arXiv:2602.03867v1 [math.CO] 31 Jan 2026

凯莱图中 S_n 的子群完美码

Ankan Shaw[1†], Shibesh Kotal[1] 和 Satya Bagchi[1*††1]
印度西孟加拉邦杜尔加布尔国家理工学院杜尔加布尔校区数学系，邮编 713209。

*通讯作者。电子邮件：sbagchi.maths@nitdgp.ac.in；贡献作者：ankanf22@gmail.com；shibeshkotal656@gmail.com；

†这些作者对本研究的贡献相同。

摘要

图 $\Gamma = (V, E)$ 中的完美码是 C V 的一个子集，满足 C 中任意两个顶点都不相邻，并且 $V \setminus C$ 中的每个顶点都恰好与 C中的一个顶点相邻。群 G 的子群 H 被称为 G 的子群完美码，当且仅当存在一个 G 的凯莱图，该图以 H 为完美码。在本文中，我们对 S_n中的循环 2-子群完美码进行了分类。我们分析了这些子群码，并详细阐述了其结构和性质。我们进一步讨论了对称群 S_n中的各种子群码类别，涵盖交换的和非交换的情形。我们提供了大量例子，以说明并支持我们的研究结果。

关键词： 凯莱图、完美码、子群完美码、对称群

MSC 分类： 05C25，05C69，94B99，20B30

1 引言

本研究中考察的所有群和图均为有限的。本文使用常见的群论术语和记号，相关内容可参见 [10]。

2 S_n 在凯莱图中的子群完美码

考虑一个图 Γ，其边集为 E（Γ），顶点集为 V（Γ）。如果 Γ 中不存在连接两个顶点的路径，那么它们在 Γ 中的距离等于 ∞。否则，距离等于这两个顶点之间最短路径的长度。设 t 为一个自然数， C 为 V（Γ）的一个子集。如果 Γ的每个顶点到 C中恰好一个顶点的距离都不大于 t，那么 C[3, 11] 称为 Γ中的完美 t码。完美码通常指完美 1 码。等价地说，如果 C 是 Γ 的一个独立集，并且V（Γ）$\setminus C$ 中的每个顶点都与 C中恰好一个顶点相邻，那么 V（Γ）的子集 C 就是 Γ中的完美码。图中的完美码也称为该图的高效支配集 [5, 12] 。

最初，Biggs [1] 提出了图中完美 t码的概念。他将汉明度量和 Lee 度量下的完美 t码定义为这一概念的推广。在 [15], 中，作者证明，字母表大小为 $m > 1$ 、长度为 n 的两个码字之间的汉明距离，恰好对应于汉明图 $H(n, m)$中的图距离。因此，在汉明度量下， $H(n, m)$中的完美 t码，正是经典背景下所定义的完美码。类似地，在 n 个长度为 m的圈的笛卡尔积 $L(n, m)$中，图距离等于字母表大小为 $m > 2$、长度为 n 的字词之间的 Lee 距离 [9] 。

在编码理论中，某种度量下是否存在完美码是一个关键问题。20世纪70年代初，人们对伽罗瓦域上的情形进行了分类，确定了完美码存在时的全部参数，参见 [19, 20, 26]。Golomb 和 Welch [7] 于1970年提出一个猜想，指出对于所有$n \geq 3$、 $r \geq 2$和 $q > 2r$，不存在关于 Lee 度量的长度为 q、字母表大小为 n 的完美 r码。尽管经过了半个多世纪的广泛研究，这一猜想仍未解决 [9]。用于证明完美码不存在的最有效方法之一，是著名的 Lloyd 定理 [13]。在距离传递图中，Biggs [1]将 Lloyd 定理推广到了完美码。自 Biggs [1]开创性研究以来，许多研究聚焦于距离传递图和关联方案 [2]中的完美码。在 [4], 中，Chihara 证明，存在无穷多个经典距离正则图类，它们都没有非平凡完美码。她还对 Grassmann 图和双线性型图得出了相同结论。在 [16], 中，作者以一种新方法证明，这些图中不存在完美码。Doob 图族是距离正则凯莱图中的一个重要类别。作者在 [17]中刻画了 Doob 图中所有可能的子群完美码参数。在 [11], 中，作者给出了 Doob 图中存在完美码的充要条件。关于距离正则图中完美码的更多讨论，参见 [18] 和 [8]。

