arXiv:2602.03800v1 [cond-mat.stat-mech] 3 Feb 2026

沿最优路径被选链路时间中的涌现相关性

Iv´an ´Alvarez Domenech,[1] Javier Rodr´ıguez-Laguna,[2] Pedro C´ordoba-Torres,[1] 和 Silvia N. Santalla[3]
[1] *Dto. Física Matemática y de Fluidos, Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), Madrid (Spain)*
[2] *Dto. Física Fundamental, Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), Madrid (Spain)*
[3] *Dto. Física & GISC, Universidad Carlos III de Madrid, Leganés (Spain)*(日期：2026年1月24日)

在首次通过渗流（快速渗流，FPP）的背景下，我们研究了*selected link-times*（SLT）的统计性质——即构成连接给定两点的最优路径（或测地线）的随机链路时间。我们重点研究弱无序方格晶格，其测地线已知属于 Kardar-Parisi-Zhang（KPZ）普适类。分析表明，SLT 的均值和标准差均随端到端距离呈普适幂律衰减，同时还存在复杂的长程关联模式，其标度指数与 KPZ 普适性直接相关。至关重要的是，对角线路径和轴向路径的 SLT 分布存在显著差异；我们将其归因于相应测地线分别具有有向和无向的不同性质。此外，我们证明，SLT 分布不满足中心极限定理的条件。相反，SLT 总和服从 KPZ 类特有的 Tracy-Widom 分布；我们认为，这为系综中高阶长程相关性的涌现提供了证据。

I. 引言

选择与条件化常常会在原本独立同分布（iid）的随机变量中诱导出相关性。简单的例子包括布朗桥，即被约束为起点与终点相同的随机游走 [1], ，以及顺序统计量，即经过排序的独立同分布变量 [2]。在这两种情形中，随机变量之间涌现的长程相关性，都是全局约束或排序过程的结果。另一个反直觉效应被称为碰撞偏差 或伯克森悖论，即针对不同的不相关性状之和，选取高于某一阈值的个体，会在它们之间诱导出虚假相关性 [3–5]。这解释了在流量受限的天文星表中，光度与距离之间存在意外的负相关性（Malmquist 偏差） [6], ，以及风险评估中独立寿命之间表面上的关联 [7]。最后，在数量遗传学中，对由若干与独立基因座相关联的效应之和所构成的性状进行进化选择，往往会通过它们之间负相关性的涌现而降低其方差，这被称为布尔默效应 [8]。我们的起始假设是：此类涌现相关性也必然出现在随机介质中由测地线——亦称最优路径——实际选取的连边时间之中，尽管连边时间的整个系综仍然保持不相关。

无序网络中最优路径 的刻画 [9, 10], 也称为首次通过渗流（FPP） [11, 12], ，与统计力学中的其他相关系统密切相连，例如随机度量中的测地线 [13, 14], 、最小生成树 [15–19],随机介质中的定向聚合物 [20], 以及渗流模型 [21]。此外，它对于涉及随机介质的若干应用也至关重要，包括通信网络中的输运 [16–19, 22, 23], 流体或电流流动 [24–30], 磁输运 [31, 32], 以及疫情传播——蔓延 [33], 和断裂 [34]。具体而言，我们将考虑正方格子上的快速渗流模型，其中与边相关的穿越时间，或链路时间 （LT），是弱无序的独立同分布随机变量 [35]。有趣的是，两个给定点之间测地线的统计性质属于 1+1 D 卡尔达-帕里西-张（KPZ）普适类 [36, 37], ；该普适类最初出现在生长界面的分析中 [38, 39], ，此后已应用于物理学和数学的众多领域 [40]。事实上，跨越欧氏距离 d 的测地线，其到达时间涨落 T 已知按 $\sigma_T \sim d^{\beta}$ 标度变化，其中 $\beta = 1/3$ 是 KPZ 的增长指数；而其相对于直线的平均横向偏差按 $h \sim d^{1/z}$ 标度变化，其中 $z = 3/2$ 是动力学指数 [36]。此外，KPZ 类中的系统往往呈现普适的局部涨落，对应于特雷西-维德姆（TW）分布族中的一种分布 [40]。我们最近证明 [37]，等时线的局部涨落遵循与高斯酉系综相关的特雷西-维德姆分布（TW-GUE），并且有证据表明，后者也可能支配到达时间涨落[36]。最后需要强调的是，在所有所考虑的情形中，测地线长度 ℓ与端到端距离 d 成正比。

在这项工作中，我们旨在刻画弱无序区中被选链路时间（SLT）的系综，即跨越不同欧氏距离的最优路径实际选取的链路时间。自然地，我们预计 SLT 的取值低于整个 LT 系综的取值，但会低多少？由于可选项较少，测地线端点附近的降幅预计会小于测地线主体部分。至关重要的是，沿测地线的 SLT 之和对应于总到达时间，其统计呈现非高斯特征。因此，SLT 必然违反中心极限定理（CLT）的假设 [41–43]。正如我们将看到的，这种违反是通过高阶长程非 Wick 相关性的涌现而发生的

，我们将这种相关性与 KPZ 标度联系起来，所依据的假设形式受到二维共形场论（CFT）的启发 [46]。由此，我们将与全计数统计（FCS） [47–49],领域建立联系；在这一领域中，研究表明，受到具有高阶长程相关性的随机涨落影响的某种物理密度（能量、磁化强度等）的积分，可以避开中心极限定理的约束。

本文的组织如下。第 II 节介绍物理模型的基本性质。第 III 节讨论 SLT 的全局概率分布，而第 IV 节刻画其对测地线上的位置和链接方向的依赖性。第 V 节讨论 SLT 之间的涌现相关性，包括二点和高阶关联函数；这些相关性使其违背中心极限定理的条件，并导致到达时间呈现特雷西-维德姆分布。最后，本文总结研究结论，并提出未来工作的方向。

II. 模型

考虑方格晶格 $\mathbb{Z}^2$，其边集记为 $\mathcal{E}$。我们为每条边 $e \in \mathcal{E}$ 关联一个 LT$t_e > 0$，其为。LT 的集合是一组独立同分布随机变量，具有共同的概率分布 $F(t)$ ($F(0) = 0$)、概率密度函数（pdf） $f(t)$、均值 τ 和偏 σ。长度为 $\ell = |\gamma|$ 的路径 γ 定义为边 $\gamma = \{e_i\}_{i=1}^{\ell}$ 的序列，满足 e_i 和 e_{i+1} 仅共享一个端点。与该路径相关的穿越时间为 $T(\gamma) = \sum_{e\in\gamma} t_e$。现在，给定两个节点$\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^2$，我们可以考虑连接它们且具有最小穿越时间的路径，即满足以下条件的路径 γ_{opt}

$$T(\gamma_{\text{opt}}) = \min_{\gamma\in\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y})} T(\gamma), \tag{1}$$

其中 $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 是连接$\mathbf{x}$ 与$\mathbf{y}$的路径集合。这条路径 γ_{opt} 称为测地线 或最优路径 ，即$\mathbf{x}$ 与$\mathbf{y}$之间的路径；与之相关的最小穿越时间称为这两个节点之间的到达时间 ，记作 $T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv T(\gamma_{\text{opt}})$。为方便记号，我们将所有测地线的初始节点设在坐标原点$\mathbf{x} = 0$，并将 $T(\mathbf{x})$ 记为 $\equiv T(\mathbf{0}, \mathbf{x})$。现在，我们可以将原点周围时间 $t > 0$ 时的球定义为 $B(t)$:

$$B(t) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 : T(\mathbf{x}) \le t\}. \tag{2}$$

$B(t)$ 的边界 $\partial B(t)$ 将称为对应于时间 t 的等时线。

无序较弱时，LT 分布的变异系数 CV$\equiv \sigma/\tau$在我们系统的统计性质中起着核心作用 [36]。对于 CV$\ll 1$，等时线趋向于一种菱形极限形状，反映了底层晶格的几何结构 [37]。然而，随着 CV 增大，菱形会连续地变为圆周，我们观察到各向同性生长。如前所述，相距较远的点之间到达时间的偏差 d 按 $\sigma_T(d) \sim d^{\beta}$增长，其中 $\beta = 1/3$ 是 KPZ 的增长指数。沿对角线方向，这种渐近行为对所有 d都成立；但沿轴向，偏差最初按 $\sigma_T(d) \sim d^{1/2}$增长，直到达到某个交叉距离 $d_c \equiv \tau^2/(3\sigma^2)$。两种情形的区别在于，均匀情形下沿轴向的测地线是非简并的，也就是说，所有 LT 都相等 [36]。此外，对于较大的 d，测地线与连接端点的直线之间的平均横向偏差 h按 $h \sim d^{1/z}$ 缩放，其中 $z = 3/2$ 是 KPZ 的动力学指数。然而，若这些点位于轴向，横向偏差在 $d \ll d_c$ [36]时可以忽略不计。

