilon_t}\,\mathrm{d}W_t,$$

定理的设定 $X_t^\varepsilon/c_t=X^{\bar\varepsilon}_{u_t}$ 表明 $\mathrm{d}X_t^\varepsilon=\mathrm{d}\Big(c_tX^{\bar\varepsilon}_{u_t}\Big)$。至此，证明完成。

代入 □

为证明定理 6.3我们先陈述并证明一个有用的引理。

引理 A.2. 对于任意点质量调度 (α,β)，都有

$$u_0\coloneqq\lim_{t\to0_+}u_t=0\iff\beta_t=o(\alpha_t)\quad as\quad t\to0_+.$$

证明. 我们有

$$u_0\coloneqq\lim_{t\to0_+}u_t=\lim_{t\to0_+}\frac{\beta_t}{\alpha_t+\beta_t}=\lim_{t\to0_+}\frac{1}{1+\frac{\alpha_t}{\beta_t}}.$$

显然，当比值 $\alpha_t/\beta_t\to\infty$ 趋于 $t\to0_+$ 时，此极限为零；等价地，当 $\beta_t=o(\alpha_t)$ 趋于$t\to0_+$ 时，此极限为零。

□

定理 *6.3.* 设 (α,β) 是定义 *6.1* 中的点质量调度。则对于任意非负有界的扩散尺度 $\varepsilon\in C^1([0,1])$，随机微分方程 *(1)* 对于 $t\in(0,1]$，初始位置为 $X_0^\varepsilon=0$，在经典意义下定义良好，且初始漂移在分布意义下定义良好。对于所有 $t\in[0,1]$，均有 $Law(X_t^\varepsilon)=Law(I_t)$，且定理 *5.5* 仍然适用：特别地，点质量随机微分方程解及初始漂移与线性插值的解及初始条件之间的关系为 $X_t^\varepsilon=c_tX^{\bar\varepsilon}_{u_t}$，其中 $t\in[0,1]$，且 $b^\varepsilon(0,X_0^\varepsilon)=\big(\dot c_0-\lim_{t\to0_+}(\varepsilon_t/\alpha_t)\big)X_0^\varepsilon$。

证明。由于定义 6.1 中的点质量调度与定义 1.1 中的常规调度仅在 $t=0$处不同，因此我们只需考虑这种情况。特别地，定理 5.5 在 $(0,1]$ 上成立，并且在 $t\to 0_+$ 的极限下也成立，因为根据边界条件 $\alpha_0=\beta_0=0$，我们有 $c_0=u_0=0$，因此 $X_0^\varepsilon=c_0X_0^\varepsilon=0$ 对于所有 $(z,\omega)\in\mathbb{R}^d\times\Omega$ 均成立，其中$z=X_0^\varepsilon$ 为线性插值的初始条件，而 ω 为共享维纳过程所在概率空间中的一个事件。

现在代入 c_tx 到 x命题5.4 中可得转换公式

$$b^\varepsilon(t,c_tx)=\dot c_tx+c_t\dot u_t\overline{b}^{\overline{\varepsilon}}(u_t,x),$$

对于所有 $(t,\ x)\in(0,\ 1)\times\mathbb{R}^d$ 且满足$\varepsilon_{u_t}=\frac{\alpha_t\varepsilon_t}{\beta_t\varepsilon_t^*}$。取极限可得

$$\lim_{t\to0_+}b^\varepsilon(t,c_tx)=\lim_{t\to0_+}\dot c_tx+\lim_{t\to0_+}c_t\dot u_t\overline{b}^{\overline{\varepsilon}}(u_t,x),$$

因此，只需证明在定义6.1所述假设下，$\lim_{t\to0_+}c_t\dot u_tb^\varepsilon(u_t,\ x)=\lim_{t\to0_+}\varepsilon_t/\alpha_t(x)$。为此，我们首先考察线性插值的漂移表达式，

$$\begin{aligned}
\overline{b}^{\overline{\varepsilon}}(u_t,x)&=\left(\overline{\varepsilon}^*_{u_t}+\overline{\varepsilon}_{u_t}\right)\overline{s}(u_t,x)+\frac{\dot{\overline{\beta}}_{u_t}}{\overline{\beta}_{u_t}}x && \text{(by Proposition 4.2)}\\
&=\left(\frac{1-u_t}{u_t}+\frac{\alpha_t\varepsilon_t}{\beta_t\varepsilon_t^*}\right)\left(-\frac{\overline{\eta}_Z(u_t,x)}{1-u_t}\right)+\frac{1}{u_t}x && \text{(by Proposition 4.2 and Proposition 5.2)}\\
&=-\frac{\alpha_t}{\beta_t}\left(1+\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_t^*}\right)\frac{\overline{\eta}_Z(u_t,x)c_t}{\alpha_t}+\frac{c_t}{\beta_t}x && \text{(by Equation (2))}\\
&=\frac{c_t}{\beta_t}\left(x-\overline{\eta}_Z(u_t,x)-\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_t^*}\overline{\eta}_Z(u_t,x)\right)\\
&=\frac{c_t}{\beta_t}(x-\overline{\eta}_Z(u_t,x))-\frac{u_t\varepsilon_t}{\dot u_t\alpha_t\beta_t}\overline{\eta}_Z(u_t,x) && \text{(by Equation (3))}\\
&=\frac{c_t}{\beta_t}(x-\overline{\eta}_Z(u_t,x))-\frac{\varepsilon_t}{\dot u_t\alpha_tc_t}\overline{\eta}_Z(u_t,x).
\end{aligned}$$

乘以 $c_t\dot u_t$，并结合定义$(\alpha,\ \beta)$ 中关于点质量调度6.1的假设取极限，最终得到

$$\begin{aligned}
c_t\dot u_t\overline{b}^{\overline{\varepsilon}}(u_t,x)&=\frac{c_t^2\dot u_t}{\beta_t}(x-\overline{\eta}_Z(u_t,x))-\frac{\varepsilon_t}{\alpha_t}\overline{\eta}_Z(u_t,x)\\
&\to-\lim_{t\to0_+}\frac{\varepsilon_t}{\alpha_t}x\quad\text{as}\quad t\to0_+,
\end{aligned}$$

其中，为了得到该极限，我们利用了：由于 $u_0=0$，$\dot u_0<\infty$ (以及 $I_0=Z$)，$\eta_Z(u_t,\ x)=\mathbb{E}\left[Z\mid I_{u_t}=x\right]\to x$ 当 $t\to0_+$ 时；此外，对于某个非负有界常数$C\in\mathbb{R}_+$，由于 $\dot u_0<\infty$，$\alpha_0=\beta_0=0$，有 $c_t^2\dot u_t/\beta_t=\dot u_t(\alpha_t^2+\beta_t^2+2\alpha_t\beta_t)/\beta_t\to\alpha_t^2\dot u_t/\beta_t\to C$ 当 $t\to0_+$ 时；并且由于假设点质量调度满足 $\alpha_t^2=O(\beta_t)$ 当 $t\to0_+$ 时。证明完毕。

我们指出，点质量调度假设 $\alpha_t^2=O(\beta_t)$ as $t\to0_+$ 可以放宽，但代价是需要 $\eta_Z(u_t,x)$ 以足够快的速度收敛到 x as $t\to0_+$，从而使极限乘积 $\lim_{t\to0_+}((\alpha_t^2\dot u_t)/\beta_t)(x-\eta_Z(u_t,x))$ 仍趋于零。据我们所知，这需要假设数据分布 ρ_X 具有足够轻的尾部；参见 Chen etal. (2024) 中的假设 B.3 和定理 B.4。我们认为我们的假设更简单，并且对于本文所做的工作，假设 $\alpha_t^2=O(\beta_t)$ as $t\to0_+$ 并非限制过严。 □

命题 6.5. 令 (α,β) 为任意有效调度，也可以是点质量调度。在定理 *4.3*的假设下，当 $\varepsilon=\varepsilon^*$ 时，所达到的最小路径测度 *KL* 散度与调度的选择无关。

证明。 这实际上已在 Chen 等人（2025年）的命题 2.5 中证明，下面我们使用本文的记号重述其证明。回顾一下，在定理 4.3的假设下，$\hat{}$关于 X^ε 和 X^ε 在扩散尺度 ε 上的路径测度之间的最小 Kullback-Leibler 散度为

$$\mathrm{KL}\left(X^{\varepsilon^*},\hat X^{\varepsilon^*}\right)=\int_0^1\varepsilon_t^*\mathbb{E}\left[\|s(t,I_t)-\hat s(t,I_t)\|^2\right]\mathrm{d}t.$$

