arXiv:2602.03831v1 [math.MG] 3 Feb 2026

各向同性对数凹概率测度的最大周长

Silouanos Brazitikos、Apostolos Giannopoulos、Antonios Hmadi
和 Natalia Tziotziou

摘要

我们研究 $\mathbb{R}^n$上的各向同性对数凹概率测度的最大周长常数。对于测度 μ，该量记作 $\Gamma(\mu)$，定义为对所有凸体取 μ-周长的上确界，用以衡量相对于μ而言凸集可能具有的最大边界贡献。令

Γ_n :=sup$\{\Gamma(\mu) : \mu$ 是 $\mathbb{R}^n\}$.上的各向同性对数凹概率测度

我们证明 $\Gamma_n \leqslant Cn^{3/2}$，其中 $C > 0$ 是一个绝对常数。该结果改进了此前已知的 $O(n^2)$上界。在额外的结构性假设下，我们得到阶为 $O(n)$的尖锐线性界。

1 引言

我们研究高维对数凹概率测度的极值周长性质。我们的主要结果为 $\mathbb{R}^n$上的各向同性对数凹概率测度的最大周长常数建立了 $O(n^{3/2})$上界，改进了此前已知的最佳二次界。

对于 $\mathbb{R}^n$ 上的概率测度 μ 和凸体 $A \subset \mathbb{R}^n$， A 的 μ–周长定义为

$$\mu^+(\partial A) = \liminf_{\epsilon \to 0^+} \frac{\mu\big((A + \epsilon B_2^n) \setminus A\big)}{\epsilon},$$

其中， B_2^n 表示欧几里得单位球。该概念与相对于 μ 的 ∂A的闵可夫斯基内容一致，并量化了 A 在无穷小欧几里得扩张下 μ-测度的一阶变化。随后， μ 的最大周长常数定义为

$$\Gamma(\mu) = \sup\big\{\mu^+(\partial A) : \ A \subset \mathbb{R}^n \text{ is a convex body}\big\},$$

并衡量 t 相对于 μ的所有凸体中可能的最大边界贡献。

§1.1. 主要结果。 如果概率测度 μ 在 $\mathbb{R}^n$ 上有密度 f，且该密度满足

$$\ln f(\tau x + (1-\tau)y) \geqslant \tau \ln f(x) + (1-\tau)\ln f(y) \quad \text{for all } x, y \in \mathbb{R}^n, \ \tau \in [0,1].$$

若测度 μ 的重心位于原点，且其协方差矩阵为单位矩阵，则称其为各向同性测度。在本文中，我们研究

$$\Gamma_n := \sup\{\Gamma(\mu) : \mu \text{ is an isotropic log-concave probability measure on } \mathbb{R}^n\}.$$

一个基本例子是处于各向同性位置的立方体 Q_n 上的均匀测度，此时 $\Gamma(\mu_{Q_n}) \approx n$，其中 μ_{Q_n} 是相应的各向同性测度。更一般地，在第 5 节中，我们证明，对于任意各向同性凸体 $K \subset \mathbb{R}^n$， K 上的均匀测度的最大周长常数与其表面积 $S(K)$ 同阶（见第 §5.1 节）。特别地，当 $K = Q_n$时，该量的阶为 n。

在本研究之前，已知的最佳一般上界是二次的，即 $\Gamma_n \leqslant Cn^2$，这是 Livshyts [25] 得出的。我们的主要结果将这一上界在完全一般的情形下改进至 $n^{3/2}$ 阶。

定理 1.1。 设 μ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的各向同性对数凹概率测度。那么

$$\Gamma(\mu) \leqslant Cn^{3/2},$$

其中 $C > 0$ 是一个绝对常数。

结合立方体这一例子，定理 1.1 得出

$$cn \leqslant \Gamma_n \leqslant Cn^{3/2}.$$

若将注意力限制在 μ 的对称最大周长常数上，则可改进定理 1.1 的估计，该常数定义为

$$\Gamma^{(s)}(\mu) = \sup\left\{\mu^+(\partial A) : \ A \subset \mathbb{R}^n \text{ is a symmetric convex body}\right\}.$$

定理 1.2。L *et* $\Gamma_n^{(s)} := \sup\{\Gamma^{(s)}(\mu) : \mu$ 是 $\mathbb{R}^n\}$ 上的各向同性对数凹概率测度。则

$$\Gamma_n^{(s)} \leqslant 4n.$$

在第 5 节中，我们进一步表明，在附加结构性假设下可以得到更好的界。具体而言，对于若干重要的各向同性几何对数凹测度类，我们证明了关于 $O(n)$ 的线性界，这些测度类包括凸体上的均匀测度、1-对称测度以及具有齐次等值集的测度。这些情形已在 [25] 中提及。我们的方法不仅能在其中一些情形下得到更精确的界，而且适用于更一般的测度类：

(i) 在命题 5.2 中，我们证明了：如果 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的各向同性凸体，且 μ_K 表示与之对应的、密度为 $L_K^n \mathbb{1}_{K/L_K}$ 的各向同性概率测度，其中 L_K 是 K 的各向同性常数，那么

$$\Gamma(\mu_K) = L_K S(K),$$

其中 $S(K)$ 是 K 的表面积。因此，$\Gamma(\mu_K) \leqslant \sqrt[n]{\frac{n}{n+2}}\, n$。该不等式是尖锐的：我们验证了当 K 是各向同性正则单纯形时等号成立。

(ii) 在定理 5.7 中，我们证明了：如果 μ 是一个 1-无条件各向同性对数凹概率测度，也就是说，其密度 f 对所有符号 $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ 的取值都满足 $f(x_1, \ldots, x_n) = f(\epsilon_1 x_1, \ldots, \epsilon_n x_n)$，那么

$$\Gamma(\mu) \leqslant \sqrt{2}n.$$

证明独立于 [25] 中的方法，并涵盖 1-对称测度这一严格更小的情形。

(iii) 在定 理 5.9 中，我们证明，若 μ 是 $\mathbb{R}$ 上的各向同性对数凹概率测度，则

$$\Gamma(\mu) \leqslant 2.$$

此外，常数 2 是最佳的：存在各向同性对数凹概率测度 μ，使得 $\Gamma(\mu)$ 可以任意接近 2，其中单侧指数分布达到极值。

(iv) 在定理 5.10 中，我们证明，若 $\mu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的乘积概率测度，且每个 μ_k 都有密度 $g_k \in L^\infty(\mathbb{R})$，则

$$\Gamma(\mu) \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} \|g_k\|_\infty.$$

此外，常数 2 是最优的。特别地，若每个 μ_k 都是 $\mathbb{R}$上的各向同性对数凹概率测度，则

$$\Gamma(\mu) \leqslant 2n.$$

It 确定线性界 $O(n)$ 是否在一般情况下成立，将是一件有趣的事。 .

§1.2. 证明要点。定理 1.2 的证明依赖于两个简单而有力的要素。首先，中心对数凹测度的膨胀不等式给出了凸体 A 周长的上界，该上界由其测度和内半径决定，且该凸体包含原点。其次，对于各向同性对数凹测度，任意凸体的测度都可以用其最小宽度给出一维上界。在对称情形下， A 的内切球必然以原点为中心，且最小宽度等于内半径的两倍，由此立即得到对称最大周长常数的线性界。

定理 1.1 中一般界的证明遵循相同的总体策略，并结合了 [25] 中引入的思想。上水平集在其中发挥着核心作用

$$R_t(\mu) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geqslant e^{-t}\|f\|_\infty\}$$

它们是 μ 的密度 f 的上水平集，构成一个递增的有界凸集族。对于各向同性对数凹测度，这些集合能迅速覆盖整个测度：当 t 的量级为 n 时，它们已承载几乎全部质量，而其内半径有一个绝对常数下界。这些结构性信息使我们能够将周长问题局部化到密度得到良好控制的区域。

出发点是对任意凸体 A 的一条周长估计，该估计用其内半径以及密度在 A 上的最大值与其在某个内切球中心处的取值之比来表示。结合 Steinhagen不等式（定理 4.6）——该不等式以因子 $\sqrt{n}$ 比较最小宽度与内半径——可得如下形式的界

$$\sqrt{n}\left(n + \ln\left(\|f\big|_A\|_\infty / f(x_A)\right)\right),$$

其中， x_A 表示 A的内切球中心。当 A 包含于固定的水平集 $R_{6n}(\mu)$中时，对数项的阶至多为 n，从而得到 $O(n^{3/2})$估计。为处理任意凸体，按照密度水平对边界进行分解：来自 $R_{6n}(\mu)$外部的贡献，可通过与水平集自身的边界进行比较来控制。利用 $R_t(\mu)$的结构性质，可以证明该贡献关于 n呈线性。结合这两种情形，即可在一般情形下得到 $O(n^{3/2})$上界。