在这项工作中，我们刻画了 $(2L + 1) \times (2L + 1)$ 方形格点上沿轴向和对角方向的测地线中 SLT 的统计特性，其中 $L = 1005$。为此，我们采用了两种不同的 LT 分布族。一方面，使用区间 $[a, b]$ 上的均匀分布，其变异系数的最大可达值为 $1/\sqrt{3} \approx 0.57$，因为 $a \ge 0$ 必然成立。另一方面，我们使用了威布尔分布，其概率密度函数为

$$f(t) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left(-(t/\lambda)^k\right), \tag{3}$$

这使得变异系数可以取任意正值。

在所有模拟中，我们固定 LT 分布的均值 $\tau = 5$，并选择不同的变异系数值来考察不同的观测量。因此，对于参数为变异系数的均匀分布和威布尔分布，我们分别采用记号 U(CV) 和 Wei(CV)。此外，为了进行统计分析，我们使用 $N_s = 2 \cdot 10^4$ 个不同的噪声实现。最后，本文考虑的最大端到端距离在轴方向上为 $d_{\max} = 1000$，在对角线方向上为 $d_{\max} = 1000\sqrt{2}$ 。

III. 全局 SLT 分布

测地线倾向于经过穿越时间较低的链路，也就是说，SLT 往往低于原始 LT。本节将对这两种分布之间的差异^进行刻画。我们用 $f(t)$ 表示不同测地线上 SLT 的全局概率密度函数，并将这一记法扩展至全局概率函数^ $F(t)$，以及均值和标准差，分别记为^τ 和^σ。

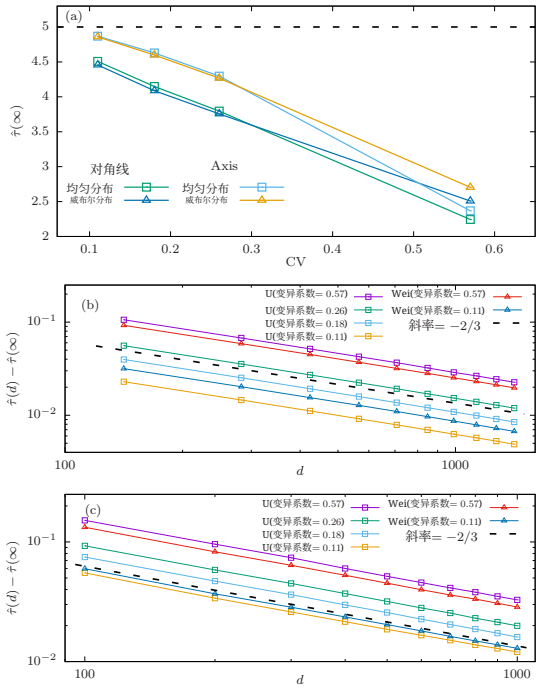

图1。(a) 两种分布和两个晶格方向下，全局 SLT 均值渐近值随 CV 变化的情况。虚线表示 LT 均值。(b) 随着端到端距离 d 增大，对角线方向测地线的 SLT 均值向其渐近值收敛的情况。(c) 相同数据，沿轴方向。两个面板中的虚线均表示指数为 $-1/z$ 的幂律行为。

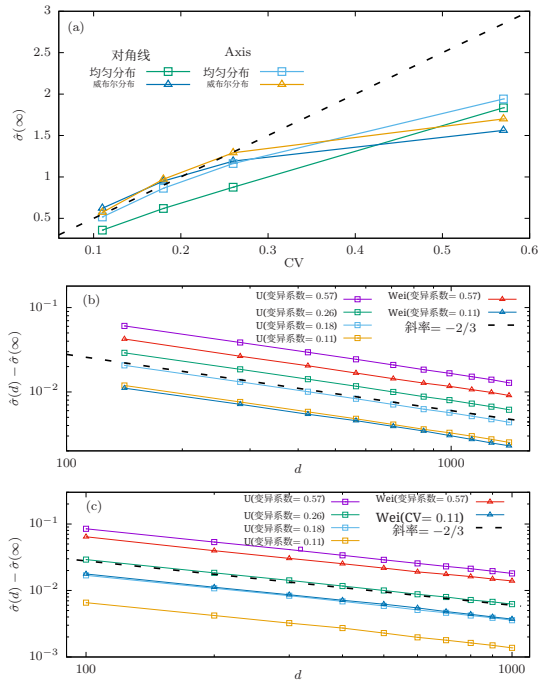

图2。(a) 两种分布和两个晶格方向下，全局 SLT 偏差渐近值随 CV 变化的情况。虚线表示 LT 偏差。(b) 随着距离 d增大，对角线方向测地线的 SLT 偏差向其渐近值收敛的情况。(c) 相同数据，沿轴方向。两个面板中的虚线均表示指数为 $-1/z$ 的幂律行为。

A. 全局 SLT 分布的均值和偏差

本节将探讨全局 SLT 分布的前两个矩与端到端距离 d 之间的关系，即不同 CV 值下的$\hat{}\tau(d)$ 和$\hat{}\sigma(d)$。显然，始终有$\hat{}\tau(d) \leq \tau$；在所有考察的情形中，我们都观察到，随着 d增大，$\hat{}\tau(d)$持续下降，并在 $d \to \infty$时趋近于极限值$\hat{}\tau(\infty)$，这与极限形状定理 [50, 51]的结果一致。图 1 (a) 展示了沿轴和对角线两种分布的这些极限值。我们观察到，在所有情形下，随着 CV 增大，$\hat{}\tau(\infty)$都会减小。CV 较低时，相对于 LT 均值（虚线）的偏移沿轴方向始终小于沿对角线方向的偏移。然而，在强无序下，这种各向异性似乎会消失。

因此，考察 $\hat{}\tau(d)$ 如何随距离 d 增大而趋近其渐近值 $\hat{}\tau(\infty)$ 是有意义的。图 1(b) 展示了对角线方向的情况，图 1(c) 展示了轴方向的情况。在所有这些情况下，我们都观察到明确的幂律衰减，

$$\hat{\tau}(d) - \hat{\tau}(\infty) \sim d^{-\alpha_\tau}, \tag{4}$$

其中 $\alpha_\tau \approx 2/3$ （虚线）。

可以通过启发式论证来理解这一行为。从具有有界支撑 $[a, b]$ 的概率分布中抽取的 n 个独立同分布随机变量，其最小值的期望在非常宽松的条件下会在 n^{-1} 时趋于 a，而其偏差也会以 n^{-1} [2] 的速度减小。在我们的情形中，由于测地线倾向于探索量级为 $h \sim d^{2/3}$ 的横向偏差，因此预期会出现上述标度区间。事实上，所有考察的分布都呈现出这一行为。