现在定义时间变换 $\eta:\ [0,1]\to\mathbb{R}_+$ 如下：$\overline{\eta}_t := \alpha_t/\beta_t$，令 ρ_η 为随机变量 $Y = X+\eta Z$ 在 $\eta\in[0,\infty]$ 下的概率密度函数，并记 $s(\eta,\ y)$ 为 Y[7]的得分。根据定义 1.1，我们可以写成$I_t = \alpha_t Z+\beta_t X = \beta_t(X+\eta_t Z) = \beta_t Y$由此可见，得分之间的关系为

$$s(t,x) = \nabla\log\rho_t(x) = \frac{1}{\beta_t}\nabla\log\rho_\eta\left(\frac{x}{\beta_t}\right) = \frac{1}{\beta_t}s\left(\eta,\frac{x}{\beta_t}\right),$$

类似地，我们有得分估计之间的关系为$\hat{s}(t,\ x) = \hat{s}(\eta,\ x/\beta)/\beta_t$。将 Y的得分代入 KL 最小值表达式中的 I 得分，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{KL}\left(X^{\varepsilon^*},\hat{X}^{\varepsilon^*}\right) &= \int_0^1\frac{\varepsilon_t^*}{\beta_t^2}\mathbb{E}\left[\left\|s\left(\eta_t,\frac{I_t}{\beta_t}\right)-\hat{s}\left(\eta_t,\frac{I_t}{\beta_t}\right)\right\|^2\right]\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1\frac{\varepsilon_t^*}{\beta_t^2}\mathbb{E}\left[\|s(\eta_t,Y)-\hat{s}(\eta_t,Y)\|^2\right]\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

注意到

$$\frac{\varepsilon_t^*}{\beta_t^2} = \frac{\alpha_t^2}{\beta_t^2}\left(\frac{\dot{\beta}_t}{\beta_t}-\frac{\dot{\alpha}_t}{\alpha_t}\right) = -\frac{\alpha_t}{\beta_t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\alpha_t}{\beta_t}\right) = -\eta_t\dot{\eta}_t,$$

我们在 KL 表达式中将积分变量从 t 换成 η，得到

$$\mathrm{KL}\left(X^{\varepsilon^*},\hat{X}^{\varepsilon^*}\right) = \int_{\eta_1}^{\eta_0}\eta\mathbb{E}\left[\|s(\eta,Y)-\hat{s}(\eta,Y)\|^2\right]\mathrm{d}\eta = \int_0^\infty\eta\mathbb{E}\left[\|s(\eta,Y)-\hat{s}(\eta,Y)\|^2\right]\mathrm{d}\eta.$$

关键的是，我们代入了 $\eta_1 = 0$，同时也代入了 $\eta_0 := \lim^{t\to0_+}\eta_t = \infty$，与原始证明一样。需要强调的是，$\eta_0=\infty$ 即使对于点质量调度也成立，因为在定义6.1中，我们要求 $\beta_t = o(\alpha_t)$ 当 $t\to0_+$时成立；根据引理 $u_0 = 0$，这等价于要求A.2。若不作此要求，所得插值的初始律就会依赖于 ρ_X，而这正是我们首先要采样的对象。由于 KL 最小值的最终表达式与调度$(\alpha,\ \beta)$无关，证明至此完成。 □

命题 7.1 （惰性调度族）。 假设 $X\sim\mathcal{N}(0,\ \mathbf{I})$。那么对所有 $(t,x)\in[0,1]\times\mathbb{R}^d$，均有

1.

$$b(t,x) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \alpha_t^2+\beta_t^2 = 1.$$

换言之，当且仅当调度为方差保持时，常微分方程速度恒为零。

2.

$$b^*(t,x) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \alpha_t^2+\beta_t^2 = \beta_t.$$

这意味着 $\alpha_0=0,\ \beta_t = o(\alpha_t)\ \alpha_t^2 = O(\beta_t)$ 当 $t\to0_+$ 时。我们有 $\dot{u}_0<\infty\iff\dot{\beta}_t = O(\sqrt{\beta_t})$，此时调度根据定义*6.1*是点质量调度。对于所有 $t\in[0,1]$，也有 $\varepsilon_t^* = \beta_t/2$，因此

$$\int_s^t 2\varepsilon_u^*\,\mathrm{d}u = \beta_t-\beta_s \quad \textit{for} \quad 0\le s\le t\le1.$$

证明。 在假设 $X\sim\mathcal{N}(\mathbf{0},\mathbf{I})$ 下，有 $I_t\sim\mathcal{N}(\mathbf{0},(\alpha_t^2+\beta_t^2)\,\mathbf{I})$，因此 $s(t,x) = -x/(\alpha_t^2+\beta_t^2)$。我们先考察这对常微分方程情形意味着什么，再考察随机微分方程情形。只需考虑条件 $b(t,x)=0$ 对所有 $(t,x)\in(0,1)\times\mathbb{R}^d$ 成立，因为由连续性可知，条件 $b(t,x)=0$ 对所有 $(t,x)\in[0,1]\times\mathbb{R}^d$ 成立的情形也包含在内。

由命题 4.2 可知，要求 $b(t,x)=0$ 对所有满足 $(t,x)\in(0,1)\times\mathbb{R}^d$ 的情况成立，等价于要求 $\varepsilon_t^* s(t,x)+\dot{\beta}_t/\beta_t x = 0$ 对所有满足 $(t,x)\in(0,1)\times\mathbb{R}^d$ 的情况成立。这等价于

$$\frac{\dot{\beta}_t}{\beta_t}-\frac{\varepsilon_t^*}{\alpha_t^2+\beta_t^2} = 0 \quad\forall t\in(0,1),$$

[7]这里我们滥用了记号，不过在这个证明中，根据论证（t 或 η）总能清楚地看出我们指的是 I 还是 Y 的密度。

将两边乘以 $\alpha_t^2+\beta_t^2$ 后，等价于

$$\varepsilon_t^*=\alpha_t^2\frac{\dot\beta_t}{\beta_t}+\beta_t\dot\beta_t\quad\forall t\in(0,1),$$

根据定义4.1 又等价于

$$\alpha_t\dot\alpha_t=-\beta_t\dot\beta_t\quad\forall t\in(0,1).$$

这也等价于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\alpha_t^2+\beta_t^2\right)=C\quad\forall t\in(0,1),$$

对某个常数 C成立。边界条件 $\alpha_1=\beta_0=0,\alpha_0=\beta_1=1$ 于是给出 $\alpha_t^2+\beta_t^2=1$，从而证明了常微分方程的情形。

接下来，我们考虑随机微分方程的情形。这里我们使用命题 4.2 和 $\varepsilon=\varepsilon^*$，可知对于所有 $(t,x)\in(0,1)\times\mathbb{R}^d$，要求 $b^*(t,x)=0$ 等价于要求对于所有 $(t,x)\in(0,1)\times\mathbb{R}^d$，$2\varepsilon_t^*s(t,x)+\dot\beta_t/\beta_t x=0$。这等价于

$$\frac{\dot\beta_t}{\beta_t}-\frac{2\varepsilon_t^*}{\alpha_t^2+\beta_t^2}=0\quad\forall t\in(0,1),$$

将两边乘以 $\alpha_t^2+\beta_t^2$后，这等价于

$$2\varepsilon_t^*=\alpha_t^2\frac{\dot\beta_t}{\beta_t}+\beta_t\dot\beta_t\quad\forall t\in(0,1),$$

根据定义4.1 又等价于

$$\alpha_t^2\frac{\dot\beta_t}{\beta_t}-2\alpha_t\dot\alpha_t=\beta_t\dot\beta_t\quad\forall t\in(0,1).$$

记作 $a(t):=\alpha_t^2$，并注意到 $\dot a(t)=2\alpha_t\dot\alpha_t$，这是一个形式如下的一阶线性非齐次常微分方程

$$\dot a(t)-\frac{\dot\beta_t}{\beta_t}a(t)=-\beta_t\dot\beta_t.$$

其解的形式为 $a(t)=C\beta_t-\beta_t^2$。施加边界条件 $\alpha_1=0$，$\beta_1=1$ 可得 $C=1$，因此$\alpha_t=\sqrt{\beta_t(1-\beta_t)}$，或等价地 $\alpha_t^2+\beta_t^2=\beta_t$，正如所述。

注意，当 $t\to0_+$时，$\beta_t/\alpha_t=\sqrt{\beta_t}/\sqrt{1-\beta_t}\to0$，或等价地，当 $t\to0_+$时，$\beta_t=o(\alpha_t)$，正如所述。类似地，当 $t\to0_+$ 时，$\alpha_t^2/\beta_t=1-\beta_t\to1$，因此当 $t\to0_+$时，$\alpha_t^2=O(\beta_t)$。求导可得

$$\dot u_t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\beta_t}{\sqrt{\beta_t(1-\beta_t)}+\beta_t}\right)=\frac{\dot\beta_t}{2\sqrt{\beta_t(1-\beta_t)}\left(1+2\sqrt{\beta_t(1-\beta_t)}\right)}\to\lim_{t\to0_+}\frac{\dot\beta_t}{2\sqrt{\beta_t}}\quad\text{as}\quad t\to0_+,$$