§1.3. 背景与相关工作。 高斯最大周长常数自然出现在高维概率、凸几何和理论计算机科学的多个领域中。Kwapie ́n 和 Mushtari 提出了如下问题：当 $\mu = \gamma_n$ 是 $\mathbb{R}^n$上的标准高斯测度时，确定 $\Gamma(\mu)$的增长阶。简单的论证（见 [5]）给出了界$\sqrt{\ln n} \lesssim \Gamma(\gamma_n) \lesssim \sqrt{n}$ ，其中隐含常数为绝对常数。Ball 的突破性结果 [5] 表明

$$\Gamma(\gamma_n) \leqslant 4n^{1/4}.$$

这一估计后来被Nazarov [26], 证明是精确的，他证明了对每一个 $n \times n$ 对称正定矩阵 T，密度正比于 $\exp(-\langle Tx, x\rangle/2)$的高斯测度具有阶为$\sqrt{\|T\|_{\mathrm{HS}}}$的最大周长，其中 $\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$ 表示Hilbert-Schmidt范数。由于 $\|I_n\|_{\mathrm{HS}} = n^{1/2}$ 对单位矩阵 I_n成立，因此

$$\Gamma(\gamma_n) \approx n^{1/4}. \tag{1.1}$$

这些结果凸显了高维中高斯表面积的非经典尺度行为，这与立方体上的均匀测度所呈现的线性增长形成对比。它们也促使人们研究高斯框架之外的类似界。一个自然且显著更广的测度类由对数凹概率测度给出，这类测度在凸几何与概率论中普遍出现，并且包括凸体上的均匀测度以及许多指数型分布。

在一系列研究中，Livshyts 探讨了将高斯周长界推广到对数凹情形。特别是，对于概率测度 $\mu_{p,\ n}$ 其密度正比于 $\exp(-|x|^p/p)$， $0 < p < \infty$，文献 [22] 证明了

$$\Gamma(\mu_{p,n}) \approx C_p\, n^{\frac{3}{4} - \frac{1}{p}},$$

在高斯分布与均匀分布行为之间进行插值。随后，针对一般的旋转不变对数凹测度，人们根据 [23]，中欧几里得范数的期望与方差，得到了几乎锐利的上界；而文献 [24]则研究了凸多胞体的最大周长估计，其对面数呈对数依赖。

最近，Livshyts [25] 在温和的正则性假设下推导出了 $\Gamma(\mu)$的一般下界。具体而言，如果 μ 是绝对连续的，并且满足 $\sqrt{\mathrm{Var}_\mu(|x|)} \leqslant \alpha\, \mathbb{E}_\mu(|x|)$（对于某个 $\alpha \in [0,1)$），那么

$$\Gamma(\mu) \geqslant C(\alpha)\, \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[4]{\mathrm{Var}_\mu(|x|)}\, \sqrt{\mathbb{E}_\mu(|x|)}}. \tag{1.2}$$

如果 μ 是各向同性的，那么 $\mathbb{E}_\mu(|x|) \eqsim \sqrt{n}$，并且 $\mathrm{Var}_\mu(|x|) \leqslant C$，其中 C为某个绝对常数；后一个估计来自 Klartag 和 Lehec [21]最近对薄壳猜想的解决。因此，

$$\Gamma(\mu) \gtrsim n^{1/4} \tag{1.3}$$

对于 $\mathbb{R}^n$上的每个各向同性对数凹概率测度，至多相差一个绝对常数。鉴于（1.1），这表明在这一类测度中，高斯测度在下端基本上是极值的。

Livshyts 还在 [25] 中证明，对于 $\mathbb{R}^n$ 上的每个带有密度 f的对数凹概率测度 μ，都存在一个保体积变换 $T \in SL_n$，使得推前测度 $T_*\mu$ 满足

$$\Gamma(T_*\mu) \leqslant Cn\|f_T\|_\infty^{1/n} = Cn\|f\|_\infty^{1/n} \tag{1.4}$$

其中 $C > 0$ 为绝对常数，$f_T(x) = f(T^{-1}(x))$ 表示 $T_*(\mu)$ 和 $\|f_T\|_\infty = \|f\|_\infty$ 的密度。注意，$\Gamma(\mu)$ 在保体积变换下并不保持不变。

若 μ 是各向同性对数凹概率测度，则 $\|f\|_\infty^{1/n}$ 与 f 的各向同性常数相同，该常数由绝对常数界定（见第 2 节）。因此，由 (1.4) 可知，每个定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的各向同性对数凹概率测度 μ 都存在一个推前测度 $T_*\mu$，使得

$$\Gamma(T_*\mu) \leqslant Cn.$$

这一结果再次引出了一个自然问题：Γ_n 是否随维数线性增长。

2 记号与预备知识

我们在 $\mathbb{R}^n$ 中进行讨论，并赋予其标准内积 $\langle \cdot,\ \cdot \rangle$。相应的欧几里得范数记为 $|\cdot|$，欧几里得单位球记为 B_2^n，欧几里得单位球面记为 S^{n-1}。$\mathbb{R}^n$ 上的勒贝格测度记为 vol_n，并以 $\omega_n = \mathrm{vol}_n(B_2^n)$ 表示欧几里得单位球的体积。我们将 S^{n-1} 上的旋转不变概率测度记为 σ。

全文中，符号 C、c、c'、c_1、c_2，.....表示绝对正常数，其取值可能随行而变。每当我们写下 $a \approx b$，意指存在绝对常数 c_1、$c_2 > 0$使得 $c_1 a \leqslant b \leqslant c_2 a$。所有绝对常数均与维数 n无关。

§2.1. 凸体。$\mathbb{R}^n$ 中的凸体是具有非空内部的紧凸集 K。若 $K = -K$，则称其为对称的；若其重心 $\mathrm{bar}(K) = \frac{1}{\text{体积}_n(K)} \int_K x\, dx$ 位于原点，则称其为中心化的。对于每个凸体 $K \subset \mathbb{R}^n$，记 K 为 K 经过缩放后得到的位似副本，使其具有单位体积，即 $K := \text{体积}_n(K)^{-1/n} K$。

设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体，且 $0 \in \mathrm{int}(K)$。K 的径向函数定义为 $\varrho_K(x) = \max\{t > 0 :\ tx \in K\}$，对所有非零的 x均成立；K 的支撑函数定义为 $h_K(x) = \max\{\langle x, y\rangle :\ y \in K\}$，对所有$x \in \mathbb{R}^n$均成立。

如果概率测度 μ 相对于勒贝格测度 $\mathbb{R}^n$ 具有密度 f，那么

$$\mu^+(\partial K) = \int_{\partial K} f(x)\, d\lambda(x),$$

其中， λ 表示 ∂K上的（$n-1$）维豪斯多夫测度。 K 的表面积 $S(K)$ 定义为

$$S(K) := \lambda(\partial K).$$

一个在我们的研究中会派上用场的著名不等式断言：如果 $0 \in \text{int}(K)$，那么

$$S(K) \leqslant \frac{n\text{vol}_n(K)}{r(K)}, \tag{2.1}$$

其中， $r(K)$ 是 K 相对于原点的内半径，即满足 $rB_2^n \subseteq K$ 的最大 $r > 0$ 。为完整起见，我们略述证明。令 $r = r(K)$，可写为

$$\begin{aligned} S(K) &= \liminf_{\epsilon \to 0} \frac{\text{vol}_n(K + \epsilon B_2^n) - \text{vol}_n(K)}{\epsilon} \leqslant \liminf_{\epsilon \to 0} \frac{\text{vol}_n(K + (\epsilon/r)K) - \text{vol}_n(K)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{(1+\epsilon/r)^n - 1}{\epsilon} \text{vol}_n(K) = \frac{n\text{vol}_n(K)}{r}. \end{aligned}$$

K 的（内在）内半径定义为

$$r_K = \sup\{r > 0 : \exists x \in K \text{ such that } x + rB_2^n \subseteq K\}.$$

根据布拉施克选择定理，存在一个达到该上确界的内切球。一般而言，内切球不一定唯一，圆柱体的例子便说明了这一点。

另一个将发挥重要作用的参数是 K 的最小宽度。 K 在 $\xi \in S^{n-1}$ 方向上的宽度定义为

$$w_K(\xi) = h_K(\xi) + h_K(-\xi)$$

K 的最小宽度定义为

$$w_K = \min\{w_K(\xi) : \xi \in S^{n-1}\}.$$

等价地， w_K 是 K的两个平行支撑超平面之间的最短距离 .