同样，对于相同的一组测地线，我们可以计算全局 SLT 偏差 $\hat{}\sigma(d)$ 随距离 d 的变化。我们还观察到其逐渐衰减至渐近值 $\hat{}\sigma(\infty)$，而该渐近值不一定低于 σ。事实上，图 2(a) 显示，对于较低的变异系数，我们可能有 $\hat{}\sigma(\infty) > \sigma$。尽管如此，这些 SLT 偏差仍按照与均值相同的指数，以幂律形式趋近其渐近值，

$$\hat{\sigma}(d) - \hat{\sigma}(\infty) \sim d^{-\alpha_\sigma}, \tag{5}$$

对于 $\alpha_\sigma \approx \alpha_\tau \approx 2/3$，如图 2(b) 中对角线方向和图 2(c) 中轴向所示。

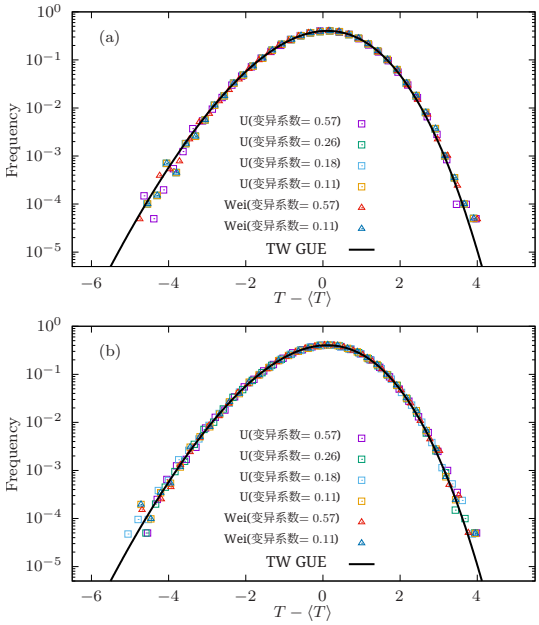

图3。 χ的直方图， χ在公式（6）中定义，是到达时间 T的标准化形式，适用于沿（a）对角线和（b）轴、具有不同 LT 分布的最大跨越距离 $d_{\max}$ 。图中还给出了经过适当重新缩放并反转的 TW-GUE分布，以供比较。

B. SLT总和的分布

SLT 的选择以使到达时间最小化。如果 SLT 是通过对原始 LT 分布进行独立随机抽样来选取的，我们预计中心极限定理（CLT）将适用。在这种情况下，相距较远的点之间的到达时间偏差 d 会按 $\sigma_T(d) \sim d^{1/2}$ 的标度变化，并呈现正态渐近涨落。然而，我们观察到的标度由 KPZ 指数 $\beta = 1/3$ 决定，且偏度和峰度的取值不同于高斯分布 [36]对应的取值。

为了充分确定到达时间涨落的性质，我们考虑一个标准化变量，

$$\chi \equiv \frac{T - \langle T \rangle}{\sigma_T}. \tag{6}$$

并绘制该变量 χ的直方图，针对不同 LT 分布下跨越距离 $d_{\max}$ 的测地线。图3展示了（a）对角线方向和（b）轴方向的结果。我们观察到，该结果与经过适当标准化的 TW-GUE分布高度吻合；由于 χ 呈现负偏度，不同于等时线的径向涨落 [37]，因此该分布沿水平轴进行了反转。

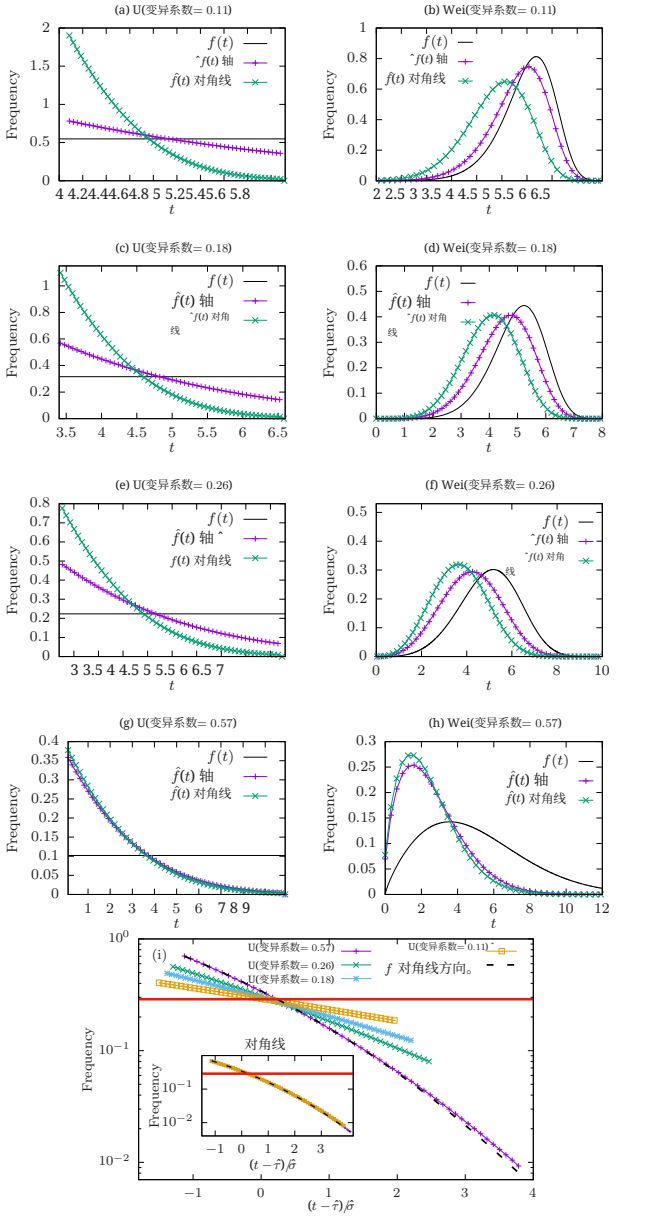

图4。（a）-（h）沿轴和对角线方向到达最大距离 $d_{\max}$ 的测地线所对应的SLT直方图$\hat{}$ $f(t)$，采用不同的LT分布，并附有原始LT概率密度 $f(t)$。左列和右列分别展示均匀分布和威布尔分布情形，CV从上到下逐渐增大。（i）沿轴和对角线（插图）方向的均匀分布的标准化SLT直方图，水平线表示原始LT分布。为便于比较，我们在主图（轴）中展示了与CV=0.57对应的插图（对角线）曲线。

C. SLT 分布的全局性质

选定时间的均值和偏差无法说明 LT 与全局 SLT 分布之间形状的变化。图 4(a) 至 (h)

比较了最大距离 $d_{\max}$ 沿轴和对角线的测地线对应的直方图，以及不同 LT 分布的直方图。左侧显示均匀分布的结果，右侧显示威布尔分布的结果，而变异系数从上到下逐渐增大。每种情况下，连续线均表示相应的原始 LT 概率密度函数 $f(t)$。请注意，所有情况下 SLT 直方图都向左移动，趋向较低的时间。不过，沿轴的移动始终小于沿对角线的移动，尽管随着变异系数增大，两者趋于相似。这一结果与图 1(a) 中显示的 $\hat{\tau}(\infty)$ 的行为一致。图 4(i) 展示了均匀分布情况下所有 SLT 分布经过标准化程序后的结果，使其均具有零均值和单位方差。请注意，对角线对应的所有标准化直方图（插图）近似重合；而沿轴的直方图（主图）则随着变异系数增大，逐渐趋近于对角线的形状。

我们能否更精确地描述 SLT 分布之间相似性与收敛的概念？当然可以，我们可以利用 *Kolmogorov-Smirnov* (KS) 距离$\hat{}$来衡量两个概率分布 $F(t)$ 和 $F(t)$ 之间的差异，其定义为

$$D_{\mathrm{KS}}\left(\hat{F}(t)\|F(t)\right)=\sup_t\left|\hat{F}(t)-F(t)\right|. \tag{7}$$

LT 分布与 SLT 分布之间的 KS 距离，可以解释为沿测地线所实现的优化程度。具体而言，如果存在单个 $t^{*}\hat{}$，使得 $f(t^{*})=f(t^{*})$，那么 KS 距离可以理解为从高于 t^{*} 的取值转移到低于 t^{*} 的取值的概率量，示意见图 5 (a)。

图 5 (b) 显示了在渐近区域中，$d\to\infty$ 对应的 LT 分布与 SLT 分布之间的 KS 距离。注意，沿轴方向，两种分布之间的 KS 距离会随变异系数迅速增大；均匀分布和威布尔分布呈现出相似的变化方式。然而，沿对角线方向，渐近 KS 距离在所有无序程度下都几乎保持不变。

另一个值得关注的现象是，随着距离 d 增大，LT 分布与 SLT 分布之间的 KS 距离如何趋近其渐近值；图 5 展示了对角方向 (c) 和轴方向 (d) 上的这一过程。在所有情况下，我们都观察到幂律趋近，

$$|D_{\mathrm{KS}}(d)-D_{\mathrm{KS}}(\infty)|\sim d^{-\alpha_{\mathrm{KS}}}, \tag{8}$$