这就证明了 $\dot u_0<\infty$ 当且仅当 $\dot\beta_t=O(\sqrt{\beta_t})$ 当 $t\to0_+$时，正如所述。在这种情况下，我们已经证明，根据定义6.1，该调度确实是点质量调度。

最后，我们证明关于 ε_t^* 的所述恒等式。注意到 $\dot\alpha_t=\beta_t(1-2\beta_t)/(2\alpha_t)$，因此

$$\varepsilon_t^*=\alpha_t^2\frac{\dot\beta_t}{\beta_t}-\alpha_t\dot\alpha_t=\dot\beta_t(1-\beta_t)-\frac{1}{2}\dot\beta_t(1-2\beta_t)=\frac{1}{2}\dot\beta_t,$$

如前所述。因此，对于任意 $0\le s\le t\le1$，也有 $\int_s^t2\varepsilon_u^*\,\mathrm{d}u=\beta_t-\beta_s$。□

命题 7.5（从线性速度到惰性常微分方程速度）。 定义调度

$$\alpha_t:=(1-t)/\sqrt{d_t},\quad\beta_t:=t/\sqrt{d_t},\quad d_t:=(1-t)^2+t^2,$$

如例 7.4 所示，并假设我们可以访问来自定义 $b = v^{flow}$ 5.1的线性插值的常微分方程速度。那么该速度满足

$$b(t,x) = ((1-2t)/(d_t))x + (1/\sqrt{d_t})\bar{b}(t,\sqrt{d_t}x),$$

对所有 $(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}^d$。特别地，初始速度满足

$$b(0,z) = z + \bar{b}(0,z) = \mathbb{E}[X] \quad \forall z \in \mathbb{R}^d.$$

证明。 注意到 $c_t = 1/\sqrt{d_t}$， $\dot{c}_t = (1-2t)/(d_t\sqrt{d_t})$ $u_t = t$， $\dot{u}_t = 1$ 并应用命题 5.4，令 $\varepsilon \equiv 0$ 从而也有 $\varepsilon \equiv 0$，得到转换公式

$$b(t,x) = \frac{1-2t}{d_t}x + \frac{1}{\sqrt{d_t}}\bar{b}(t,\sqrt{d_t}x).$$

特别地，由于 $d_0 = 1$和 $u_0 = 0$，我们得到

$$b(0,z) = z + \bar{b}(0,z) = z + \mathbb{E}[X \mid Z = z] - \mathbb{E}[Z \mid Z = z] = \mathbb{E}[X].$$

注意，即使 $t \in \{0,1\}$，所有方程仍然是良定义的。证明完毕。 □

命题 7.6（从线性速度到惰性随机微分方程漂移）。 定义调度

$$\alpha_t \coloneqq t(1-t)/d_t, \quad \beta_t \coloneqq t^2/d_t, \quad d_t \coloneqq (1-t)^2 + t^2,$$

如例 7.4 所示，并假设我们可以获得定义 $b = v^{flow}$ 5.1 中线性插值的常微分方程速度 。那么，统计最优随机微分方程漂移满足

$$b^*(t,x) = (2/d_t)((1-2t)x + t\bar{b}(t,(d_t/t)x)),$$

对所有 $(t,x) \in (0,1] \times \mathbb{R}^d$，且初始漂移恒为零，即 $b^*(0,0) = 0$。

证明。 注意到 $c_t = t/d_t$， $\dot{c}_t = (1-2t^2)/d_t^2$， $u_t = t$， $\dot{u}_t = 1$ 并应用命题 5.4，令 $\varepsilon = \varepsilon^*$，于是

$$\bar{\varepsilon}_{u_t} = \bar{\varepsilon}_t = \frac{\alpha_t}{\beta_t} = \frac{1-t}{t} = \bar{\varepsilon}_t^*$$

得到转换公式

$$b^*(t,x) = \frac{1-2t^2}{td_t}x + \frac{t}{d_t}\bar{b}^*\left(t, \frac{d_t}{t}x\right),$$

该公式对 $t \in (0,1]$有效。根据命题 4.2，我们可以将统计最优随机微分方程漂移 $\varepsilon = \varepsilon^*$ 转换为常微分方程速度 ($\varepsilon \equiv 0$)，将其应用于在 $(t,(d_t/t)x)$ 处求值的线性插值，可得

$$\bar{b}^*\left(t, \frac{d_t}{t}x\right) = 2\bar{b}\left(t, \frac{d_t}{t}x\right) - \frac{\dot{\bar{\beta}}_t}{\bar{\beta}_t}\frac{d_t}{t}x = 2\bar{b}\left(t, \frac{d_t}{t}x\right) - \frac{d_t}{t^2}x.$$

将其代入 $b^*(t,\ x)$ 的表达式中，得到

$$b^*(t,x) = \frac{1-2t^2-d_t}{td_t}x + \frac{2t}{d_t}\bar{b}\left(t, \frac{d_t}{t}x\right) = \frac{2}{d_t}\left((1-2t)x + t\bar{b}\left(t, \frac{d_t}{t}x\right)\right),$$

这仍然仅在 $t \in (0,1]$时成立。这就证明了该命题的第一部分。为了分析 $t = 0$ 的情况，我们将 $(t/d_t)x$ 代入 x，得到

$$b^*\left(t, \frac{t}{d_t}x\right) = \frac{2t}{d_t^2}(1-2t)x + \frac{2t}{d_t}\bar{b}(t,x) \to 0 \quad \text{as} \quad t \to 0_+,$$

由于 $d_0 = 1$ 和 $\bar{b}(0,\ x) = \mathbb{E}[X] - x < \infty$ 对所有 $x \in \mathbb{R}^d$均成立。又因为 $(t/d_t)x \to 0$ 当 $t \to 0_+$ 时，我们看到初始漂移满足 $b^*(0,\ 0) = 0$，正如所声称的那样。至此，证明完成。 □

B. 与流和扩散的关系

本节将严格说明定义 1.1 中的随机插值分别与流模型和扩散模型中研究的对象之间的关系。Albergo 等人（Albergo 等人，2025年）在第 5.1 节分析了其与扩散模型的关系，但据我们所知，命题 ε^*（见定义 4.1和定理 4.3）中提出的与统计最优扩散尺度之间的特定联系，此前尚未有人指出。B.5。

首先，我们证明最优扩散尺度 ε^*的一些基本性质。

命题 B.1. 对于满足定义 (α, β) 中判据的任意调度 *1.1*, ε^* 满足定义 *4.1* 的条件

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_0^* \coloneqq \lim_{t\to 0_+} \varepsilon_t^* = \infty \quad \textit{if } \lim_{t\to 0_+} \frac{\dot\beta_t}{\beta_t} \textit{ exists},\\
&\varepsilon_t^* \in (0,\infty) \quad \forall t \in (0,1),\\
&\varepsilon_1^* = 0,\\
&\int_0^t \varepsilon_s^* \,\mathrm{d}s = \infty \quad \forall t \in (0,1].
\end{aligned}$$

证明。我们有

$$\varepsilon_0^* \coloneqq \lim_{t\to 0_+} \varepsilon_t^* = \lim_{t\to 0_+} \left(\alpha_t^2 \frac{\dot\beta_t}{\beta_t} - \alpha_t\dot\alpha_t\right) = \lim_{t\to 0_+} \frac{\dot\beta_t}{\beta_t} - \dot\alpha_0 = \lim_{t\to 0_+} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log(\beta_t) - \dot\alpha_0 = \infty,$$

如果 $\lim_{t\to 0_+}(\beta_t/\beta_t)$ 存在，因为 $\alpha_0 = 1, |\dot\alpha_0| < \infty, \beta_0 = 0$ 以及 $\beta_t > 0$ 对于 $t > 0$。由单调性假设 $\dot\alpha_t < 0$ 和 $\beta_t > 0$ 可知，对于所有 $t \in (0,1)$， ε^* 严格为正。 $\varepsilon_1^* = 0$ 由 $\alpha_1 = 0, \beta_1 = 1, |\dot\alpha_1| < \infty, |\beta_1| < \infty$得出。

为了证明 ε^* 不可积，我们对 $t \in (0, 1)$ 使用 $\dot\alpha_t < 0$ 来界定 $\varepsilon_t^* \geq \alpha_t^2 \,\mathrm{d}\,\mathrm{d}t \log(\beta_t)$，并写作

$$\int_0^t \varepsilon_u^* \,\mathrm{d}u = \lim_{s\to 0_+} \int_s^t \varepsilon_u^* \,\mathrm{d}u \geq \alpha_t^2 \lim_{s\to 0_+} \int_s^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\log(\beta_u)\,\mathrm{d}u = \alpha_t^2(\log(\beta_t) - \lim_{s\to 0_+}\log(\beta_s)) = \infty \quad \forall t \in (0,1],$$