$\mathbb{R}^n$ 中的凸体 K 称为各向同性的，如果它的体积为 1、以原点为中心，且其协方差矩阵是单位矩阵的倍数。等价地，存在一个常数 $L_K > 0$，称为 K的各向同性常数，使得

$$\|\langle \cdot, \xi \rangle\|_{L_2(K)}^2 := \int_K \langle x, \xi \rangle^2 dx = L_K^2 \quad \text{for all } \xi \in S^{n-1}.$$

我们将使用各向同性凸体的若干几何性质。首先，文献 [18] 证明，若 K 是各向同性的，则

$$\sqrt{\frac{n+2}{n}} L_K B_2^n \subseteq K \subseteq \sqrt{n(n+2)} L_K B_2^n. \tag{2.2}$$

此外，已知（见 [11, 命题 3.3.1]），对于某个绝对常数 $c > 0$，有 $L_K \geqslant L_{B_2^n} \geqslant c$ 。B ourgai n 维切片问题 [10] 询问是否存在一个绝对常数 $C > 0$ 使得 t

$$L_n := \max\{L_K : K \text{ is an isotropic convex body in } \mathbb{R}^n\} \leqslant C. \tag{2.3}$$

Klartag 和 Lehec 最近给出了肯定的解答 [20], ，此前 Guan 作出了重要贡献 [16] （另一种证明见 [6] ）。因此，对于 $\mathbb{R}^n$ 中的每个各向同性凸体 K ，结论 $L_K \approx 1$ 对 n 一致成立。关于更多背景，请参阅综述 [15]。

§2.2. 对数凹概率测度。若一个博雷尔测度 μ定义在 $\mathbb{R}^n$ 上，则称其为对数凹的，当且仅当

$$\mu(\tau A + (1-\tau)B) \geqslant \mu(A)^\tau \mu(B)^{1-\tau}$$

对于 $\mathbb{R}^n$中的任意紧集 A 和 B，以及任意 $\tau \in (0,\ 1)$。Borell [9] 证明，若一个对数凹概率测度 μ 不支撑在某个超平面上，则 μ 存在对数凹密度 f。这类测度称为全维的。

设 $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ 是一个积分有限且为正的对数凹函数。其重心定义为

$$\operatorname{bar}(f) = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x\, f(x)\, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx}.$$

若 $\operatorname{bar}(f) = 0$，则称 f 为中心化的。我们将使用 Fradelizi [12] 的以下结果：若 f 是 $\mathbb{R}^n$上的中心化对数凹密度，则

$$\|f\|_\infty \leqslant e^n f(0). \tag{2.4}$$

对数凹函数的各向同性常数是一个积分有限且为正的对数凹函数 f 的仿射不变量

$$L_f := \left(\frac{\|f\|_\infty}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx}\right)^{1/n} \det(\operatorname{Cov}(f))^{1/(2n)}, \tag{2.5}$$

其中，$\operatorname{Cov}(f)$ 表示 f 的协方差矩阵，其元素为

$$\operatorname{Cov}(f)_{i,j} := \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j f(x)\, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx} - \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_i f(x)\, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_j f(x)\, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx}.$$

若对数凹函数 f 满足

$$\operatorname{bar}(f) = 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = 1, \quad \text{and} \quad \operatorname{Cov}(f) = I_n.$$

在这种情况下，$L_f = \|f\|_\infty^{1/n}$。若 $\mathbb{R}^n$ 上的全维对数凹概率测度 μ 的密度 f 是各向同性的，则称该测度为各向同性的。然后，我们令 $L_\mu := L_f$。

注意，$\mathbb{R}^n$ 中满足$\operatorname{vol}_n(K) = 1$ 的中心化凸体 K 是各向同性的，当且仅当对数凹函数 $L_K^n \mathbb{1}_{K/L_K}$ 是各向同性的。

设 μ 是 $\mathbb{R}^n$上的全维对数凹概率测度。对任意 $1 \leqslant k \leqslant n-1$ 以及任意k维子空间 $F \subset \mathbb{R}^n$，μ 到 F 上的边缘分布定义为

$$\pi_F(\mu)(B) := \mu(P_F^{-1}(B)),$$

对每个博雷尔集 $B \subset F$。测度 $\pi_F(\mu)$是对数凹的，并且具有密度

$$(\pi_F f)(x) = \int_{x+F^\perp} f(y)\, dy.$$

若 f 是中心化的（相应地，各向同性的），则 $\pi_F f$ 亦然（见 [11, 命题5.1.11]）。

特别地，若 μ 是各向同性的，且对于 $\xi \in S^{n-1}$ 有 $F_\xi = \{t\xi : t \in \mathbb{R}\}$，则该一维边缘分布

$$g_\xi(t) = (\pi_{F_\xi}(f))(t) = \int_{t\xi + F_\xi^\perp} f(x)\, dx$$

是 $\mathbb{R}$ 上的各向同性对数凹密度。因此，

$$\|g_\xi\|_\infty = L_{g_\xi} \leqslant 1. \tag{2.6}$$

更一般地，[12] 中证明了，对于定义在 $\mathbb{R}$ 上的任意中心化对数凹密度 g，都有 $\operatorname{Var}(X)\|g\|_\infty^2 \leqslant 1$，且$X \sim g$。Bobkov 和 Chistyakov [8, 在命题 2.1] 中证明了

$$\frac{1}{12} \leqslant \operatorname{Var}(X)\|g\|_\infty^2 \leqslant 1$$

对于定义在 $\mathbb{R}$上的每个对数凹密度 g，上述结论均成立。此外，左侧不等式无需对数凹性假设即可成立。如果 g 偶对称，则 $\|g\|_\infty = g(0)$，并且

$$\mathrm{Var}(X)g(0)^2 \leqslant \frac{1}{2}.$$

特别地，如果 g 是偶对称且各向同性的，那么 $\mathrm{Var}(X) = 1$，因此

$$\|g\|_\infty = g(0) \leqslant 1/\sqrt{2}. \tag{2.7}$$

这一结果 最初由 Hensley [17]获得；在 [7中进一步放宽了对称性假设].

众所周知，每个中心化对数凹密度 f 都具有各向同性位置：存在 $T \in GL_n$使得推前密度

$$f_T(x) = \frac{1}{|\det T|} f(T^{-1}x)$$

是各向同性的（见 [11, 第 2.3]节）。此外， f_T 也是对数凹的，并且 $L_{f_T} = L_f$。众所周知（见 [11,命题 2.3.12]），对于定义在 $\mathbb{R}^n$上的每个各向同性对数凹函数 f，都有 $L_f \geqslant c$，其中 $c > 0$ 是一个绝对常数。另一方面，Ball [3] 证明了对于每个 n,

$$\tilde{L}_n := \sup\left\{L_f : f \text{ is a log-concave density on } \mathbb{R}^n\right\} \leqslant C_1 L_n,$$

˜，从而根据 Bourgain 切片问题的肯定解得到 $L_n \leqslant C_2$。

关于渐近凸几何，请参阅 [1, 2]；关于各向同性凸体和对数凹测度的背景知识，请参阅 [11]。

3 各向同性对数凹密度的超水平集

设 μ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的各向同性对数凹概率测度，其密度为 f。对于每个 $t \geqslant 0$，我们定义超水平集

$$R_t(\mu) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geqslant e^{-t}\|f\|_\infty\}.$$

由于 f 是对数凹的，每个 $R_t(\mu)$都是凸集，并且对于 $t > 0$，有 $0 \in \mathrm{int}(R_t(\mu))$。此外，利用每个积分有限且为正的对数凹函数都满足以下性质这一事实（见 [11, 引理 2.2.1]）

$$f(x) \leqslant Ae^{-B|x|} \qquad \text{for all } x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.1}$$

对于某些常数 $A, B > 0$，我们可知，若 $x \in R_t(\mu)$，则

$$|x| \leqslant \frac{1}{B}\big(\ln(A/\|f\|_\infty) + t\big).$$

特别地， $R_t(\mu)$是有界的。凸体族 $\{R_t(\mu)\}_{t>0}$ 显然是递增的，而下面的引理表明，当 $t \to \infty$时， $\mu(R_t(\mu))$会迅速趋于 1。

引理 3.1. 设 μ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的中心对称对数凹概率测度。那么，对于每个 $t \geqslant 6n$, μ（R_t（μ） $\geqslant 1 - e^{-t/5}$。

证明。 定义 $S_t(\mu) = \{x \in \mathbb{R}^n: f(x) \geqslant e^{-t}f(0)\}$。 [13, 命题 2.1] 表明，若 $r \geqslant 5(n-1)$，则 $\mu(S_r(\mu)) \geqslant 1 - e^{-r/4}$。由 (2.4) 可知 $\|f\|_\infty \leqslant e^n f(0)$，因此我们有

$$e^{-t}\|f\|_\infty \leqslant e^{-t+n}f(0)$$

因此 $S_{t-n}(\mu) \subseteq R_t(\mu)$ 对所有 $t > n$ 均成立。特别地，若 $t \geqslant 6n$，则 $r = t - n \geqslant 5n$，因此

$$\mu(R_t(\mu)) \geqslant 1 - e^{-(t-n)/4} \geqslant 1 - e^{-t/5},$$

这就证明了该命题。 □

下一个引理的证明基本上已包含在 [19, 引理 5.4]中。

Lem引理 3.2. 设 μ 是 $\mathbb{R}^n$上的各向同性对数凹概率测度，其中 $n \geqslant 3$。那么

$$r(R_{6n}(\mu)) \geqslant 1/3.$$

证明。 设 $r := r(R_{6n}(\mu))$ 表示 $R_{6n}(\mu)$ 相对于原点的内半径。那么存在 $\xi \in S^{n-1}$ ，使得 $h_{R_{6n}(\mu)}(\xi) \leqslant r$, 因此

$$R_{6n}(\mu) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \xi\rangle \leqslant r\}.$$

我们将这个半空间分解为

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \xi\rangle \leqslant r\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \xi\rangle \leqslant 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < \langle x, \xi\rangle \leqslant r\}.$$

由于 μ 是中心化的，根据格伦鲍姆引理（见 [11, 引理 2.2.6]），可得

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \xi\rangle \leqslant 0\}) \leqslant 1 - \frac{1}{e}.$$