近年来，凯莱图中的完美码引起了广泛关注；参见 [5, 6, 10, 21, 25]。在 [10],Huang等人提出了关于凯莱图中完美码的一种新思路。他们将群 G 的一个子集 S 定义为

称为 G 的完美码，如果它是 G的某个凯莱图的完美码。特别地，如果 S 是 G的子群，那么称 S 是 G的完美子群。在 [10], ，Huang等人发现了关于群的正规子群成为完美码的一些有趣结果。随后，这些结果被推广到群中的一般子群。设 G 是一个群， H 是 G的一个子群。在 [22, 23], ，作者证明，如果 H的一个西罗 2-子群是 G的完美码，那么 H 就是 G 的完美码。他们还讨论了亚阿贝尔群。在 [24],，Zhou证明， H 是 G 的完美码，当且仅当 H 的一个西罗 2-子群是 G的完美码；而这当且仅当 H的每个西罗 2-子群都是 G的完美码。因此，刻画 G 中的 H 子群码，等价于刻画 G中 H 的一个 2-西罗子群。对于高阶群（尤其是对称群），判定一个 2-西罗子群是否完美颇具挑战。本文聚焦于对称群 S_n的一些子群码。我们通过考察 S_n 的子群生成元并给出一些条件，讨论 S_n 中的某些子群是否完美。我们还从低阶子群码构造高阶子群码，并讨论此类码在 S_n中的完美性。

除引言部分外，本文分为三个部分。第 2 节介绍本文所用的一些已知结果和字母表。第 3 节对其 2-西洛子群为循环群的子群码作出完整分类。第 4 节讨论 S_n 中若干类子群码（交换的与非交换的），并给出若干例子和关于我们结果的说明。最后，我们总结全文并提出可能的未来研究方向。

2 预备知识

为方便读者，本节介绍一些定义和预备结果。对于有限集 S， $|S|$ 表示 S中的元素个数。设 G 为有限群， H 为 G的子群。我们用 $|G:H|$表示 H 在 G中的指数 $|G|/|H|$ ，用 $N_G(H)$表示 H 在 G中的正规化子$\{g \in G: g^{-1}Hg = H\}$ 。对于 G的任意子集 A ， $\langle A\rangle$ 表示由 A生成的 G 的子群。元素 $g \in G$的阶记为 $o(g)$，群 G 的单位元记为 1_G。若 G含有元素 g ，使得 $o(g) = 2$，则称 g 为 G的对合。若 P 是 G的一个阶为 p^a 的子群，则称其为 G 的 p-子群。此外，若p 不整除 $|G:P|$，则称 P 为 G的西洛 p-子群。

引理 2.1. *[22]* 设 G 是一个群， H 是 G 的一个子群。当且仅当 H 是 G 的完美码且在 G 中有一个 *Cayley* 横截集时， H 才是 G 的完美码。

引理 2.2. *[22]* 设 G 是一个群，且 H 是 G 的一个子群。那么 H 是 G 的完美码，当且仅当它是任何包含 G的子群的 H的完美码。

引理 2.3. *[22]* 设 G 是一个群，且 H 是 G的一个子群。若 H 是 G的完美码，则对于任意 $g \in G$， $g^{-1}Hg$ 是 G的完美码。更具体地说，若 H 是某个 G 的连接集 S 对应的 Cay（G, S）中的完美码，则 $g^{-1}Hg$是 Cay（$G, g^{-1}SG$）中的一个码，且是 G中的完美码。

引理 2.4. *[10]*设 G 是一个群，且 H 是 G的正规子群。那么 H是 G 的完美码，当且仅当对于所有 $x \in G$， $x^2 \in H$ 都蕴含（xh）$^2 = 1$对某个 $h \in H$.

引理 2.5. *[23]* 设 G 为一个群， H 为 G的一个子群。那么， H 不是 G 的完美码，当且仅当存在一个双陪集 $D = HxH$ ，满足$D = D^{-1}$ 在 G 中含有奇数个 H 的左陪集，且不含对合。特别地，如果 H 不是 G的完美码，那么存在一个2元元素 $x \in G \setminus H$ ，使得 $x^2 \in H$, $|H : H \cap xHx^{-1}|$ 为奇数，且 HxH不含对合。

引理 2.6. *[23]* 设 G为一个群， Q 为 G的一个子群。假设 Q 是一个2群，或者 $|Q|$ 和 $|G : Q|$ 中至少一个为奇数。那么， Q 是 G 的完美码，当且仅当 Q 是 $N_G(Q)$的完美码。