其中 $\alpha_{\mathrm{KS}}\approx 2/3$，与均值和偏差的情况相同。

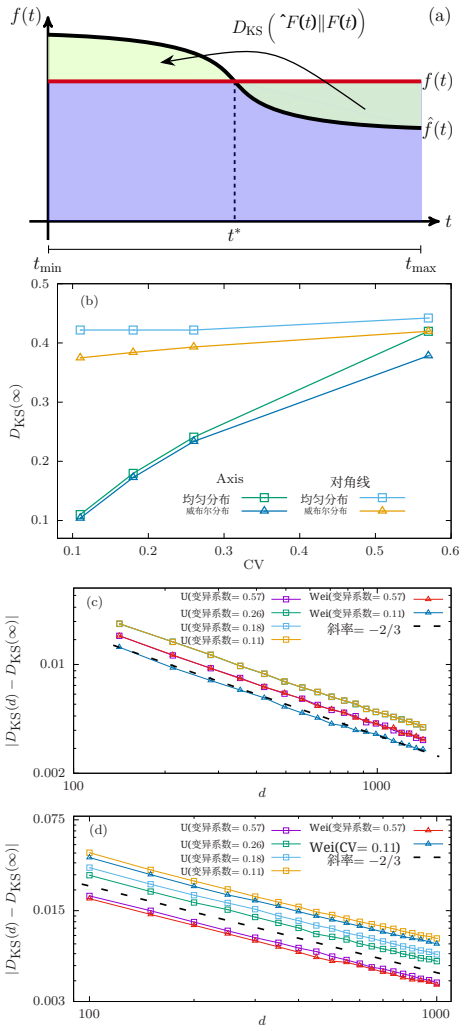

图 5。(a) SLT 分布（实线）与原始LT分布（红色水平线）之间概率偏移的示意图。(b) 沿轴方向和对角方向，在渐近大距离下，LT 分布与 SLT 分布之间的 KS 距离随两种 LT 分布的变异系数变化的情况。(c) 对角方向上，LT 分布与 SLT 分布之间的 KS 距离随距离增加而趋向其渐近值的收敛过程。(d) 轴方向上的相同数据。两个面板中的虚线均表示指数为 $-1/z$ 的幂律行为。

IV. LOCALSLT 分布

A. 局部均值和偏差

测地线在其极值附近受到特殊约束。因此，考虑给定链路的 SLT 分布如何取决于其沿测地线的相对位置是合理的。令 p 表示到最近极值的距离，并令 $f_p(t)$表示该位置处的局部SLT 分布，其中$\hat{}\tau_p$ 和$\hat{}\sigma_p$ 分别表示相应的均值和偏差。因此，我们预期

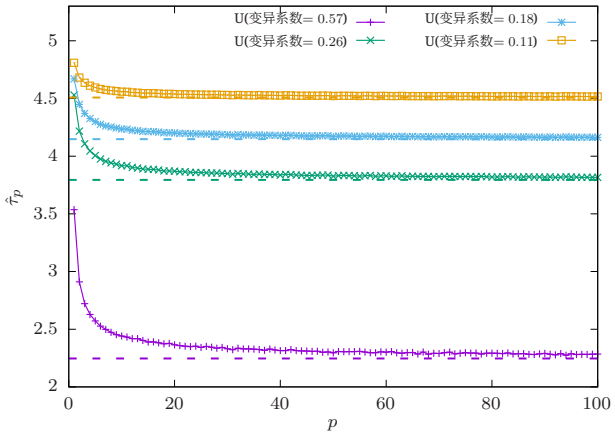

图6。对于沿对角线达到最大距离 $d_{\max}$ 的测地线，以及具有不同变异系数的均匀分布，局部SLT的均值$\hat{\tau}_p$与到最近极值的距离 p的关系。水平线表示相应的全局SLT均值$\hat{\tau}$。注意，在所有情况下，LT均值均为 $\tau = 5$。

$\hat{\tau}_1$ 接近 τ ，因为首条边只有四种选择。不过，随着 p增大，我们预期$\hat{\tau}_p$ 会进一步减小，并最终趋近于全局值$\hat{\tau}$。图6展示了沿对角线、距离为 $d_{\max}$ 的测地线上，期望值$\hat{\tau}_p$随 p 变化的情况，其中均匀分布的变异系数取不同值。水平线表示全局值$\hat{\tau}$，我们可以看到$\hat{\tau}_p$ 如何逐渐趋近于这些值。

现在我们可以研究，对于不同的分布和方向，局部均值$\hat{\tau}_p$ 向全局均值$\hat{\tau}$ 的收敛情况，并考察其随到最近极值的距离 p 的变化。结果如图7(a)所示，其中为对角线方向；图7(b)所示，其中为轴方向。图中采用对数尺度，以突出幂律衰减，

$$\hat{\tau}_p - \hat{\tau} \sim p^{-\alpha_p}. \tag{9}$$

我们观察到，沿对角线方向，对于所有考虑的分布，$\alpha_p \approx 2/3$。事实上，可以用与第 III 节中关于$\hat{\tau}(d)$随距离衰减所给出的类似启发式论证来解释这一结果。然而，沿轴向，数据表明衰减更快，$\alpha_p \approx 1$，见图 7(b)。局部偏差$\hat{\sigma}_p$也按幂律趋近其全局值$\hat{\sigma}$；如图 7(c) 中对角线方向和图 7(d) 中轴向的结果所示，其标度指数相近。

最后值得注意的是，端点附近的约束不会影响到达时间涨落的统计特性。虽然此处未展示，但我们计算了测地线主体部分中各 SLT 之和的直方图，因而舍弃了端点附近的 SLT。为此，对于不同的 δ取值，我们只考虑满足 $|t_p - \hat{\tau}| < \delta$的 SLT。所有情况下，我们都得到了TW-GUE分布。

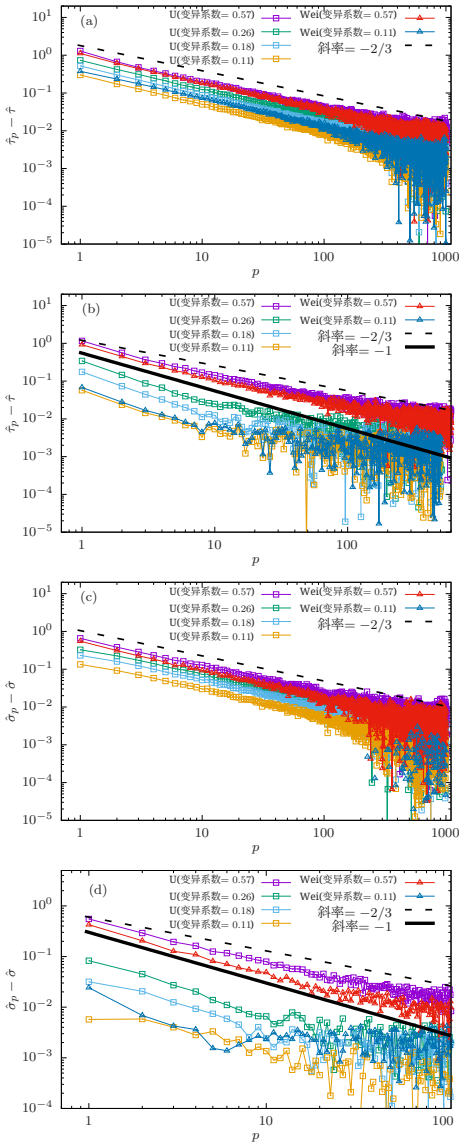

图7. 对于若干均匀分布和威布尔分布，沿着（a）对角线和（b）轴方向，距到达最大距离 $d_{\max}$ 的测地线最近极值 p 处的链路，其平均局部 SLT 超额为$\hat{\tau}_p - \hat{\tau}$。同一组分布沿对角线（c）和轴向（d）方向的局部 SLT 超额偏差为$\hat{\sigma}_p - \hat{\sigma}$。虚线和实线分别表示指数为 $-1/z$ 和−1的幂律行为。

B. 方向效应

我们考虑沿轴向的测地线。在这种情况下，我们可以区分纵向 和横向连边，这取决于它们是沿轴指向还是沿垂直方向指向。横向连边总会增加测地线长度，因此我们预期相关的SLT会取特别低的值。令 $f_{\parallel}(t)$和 $f_{\perp}(t)$ 分别表示它们各自的概率密度函数。此外，我们将纵向连边按照