因为 $\beta_0 = 0$ 和 $\beta \in C^1([0,1])$。证明至此完成。 □

B.1. 流模型

在流模型（更准确地说，流匹配模型）中，考虑时变随机变量 $(1-t)Z + tX$，其中 $Z \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I})$，且 $X \sim \rho_X$ 与 $t \in [0,1]$ 独立。接着利用常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Y_t^{\text{flow}} = v^{\text{flow}}(t, Y_t^{\text{flow}})$$

其速度场为

$$v^{\text{flow}}(t,x) \coloneqq \mathbb{E}[X \mid (1-t)Z + tX] - \mathbb{E}[Z \mid (1-t)Z + tX]$$

对于 $(t,\ x) \in [0,1] \times \mathbb{R}^d$ 生成 ρ_X，即 $Y_{流_1} \sim \rho_X$ 只要 $Y_{流_0} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I})$。可以看出，这与定义 5.1中的线性插值完全对应，即 $I_t = (1-t)Z + tX$ 和

$$\bar b(t,x) = \mathbb{E}\left[\dot{\bar I}_t \mid \bar I_t = x\right] = v^{\text{flow}}(t,x)$$

对所有 $(t,\ x) \in [0,1] \times \mathbb{R}^d$，其中我们使用记号 $b \coloneqq b^{\varepsilon\equiv 0}$ 表示定义 5.1 中线性插值的常微分方程速度5.1。

B.2. 扩散模型

在方差保持扩散模型（或者更准确地说，基于分数的生成模型）中，通过从时间 0 运行到 ∞ 的奥恩斯坦-乌伦贝克过程，将数据 $Y_0 = X \sim \rho_X$ 扰乱为噪声 $Y_\infty = Z \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I})$（实际应用中也会运行到某个有限但较大的 T，这会引入偏差），

$$\mathrm{d}\tilde Y_s = -f(s)\tilde Y_s \,\mathrm{d}s + g(s)\,\mathrm{d}\tilde W_s,$$

其中 f， g 是光滑且非负的，并满足

$$\int_0^\infty f(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^\infty g(s)\,\mathrm{d}s = \infty,$$

˜使得平稳分布确实为标准高斯分布，即 $Y_\infty \sim \mathcal{N}(\mathbf{0},\ \mathbf{I})$。

随后，利用 Anderson时间反演（Anderson，1982）构造唯一的逆时过程，该过程从 ∞ （或 T）运行至0，将噪声转化为数据，且其联合分布与正向过程相同。该逆时过程取决于初始分布为 ρ_X的奥恩斯坦-乌伦贝克过程的得分函数。

要将扩散模型与流模型及随机插值进行比较，必须通过某个 C^1 单调递增双射 $\phi\colon [0,\infty) \to [0,1)$对时间进行紧化，该双射满足 $\phi(0) = 0$ 且 $\lim_{s\to\infty}\phi($ s $\to) = 1$，其逆映射为 $\psi := \phi^{-1}\colon [0,1)\,[0,\infty)$。随后可定义 $Y_\tau := Y_{\psi(\tau)}$ for $\tau \in [0,1)$，并通过极限论证将其扩展至 $\tau \in [0,1]$。采用与定理 5.5 的证明中类似的标准随机微积分技巧，可得

$$\mathrm{d}Y_\tau = -f(\psi(\tau))\psi'(\tau)\,Y_\tau\,\mathrm{d}\tau + g(\psi(\tau))\sqrt{\psi'(\tau)}\,\mathrm{d}W_\tau,$$

with

$$W_\tau := \int_0^{\psi(\tau)} \sqrt{\phi'(s)}\,\mathrm{d}\tilde{W}_s.$$

特别地，若取 $\phi(s) = 1 - \exp(-s)$，使得 $\psi(\tau) = -\log(1-\tau)$ 且 $\psi'(\tau) = 1/(1-\tau)$，则得到奥恩斯坦-乌伦贝克过程

$$\mathrm{d}Y_\tau = -\frac{f(-\log(1-\tau))}{1-\tau}\,Y_\tau\,\mathrm{d}\tau + \frac{g(-\log(1-\tau))}{\sqrt{1-\tau}}\,\mathrm{d}W_\tau.$$

如下命题 B.5 所示，在随机插值框架中选取统计最优扩散尺度 $\varepsilon = \varepsilon^*$ 时，相应的反向时间随机微分方程在时间范围$[0,1]$内会成为奥恩斯坦-乌伦贝克过程。在陈述这一结果之前，我们需要引入 反向漂移 ，如（Albergo 等人，2025年）中所述；还需要给出一个类似于定理1.4 的核心结果，以及一个类似于命题 4.2的插值内转换结果。

定义 B.2 （反向漂移）。对于定义 1.1 中的插值以及 $\varepsilon\colon\ [0,1] \to [0,\infty]$， $\varepsilon \in C^1$（$(0,1]$）我们定义反向漂移

$$\overleftarrow{b}^{\varepsilon}(t,x) := \dot{\alpha}_t \eta_Z(t,x) + \dot{\beta}_t \eta_X(t,x) - \varepsilon_t s(t,x).$$

关于以下结果的证明，请参阅 Albergo 等人 (2025年。

定理 B.3. 定义 $\overleftarrow{\tau}\colon = 1-t$ 和 $W_\tau\colon = -W_\tau = -W_{1-t}$。那么，反向时间随机微分方程族的解

$$\mathrm{d}\overleftarrow{X}^{\varepsilon}_\tau = -\overleftarrow{b}^{\varepsilon}(\tau, \overleftarrow{X}^{\varepsilon}_\tau)\,\mathrm{d}\tau + \sqrt{2\varepsilon_\tau}\,\mathrm{d}\overleftarrow{W}_\tau,$$

$\overleftarrow{\tau}$ $\overleftarrow{X}$ $\overleftarrow{W}$ $\overleftarrow{\tau}$在反向时间 τ 中正向求解，其中 $X_0^\varepsilon \sim \rho_X$ 与 W 独立，满足 概率分布(X_τ^ε) =概率分布$(I_{1-\tau})$对所有 $\tau \in [0,1]$ 均成立。

以下命题可通过与命题 4.2 类似的方法证明。

命题 B.4. 对于固定的插值调度 (α,β) 以及 $\varepsilon\colon\ [0,1] \to [0,\infty)$，定义 *B.2*中的反向漂移可通过以下方程用得分表示

$$\overleftarrow{b}^{\varepsilon}(t,x) = (\varepsilon_t^* - \varepsilon_t)s(t,x) + \frac{\dot{\beta}_t}{\beta_t}x,$$

对所有 $(t,x) \in (0,1) \times \mathbb{R}^d$。

现在我们陈述并证明自己的结果。

命题 B.5. 令 $\overleftarrow{b^*} := \overleftarrow{b^{\varepsilon^*}}$ 为根据定义 *1.1*，任意（非点质量）随机插值在正向时间下统计最优的反向时间漂移。那么，定理 *B.3* 中相应的反向时间随机微分方程是如下形式的时间缩放的奥恩斯坦-乌伦贝克过程

$$\mathrm{d}\overleftarrow{X^*_\tau} = -\frac{\dot\beta_\tau}{\beta_\tau}\overleftarrow{X^*_\tau}\,\mathrm{d}\tau + \sqrt{2\varepsilon^*_\tau}\,\mathrm{d}\overleftarrow{W_\tau},$$

$\leftarrow$在反向时间中求解 τ，初始条件为 $X^*_0 \sim \rho_X$。此外，若该插值满足方差保持条件，即对于所有 $t \in [0,1]$，均有 $\alpha_t^2 + \beta_t^2 = 1$，则反向时间随机微分方程简化为

$$\mathrm{d}\overleftarrow{X^*_\tau} = -\varepsilon^*_\tau\overleftarrow{X^*_\tau}\,\mathrm{d}\tau + \sqrt{2\varepsilon^*_\tau}\,\mathrm{d}\overleftarrow{W_\tau}.$$

证明。 定理 B.3 中的随机微分方程为

$$\mathrm{d}\overleftarrow{X^\varepsilon_\tau} = -\overleftarrow{b^\varepsilon}(\tau, \overleftarrow{X^\varepsilon_\tau})\,\mathrm{d}\tau + \sqrt{2\varepsilon_\tau}\,\mathrm{d}\overleftarrow{W_\tau}.$$

利用命题 B.4，结合 $\varepsilon = \varepsilon^*$ 可得

$$\overleftarrow{b^*}(\tau, x) = \frac{\dot\beta_\tau}{\beta_\tau}x,$$

因此，定理 B.3中的随机微分方程简化为

$$\mathrm{d}\overleftarrow{X^*_\tau} = -\frac{\dot\beta_\tau}{\beta_\tau}\overleftarrow{X^*_\tau}\,\mathrm{d}\tau + \sqrt{2\varepsilon^*_\tau}\,\mathrm{d}\overleftarrow{W_\tau},$$