引理 2.7. *[23]* 设 G为一个群， Q 为 G的一个子群。假设 Q 是一个2群，或者 $|Q|$ 和 $|G : Q|$ 中至少一个为奇数。那么， Q 是 G 的完美码，当且仅当对于任意 $x \in N_G(Q)$，若 $x^2 \in Q$ 成立，则存在某个 $b \in Q$使得$(xb)^2 = 1$。

引理 2.8. *[22]* 设 G 为一个群， H 为 G的一个子群。若 H 的阶为奇数，或 H 在 G 中的指数为奇数，则 H 是 G的一个完美码。

引理 2.9. *[22]* 设 G为一个群， H 为 G的一个子群。若存在 H的一个西洛 2- 子群，它是 G 的一个完美码，则 H 是 G 的一个完美码。

引理 2.10. *[24]*设 G为一个有限群， H 为 G的一个子群。则以下命题等价：

- H 的每个西洛 2-子群都是 G的一个完美码；
- H 有一个西洛 2-子群是 G的一个完美码；
- H 是 G的一个完美码。

引理 2.11。 *[24]*设 G是一个有限群， H 是 G的一个子群。设 Q 是 H 的一个 *Sylow* 2-子群， P 是 $N_G(Q)$的一个 *Sylow* 2-子群。那么，当且仅当 Q 是 P的完美码时， H 是 G 的完美码。

由引理 2.10 可知，任何奇数阶子群都是 S_n. 因此，我们只关注 2–<style id='11}中的子群 S_n。

S_n中的循环子群码 3

本节将全面分类对称群 S_n中的循环完美码。通过考察循环子群的生成元，我们可以判断该子群是否构成完美子群码。我们给出此类码的一些构造。先从一个显然的结果开始。

定理 1 *Suppose $H = \langle (x_1x_2)(x_3x_4)\cdots(x_{m-1}x_m)\rangle$ is a subgroup of A_n. If all the transpositions are disjoint, then H is not perfect in S_n.*

Proof 我们有 $H = \{(1), (x_1x_2)(x_3x_4)\cdots(x_{m-1}x_m)\}$. 设 $t = (x_1x_4x_2x_3)(x_5x_8x_6x_7)\cdots(x_{m-3}x_mx_{m-2}x_{m-1})$。现在，$tH = \{t, t^{-1}\} = (tH)^{-1}$. 显然，$tH$不包含对合。因此，$H$不是$S_n$. □中的完美码

定理 2 *Suppose $H = \langle (x_1x_2)(x_3x_4)\cdots(x_{m-1}x_m)\rangle$ is a subgroup of S_n such that $\frac{m}{2}$ is odd. If all the transpositions are disjoint, then H is perfect in S_n.*

Proof 我们定义集合 $S = \{x \in S_n \setminus A_n : \ x \notin H\}$。由 H 的定义可知 $xH \cap yH = \emptyset$ 对于 $x \neq y \in S$。由于 $|H| = 2$，因此 $|S| = {}^{n!}{}_{2} - 1$. 此外$S = S^{-1}$. 因此，— $S_n = \cup_{x\in S} xH \cup H$. 所以，$S$ 是 H 在 S_n中的 Cayley 横截集。由引理 2.1 可知 H 在 S_n中是完美的。□

为证明接下来要得到的结论，我们将使用下面的引理。

引理 3.1. 令 $G^2 = \{g^2 : \ g \in S_n\}$。则 $G^2 \subset A_n$ 对于 $n \geq 2$.

Proof 显然，当 k 为奇数时，k 圈的平方仍是一个 k 圈；当 k 为偶数时，其平方则是两个 $k/2$ 圈的乘积。因此，元素 $x \in S_n$ 是完全平方，当且仅当对于 k 的每个偶数值，x 的循环结构中 k 圈的个数都是偶数。□

定理 3 *Let $H = \langle x\rangle$ be a cyclic group of order 2^m of S_n such that $x \in S_n \setminus A_n$, $m \in \mathbb{N}$. Then H is perfect in S_n.*

Proof 假设 H 不是 S_n中的完美码。那么，根据引理 2.5，存在x_1，x_2，.....，$x_l \in S_n \setminus H$，其中 l 为奇数，使得 $(x_1H \cup x_2H \cup \cdots \cup x_lH)^{-1} = (x_1H \cup X_2H \cup \cdots \cup x_lH)$，且它们的并集不含对合。为进一步讨论，