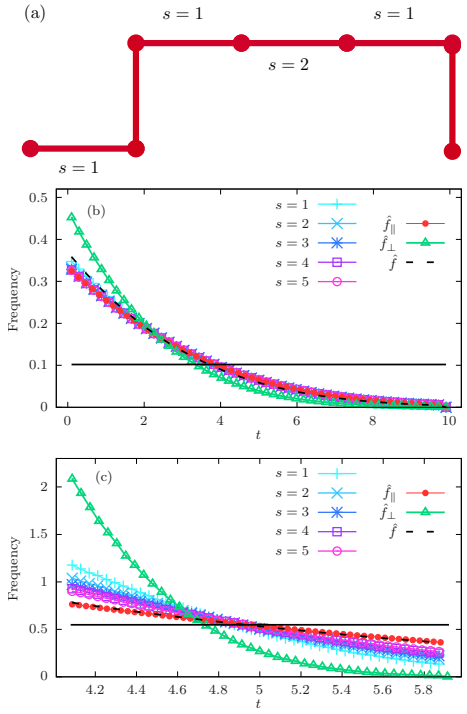

图8。（a）轴向测地线上纵向连边的标签 s 示意图。（b）和（c）分别为均匀无序下纵向和横向SLT的直方图，$f_{\parallel}$ 和 $f_{\perp}$；其变异系数分别为 =0.57（b）和 =0.11（c）。此外，还给出了不同 s 值对应的纵向SLT直方图，$f_{\parallel,s}$。为便于比较，两个面板中均以虚线和黑色实线分别表示相应的全局SLT直方图和原始LT概率密度函数。结果对应于沿轴向跨越最大距离 $d_{\max}$ 的测地线。

沿测地线到最近横向连边的距离 s加以标签，如图8（a）所示。

图8展示了横向和纵向选择链路对应的不同 SLT 直方图：(b) CV=0.57 的含噪均匀分布，以及 (c) CV=0.11 的低噪声均匀分布。在每个面板中，我们展示了以下直方图：所有 SLT、f、横向 SLT、$f_{\perp}$、纵向 SLT、$f_{\parallel}$，以及取不同 s, $f_{\parallel 值 s}$ 的纵向 SLT。正如预期，横向 SLT 的取值始终较低，其直方图与对角线上的全局 SLT 直方图相近（此处未显示）。另一方面，在低无序情况下，纵向 SLT 更接近原始 LT 分布（水平线），见图 8(c)；此时，它们还呈现出与距最近横向连边的距离 s 有关的有趣依赖关系。具体而言，我们观察到，$s=1$时纵向 SLT 的取值较低；随着 s 增大，它们趋近于全局纵向直方图。

V. 沿SLT的相关性

在第 III 节刻画了 SLT 分布的全局性质，并在第 IV 节刻画了其局部性质之后，接下来便要探讨其相关结构。尽管原始 LT 是独立同分布随机变量，但我们知道，选择和条件化可能会在这些变量之间诱发复杂的相关模式，例如伯克森悖论 [3–5] 所示。

理论论证有力地表明，SLT 分布中会出现长程关联。到达时间是SLT之和，其偏差按 d^{β} 标度变化，其中 $\beta=1/3$ 是 KPZ 的增长指数。此外，经过适当重标度的到达时间概率分布对应于 GUE 系综的 Tracy-Widom 分布。如果SLT是独立随机变量，这两个众所周知的事实便不可能成立。事实上，在这种情况下，中心极限定理将保证到达时间服从高斯分布，其偏差应按 $d^{1/2}$ 标度变化。正如我们将在本节末尾看到的，这种对中心极限定理假设的严重违背，对SLT之间的相关性施加了非常严格的条件。

A. 两点相关

定义 $\bar{t}_p \equiv \hat{t}_p - \hat{\tau}_p$，则位于测地线上 p 和 q 位置的 SLT 之间的协方差为

$$\mathrm{Cov}(p,q) \equiv \langle \bar{t}_p\, \bar{t}_q \rangle\,. \tag{10}$$

于是，它们之间的（两点）相关性定义为

$$C(p,q) \equiv \frac{\mathrm{Cov}(p,q)}{\hat{\sigma}_p \hat{\sigma}_q}. \tag{11}$$

此外，若假设存在平移不变结构，我们可以将相关函数定义为空间平均，

$$C(k) \equiv \overline{C(p,p+k)}. \tag{12}$$

当然，我们知道 SLT 并不构成平移不变随机过程。然而，在较长测地线的中央部分会形成主体部分区域。

图 9 展示了沿对角线跨越最大距离 $d_{\max}$ 的测地线上，对于不同无序分布，相关函数 $C(k)$ 的绝对值。此时相关函数 $C(k)$ 始终为负值（见插图），因为选取一个特别短的链路时间，可能会迫使我们在相邻链路时间上付出代价，使其略高于均值。我们还观察到，相关性按幂律衰减，且具有共同的标度指数，

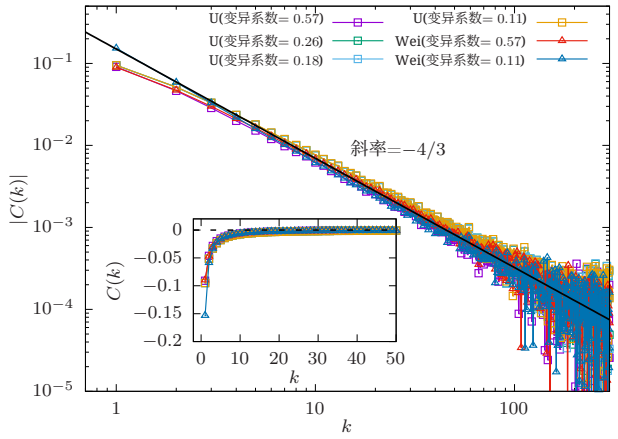

图 9. 沿对角线达到最大距离 $d_{\max}$ 的测地线在不同无序分布下的相关函数 $C(k)$。主图显示绝对值的双对数图，插图则以线性尺度显示原始值。实线表示指数为 $-4/3$的幂律行为。

$$C(k) \sim k^{-\gamma}, \tag{13}$$

其中 $\gamma = 4/3$，我们可以将其归入 KPZ 普适性类。事实上，到达时间的方差可以计算为

$$\sigma_T^2 = \langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2 = \sum_{p,q} C(p,q) \sim d^{2-\gamma}, \tag{14}$$

其中我们利用了弱无序区中 $\ell \propto d$ 这一事实。由于KPZ标度要求$\sigma_T^2 \sim d^{2\beta}$，我们推断 $\gamma = 2 - 2\beta = 4/3$。换言之：沿*SLT*的相关标度指数可以很容易地与*KPZ* 类联系起来。

图10 (a) 显示了沿轴的相关函数 $C(k)$，对应于若干无序分布以及达到最大距离 $d_{\max}$的测地线。对于高无序情形（变异系数 $= 0.57$），我们观察到相关函数 $C(k)$ 以与沿对角线所得相同的指数按幂律趋于零。然而，在低无序（变异系数 $= 0.11$）下，相关函数的符号表现得令人惊讶，因为当 k非常小时$C(k) < 0$，但随后跃升至一个很大的正值，并由此衰减至零。

为了理解相关函数沿轴所呈现的复杂模式，我们应考虑其方向信息。在第 IV 节中，我们区分了纵向链路和横向链路，在这里也可以作类似的区分。给定一条测地线，我们来考察形式为 $\pi(p,q) \equiv \bar{t}_p \bar{t}_q / \hat{\sigma}_p \hat{\sigma}_q$的项，这些项涉及链路类型的不同组合。我们可以区分出三种这样的组合：