设 $F_\xi = \{t\xi :\ t \in \mathbb{R}\}$ 是由 ξ张成的一维子空间。由 (2.6)，边缘分布 $\pi_{F_\xi}(\mu)$ 的密度 g_ξ 满足

$$\|g_\xi\|_\infty \leqslant 1.$$

因此,

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : 0 < \langle x, \xi\rangle \leqslant r\}) = \int_0^r \left(\int_{t\xi + F_\xi^\perp} f(x)\, dx \right) dt = \int_0^r g_\xi(t)\, dt \leqslant r.$$

结合这些估计并利用引理 3.1，我们得到

$$1 - e^{-6n/5} \leqslant \mu(R_{6n}(\mu)) \leqslant 1 - \frac{1}{e} + r.$$

对于 $n \geqslant 3$，这意味着

$$r \geqslant e^{-1} - e^{-6n/5} \geqslant e^{-1} - e^{-18/5} \geqslant 1/3,$$

如所述。 □

注 3.3。 我们将使用以下观察。设 μ 是 $\mathbb{R}^n$上的中心对称对数凹概率测度，其密度为 f，满足 $f(0) = \|f\|_\infty$。对于任意 $x \in R_t(\mu)$ 和任意 $\tau \in (0,\ 1)$,

$$f(\tau x) \geqslant f(x)^\tau f(0)^{1-\tau} \geqslant e^{-\tau t} f(0)^\tau f(0)^{1-\tau} = e^{-\tau t} f(0). \tag{3.2}$$

这个不等式仅依赖于对数凹性和归一化条件 $f(0) = \|f\|_\infty$。因此 ,

$$\tau R_t(\mu) \subseteq R_{\tau t}(\mu), \qquad t > 0,\ \tau \in (0, 1). \tag{3.3}$$

特别地，若 μ 是各向同性的，则

$$r(R_n(\mu)) \geqslant r(R_{6n}(\mu))/6 \geqslant 1/18.$$

4 周长上界

在本节中，我们证明 Γ_n 与 $\Gamma_n^{(s)}$的一般上界。全文中， μ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上密度为 f的各向同性对数凹概率测度。

我们先给出一个简单估计，用凸体的最小宽度来界定其测度。回忆一下，对于一个凸体 $A \subset \mathbb{R}^n$, $w_A = \min\{w_A(\xi) : \xi \in S^{n-1}\}$，其中 $w_A(\xi) = h_A(\xi) + h_A(-\xi)$ 表示 A 在 $\xi \in S^{n-1}$方向上的宽度。

引理 4.1。设 μ 是 $\mathbb{R}^n$上的各向同性对数凹概率测度。那么对于每个凸体$A \subset \mathbb{R}^n$,

$$\mu(A) \leqslant w_A.$$

证明。固定 $\xi \in S^{n-1}$，并令 $F_\xi = \{t\xi : t \in \mathbb{R}\}$。由 (2.6)，边缘分布 $\pi_{F_\xi}(\mu)$ 的密度 g_ξ 满足$\|g_\xi\|_\infty \leqslant 1$。

由于

$$A \subseteq S_\xi = \{x \in \mathbb{R}^n : -h_A(-\xi) \leqslant \langle x, \xi\rangle \leqslant h_A(\xi)\},$$

我们得到

$$\mu(A) \leqslant \mu(S_\xi) = \int_{-h_A(-\xi)}^{h_A(\xi)} \int_{t\xi + F_\xi^\perp} f(x)\, dx\, dt = \int_{-h_A(-\xi)}^{h_A(\xi)} g_\xi(t)\, dt \leqslant w_A(\xi).$$

对 $\xi \in S^{n-1}$ 取最小值即可得到结论。 □

下一个引理是关于对数凹测度的标准膨胀估计（参见 [13, 引理 3.1]）。事实上，我们稍后将证明并使用一个更复杂的版本，因此这里略去细节。

引理 4.2。设 μ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的中心对称对数凹概率测度。那么，对任意 $\delta > 0$ 及任意博雷尔集 $A \subset \mathbb{R}^n$,

$$\mu((1+\delta)A) \leqslant e^{2n\delta}\mu(A).$$

注。若 μ 的密度是几何对数凹函数，即 $f(0) = \|f\|_\infty$，则上述估计可改进为 $\mu((1+\delta)A) \leqslant e^{n\delta}\mu(A)$。

利用引理 4.2，我们可以根据测度以及相对于原点的内半径，控制包含原点的凸体的周长。

引理 4.3。设 μ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的中心对称对数凹概率测度，且 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是一个凸体，满足对某个 $r > 0$ 有 $rB_2^n \subseteq A$。那么

$$\mu^+(\partial A) \leqslant \frac{2n\mu(A)}{r}.$$

证明。由于 A 是凸的，对任意 $t,\ s > 0$，我们有 $tA + sA = (t+s)A$。再利用引理 4.2，我们写出

$$\mu(A + \epsilon B_2^n) \leqslant \mu(A + (\epsilon/r)A) = \mu((1+\epsilon/r)A) \leqslant e^{2n\epsilon/r}\mu(A).$$

因此,

$$\mu^+(\partial A) = \liminf_{\epsilon\to 0} \frac{\mu(A+\epsilon B_2^n) - \mu(A)}{\epsilon} \leqslant \lim_{\epsilon\to 0} \frac{e^{2n\epsilon/r} - 1}{\epsilon}\mu(A) = \frac{2n\mu(A)}{r},$$

如所断言。 □

我们所需的最后一个事实是如下简单观察：若 A 是 $\mathbb{R}^n$ 中的对称凸体，则存在 A 的一个以原点为中心的内切球，并且

$$w_A = 2r_A, \tag{4.1}$$

其中 w_A 是最小宽度， r_A 是 A的内半径。

现在我们可以用一句话证明定理 1.2。

定理的证明1。2。 设 A 为对称的。那么 $r_A B_2^n \subseteq A$ 且 $w_A = 2r_A$。由引理 4.3 和 4.1,

$$\mu^+(\partial A) \leqslant \frac{2n\mu(A)}{r_A} \leqslant \frac{2nw_A}{r_A} = 4n,$$

定理得证。 □

注。 如果 μ 的密度是几何对数凹的，那么改进的膨胀估计给出：对于每个对称凸体 $A \subset \mathbb{R}^n$， $\mu^+(\partial A) \leqslant 2n$。

现在我们转向定理 1.1 的证明。在一般情形下， A不一定对称，而且原点也可能不是 A的内点。回顾一下，给定一个凸体 $A \subset \mathbb{R}^n$，我们用 r_A 表示包含在 A 中的最大欧几里得球的半径，用 x_A 表示该球的中心。换言之，$x_A + r_A B_2^n$ 是 A的内切球。

引理 4.4。 设 μ 是 n 维实数空间上的中心对称对数凹概率测度。设 A 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸体，且设 $x_A + r_A B_2^n \subseteq A$ 是 A的内切球。那么

$$\mu^+(\partial A) \leqslant \frac{n + \ln(\|f\big|_A\|_\infty / f(x_A))}{r_A} \mu(A).$$

证明。 设 $K = -x_A + A$，于是 $0 \in K$ 且 $r_A B_2^n \subseteq K$。对于 $\epsilon > 0$，我们有

$$A + \epsilon B_2^n = x_A + K + \epsilon B_2^n \subseteq x_A + K + (\epsilon/r_A)K = x_A + (1 + \epsilon/r_A)K.$$

令 $\delta = \epsilon/r_A$,

$$\mu(A + \epsilon B_2^n) \leqslant \int_{x_A + (1+\delta)K} f(u)\, du = \int_{(1+\delta)K} f(x_A + v)\, dv = (1+\delta)^n \int_K f(x_A + (1+\delta)y)\, dy.$$

记

$$x_A + y = \frac{1}{1+\delta}(x_A + (1+\delta)y) + \frac{\delta}{1+\delta} x_A$$

并利用 f 的对数凹性，我们得到 $f(x_A + y)^{1+\delta} \geqslant f(x_A + (1+\delta)y) f(x_A)^\delta$，因此

$$f(x_A + (1+\delta)y) \leqslant f(x_A + y) \left(\frac{f(x_A + y)}{f(x_A)} \right)^\delta \leqslant f(x_A + y) \left(\frac{\|f\big|_A\|_\infty}{f(x_A)} \right)^\delta. \tag{4.2}$$

综合以上，我们看到

$$\mu(A + \epsilon B_2^n) \leqslant (1+\delta)^n \left(\frac{\|f\big|_A\|_\infty}{f(x_A)} \right)^\delta \int_K f(x_A + y)\, dy \leqslant \exp\left(\delta \left(n + \ln\left(\|f\big|_A\|_\infty / f(x_A) \right) \right) \right) \mu(A).$$

由此可得

$$\begin{aligned} \mu^+(\partial A) &= \liminf_{\epsilon \to 0^+} \frac{\mu(A + \epsilon B_2^n) - \mu(A)}{\epsilon} \leqslant \mu(A) \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\exp\left(\epsilon/r_A (n + \ln(\|f\big|_A\|_\infty / f(x_A))) \right) - 1}{\epsilon} \\ &= \mu(A) \frac{n + \ln(\|f\big|_A\|_\infty / f(x_A))}{r_A}, \end{aligned}$$