6 凯莱图中 S_n 的子群完美码

我们考虑以下两种情形。

情形 I: 设 $l = 1$。则 $(x_1H)^{-1} = x_1H$ 且其中不含对合。因此，$\{x_1^{-1}, x^{-1}x_1^{-1}, \ldots, x^{-2^m-1}x_1^{-1}\} = \{x_1, x_1x, \ldots, x_1x^{2^m-1}\}$。由于 x_1H 不含对合，所以，$x_1^{-1} \neq x_1$。
设 $x_1^{-1} = x_1x^i$ 对于某个 $i \in N_1$，其中 $N_1 = \{1 \leq i \leq 2^m - 1 : \ (i, \ 2^m) \ = 1\}$。则 $x_1^{-2} = x^i$，这也是 H 的一个生成元，因为 $i \in N_1$。因此，存在 $y \in S_n$ 使得 $y^2 = x$。由引理 3.1 可知 $x \in A_n$，这与给定条件矛盾。

假设对于某个 $i \in N_2$，有 $x_1^{-1} = x_1x^i$，其中 $N_2 = \{1 \leq i \leq 2^m - 1 : \ (i, \ 2^m) \ \neq 1\}$。因此，$x_1^2 = x^{-i}$。现在我们将此情形分为两部分。
子情形 IA: 当 $x_1 = x^{(-\frac{i}{2})}$。那么 x_1H 包含 $x_1x^{\frac{i}{2}}$. 因此，$x_1 \in H$，这就产生了矛盾。

子情形 IB: 当 $x_1 = x^{(-\frac{i}{2})}p_1p_2 \cdots p_t$，其中 p_1，p_2，……，p_t 是 S_n 中的不相交换位，且 $xp_i = p_ix$ 对于 $1 \leq i \leq t$成立。因此，x_1H 包含一个对合$x_1x^{\frac{i}{2}}($ $= p_1p_2 \cdots p_t)$。由此得到矛盾。

情形 II: 假设 $l > 1$ $\{x_1\langle x\rangle \cup x_2\langle x\rangle \cup \cdots \cup x_l\langle x\rangle\}^{-1} = \{x_1\langle x\rangle \cup x_2\langle x\rangle \cup \cdots \cup$ $x_l\langle x\rangle\}$ H $x_1\langle x\rangle^{-1} = x_i\langle x\rangle$ $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$ 那么 。由于 是循环的，因此，对于某个，( )。于是存在 $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$，使得 $(x_i\langle x\rangle)^{-1} = x_i\langle x\rangle$，因为 l 是奇数。因此，我们得到与情形 I 类似的情况。证明完毕。□

定理 4 *Let $H = \langle x\rangle$ be a cyclic subgroup of order 2^m such that $x \in A_n$, $m \in \mathbb{N}$. If x has a product of an odd number of same type of disjoint cycles then H is perfect , , in S_n; otherwise H is not perfect in S_n.*

Proof 我们有 $H = \langle x\rangle$，其中 x 含有奇数个同类型不相交轮换的乘积，且其阶为 x 为 2^m。由引理3.1可知，不存在 $y \in S_n$ 使得

$$y^2 = x. \tag{1}$$

假设 H S_n 2 5, x_1 x_2 $x_l \in$ $S_n \setminus H$ $K = x_1H \cup x_2H \cup \cdots \cup x_lH = x_1H \cup x_2H \cup \cdots \cup x_lH^{-1}$ 在 中不是完美的。由引理。存在，，…，使得：( ) ( )，其中奇数 l 且 K 不含对合。我们考虑以下两种情形，类似于定理3。

情形 I: 假设 $l = 1$。那么 $(x_1H)^{-1} = x_1H$，且其中不含对合。因此，$\{x_1^{-1}, x^{-1}x_1^{-1}, \ldots, x^{-2^m-1}x_1^{-1}\} = \{x_1, x_1x, \ldots, x_1x^{2^m-1}\}$。由于 x_1H 不含对合，因此，$x_1^{-1} \neq x_1$。
假设 $x_1^{-1} = x_1x^i$ 对某个 $i \in N_1$，其中 $N_1 = \{1 \leq i \leq 2^m - 1 : \ (i, \ 2^m) \ = 1\}$。那么 $x_1^{-2} = x^i$，它也是 H 的生成元，因为 $i \in N_1$。因此，存在$z \in S_n$ 使得 $z^2 = x$，这与方程 (1) 矛盾。