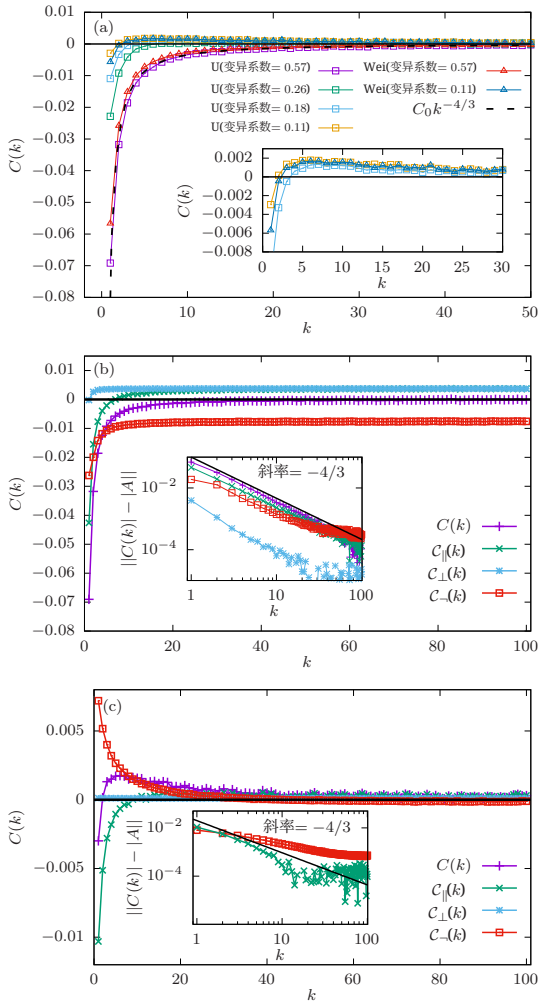

图10。（a）沿轴方向达到最大距离 $d_{\max}$ 的测地线在不同无序分布下的相关函数 $C(k)$。图中还显示了对无序程度较高的情况（变异系数=0.57）的相关函数进行拟合所得的指数为 $-4/3$的幂律。插图放大显示了正值。（b）-（c）沿轴方向达到最大距离 $d_{\max}$ 的测地线在均匀分布下的相关函数$C(k)$及其方向贡献 $\mathcal{C}_{\parallel}(k)$、 $\mathcal{C}_{\perp}(k)$和$\mathcal{C}_{\neg}(k)$，其中（b）变异系数为=0.57，（c）变异系数为=0.11。插图显示了它们向渐近值的收敛，渐近值以 A表示。

- 纵向贡献，$\pi_{\parallel}(p,q)$，如果 p 和 q均为纵向链路。
- 若 p 和 q均为横向连边，则为横向贡献 $\pi_{\perp}(p,\ q)$。
- 若其中一个为纵向连边，另一个为横向连边，则为混合贡献 $\pi_{\neg}(p,\ q)$。

然后，我们对每条测地线内所有同类型乘积关于 $k = p - q$ 取平均，得到相关性的如下分解

函数:

$$C(k) = \overbrace{\left\langle \overline{\pi_{\parallel}(p,p+k)} \right\rangle}^{\mathcal{C}_{\parallel}(k)} + \overbrace{\left\langle \overline{\pi_{\perp}(p,p+k)} \right\rangle}^{\mathcal{C}_{\perp}(k)} + \underbrace{\left\langle \overline{\pi_{\neg}(p,p+k)} \right\rangle}_{\mathcal{C}_{\neg}(k)}, \tag{15}$$

其中，上划线表示对每条测地线内同类型乘积所取的相应平均值。

现在让我们回到图 10，观察相关函数中各方向贡献的行为。对于较高的变异系数，见图 10 (b)，三种贡献均单调增长。纵向项 $\mathcal{C}_{\parallel}(k)$在 k极低时起初为负，但最终会在 k较大时收敛到正值。横向项 $\mathcal{C}_{\perp}(k)$始终为正，而混合项则保持为负。插图展示了它们向渐近值的收敛情况，可以看出，其行为与整体预期的标度相符。值得注意的是，三种贡献渐近地趋近于非零值。为理解这一行为，我们回想一下，在位置 p 和 q 处的SLT均值是在未考虑这些位置的链路方向的情况下得到的。若以$\hat{\tau}_{\perp}$ 和$\hat{\tau}_{\parallel}$ 分别表示横向和纵向SLT的均值，则根据图 8 可推导出以下不等式:

$$\hat{\tau}_{\perp} \leq \hat{\tau} \leq \hat{\tau}_{\parallel}, \tag{16}$$

$\hat{}\ \hat{}$ 在 $f_{\perp} = f_{\parallel}$的情况下，等号成立。事实上，每个贡献的渐近值的符号主要由式（16）中的不等式决定。对于横向贡献，$\mathcal{C}_{\perp}(k)$，我们有 $\hat{\tau}_{\perp} - \hat{\tau} < 0$，其渐近值的符号由乘积 $(\hat{\tau}_{\perp} - \hat{\tau})(\hat{\tau}_{\perp} - \hat{\tau})$ 的符号给出 > 0。另一方面，对于纵向贡献，$\mathcal{C}_{\parallel}(k)$，我们有 $\hat{\tau}_{\parallel} - \hat{\tau} > 0$，因此 $(\hat{\tau}_{\parallel} - \hat{\tau})(\hat{\tau}_{\parallel} - \hat{\tau}) > 0$。对于混合贡献，$\mathcal{C}_{\neg}(k)$，叉积 $(\hat{\tau}_{\parallel} - \hat{\tau})(\hat{\tau}_{\perp} - \hat{\tau})$ 为负，这也解释了所有贡献的符号。

最后，图 10 (c) 展示了变异系数=0.11 的低无序均匀分布的相同数据。纵向项为正且单调增长，与图 10 (b) 所示的高无序情形相同，而横向项几乎可以忽略。值得注意的是，混合贡献此时为正且单调衰减。这些行为为解释最终相关函数的复杂行为提供了一条途径。要理解这些模式，我们需要注意到：在弱无序下，横向SLT的数量远小于纵向SLT的数量，而两个连续的横向SLT构成一个概率可忽略的事件。因此，局部均值 $\hat{\tau}_p$ 的值接近与纵向SLT相关的均值 $\hat{\tau}_{\parallel}$，从而使 $\mathcal{C}_{\parallel}$ 具有较小的正渐近值。此外，相对较少的横向连边解释了横向贡献 $\mathcal{C}_{\perp}$取值较低的原因。为解释混合贡献 $\mathcal{C}_{\neg}(k)$ 的行为，我们回顾图 8 (b) 所示结果，该结果表明纵向连边在接近最近的横向连边时往往取值更低。若用 $\hat{\tau}_{\parallel,s}$ 表示距最近横向连边距离为 s 的纵向SLT的均值，则混合贡献由形如 $(\hat{\tau}_{\parallel,k} - \hat{\tau})(\hat{\tau}_{\perp} - \hat{\tau})$ 的项主导，这些项在 k 较小时为正。随着 k 增大，$\hat{\tau}_{\parallel,k}$ 趋近于 $\hat{\tau}$，从而使贡献 $\mathcal{C}_{\neg}(k)$ 呈现单调下降行为。

B. 高阶关联与中心极限定理假设的违反

然而，长程两点关联未必会导致违反中心极限定理的假设 [41–43],；在这种情况下，Breuer-Major 定理 [44, 45]支配着中心极限定理。直观地说，如果两点关联满足某些温和条件，我们就可以对协方差矩阵进行Cholesky分解，并将 SLT向量表示为另一个独立同分布随机变量向量的线性变换，而该向量满足中心极限定理。因此，我们先前的结果本身并不能解释为何 SLT和会出现强非高斯的极限分布，即 Tracy-Widom 分布；这种分布甚至不是无限可分的 [52]。

事实上，为了确保n相关变量 $\{X_i\}$ 的和具有高斯性，这些变量的均值为零且协方差有限 $K(X_i,\ X_j)$，高阶关联必须满足 Wick 定理（也称为 Isserlis 定理） [44, 45],

$$\langle X_1 \cdots X_n \rangle = \begin{cases} 0, & n \text{ odd}, \\ \sum_{\text{Pairings}} \prod_{(i,j)} K(X_i, X_j), & n \text{ even}. \end{cases} \tag{17}$$

由于 SLT 的总和呈现出强烈的非高斯性，高阶相关性必然偏离威克规定。这是场论和凝聚态物理中常见的现象：由于存在非威克高阶关联，随机场或量子场在有限区域上的积分（或求和）会偏离高斯性 [47–49],，这被称为 全计数统计。

具体而言，共形不变情形因其适用于临界现象而广受关注 [46]。对于一个 1+1 维共形场论（CFT），二点和三点关联函数的形式广为人知,

$$\langle X_i X_j \rangle \approx \frac{A_2}{|i-j|^{2\Delta}}, \tag{18}$$

$$\langle X_i X_j X_k \rangle \approx \frac{A_3}{|i-j|^{\Delta}|i-k|^{\Delta}|j-k|^{\Delta}}, \tag{19}$$