如所述。 现在假设 $\alpha_\tau^2 + \beta_\tau^2 = 1$，即假设调度为方差保持型，则有 s

$$\varepsilon^*_\tau = (1-\beta_\tau^2)\frac{\dot\beta_\tau}{\beta_\tau} - \alpha_\tau\left(\frac{-\dot\beta_\tau\beta_\tau}{\alpha_\tau}\right) = \frac{\dot\beta_\tau}{\beta_\tau},$$

因此，定理B.3中的随机微分方程简化为

$$\mathrm{d}\overleftarrow{X^*_\tau} = -\varepsilon^*_\tau\overleftarrow{X^*_\tau}\,\mathrm{d}\tau + \sqrt{2\varepsilon^*_\tau}\,\mathrm{d}\overleftarrow{W_\tau},$$

正如所声称的。 □

C. 调度可视化

图4 的第一行展示了流匹配模型使用的线性调度（见定义5.1），以及惰性常微分方程和随机微分方程调度（分别见命题7.1，特别是例7.4）。第二行展示了与各调度相关的统计最优扩散尺度 ε^*（见定义4.1和定理4.3）。图中使用的分母定义为 $d_t := (1-t)^2 + t^2$。请注意，这些正是图1中使用的调度和扩散尺度。

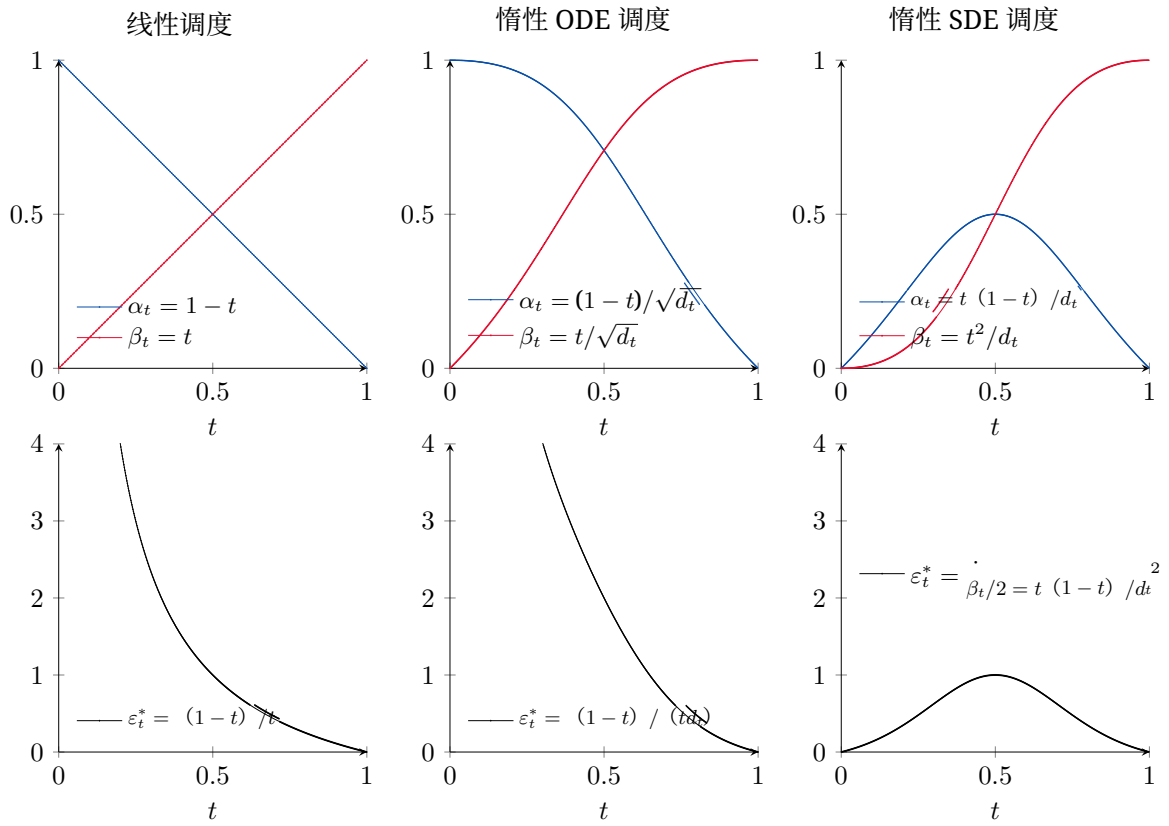


图 *4.* 调度 $(\alpha,\ \beta)$（上排）及相应的统计最优扩散尺度 ε^*（下排）。这些是图 1中使用的调度和扩散尺度。

D. 惰性常微分方程和随机微分方程采样的伪代码

算法1 和2给出了伪　　代码，用于命题7.5和7.6的算法形式化表达，采用显式欧拉法和欧拉–丸山求解器，分别给出。我们强调，实际应用中可以使用任何常微分方程或随机微分方程求解器。

算法 1 常微分方程采样

输入： 线性速度 b，步长 Δt

$t \leftarrow 0$
$x \leftarrow$ 采样 $\mathcal{N}(0,\ I)$
当 $t < 1$ **时执行**
　$d \leftarrow 1 + 2t(t-1)$
　$b \leftarrow \frac{1-2t}{d}\, x \ + \ \frac{1}{\sqrt{d}}\, \overline{b}\Big(t, \sqrt{d}\, x\Big)$
　$x \leftarrow x + \Delta t\, b$　　(显式欧拉步)
　$t \leftarrow t + \Delta t$
结束循环
返回： x

算法 2 SDE-Sample

输入： 线性速度 b，步长 Δt
$d_{\text{next}} \leftarrow 1 + 2\Delta t(\Delta t - 1)$
$\beta_{\text{next}} \leftarrow \left(\frac{\Delta t}{d_{\text{next}}}\right)^2$
$\Delta W \leftarrow$ 对 $\mathcal{N}(0,\ \beta_{\text{next}}\mathbf{I})$ 进行采样
$t \leftarrow \Delta t$
$x \leftarrow \Delta W$　　$(X_0^* = b^*(0,\ 0)\ = 0)$
当 $t < 1$ **时执行**
　$d \leftarrow d_{\text{next}}$
　$\beta \leftarrow \beta_{\text{next}}$
　$b^* \leftarrow \frac{2}{d}\Big((1-2t)x + t\, b\big(t,\ \frac{d}{t}x\big)\Big)$
　$t_{\text{next}} \leftarrow t + \Delta t$
　$d_{\text{next}} \leftarrow 1 + 2t_{\text{next}}(t_{\text{next}} - 1)$
　$\beta_{\text{next}} \leftarrow \left(\frac{t_{\text{next}}}{d_{\text{next}}}\right)^2$
　$\Delta W \leftarrow$ 采样 $\mathcal{N}(0,\ (\beta_{\text{next}} - \beta)\,\mathbf{I})$
　$x \leftarrow x + \Delta t\, b^* + \Delta W$　　（欧拉-丸山步）
　$t \leftarrow t + \Delta t$
结束循环
返回： x

E. 常微分方程和随机微分方程数值积分方案

下面给出用于求解定理1.4 中漂移项 b^ε 和加性扩散尺度 ε的随机微分方程的数值方案,

$$\mathrm{d}X_t^\varepsilon = b^\varepsilon(t, X_t^\varepsilon)\,\mathrm{d}t + \sqrt{2\varepsilon_t}\,\mathrm{d}W_t.$$

当 $\varepsilon \equiv 0$ 时，随机微分方程退化为常微分方程，例如，Euler–Maruyama 格式变为显式 Euler 格式。注意，实验中使用的要么是 $\varepsilon \equiv 0$，要么是 $\varepsilon = \varepsilon^*$；对于我们考虑的调度，在后一种扩散尺度下，从时间 s到 $t\,(0 \le s \le t \le 1)$ 的二次变差 $\int_s^t 2\varepsilon_u^*\,\mathrm{d}u$可以解析计算（见命题 7.1 和命题 5.2），因此在下述方案和实验中均使用该结果。

总共进行 $N > 1$ 个求解器步数时，我们采用固定步长 $\Delta t = \frac{1}{N}$。我们将时间 $t_n = n\Delta t$ 经过 $n \in \{0, 1, \dots, N\}$ 步后的解记为 Y_n。对于 $n < N$，从时间 t_n 到 t_{n+1} 的维纳过程增量记为 $\Delta W_n \sim \mathcal{N}(\mathbf{0},\ \Delta t\,\mathbf{I})$，并定义 V_n:
$= \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} 2\varepsilon_t\,\mathrm{d}t\right)\Delta W_n/\Delta t$。将时间 n 的“校正”解记为 $\tilde{Y_n}$，并初始定义为 $Y_0 := Y_0$，则从 Y_n 到 Y_{n+1} 的更新步定义如下。