假设对某个 $i \in N_2$有 $x_1^{-1} = x_1x^i$，其中 $N_2 = \{1 \leq i \leq 2^m - 1 : \ (i, 2^m) \neq 1\}$。因此，$x_1^2 = x^{-i}$。现在，我们将此情形分为两部分。

子情形 IA: 当 $x_1 = x^{(-\frac{i}{2})}$. 那么 x_1H 包含 $x_1x^{\frac{i}{2}}$. 因此, $x_1 \in H$, 这就产生了矛盾。

子情形 IB: 当 $x_1 = x^{(-\frac{i}{2})}p_1p_2\cdots p_t$, 其中 $p_1, p_2, \ldots, p_t$ 是 S_n 中的不相交换位, 且对 $1 \leq i \leq t$ 而言属于 $xp_i = p_ix$。因此, x_1H 包含一个对合 $x_1x^{\frac{i}{2}}(= p_1p_2\cdots p_t)$。由此, 我们得到矛盾。

情形 II: 假设 $l > 1$ $\{x_1\langle x\rangle \cup x_2\langle x\rangle \cup \cdots \cup x_l\langle x\rangle\}^{-1} = \{x_1\langle x\rangle \cup x_2\langle x\rangle \cup \cdots \cup x_l\langle x\rangle\}$ H $\langle x\rangle\, x_1^{-1} = x_i\langle x\rangle$ $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$ 那么。由于 是循环的, 因此, 对于某个。由于 l 是奇数, 所以存在 $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$ 使得 $(x_i\langle x\rangle)^{-1} = x_i\langle x\rangle$。因此, 根据情形 I, 我们得到矛盾。

因此, H 在 S_n 中是完美的 .

设 $H = \langle x\rangle$, 使得 x 不含奇数个同类型不相交轮换的乘积。我们断言, 存在一个非平凡陪集 x_1H $x_1H^{-1} =$, 满足 ( ) 且 x_1H x 不含对合。由于不含奇数个同类型不相交轮换的乘积, 因此存在 $x_1 \in S_n$ $x_1^2 =$ 使得。现在, x $x_1x^{i\ -1} = x_1\ x_1^{-1}x^{-i}x_1^{-1}$ $1 \leq i \leq 2^m$ $x_1^{-1}x^{-i}x_1^{-1} =$ 对于, 有 ( ) ( ) 。于是 $x_1^{-1}x_1^{-2i}x_1^{-1} = x_1^{-2(i+1)} = x^{-(i+1)} \in H$。因此, 对于 $1 \leq i \leq 2^m$, 有 $(x_1x^i)^{-1} \in x_1H$, 从而 $(x_1H)^{-1} = x_1H$。接下来, 我们断言 x_1H 不含对合。假设 x_1H 含有一个对合, 记为 x_1x^j, 其中 $1 \leq j \leq 2^m$。于是 $(x_1x^j)^{-1} = x_1x^j$。因此, $x_1^{-1}x^{j+1}x_1 = x^{-j}$。这表明 $o(x^{j+1}) = o(x^j)$, 这与 $o(x)$ 为偶数矛盾。因此, H 在 S_n 中不是完美的。□

推论 4.1. 设 H 是 S_n 的一个循环子群, 它在 S_n 中不是完美的。那么 $H \subset A_n$。

注意, 如果 S_n 的一个循环子群是完美的, 那么该子群可能是也可能不是 A_n 的子集。这完全取决于该子群的生成元。这为在 S_n 中构造循环完美码提供了一个一般思路。

Example 1 设 $G = S_{10}$, $K = \langle(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6),\ (7\ 8\ 9)\rangle$ 和 $H = \langle(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6)\rangle$. 那么 H 是 K. 的西罗 2-子群。由定理 4 可知 H 不是 G 中的完美码。因此, 由引理 K 在 G 中不是完美的, 依据引理 2.10。

4 S_n 中的一些非循环子群码

本节探讨非循环子群码的构造, 包括交换的和一些非交换的子群码, 它们在 S_n 中不是完美码。通过一个例子, 我们证明群的同构可能无法保留子群码的完美性。

定理 5 *Let $H = \langle x_1\ x_2\ \ldots\ x_m\rangle$ be a commutative subgroup of order 2^k in S_n,,,,,, such that $x^2 = x_1$ for some $x \in S_n \setminus H$ m $k \in \mathbb{N}$. If $xx_i = x_ix$ for $i \in \{2, 3, \ldots, m\}$ then H is not perfect in S_n.*