其中 Δ 是与场相关联的共形权重，而 A_2 和 A_3 是常数。

在我们的情形中，非高斯性意味着三点关联函数应当非零。KPZ 类中观察到的普适幂律行为，使我们可以尝试采用共形场论假设，尽管此时我们并不声称模型具有任何共形不变性。为了符合二点函数，我们必须使用 $\Delta = 2/3$。因此，我们假设

$$\langle \bar{t}_i \bar{t}_j \bar{t}_k \rangle \propto \frac{1}{|i-j|^{2/3}|i-k|^{2/3}|j-k|^{2/3}}. \tag{20}$$

不过，在继续之前，我们可以对这个表达式进行合理性检验。它能否给出有限的到达时间偏度$^-$， $T = T - \langle T \rangle$? 根据我们的假设形式，三阶矩的标度关系为

$$\langle \bar{T}^3 \rangle = \sum_{ijk} \langle \bar{t}_i \bar{t}_j \bar{t}_k \rangle \sim d^{3-3\Delta}. \tag{21}$$

事实上，根据偏度的定义，我们得到

$$\gamma_{\bar{T}} = \frac{\langle \bar{T}^3 \rangle}{\langle \bar{T}^2 \rangle^{3/2}} \sim \frac{d^{3-3\Delta}}{(d^{2-2\Delta})^{3/2}} = \text{Const}, \tag{22}$$

因此，这个假设形式是合理的。它真的成立吗？图11展示了两种不同三点关联函数的结果：测地线沿对角线跨越距离 $d_{\max}$ ，并采用不同的LT分布。图11(a)显示了 $C_3(k) \equiv \langle \bar{t}_i \bar{t}_{i+1} \bar{t}_{i+k} \rangle$ 的衰减，我们检验其是否与方程（20）的预测一致，

$$C_3(k) \equiv \langle \bar{t}_i \bar{t}_{i+1} \bar{t}_{i+k} \rangle \sim k^{-2\Delta} = k^{-4/3}. \tag{23}$$

图11(b)展示了$\hat{}$ $C_3(k) \equiv \langle \bar{t}_i \bar{t}_{i+k} \bar{t}_{i+2k} \rangle$的衰减，我们预期

$$\hat{C}_3(k) \equiv \langle \bar{t}_i \bar{t}_{i+k} \bar{t}_{i+2k} \rangle \sim k^{-3\Delta} = k^{-2}. \tag{24}$$

这类相关函数衰减得更快，因此数值上更难捕捉，不过图11(b)还是让我们得以窥见 k取值较小时的情况。

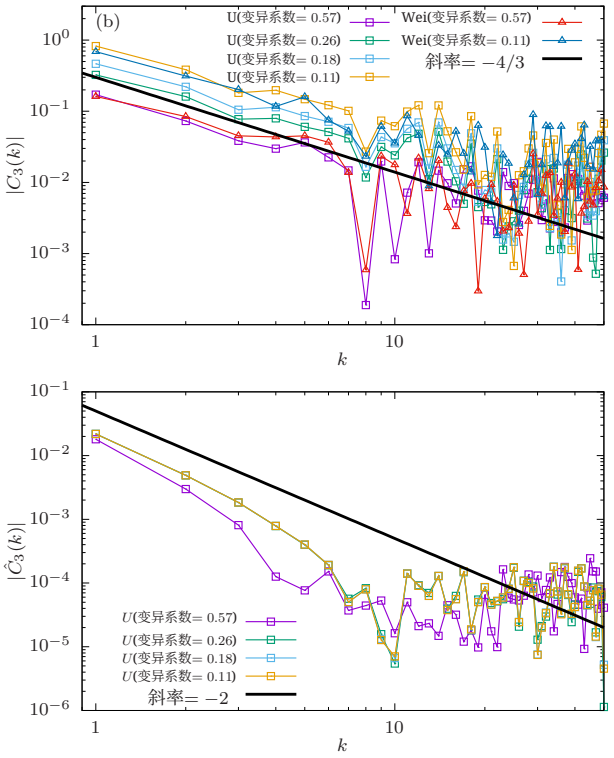

图11。(a) 三点相关函数 $C_3(k)$，定义见式(23)，对应沿对角线到达 $d_{\max}$ 的测地线，以及不同的均匀分布和威布尔分布。实线表示预测的 $k^{-4/3}$ 衰减。(b) 另一种三点相关函数$\hat{}$ $C_3(k)$，定义见式(24)，以及理论上预期的 k^{-2} 衰减。

一条对角线上各点的测地线（也称为最优路径），并采用均匀分布族和威布尔分布族中的概率分布来描述 LT，考察了不同变异系数（CV）取值下的情况。在许多情形下，SLT 概率分布呈现出标度行为。例如，随着距离增大，SLT 分布的全局均值和偏差逐渐减小，并以指数为 $-2/3$ 的幂律趋近于极限值；我们将这一现象与 KPZ 行为联系起来。此外，测地线通常在其端点附近受到更多约束，而局部 SLT 分布的均值和偏差也以类似方式趋近于体相行为。当测地线沿某一轴延伸时，我们观察到有趣的方向效应，这些效应有待进一步研究。最后，选择机制使 SLT 之间产生长程关联；这种关联沿测地线随它们之间的距离增大而按指数为 $-\gamma = 2\beta - 2 = -4/3$ 的幂律衰减，其中 $\beta = 1/3$ 是 KPZ 的增长指数。

FPP 中的到达时间是 SLT 的总和，并趋于 Tracy-Widom 分布。因此，SLT 必然违反了中心极限定理所依据的某些假设。我们探究了这类违反的起源，发现了三阶非维克长程关联。受共形对称性论证启发的假设形式，使我们得以猜测三阶

VI. 结论与后续工作

在这项工作中，我们探究了 SLT 的统计性质，即实际被选中、成为第一通过渗流格点中不同测地线一部分的链路时间。自然地，它们的取值往往低于一般 LT 分布所规定的取值。此外，与伯克森悖论类似，我们观察到，尽管原始 LT 是独立同分布随机变量，选择过程仍会在它们之间诱发涌现相关性。

具体而言，我们研究了连接方格晶格中沿某一轴或沿

点关联函数的标度形式。

事实证明，SLT 的统计性质远比最初预想的丰富，许多特征值得进一步研究。例如，在本研究中，我们忽略了测地线总长度的影响。将 TW 解释为同分布但高度相关的 SLT 之和，其起源尚未得到充分阐明。事实上，正如 Breuer-Major 定理所述，若协方差矩阵满足某些正则性约束，同分布但强相关的随机变量之和仍可能服从高斯分布；而当非线性函数作用于这些变量 [44, 45] 时，所得结果则属于不同的 Hermite 过程。不过，这一框架似乎仍无法说明 TW 分布如何在此情境下出现。这个问题为数理物理界提出了一个引人入胜的难题，值得深入探讨。

致谢

本研究得益于与 R. Cuerno、J.M. L´opez 和 D. Villarrubia 的讨论。我们感谢西班牙政府通过 PID2021-123969NB-I00、PID2024-159024NB-C21 和 PID2024-159024NB-C22 项目提供经费支持，并感谢高性能计算中心（CCAR-UNED）提供计算资源和协助。I.A.D. 感谢 UNED 通过 FPI 奖学金提供资助。