Euler–Maruyama 格式

$$Y_{n+1} = Y_n + \Delta t b^\varepsilon(t_n, Y_n) + V_n.$$

预测-校正

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= \tilde{Y}_n + \Delta t b^\varepsilon(t_n, Y_n) + V_n, \\ \tilde{Y}_{n+1} &= \tilde{Y}_n + \frac{1}{2}\Delta t(b^\varepsilon(t_n, Y_n) + b^\varepsilon(t_{n+1}, Y_{n+1})) + V_n. \end{aligned}$$

Heun

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= \tilde{Y}_n + \Delta t b^\varepsilon(t_n, \tilde{Y}_n) + V_n, \\ \tilde{Y}_{n+1} &= \tilde{Y}_n + \frac{1}{2}\Delta t(b^\varepsilon(t_n, Y_n) + b^\varepsilon(t_{n+1}, Y_{n+1})) + V_n. \end{aligned}$$

我们使用一种预测-校正和 Heun 格式的变体，其中最终返回的解为 Y_N，因此不会计算校正后的最终解 $\tilde{Y}_N$。这样可以避免我们必须在 $t = 1$ 处计算漂移 b^ε。[8]

请注意，预测校正方案中的“校正”步骤等同于 Heun 格式。两者都使用 Euler–Maruyama 格式的“预测”步骤，区别仅在于这一步中的漂移是在 Y_n 还是 Y_n 处计算。这个细节意味着，Heun 格式每步需要计算两次漂移，而 Euler–Maruyama 格式和预测校正方案每步只需计算一次。由于实际计算这个漂移函数相当于在神经网络中进行一次开销较大的前向传播，因此 Heun 格式的速度大约慢一倍，因为它需要进行 $2N - 1$ 次函数计算，而不是 N 次。为了公平比较这三种格式，我们让 Heun 格式的步数只有预测校正方案和 Euler–Maruyama 格式的一半。

对于实验中使用的 PRX 模型和设置，我们发现，就漂移评估次数而言，预测校正方案通常比 Euler-Maruyama 和 Heun 格式收敛得更快，尤其是在随机微分方程生成中。这一点可从图 5 和图 6 中看出：这两幅图分别展示了使用标准线性流模型调度进行常微分方程生成（$\varepsilon \equiv 0$）和统计最优随机微分方程生成（$\varepsilon = \varepsilon^*$）所得的样本图像，使用的提示词均为“两只哈士奇把头探出车窗”。可以看出，预测校正方案在 4096 步时（此时 Heun 格式已使用 2048 步）比 Euler-Maruyama 和 Heun 格式稍快地收敛到参考图像。正如预期，所有方案最终都或多或少收敛到相同的参考图像。

请注意，对于我们的实验，积分方案的选择并不重要，因为实验目的不是探究哪种方案能带来更好的图像生成效果（更快的收敛），而是评估在保持积分方案不变的情况下，转换为惰性调度所产生的影响。

[8]对我们来说，在 $t = 1$ 处评估漂移实际上并不是问题。我们使用的 PRX 流模型采用线性常微分方程速度参数化，而在将这种线性速度转换为我们所考虑的常微分方程速度和随机微分方程漂移时，所用的转换公式不会引入除以零的情况（这种情况可能会因 $\alpha_1 = 0$ 而发生）。

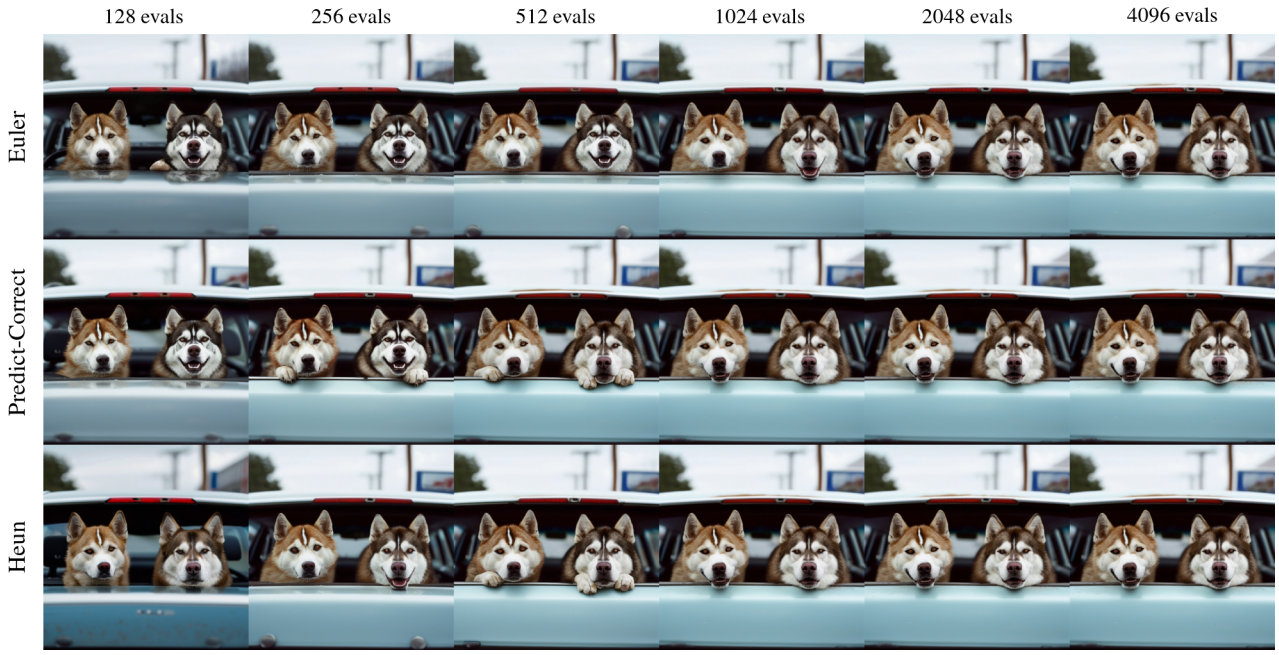


图 *5*。 使用原始线性流模型调度，对常微分方程采用不同积分方案，并以不同步数从 PRX 流模型生成的样本图像。引导强度设为 5，文本提示为“两只哈士奇把头探出车窗”。

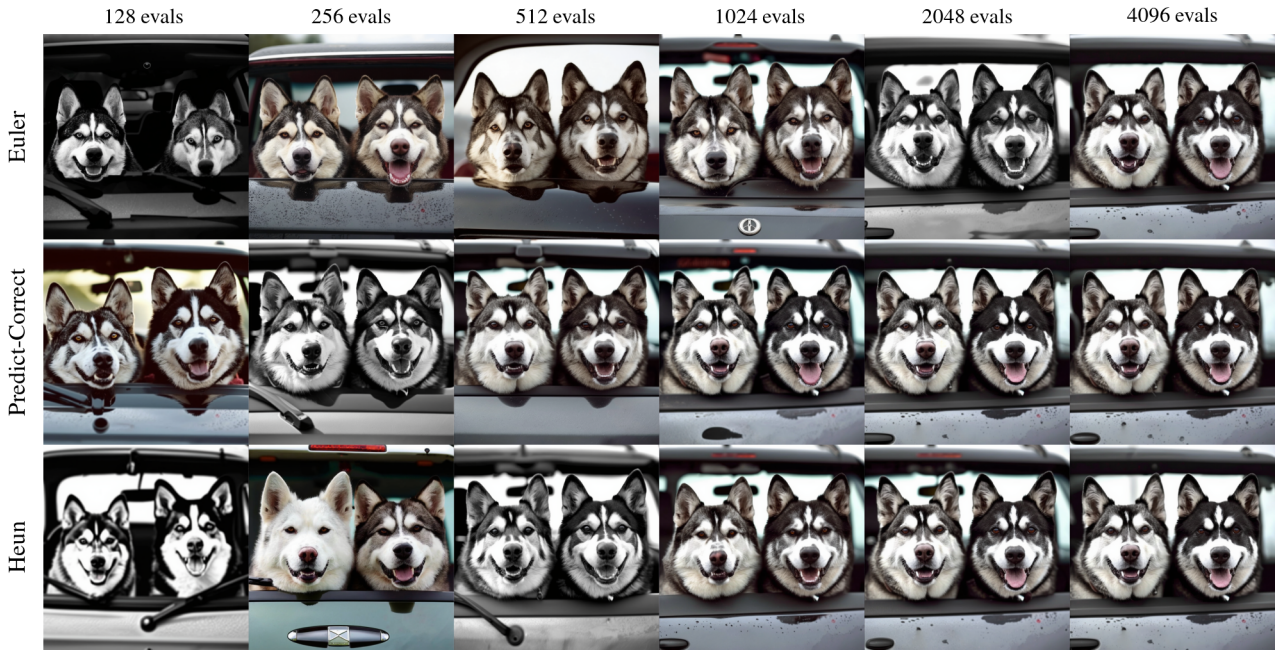


图 *6*。 与图5 相同，但采用原始线性流模型调度的统计最优随机微分方程。

F. 更多实验结果

F.1. 求解器收敛动画

与静态图像相比，动画能更直观地展示求解器的收敛情况。图7展示了使用 5个提示词生成的样例图像，所用求解器步数为 64 步预测-校正求解器。多个求解器步数对应的动画见此 Zenodo 链接。从经验上看，经过64 步后，随机微分方程的解在保真度上已可与常微分方程的解相媲美；当然，这终究是主观判断。