如所断言。 □

注 4.5. 上述论证实际上给出了一个更强的估计。设 μ_A 为具有密度 $(\mu(A))^{-1}f(y)\mathbb{1}_A(y)$ 的概率测度。由 (4.2) 可见

$$\begin{aligned}\mu(A+\epsilon B_2^n) &\leqslant (1+\delta)^n \int_K f(x_A+(1+\delta)y)\,dy \leqslant e^{n\delta}\int_K f(x_A+y)\left(\frac{f(x_A+y)}{f(x_A)}\right)^{\delta} dy \\ &= e^{n\delta}\mu(A)\int_A \left(\frac{f(y)}{f(x_A)}\right)^{\delta} d\mu_A(y).\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\mu^+(\partial A) &= \liminf_{\epsilon\to 0^+}\frac{\mu(A+\epsilon B_2^n)-\mu(A)}{\epsilon} \leqslant \mu(A)\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{\epsilon}\left[e^{n\epsilon/r_A}\left(\int_A\left(\frac{f(y)}{f(x_A)}\right)^{\epsilon/r_A} d\mu_A(y)\right)-1\right] \\ &= \frac{\mu(A)}{r_A}\left[n+\int_A \ln\left(\frac{f(y)}{f(x_A)}\right)\,d\mu_A(y)\right].\end{aligned}$$

利用引理 4.1，我们得到

$$\mu^+(\partial A) \leqslant \frac{w_A}{r_A}\left[n+\int_A \ln\left(\frac{f(y)}{f(x_A)}\right)\,d\mu_A(y)\right].$$

为证明定理 1.1，我们将使用 Steinhagen [27]的一个定理（另见 [28, 定理 1.5.2]），以比较 $\mathbb{R}^n$ 中凸体 A 的最小宽度 w_A 与其内半径 r_A。

定理 4.6（Steinhagen）**.** 对每个凸体 $A\subset\mathbb{R}^n$,

$$w_A \leqslant 2\sqrt{n}r_A.$$

作为第一步，将定理 4.6 与引理 4.4 和引理 4.1 相结合，我们得到如下估计。

命题 4.7. 设 μ 是 $\mathbb{R}^n$上的各向同性对数凹概率测度。则对每个凸体$A\subset\mathbb{R}^n$,

$$\mu^+(\partial A) \leqslant 2\sqrt{n}\big(n+\ln(\|f\big|_A\|_\infty/f(x_A))\big),$$

其中， x_A 是内接于 A的半径为 r_A 的球的中心。

证明。 由引理 4.4 和引理 4.1 可得

$$\mu^+(\partial A) \leqslant \mu(A)\frac{n+\ln(\|f\big|_A\|_\infty/f(x_A))}{r_A} \leqslant \big(n+\ln(\|f\big|_A\|_\infty/f(x_A))\big)\,\frac{w_A}{r_A}.$$

该结论由定理 4.6 得出。 □

推论 4.8。 设 μ 是定义在 $\mathbb{R}^n$上的各向同性对数凹概率测度。对于满足 $A\subseteq R_{6n}(\mu)$的任意凸体 $A\subset\mathbb{R}^n$,

$$\mu^+(\partial A) \leqslant 14n^{3/2}.$$

证明。 由命题 4.7 可得

$$\mu^+(\partial A) \leqslant 2\sqrt{n}\big(n+\ln(\|f\big|_A\|_\infty/f(x_A))\big),$$

其中， x_A 是内接于 A的半径为 r_A 的球的中心。由于 $x_A\in R_{6n}(\mu)$，我们还可得$\|f\big|_A\|_\infty/f(x_A) \leqslant e^{6n}$。因此,

$$\mu^+(\partial A) \leqslant 2\sqrt{n}\big(n+6n\big) = 14n\sqrt{n}$$

如所断言。 □

对于一般情形，其中 A 可能并不包含于 $R_{6n}(\mu)$，特别地， $f(x_A)$可能任意小，我们将我们的方法与Livshyts在 [25]中发展的若干思想结合起来。

定理 4.9. 设 μ 是定义在 $\mathbb{R}^n$上的各向同性对数凹概率测度。对于任意凸体 $A \subset \mathbb{R}^n$,

$$\mu^+(\partial A) \leqslant Cn^{3/2},$$

其中 $C > 0$ 是一个绝对常数。

证明. 任取一个凸体 $A \subset \mathbb{R}^n$。注意，如果 $A \subseteq R_{6n}(\mu)$，那么结论由推论 4.8 得出。否则， $A \setminus R_{6n}(\mu) \neq \varnothing$。

我们将 ∂A分解如下:

$$\partial A = (\partial A \cap R_{6n}(\mu)) \cup (\partial A \setminus R_{6n}(\mu)).$$

注意， $\partial A \cap R_{6n}(\mu) \subseteq \partial(A \cap R_{6n}(\mu))$，因此

$$\mu^+(\partial A \cap R_{6n}(\mu)) \leqslant \mu^+(\partial(A \cap R_{6n}(\mu))) \leqslant 14n^{3/2} \tag{4.3}$$

由推论 4.8 应用于凸体 $A \cap R_{6n}(\mu) \subseteq R_{6n}(\mu)$ 可得。

接下来，我们估计 $\mu^+(\partial A \setminus R_{6n}(\mu))$。注意,

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &= \int_0^{\|f\|_\infty} \mathrm{vol}_n(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geqslant t\})\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-s}\|f\|_\infty \mathrm{vol}_n(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geqslant e^{-s}\|f\|_\infty\})\, ds \\ &= \int_0^\infty e^{-s}\|f\|_\infty \mathrm{vol}_n(R_s(\mu))\, ds. \end{aligned} \tag{4.4}$$

我们写作

$$\begin{aligned} \mu^+(\partial A \setminus R_{6n}(\mu)) &= \int_{\partial A \setminus R_{6n}(\mu)} f(x)\, d\lambda(x) \\ &= \int_{\partial A \setminus R_{6n}(\mu)} \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{(x,t): f(x) \geqslant t\}}(x,t)\, dt\, d\lambda(x) \\ &= \int_0^{e^{-6n}\|f\|_\infty} \lambda(\partial A \cap \{x : e^{-6n}\|f\|_\infty \geqslant f(x) \geqslant t\})\, dt \\ &\leqslant \int_0^{e^{-6n}\|f\|_\infty} \lambda(\partial A \cap \{x : f(x) \geqslant t\})\, dt \\ &= \int_{6n}^\infty e^{-s}\|f\|_\infty \lambda(\partial A \cap R_s(\mu))\, ds, \end{aligned}$$

作变量代换 $t = e^{-s}\|f\|_\infty$。由于 $\partial A \cap R_s(\mu) \subseteq \partial(A \cap R_s(\mu))$，且 $A \cap R_s(\mu) \subseteq R_s(\mu)$，并且这两个集合都是凸的，根据凸体的勒贝格表面积关于集合包含关系的单调性，以及 (2.1) 和引理 3.2，可得

$$\lambda(\partial A \cap R_s(\mu)) \leqslant \lambda(A \cap R_s(\mu)) = S(A \cap R_s(\mu)) \leqslant S(R_s(\mu)) \leqslant \frac{n\mathrm{vol}_n(R_s(\mu))}{r(R_s(\mu))} \leqslant 3n\mathrm{vol}_n(R_s(\mu)).$$

由此可得

$$\mu^+(\partial A \setminus R_{6n}(\mu)) \leqslant 3n \int_{6n}^\infty e^{-s}\|f\|_\infty \mathrm{vol}_n(R_s(\mu))\, ds \leqslant 3n \int_0^\infty e^{-s}\|f\|_\infty \mathrm{vol}_n(R_s(\mu))\, ds = 3n\|f\|_1 \tag{4.5}$$

最后使用 (4.4)。结合 (4.5) 和 (4.3)，我们得到

$$\mu^+(\partial A) \leqslant 14n^{3/2} + 3n\,\|f\|_1 = (14 + 3/\sqrt{n})n^{3/2}.$$

至此，定理的证明完成。 □

5 额外结构下的改进上界

本节将证明，在对测度施加额外几何假设的情况下，定理 1.1 中的估计 $O(n^{3/2})$ 可以得到改进。更具体地说，对于若干自然的各向同性对数凹测度类，我们将建立阶为 $O(n)$ 的线性界。

除上一节的结果外，我们还将利用 Livshyts 针对 $\Gamma(\mu)$ 得出的一般上界估计。对于任意可积函数 f，若其水平集 $R_t(\mu)$ 为凸集，Livshyts 建立了以下结果。

定理 5.1 (Livshyts)。设 $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ 是一个可积函数，使得对所有 $t \geqslant 0$，$R_t(\mu)$ 都是凸集。则

$$\Gamma(\mu) \leqslant \inf\left\{ n\,\frac{\|f\|_\infty \operatorname{vol}_n(R_t(\mu)) + \|f\|_1}{r(R_t(\mu))} : t>0 \right\}$$

其中，μ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上、密度为 f 的测度。

对于各向同性对数凹函数 f，我们有 $\|f\|_\infty = L_f^n$ 和 $\|f\|_1 = 1$。因此，要获得 $\Gamma(\mu)$ 的上界，只需选择 $t>0$，使得 $\operatorname{vol}_n(R_t(\mu))$ 有适当的上界，并且 $r(R_t(\mu))$ 有适当的下界。在各向同性对数凹情形下，Livshyts 的方法对 t 的适当选择给出 $\Gamma(\mu) = O(n^2)$。