[1] I. Karatzas、S.E. Shreve, *Brownian motion and stochastic calculus* 1988 , Springer （）。[2] H.A. David、H.N. Nagaraja, *Order statistics*, John Wiley & Sons (2003)。[3] J. Berkson, *Limitations of the application of the fourfold table analysis to hospital data* , Bio metrics Bull. 2, 47 1946（）。[4] J. Pearl, *The book of why*, Basic Books（2018）。[5] J. de Ron、E.I. Fried、S. Epskamp, *Psychological networks in clinical populations: investigating the consequences of Berkson's bias* **51**, 168 2021 , Psychological Medicine（）。[6] A.G. Butkevich、A.V. Berdyugin、P. Teerikorpi, *Statistical biases in stellar astronomy: the Malmquist bias revisited* **362**, 321 2005 , Mon. Not. R. Astron. Soc.（）。[7] R.L. Prentice、J.D. Klabfleisch、A.V. Peterson Jr、N. Flournoy、V.T. Farewell、N.E. Breslow, *The analysis of failure times in the presence of competing risks*, Biomet- rics 34, 541 (1978)。[8] M.G. Bulmer, *The effect of selection on genetic variability* **105**, 201 1971 , The American Naturalist（）。[9] S. Havlin、L.A. Braunstein、S.V. Buldyrev、R. Cohen、T. Kalisky、S. Sreenivasan、H.E. Stanley, *Optimal path inrandom networks with disorder: A mini review*, Physica A 346，82（2005）。[10] P. Bhattacharyya、A. Chatterjee, *Geometric properties of optimal and most probable paths on randomly disordered lattices*，载于《无序介质中线性聚合物的统计学》，第271页，E. Bikas、K. Chakrabarti编，Else- vier（2005）。[11] J.M. Hammersley、D.J.A. Welsh, *First-passage percola-tion, subadditive processes, stochastic networks and gen-eralized renewal theory*，载于 Bernoulli, Bayes, Laplace An- niversary Volume，第61页，J. Neyman、L.M. LeCam编，Springer（1965）。[12] A. Auffinger、M. Damron、J. Hanson, *50 Years of FPP*，大学讲座丛书第68卷（American Mathemat- ical Society，2017）。[13] S.N. Santalla、J. Rodr´ ıguez-Laguna、T. LaGatta、R. Cuerno, *Random geometry and the Kardar-Parisi-Zhang universality class* **17**, 033018 2015 , New J. Phys.（）。[14] S.N. Santalla、J. Rodr´ıguez-Laguna、A. Celi、R. Cuerno, *Topology and the Kardar–Parisi–Zhang universality class*，统计力学杂志 023301 (2017)。[15] R. Dobrin, P.M. Duxbury, *Minimum spanning trees on random networks* **86**, 5076 2001 , 物理评论快报 ( )。[16] P. van Mieghem, S.M. Magdalena, *Phase transition in the link weight structure of network* , 物理评论E **72**, 056138 2005( )。[17] P. van Mieghem, S. van Langen, *Influence of the link weight structure on the shortest path* , 物理评论E **71**, 056113 2005( )。[18] Z. Wu, L.A. Braunstein, S. Havlin, H.E. Stanley, *Transport in weighted networks: Partition into superhigh-ways and roads* **96**, 148702 2006 , 物理评论快报 ( )。[19] H. Wang, J.M. Hernandez, P. van Mieghem, *Betweenness centrality in a weighted network* **77**, 046105 , 物理评论E (2008)。[20] T. Halpin-Healy, Y.-C. Zhang, *Kinetic roughening phenomena stochastic growth directed polymers and all ,,*. 物理报告 ( ). *that* **254**, 215 1995 [21] E. L ´ opez, *Disorder-induced limited path percolation* **97**, 66001 2012 L.A. Braunstein, , 欧洲物理快报 ( )。[22] B. Fortz, M. Thorup. *Optimizing OSPF/IS-IS weights in a changing world* **20**, 756 , IEEE选定领域通信杂志 (2002)。[23] R. Mahajan, N. Spring, D. Wetherall, T. Anderson,*Inferring link weights using end-to-end measurements*, IMW'02会议论文集，马赛，第231页，美国计算机协会 (2002)。[24] A.-L. Barab ´ asi, , 物理评论快报 ( )。[25] M. Cieplak, A. Maritan, J.R. Banavar, *Invasion percolation and Eden growth: Geometry and universality* , 物理评论快报 **76**, 3754 (1996)。[26] M. Porto, S. Havlin, S. Schwarzer, A. Bunde, *Optimalcolation with trapping path in strong disorder and shortest path in invasion percolation* **79**, 4060 1997 , 物理评论快报 ( )。[27] J.S. Andrade, S.V. Buldyrev, N.V. Dokholyan, S. Havlin, P.R. King, Y.K. Lee, G. Paul, H.E. Stanley, *Flow between two sites on a percolation cluster* **62**, 8270 , 物理评论E (2000)。[28] E. L´opez, S.V. Buldyrev, L.A. Braunstein, S. Havlin, H.E. Stanley, *Possible connection between the optimal path and flow in percolation clusters* , 物理评论E **72**, 056131 2005( ).

[29]Z. Wu, E. L´opez, S.V. Buldyrev, L.A. Braunstein, S. Havlin, H.E. Stanley, *Current flow in random resistor networks: The role of percolation in weak and strong disorder* **71**, 045101 2005 , 物理评论E (R) ( ). [30] G. Li, L.A. Braunstein, S.V. Buldyrev, S. Havlin, H.E. Stanley,*Transport and percolation theory in weighted networks* **75**, 045103 2007 , 物理评论E (R) ( ). [31] Y.M. Strelniker, R. Berkovits, A. Frydman, S. Havlin,*Percolation transition in a two-dimensional system of Ni granular ferromagnets* **69**, 065105 , 物理评论E (R) (2004). [32] Y.M. Strelniker, S. Havlin, R. Berkovits, A. Frydman,*Hopping percolation transition in granular ferromagnets*, J. Appl. Phys.**99**, 08P905 (2006). [33] D. Toli´c, K.-K. Kleineberg, N. Antulov-Fantulin, *Simulating SIR processes on networks using weighted shortest paths* **8**, 6562 2018 , 科学报告 ( ). [34] J.S. Andrade, E.A. Oliveira, A.A. Moreira, H.J. Her- rmann, *Fracturing the optimal paths*, 物理评论快报 **103**, 225503 (2009). [35] D. Villarrubia-Moreno, P. C´ordoba-Torres, *Unified scaling for the optimal path length in disordered lattices*, 物理评论 E**109**, 054114 (2024). [36] P. C´ordoba-Torres, S.N. Santalla, R. Cuerno, J. Rodr´ıguez-Laguna, *Kardar-Parisi-Zhang universality in first passage percolation: The role of geodesic degeneracy* 063212 2018 , 统计力学杂志 ( ).[37] I. ´Alvarez Domenech, J. Rodr´ıguez-Laguna, R. Cuerno, P. C´ordoba-Torres, S.N. Santalla, *Shape effects in the fluctuations of random isochrones on a square lattice*, 物理评论 E**109**, 034104 (2024). [38] M. Kardar, G. Parisi, Y.C. Zhang, *Dynamic scaling of growing interfaces* **56**, 889 1986 , 物理评论快报 ( ). [39] A.-L. Barab´asi, *Fractal Concepts in Surface Growth* 1995 , 剑桥大学出版社 ( ).

[40] T. Halpin-Healy 与 K.A. Takeuchi, *A KPZ cocktail-shaken , not stirred... Toasting 30 years of kinetically roughened surfaces* **160**, 794 2015 , 《统计物理学杂志》 ( ) 。[41] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications vol. II* 1968 ,, John Wiley & Sons ( ) 。[42] I.A. Ibragimov、Yu.V. Linnik, *Independent and stationary sequences of random variables*, Wolters-Noordhoff 出版社（1971）。[43] P. Billingsley, *Probability and measure*, John Wiley & Sons（1995）。[44] G. Peccati、M.S. Taqqu, *Wiener chaos: moments, cumulants and diagrams* , 博科尼大学出版社与 Springer（2011）。[45] V. Pipiras、M.S. Taqqu, *Long range dependence and self-similarity* 2017 , 剑桥大学出版社 ( ) 。[46] P. di Francesco、P. Matthieu、D. S´en´echal, *Conformal Field Theory* 1997 , Springer ( ) 。[47] C.J. Fewster、S. Hollands, *Probability distributions for the stress tensor in conformal field theories* , 《数学物理通讯》 **109**，747（2018）。[48] F. Camia、C. Garban、C.M. Newman, *Planar Ising magnetization field I. Uniqueness of the critical scaling limit* , 《概率年刊》**43**, 528 (2015) 。[49] M.C. Anthony、C.J. Fewster, *Explicit examples of probability distributions for the energy density in two-dimensional conformal field theory* , 《物理评论D辑》 **101**，025010 2020（）。[50] J.T. Cox、R. Durrett, *Some limit theorems for percolation processes with necessary and sufficient conditions* , 《概率年刊》, **9**，583，（1981）。[51] M. Damron, *Random growth models: shape and convergence rate* 1804 05716 2018 , arXiv: 。（ ）。[52] J.A. Dom´ınguez-Molina, *The Tracy-Widom distribution is not infinitely divisible* 1601 02898 2016 , arXiv: 。（ ）。