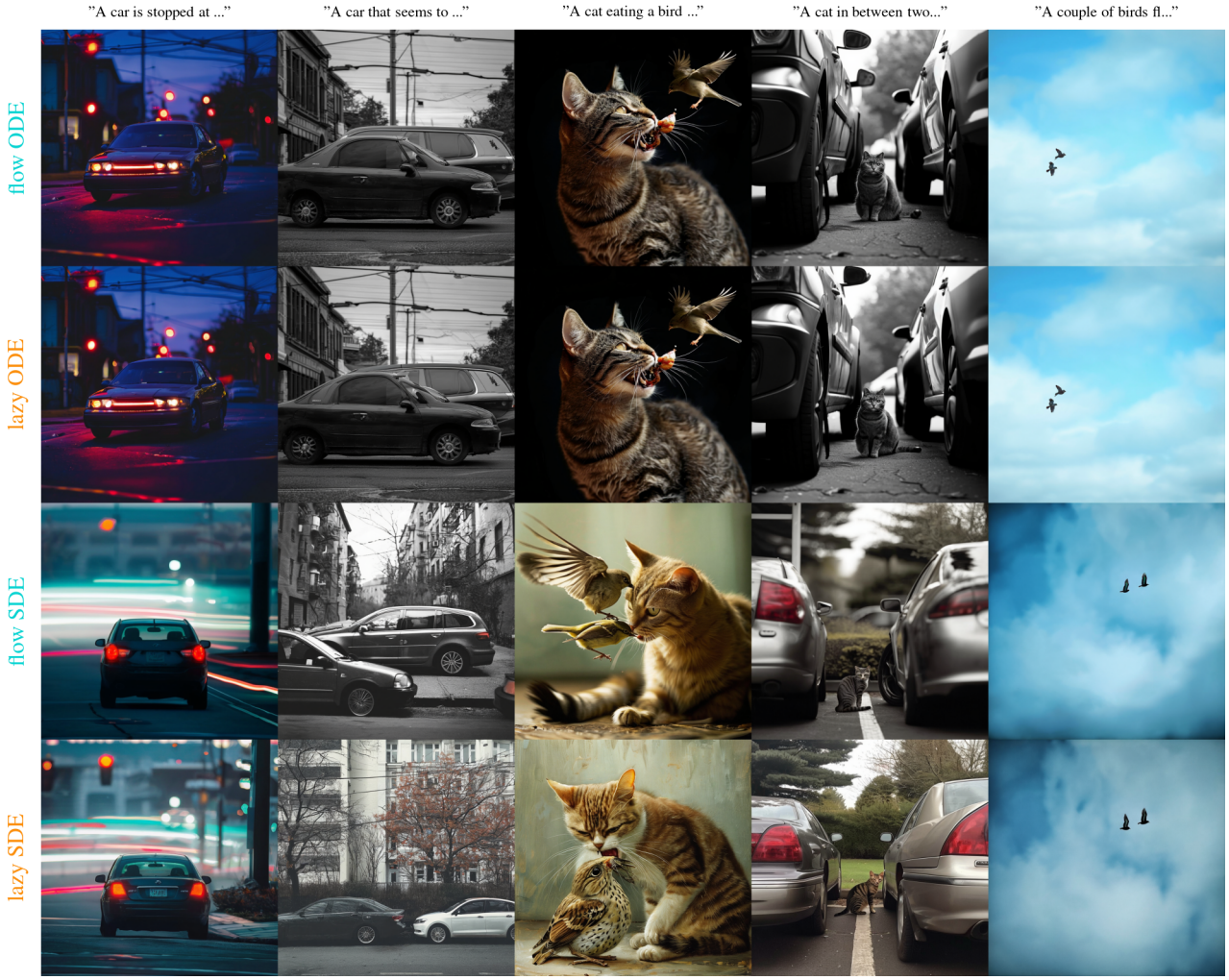


图 7. 使用 64 步预测-校正步骤，为实验中的 5 个不同提示词生成的样例图像。每一行对应所使用的是常微分方程还是随机微分方程，以及采用的是原始线性流模型调度，还是转换后的惰性调度。所有求解器步数对应的动画 $\{4, 8, \ldots, 4096\}$ 见此 Zenodo 链接。

F.2. 收敛的等价性

在此，我们测试无论使用流调度还是惰性调度，常微分方程和随机微分方程的解是否都会收敛到同一参考图像。对于每个 n_i 个求解器步数，我们计算使用原始线性流模型调度生成的图像与使用 n_i 步转换为惰性调度后生成的图像之间的均方根误差，即计算

$$\texttt{RMSE}(\texttt{img}_{n_i}^{\text{ODE,flow}}, \texttt{img}_{n_i}^{\text{ODE,lazy}})$$

对于每个 i，随机微分方程也同理。随后，我们对全部100 个提示词取平均，并分别绘制常微分方程和随机微分方程的平均值随 n_i 变化的曲线。结果如图 8所示。图中表明，常微分方程和随机微分方程最终都会收敛到

同一张参考图像，无论使用哪种调度，但常微分方程的收敛速度远快于随机微分方程。这可能是因为，对于常微分方程生成而言，流调度与惰性调度有些相似（尤其是两者都满足 $\alpha_0 = 1$）；而对于随机微分方程生成，惰性调度则是点质量调度（见图4）。由于流模型速度并未被完美学习，近似误差会导致流到惰性调度的变换不精确，而这种误差在随机微分方程生成中比在常微分方程生成中影响更大。

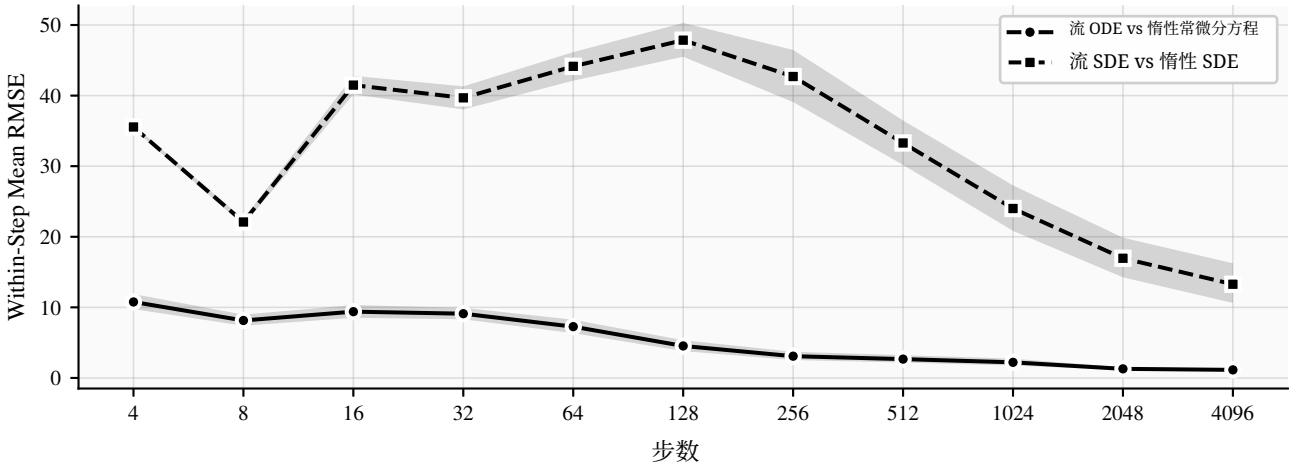


图8。 采用预测校正方案时，步内平均均方根误差随求解器步数的变化。这里的“步内均方根误差”指在固定求解器步数下，原始线性流模型调度生成的图像与转换为惰性调度后生成的图像之间的均方根误差，分别针对常微分方程和随机微分方程计算。阴影区域表示通过对10,000个样本进行自助抽样计算得到的95%置信区间。图中显示，随着求解器步数增加，均方根误差如预期般收敛至零，不过常微分方程的收敛速度远快于随机微分方程。