§5.1. 凸体上的均匀测度。我们首先讨论凸体上的均匀测度这一情形。

命题 5.2。设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的各向同性凸体，并设 μ_K 是相应的各向同性概率测度，其密度为 $f_K := L_K^n \mathbb{1}_{K/L_K}$。则

$$\Gamma(\mu_K) = L_K S(K). \tag{5.1}$$

特别地，$\Gamma(\mu_K) \leqslant \sqrt{\frac{n}{n+2}}\, n$。

证明。对于 $\mathbb{R}^n$ 中的任意凸体 A，我们可以写成

$$\begin{aligned}\mu_K^+(\partial A) &= \int_{\partial A \cap L_K^{-1}K} f_K(x)\,d\lambda(x) \leqslant \int_{\partial(A\cap L_K^{-1}K)} f_K(x)\,d\lambda(x)\\ &= L_K^n S(A\cap L_K^{-1}K) \leqslant L_K^n S(L_K^{-1}K) = L_K S(K),\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $A = L_K^{-1}K$。由此可得

$$\Gamma(\mu_K) = L_K S(K).$$

对于第二个结论，利用 (2.1) 中的一般界 $S(K) \leqslant n\operatorname{vol}_n(K)/r(K)$，以及归一化条件 $\operatorname{vol}_n(K)=1$，可得

$$\Gamma(\mu_K) \leqslant nL_K/r(K),$$

由式 (2.2) 得到的下界 $r(K) \geqslant \sqrt{\frac{n+2}{n}}\, L_K$ 完成了证明。 □

注 5.3. 估计 $\Gamma(\mu_K) \leqslant \sqrt{\frac{n}{n+2}}\, n$ 对于各向同性凸体上的均匀测度是精确的。若 K 是各向同性的 n 维正则单纯形，则该估计成为等式。事实上，设 $v_0,\dots,v_n \in \mathbb{R}^n$ 满足

$$|v_i| = 1, \qquad \langle v_i, v_j\rangle = -\frac{1}{n} \quad \text{if } i\neq j, \qquad \sum_{i=0}^n v_i = 0,$$

并考虑正则单纯形 $\Delta_0 := \mathrm{conv}\{v_0, \dots, v_n\}$，它是在原点处中心化的。设 $\Delta := \beta\Delta_0$ 为 Δ_0 的位似副本，且 $\mathrm{vol}_n(\Delta) = 1$，从而 $\beta^n \mathrm{vol}_n(\Delta_0) = 1$。我们计算 $\Gamma(\mu_\Delta) = L_\Delta S(\Delta)$。

为计算内半径，注意对于每个 i，面 $F_i := \mathrm{conv}\{v_j : j \neq i\}$ 位于超平面 $H_i := \{x : \langle x, v_i\rangle = -1/n\}$ 上，因为对于 $j \neq i$，有 $\langle v_j, v_i\rangle = -1/n$。因此，原点到 H_i 的距离等于 $1/n$。由于该单形是正则的，原点就是 Δ_0 的内心。因此，

$$r(\Delta_0) = 1/n \qquad \text{and} \qquad r(\Delta) = \beta r(\Delta_0) = \beta/n.$$

为计算各向同性常数，设 X 在 Δ_0 上均匀分布。利用重心坐标，我们可以写为

$$X = \sum_{i=0}^{n} \Lambda_i v_i,$$

其中 $\Lambda = (\Lambda_0, \dots, \Lambda_n)$ 在单形 $\{\lambda_i \geqslant 0, \sum \lambda_i = 1\}$ 上均匀分布。于是 $\mathbb{E}(\Lambda_i) = \frac{1}{n+1}$ 并且

$$\mathbb{E}(\Lambda_i^2) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}, \qquad \mathbb{E}(\Lambda_i \Lambda_j) = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (i \neq j).$$

由于 $\sum_{i=0}^n v_i = 0$，我们有 $\mathbb{E}(X) = 0$ 并且

$$\mathrm{Cov}(X) = \mathbb{E}\left(XX^{\mathsf{T}}\right) = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{i=0}^{n} v_i v_i^{\mathsf{T}}.$$

因此，Δ 是各向同性的，且

$$L_\Delta = \frac{\beta}{\sqrt{n(n+2)}} \qquad \text{and hence} \qquad \frac{L_K}{r(K)} = \sqrt{\frac{n}{n+2}}.$$

最后，对于表面积和 $\Gamma(\mu_\Delta)$，注意到对于任何内心位于原点、内半径为 r 的单纯形，都有如下精确恒等式

$$\mathrm{vol}_n(\Delta) = \frac{r}{n} S(\Delta),$$

并且由于 $\mathrm{vol}_n(\Delta) = 1$，我们得到 $S(\Delta) = \frac{n}{r}\Delta()$。因此，

$$\Gamma(\mu_\Delta) = L_\Delta S(\Delta) = L_\Delta \frac{n}{r(K)} = n\,\frac{L_\Delta}{r(\Delta)} = \sqrt{\frac{n}{n+2}}\, n.$$

这表明命题 5.2 中的估计是最优的。

§5.2. 具有齐次等值集的测度。 设 μ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的对数凹概率测度，其几何对数凹密度为 f，并满足

$$R_t(\mu) = t^{1/p} K \qquad \text{for all } t > 0, \tag{5.2}$$

其中 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是一个固定的凸体，其内部包含原点，且 $p \geqslant 1$.

应用定理 5.1，我们对任意 $t > 0$ 得到，

$$\Gamma(\mu) \leqslant n\,\frac{\|f\|_\infty \,\mathrm{vol}_n(R_t(\mu)) + 1}{r(R_t(\mu))},$$

其中我们使用了 $\|f\|_1 = 1$。我们在约束条件 $\|f\|_\infty \mathrm{vol}_n(R_t(\mu)) \leqslant 1$ 下，尽可能取大 t。取 $t = n/e^p$ 后，我们注意到 $R_{n/e^p}(\mu) = e^{-1} R_n(\mu)$，由马尔可夫不等式可得

$$\|f\|_\infty \mathrm{vol}_n(R_{n/e^p}(\mu)) = \|f\|_\infty e^{-n} \mathrm{vol}_n(R_n(\mu)) \leqslant \mu(R_n(\mu)) \leqslant 1.$$

由于 $r(R_{n/e^p}(\mu)) = e^{-1} r(R_n(\mu))$ 且 $r(R_n(\mu)) \geqslant 1/18$（由注 3.3），我们得出

$$\Gamma(\mu) \leqslant \frac{2n}{r(R_{n/e^p}(\mu))} \leqslant \frac{2en}{r(R_n(\mu))} \leqslant 36en.$$

注 5.4. 一个典型例子由各向同性测度 ν_K 给出，其密度为 $f_{\nu_K}(x) = c_K e^{-\|x\|_K^p}$，其中 K 是对称凸体，且 $c_K = (c_{p,n}\mathrm{vol}_n(K))^{-1}$，其中 $c_{p,n} = \int_0^\infty p t^{n+p-1} e^{-t^p} dt$。注意

$$R_n(f_{\nu_K}) = n^{1/p} K.$$

由于 ν_K 是偶对称且具有几何性质，这意味着根据 [11，定义 2.5，K 与某个几乎各向同性凸体的几何距离有界。11]：存在一个几乎各向同性凸体 $D \subset \mathbb{R}^n$，使得

$$c_1 D \subseteq \overline{K} \subseteq c_2 D,$$

其中 c_1，$c_2 > 0$ 是绝对常数（证明见 [14，引理 3.3]）。

§5.3. 1-无条件测度。设 μ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上、密度为 f 的各向同性对数凹概率测度，且具有 1-对称性，即

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(\epsilon_1 x_{\sigma(1)}, \dots, \epsilon_n x_{\sigma(n)})$$

对于 $\{1, \dots, n\}$ 的所有置换 σ 以及所有符号 $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ 的取值均成立。f 的对称性意味着每个水平集 $R_t(\mu)$ 都是 1-对称凸体。特别地，$R_t(\mu)$ 处于 John 位置：包含于 $R_t(\mu)$ 中的最大体积椭球是欧几里得球 $r(R_t(\mu))B_2^n$。事实上，$R_t(\mu)$ 的最大体积椭球也具有 1-对称性，因此必为中心化的球。于是，K. Ball 的体积比定理 [4] 给出

$$\frac{\mathrm{vol}_n(R_t(\mu))^{1/n}}{r(R_t(\mu))} \leqslant \mathrm{vol}_n(Q_n)^{1/n} = 2,$$

其中 $Q_n = [-1, 1]^n$ 是内半径为 $r(Q_n) = 1$ 的立方体。因此，

$$\mathrm{vol}_n(R_t(\mu))^{1/n} \leqslant 2r(R_t(\mu)) \qquad \text{for all } t > 0.$$

这使我们能够通过适当选择 t 来应用定理 5.1，并得到界 nd

$$\Gamma(\mu) \leqslant Cn$$

其中 $C > 0$ 是一个绝对常数，这一点已在 [25] 中得到观察。

现在，我们将为任意 1-无条件各向同性对数凹概率测度的最大周长得到一个类似的、关于维数呈线性的界。设 μ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上、密度为 f 的各向同性对数凹概率测度，且它是 1-无条件的，这意味着

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(\epsilon_1 x_1, \dots, \epsilon_n x_n)$$

对所有符号选择 $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ 均成立。对于 $k = 1$，…，n，令 e_k 为第 k 个标准基向量，并考虑线段

$$I_k := [-e_k, e_k].$$

回顾一下，$B_2^n \subset B_\infty^n$，并且

$$B_\infty^n = I_1 + \cdots + I_n$$

是 Mi nkowski 和线段 I_k。我们先介绍以下简单的望远镜求和引理 a.