F.3. 以流图像作为共同参考的收敛结果

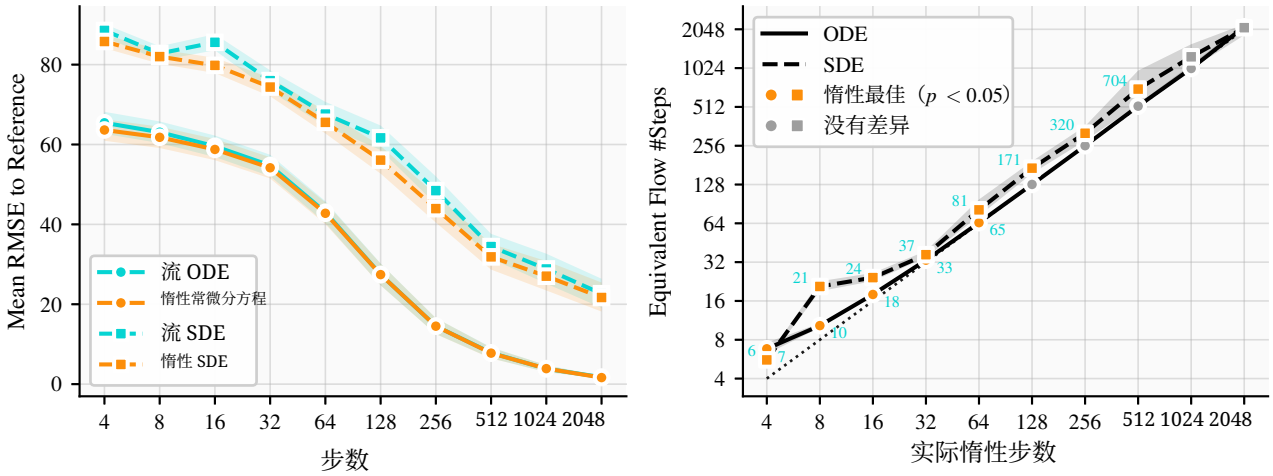


图9。 与图3 相同，但使用$\text{img}^{\text{ODE}}_{\text{reference}} := \text{img}^{\text{ODE flow}}_{4096}$代替$\text{img}^{\text{ODE}}_{\text{reference}} := (\text{img}^{\text{ODE flow}}_{4096} + \text{img}^{\text{ODE lazy}}_{4096})/2$，随机微分方程的情况也同样如此。

这里我们重现图3 但不再定义

$$\text{img}^{\text{ODE}}_{\text{reference}} := (\text{img}^{\text{ODE,flow}}_{4096} + \text{img}^{\text{ODE,lazy}}_{4096})/2,$$

而是定义

$$\text{img}^{\text{ODE}}_{\text{reference}} := \text{img}^{\text{ODE,flow}}_{4096},$$

随机微分方程也是如此。显然，这使惰性调度方法处于不利地位。然而，图9 表明，即使存在这一不利因素，惰性调度大多数时候仍能以具有统计显著性的更快速度收敛。正如人们所

预期，结果略差，例如，惰性调度在1024个求解器步数下对随机微分方程生成并不比线性流调度在统计上显著更好，而当使用平均参考作为共同参考时则是（见图3）。

G. COCO 图注

COCO 验证数据集中的图像各有五条由人工撰写的图注。我们提取前 100 张图像中的第一条图注，并去掉可能存在的末尾句号。我们将得到的 100 个句子用作 PRX 流模型的文本提示词。它们按字母顺序（按 ASCII 排序）列示如下。

1 浴室洗手池旁的台面上放着洗漱用品 2 一间浴室，马桶上方贴着一张丑脸海报 3 一间浴室，里面有洗手池、淋浴帘和地图图案 4 一间有马桶、洗手池和淋浴间的浴室 5 一间浴室里，传统马桶旁边有一个蹲厕 6 一份美味的甜点，正等着两个人分享 7 一辆自行车复制品，前轮是一个时钟 8 苏格兰的一辆自行车靠在路牌旁 9 一辆黑色本田摩托车停在车库前 10 一张老年男子滑雪的黑白照片 11 一个黑白马桶和一个马桶吸 12 一只黑猫在一个白色马桶里 13 一艘看起来像汽车的船在水中行驶 14 一匹棕黑相间的马在城市中央吃草 15 一个棕色手提包放在绿色长椅上 16 一辆汽车停在红灯前 17 一辆汽车似乎非法停在一辆合法停放的汽车后面 18 一只猫正在吃它捕获的一只鸟 19 一只猫在停车场的两辆汽车之间 20 几只鸟飞过蓝色多云的天空 21 一只可爱的小猫坐在桌上的碟子里 22 一辆印有 Entourage 广告的送货卡车 23 一名越野摩托车骑手在空中完成特技跳跃 24 一条狗和一只山羊鼻子相触，站在围栏旁 25 一条狗坐在主人双脚之间的脚凳上看电视 26 一扇门上贴着一张猫门贴纸 27 一个双洗手池浴室柜，洗手池上方有镜子 28 几样物品放在卫生间隔间的马桶上 29 一架战斗机正高速飞行 30 一个燃着火的壁炉 31 燃气灶旁是不锈钢厨房水槽和台面 32 一辆绿色汽车展示在繁忙街道旁 33 一群人在厨房里准备食物 34 一群人骑着轻便摩托车穿行于繁忙的街道 35 一间厨房，里面有木制橱柜和木质天花板 36 一架大型美国空军飞机停在沥青停机坪上 37 一架大型客机在空中飞行 38 一架大型客机正从机场起飞 39 一个小女孩在儿童公共卫生间里 40 一间宽敞、空旷、极简风格且带天窗的家用厨房 41 一名男子正从一座马桶造型的饮水喷泉接水喝 42 一名坐轮椅的男子和另一名男子坐在一张长椅上，长椅俯瞰着国王的水

43 一名男子坐在长椅上，旁边停着一辆自行车44 一名男子坐着，身旁有一头装饰传统的奶牛45 一名男子站在厨房里，正关上橱柜门46 一队摩托车正穿行于一片高大的树木之间 47 一名手持滑板的人眺望着一片枯死的农田48 一名行人在雨中沿着人行道行走

49 一张房屋内部厨房的照片 50 一张在机场宣传亚利桑那州旅游的图片 51 一张男子在厨房里拉小提琴的照片 52 一个以松木和绿色为现代主题的厨房区域 53 一间有许多小便池的公共卫生间 54 一架飞机独自在天空中飞行 55 一个蓝墙白色洗手池和白门的房间 56 一张老年男子在厨房里的照片 57 一辆小汽车停在一辆踏板车前面 58 一个小孩爬到一辆大型摩托车上 59 一个狭小空间里的小型封闭式马桶 60 一间只有马桶和搁板的迷你浴室 61 一只马桶位于窗户旁、淋浴间前 62 三只狗坐在主人怀里，主人乘坐一辆红色敞篷车 63 各种锅具放在壁炉旁的壁龛里 64 一名女人在城市里遛狗 65 一架飞机放下起落架，正在着陆 66 一间全白的厨房，配有电炉灶 67 一个办公室隔间里有四种不同的电脑 68 一个办公室隔间里有多台电脑 69 一个旧马桶上盖着凯蒂猫图案的马桶盖 70 一辆老式绿色旅行车停在阴凉的车道上 71 十字路口上空弥漫着雾，那里有几组交通信号灯 72 一块顶部铺有椰子的半块白色蛋糕 73 阴天里，一架喷气式客机飞向远方 74 几只小鸟站在长颈鹿的肩上 75 一名身穿摩托车骑行服的男子站在一群摩托车前 76 办公空间里，办公设备摆放在桌面上 77 行人沿着一条小街旁的人行道行走 78 人们在公交车站附近等公交车 79 张贴的标志指引人们穿过停车库 80 有人骑着摩托车驶过一条空无一人的街道 81 城市里一排排摩托车和头盔 82 几辆摩托车列队驶上道路 83 飞机停在跑道上，旁边站着两名年轻男子 84 厨房里带窗户的后门 85 商店外面餐馆的招牌 86 电话的听筒位置放着一根香蕉 87 厨房里的女人正拿着一口大平底锅 88 年轻男子正用木勺搅拌锅里的食物 89 这是一个装着四根黄瓜的打开的盒子 90 两只哈士奇把头探出车窗 91 两名女人在街边长椅旁等候 92 女人们围在工厂的一张桌子和机械设备旁 93 一辆自行车靠在金属围栏上，旁边有流水 94 台面上放着蔬菜、刀和砧板 95 一名男子睡着了，猫就在他身边 96 一名男子骑着自行车，身处游艇码头 97 浴室里有一只现代化的冲水马桶，地面铺着瓷砖 98 一个小厕所隔间里有马桶刷和三卷卫生纸

99 一座机场，其中一架飞机正在飞离，另一架停在
100 一间带窗户的公共卫生间里有四个小便池

r

跑道上