引理 5.5. 对于任意博雷尔集 $A \subset \mathbb{R}^n$ 以及任意 $\epsilon > 0$，定义

$$A_0 := A, \qquad A_k := A_{k-1} + \epsilon I_k \qquad (k = 1, \dots, n).$$

那么 $A_n = A + \epsilon B_\infty^n$，并且

$$\mu(A + \epsilon B_2^n) - \mu(A) \leqslant \mu(A + \epsilon B_\infty^n) - \mu(A) = \sum_{k=1}^n \mu\big((A_{k-1} + \epsilon I_k) \setminus A_{k-1}\big).$$

证明。由于 $B_2^n \subset B_\infty^n$，我们有 $A+\epsilon B_2^n \subset A+\epsilon B_\infty^n$，因此 $\mu(A+\epsilon B_2^n) - \mu(A) \leqslant \mu(A+\epsilon B_\infty^n) - \mu(A)$。此外，由于 $B_\infty^n = I_1 + \cdots + I_n$，根据构造可得 $A+\epsilon B_\infty^n = A_n$。最后，望远镜恒等式

$$\mu(A_n) - \mu(A_0) = \sum_{k=1}^{n} \big(\mu(A_k) - \mu(A_{k-1})\big) = \sum_{k=1}^{n} \mu\big(A_k \setminus A_{k-1}\big) \tag{5.3}$$

由此得出结论，因为 $A_k = A_{k-1} + \epsilon I_k$。 □

下文中，对于 $k \in \{1, \dots, n\}$，我们定义第 k 个边缘密度

$$g_k(t) := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(y,t)\, dy,$$

其中我们将 $x = (y,\ t)$ 记作，其中 $t = x_k$ 和 $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ 收集其余坐标。

引理 5.6。假设 f 是无条件的且对数凹的。那么对于任意凸集 $B \subset \mathbb{R}^n$、任意 $k \in \{1, \dots, n\}$ 以及任意 $\epsilon > 0$，

$$\mu\big((B+\epsilon I_k) \setminus B\big) \leqslant 2\epsilon g_k(0).$$

证明。固定 k，并将 $x = (y,\ t)$ 记作，其中 $t = x_k$。对于每个 $y \in \mathbb{R}^{n-1}$，纤维

$$B_y := \{t \in \mathbb{R} :\ (y,t) \in B\}$$

这是一个区间，因为 B 是凸的。如果 $B_y = [a(y)\ b(y)]$，那么 $(B+\epsilon I_k)_y = [a(y)\ -\epsilon,\ \ b(y)\ +\epsilon]$，因此

$$\big((B+\epsilon I_k) \setminus B\big)_y \subset [a(y)-\epsilon, a(y)]\ \cup\ [b(y), b(y)+\epsilon],$$

若其中一个端点为无穷，则作显然的相应修改。

根据 Fubini定理，

$$\begin{aligned}\mu\big((B+\epsilon I_k) \setminus B\big) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\big((B+\epsilon I_k)\setminus B\big)_y} f(y,t)\, dt\, dy \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{a(y)-\epsilon}^{a(y)} f(y,t)\, dt + \int_{b(y)}^{b(y)+\epsilon} f(y,t)\, dt \right) dy.\end{aligned}$$

固定 y，由第 k 个坐标上的无条件性可知，函数 $t \mapsto f(y,t)$ 是对数凹且偶对称的。因此，它在 $t = 0$ 处取得最大值，故对所有 t，均有 $f(y,t) \leqslant f(y,0)$。因此，

$$\int_{a(y)-\epsilon}^{a(y)} f(y,t)\, dt + \int_{b(y)}^{b(y)+\epsilon} f(y,t)\, dt \leqslant 2\epsilon\, f(y,0).$$

对 y 积分可得

$$\mu\big((B+\epsilon I_k) \setminus B\big) \leqslant 2\epsilon \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(y,0)\, dy = 2\epsilon\, g_k(0),$$

得证。 □

定理 5.7。设 μ 是 $\mathbb{R}^n$ 上具有连续密度 f 的各向同性无条件对数凹概率测度。那么，对每个凸集 $A \subset \mathbb{R}^n$ 及每个 $\epsilon > 0$，

$$\mu\big((A+\epsilon B_2^n) \setminus A\big) \leqslant \sqrt{2}n\epsilon.$$

因此，对于每个凸集 $A \subset \bar{\mathbb{R}}^n$，都有 $\mu^+(\partial A) \leqslant \sqrt{2}n$，从而 $\Gamma(\mu) \leqslant \sqrt{2}n$。

证明。 取一个凸集 $A \subset \mathbb{R}^n$ 和 $\epsilon > 0$。按照引理 5.5 定义 $A_0, \dots, A_n$。由于 A 是凸的，且闵可夫斯基和保持凸性，因此每个 A_{k-1} 都是凸的。由引理 5.5 和 5.6，

$$\mu\big((A + \epsilon B_2^n) \setminus A\big) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu\big((A_{k-1} + \epsilon I_k) \setminus A_{k-1}\big) \leqslant \sum_{k=1}^{n} 2\epsilon g_k(0) = 2\epsilon \sum_{k=1}^{n} g_k(0).$$

每条边缘密度 g_k 在 $\mathbb{R}$上均为对数凹且偶对称。由各向同性，对 $X_k \sim g_k$有$\mathrm{Var}(X_k) = 1$。将(2.7)应用于每个 g_k，得到 $g_k(0) \leqslant 1/\sqrt{2}$，因此

$$\mu\big((A + \epsilon B_2^n) \setminus A\big) \leqslant 2\epsilon n/\sqrt{2} = \sqrt{2} n \epsilon.$$

两边除以 ϵ 并令 $\epsilon \to 0$，即完成证明。 □

§5.4. 精确的一维界。 设 μ 是 $\mathbb{R}$ 上密度为 f的对数凹概率测度。对区间 $I = [a, b]$ 与 $\epsilon > 0$，我们记

$$I + \epsilon B_2^1 = [a - \epsilon, b + \epsilon], \qquad B_2^1 = [-1, 1],$$

并将 I 关于 μ的周长定义为

$$\mu^+(\partial I) := \liminf_{\epsilon \to 0^+} \frac{\mu([a - \epsilon, b + \epsilon]) - \mu([a, b])}{\epsilon}.$$

μ 的最大周长定义为

$$\Gamma(\mu) := \sup\big\{\mu^+(\partial I) : I \subset \mathbb{R} \text{ an interval}\big\}.$$

下一命题给出 $\Gamma(\mu)$在一维情形下的精确公式。

命题 5.8。 设 μ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上、密度为 f 的对数凹概率测度，并令 $M := \|f\|_\infty$。那么

$$\Gamma(\mu) = 2M.$$

证明。 取任意区间 $I = [a, b]$。那么

$$\mu^+(\partial I) = f(a^-) + f(b^+) \leqslant 2\|f\|_\infty = 2M,$$

因此 $\Gamma(\mu) \leqslant 2M$。

反过来，取 x，使得 $f(x)$ 任意接近 M。当 $\delta > 0$ 充分小时，区间 $I_\delta = [x - \delta, x + \delta]$ 有限，且满足

$$\mu^+(\partial I_\delta) = f((x - \delta)^-) + f((x + \delta)^+) \to 2f(x) \quad \text{as } \delta \to 0^+.$$

因此 $\Gamma(\mu) \geqslant 2f(x)$。选取 x，使得 $f(x) \to M$，即可得到 $\Gamma(\mu) \geqslant 2M$。 □

命题 5.8 推出关于 $\mathbb{R}$ 上各向同性对数凹密度的一个紧确界。

定理 5.9。 设 μ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上、密度为 f 的各向同性对数凹概率测度。那么

$$\Gamma(\mu) \leqslant 2.$$

此外，常数 2 是最佳的：存在各向同性对数凹概率测度 μ，使得 $\Gamma(\mu)$ 可以任意接近 2。事实上，单边指数分布使底层极值不等式取等号。

证明。令 $M = \|f\|_\infty$。根据命题 5.8，只需证明 $M \leqslant 1$。

Let X 是一个分布为 μ的随机变量。对于 $\mathbb{R}$ 上的对数凹密度，我们有 e

$$\mathrm{Var}(X) \leqslant \frac{1}{M^2}.$$

由于 μ 是各向同性的，$\mathsf{Var}(X) = 1$，因此 $M \leqslant 1$。所以，

$$\Gamma(\mu) = 2M \leqslant 2.$$

为了看出该界是紧的，令 $Y \sim \mathsf{Exp}(1)$，并定义 $X := Y - 1$。则 $\mathbb{E}(X) = 0$ 且 $\mathsf{Var}(X) = 1$。X 的密度由下式给出

$$f(x) = e^{-(x+1)} \mathbb{1}_{\{x \geqslant -1\}},$$

因此 $M = \|f\|_\infty = 1$。故 $\Gamma(\mu) = 2M = 2$，该上确界由收缩到f 接近 1 的点的区间达到。

□

§5.5. $O(n)$ 乘积测度的界。 结合前两小节的结果，我们现在推导对数凹乘积测度的最大周长关于维数线性的上界。我们从以下一般陈述开始。

定理 5.10. 设 $\mu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ 是 $\mathbb{R}^n$上的乘积概率测度，其中每个 μ_k 具有密度$g_k \in L^\infty(\mathbb{R})$。则对每个凸集 $A \subset \mathbb{R}^n$,

$$\mu^+(\partial A) \leqslant 2 \sum_{k=1}^n \|g_k\|_\infty. \tag{5.4}$$

因此，

$$\Gamma(\mu) \leqslant 2 \sum_{k=1}^n \|g_k\|_\infty.$$

此外，(5.4) 中的常数2 是最优的。

证明。如同 pr oof 引理 5.5，对于 $k = 1, \ldots, n$ 令 $I_k := [-e_k, e_k]$。给定凸集 $A \subset \mathbb{R}^n$ 以及 $\epsilon > 0$, 定义

$$A_0 := A, \qquad A_k := A_{k-1} + \epsilon I_k \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

由Fubini定理、引理 5.5以及 μ的乘积结构，我们得到

$$\mu(A_k) - \mu(A_{k-1}) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\mu_k\big((A_{k-1})_y + [-\epsilon, \epsilon]\big) - \mu_k\big((A_{k-1})_y\big) \Big)\, d\mu_{\widehat{k}}(y),$$

其中 μ_k 是第 k 个边缘分布，且 $\mu_{\widehat{k}} := \bigotimes_{i \neq k} \mu_i$。

令 $J \subset \mathbb{R}$ 是一个区间。集合 $J + [-\epsilon, \epsilon]$ 与 J 的差异仅出现在其端点附近。因此 ,

$$\mu_k\big((J + [-\epsilon, \epsilon]) \setminus J\big) \leqslant 2\epsilon \, \|g_k\|_\infty,$$

因为至多有两个端点邻域，每个长度为 ϵ，且密度有界于 $\|g_k\|_\infty$。因此，

$$\mu(A_k) - \mu(A_{k-1}) \leqslant 2\epsilon \, \|g_k\|_\infty.$$

对 k 求和并使用 (5.3)，我们得到

$$\mu\big((A + \epsilon B_2^n) \setminus A\big) \leqslant 2\epsilon \sum_{k=1}^n \|g_k\|_\infty.$$

两边除以 ϵ 并令 $\epsilon \to 0^+$，得到 (5.4)。 □

推论 5.11。 设 $\mu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$上的乘积概率测度，其中每个 μ_k 都是定义在 $\mathbb{R}$ 上、密度为 g_k 的对数凹概率测度，且 $\mathrm{Var}(X_k) = 1$，其中 $X_k \sim \mu_k$。那么

$$\Gamma(\mu) \leqslant 2n.$$

鉴于定理 5.10，该推论由界 $\|g_k\|_\infty \leqslant 1$ 立即得出，而该界由 (2.6) 成立。

致谢。 第三和第四位署名作者感谢雅典国立理工大学提供的博士奖学金资助。

参考文献

[1] S. Artstein-Avidan、A. Giannopoulos 和 V. D. Milman， *Asymptotic Geometric Analysis, Vol. I*，《数学调查与专著》第 202 卷。美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，2015 年。xx+451 页。[2] S. Artstein-Avidan、A. Giannopoulos 和V. D. Milman， *Asymptotic Geometric Analysis, Vol. II*，《数学调查与专著》第 261 卷。美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，2021 年。xxxvii+645 页。[3] K. M. Ball，
Logarithmically concave functions and sections of convex sets in $\mathbb{R}^n$，《Studia Math.》88（1988），69–84。[4] K. M. Ball， *Volumes of sections of cubes and related problems*，《数学讲义》1376，Springer，柏林（1989），251–260。[5] K. M. Ball， *The reverse isoperimetric problem for Gaussian measure*，《Discrete Comput. Geom.》10（1993），411–420。[6] P. Bizeul， *The slicing conjecture via small ball estimates*，预印本（https://arxiv.org/abs/2501.06854）。[7] S. G. Bobkov，
Isoperimetric and analytic inequalities for log-concave probability distributions，《Ann. Probab.》27（1999），第 4 期，1903–1921。[8] S. G. Bobkov 和 G. P. Chistyakov， *On concentration functions of random variables*，《J. Theoret. Probab.》28（2015），第 3 期，976–988。[9] C. Borell， *Convex measures on locally convex spaces*，《Ark. Mat.》12（1974），239–252。[10] J. Bourgain，
On high-dimensional maximal functions associated to convex bodies，《Amer. J. Math.》108（1986），1467–1476。[11] S. Brazitikos、A. Giannopoulos、P. Valettas 和 B-H. Vritsiou， *Geometry of isotropic convex bodies*，《数学调查与专著》第 196 卷。美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，2014 年。xx+594 页。[12] M. Fradelizi，
Sections of convex bodies through their centroid，《Arch. Math. (Basel)》69（1997），第 6 期，515–522。[13] A. Giannopoulos 和 N. Tziotziou， *Moments of the Cramér transform of log-concave probability measures*，预印本（https://arxiv.org/abs/2503.19528）。[14] A. Giannopoulos 和 N. Tziotziou，
Regular functional covering numbers，预印本。（https://arxiv.org/abs/2512.04301）。[15] A. Giannopoulos、M. Pafis 和 N. Tziotziou， *The isotropic constant in the theory of high-dimensional convex bodies* 69 2025 89 188 ，

《Bull. Hellenic Math. Soc.》（），–。[16] Q. Y. Guan， *A note on Bourgain's slicing problem*，预印本（https://arxiv.org/abs/2412.09075）。[17] D. Hensley，
Slicing convex bodies – bounds for slice area in terms of the body's covariance，《Proc. Amer. Math. Soc.》79（1980），第 4 期，619–625。[18] R. Kannan、L. Lov´asz 和 M. Simonovits，
Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma，《Discrete Comput. Geom.》13（1995），541–559。[19] B. Klartag， *A central limit theorem for convex sets*，《Invent. Math.》168（2007），91–131。[20] B. Klartag 和 J. Lehec， *Affirmative resolution of Bourgain's slicing problem using Guan's bound*，《Geom. Funct. Anal. (GAFA)》，第 35 卷，（2025），1147–1168。

[21] B. Klartag 和 J. Lehec, *Thin-shell bounds via parallel coupling*, 预印本。（https://arxiv.org/abs/2507.15495）。
[22] G. V. Livshyts, *Maximal surface area of a convex set in $\mathbb{R}^n$ with respect to exponential rotation invariant measures* 404 2013 2, 231 238 , 《J. Math. Anal. Appl.》（）, 第 期, [23] G. V. Livshyts, *Maximal surface area of a convex set in $\mathbb{R}^n$ with respect to log-concave rotation invariant measures* 355 383, 2116, , 《泛函分析的几何方面》, –《数学讲义》, Springer, 沙姆, 2014 年。[24] G. V. Livshyts,
Maximal surface area of polytopes with respect to log-concave rotation invariant measures, 《Adv. in Appl. Math.》70（2015）, 54–69。[25] G. V. Livshyts,
Some remarks about the maximal perimeter of convex sets with respect to probability measures, 《Commun. Contemp. Math.》23（2021）, 第 5 期, 论文编号 2050037, 19 页。[26] F. L. Nazarov,
On the maximal perimeter of a convex set in $\mathbb{R}^n$ with respect to a Gaussian measure, 《泛函分析的几何方面》, 169–187, 《数学讲义》1807, Springer, 柏林, 2003 年。[27] P. Steinhagen,
Über die gröste Kugel in einer konvexen Punktmenge, 《汉堡大学数学研讨班论文集》1（1922）, 15–26。[28] G. Toth, *Measures of symmetry for convex sets and stability*, Universitext。Springer, 沙姆, 2015 年。xii+278 页。

关键词： 最大周长；凸体；表面积；各向同性对数凹概率测度。**2020年数学主题分类：** 主要分类 52A38；
次要分类 52A40、60D05、46B06。

Silouanos Brazitikos: 克里特大学数学与应用数学系，Voutes校区，70013，希腊伊拉克利翁。

E-mail: silouanb@uoc.gr

Apostolos Giannopoulos: 雅典国立理工大学应用数学与物理科学学院数学系，Zografou校区，GR-157 80，希腊雅典。

E-mail: apgiannop@math.雅典国立理工大学.gr

Antonios Hmadi: 雅典国立理工大学应用数学与物理科学学院数学系，Zografou校区，GR-157 80，希腊雅典。*E-mail:* ahmadi@mail .ntua.gr

Natalia Tziotziou：雅典国立理工大学应用数学与物理科学学院数学系，Zografou校区，GR-157 80，希腊雅典。
E-mail: nataliatz99@gmail.com