Proof $H_1 = \langle x_1 \rangle$ $H = H_1 \bigsqcup_{i=1}^{p} w_i H_1$ $w_i = x_2^{i_2} \cdots x_m^{i_m}$ $i_2 \ldots i_m \in$令且，其 $\mathbb{N} \cup \{0\}$ 4 $xH_1{}^{-1} = xH_1$ 中；，，。由定理可知（），且其中不含对合。于是

$$(xH)^{-1} = (xH_1)^{-1} \bigsqcup_{i=1}^{p} (xw_i H_1)^{-1}$$
$$= (xH_1) \bigsqcup_{i=1}^{p} H_1 w_i^{-1} x^{-1}.$$

由于 $xx_i = x_i x$ 对于 $2 \le i \le m$，因此，$w_j^{-1} x^{-1} = x^{-1} w_j^{-1}$对于 $1 \le j \le p$。于是 $H_1 w_i^{-1} x^{-1} = xH_1 w_i^{-1}$因为 $(xH_1)^{-1} = xH_1$. 由于 H 是交换的，因此，$H_1 w_i^{-1} x^{-1} = xw_i^{-1} H_1$. 因此，$(xw_i H_1)^{-1} = xw_i^{-1} H_1$ 对于 $1 \le i \le p$. 为了进一步讨论，我们考虑以下两种情形。

情形 I: 当 $w_i^{-1} \ne w_i$。那么 $xw_i H_1$ 不包含对合。

情形 II: 当 $w_i^{-1} = w_i$。假设 $xw_i H_1$ 包含一个对合，记为 $xw_i h_1$，其中 $h_1 \in H_1$。那么 $(xw_i h_1)(xw_i h_1) = 1_{S_n}$. 这意味着 $(xh_1)^2 = 1_{S_n}$. 因此，xH_1 包含一个对合，这与假设矛盾。故所需结论成立。□

注: 注意，定理 5 启发我们构造基于给定的非完美子群码、在 S_n 中也非完美的高阶码 S_n。取元素 $z \in S_n \setminus H$ 使得 $zx = xz$ 且 $zx_i = x_i z$对于 $2 \le i \le m$。那么 $\langle H, z \rangle$ 在 S_n中并非完美。

4.1 非交换子群码

接下来，我们将讨论自然数集 S_n 中某些非完美的非阿贝尔码。这些非阿贝尔子群同构于 $D_n, \mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$，它们是满足某些条件且极小生成集的基数为 2 的子群。利用这些子群，我们将构造自然数集 S_n 中同样非完美的高阶子群码。

定理 6 *Let* $\langle x_1\ x_2 \rangle$ *be a non-commutative subgroup of order* 2^{l+1} *such that,* $y^2 = x_1^{-1}$ *and o* $x_1 = 2^l$ *o* $x_2 = 2$ *for some* $y \in S_n$ $l \in \mathbb{N}$. *If* $x_2 y^{-1} = y^{-k} x_2$ *for* 0，()，*some odd integer k such that* $k \not\equiv -1$ (模 2^{l+1}) *then* $\langle x_1, x_2 \rangle$ *is not perfect in* S_n.

Proof $H = \langle x_1\ x_2 \rangle$ $x_2 y^{-1} = y^{-k} x_2$ $x_2 x_1 = x_2 y^{-1}\ y^{-1} =$令，。$y^{-2k} x_2 = y^{-2\ k} x_2 = x_1^k x_2$ $y^2 = x_1^{-1}$ *o* $x_1 = 2^l$ *o* $y = 2^{l+1}$ 我们有。于是00。由于且0，因此，0。所以，$y \notin H$ 由于 H的非交换性。因此，我们有

$$yH = y\langle x_1 \rangle \bigsqcup yx_2 \langle x_1 \rangle. \tag{2}$$

Now,

$$[y\langle x_1 \rangle]^{-1} = \{yx_1^i : i = 0, 1, \ldots, 2^l - 1\}^{-1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{x_1^{-i}y^{-1} : i = 0, 1, \ldots, 2^l - 1\} \\
&= \{y^{2i-1} : i = 0, 1, \ldots, 2^l - 1\} \\
&= \{yy^{2i-2} : i = 0, 1, \ldots, 2^l - 1\} \\
&= \{y(y^2)^{i-1} : i = 0, 1, \ldots, 2^l - 1\} \\
&= \{yx_1^{1-i} : i = 0, 1, \ldots, 2^l - 1\} \\
&= y\langle x_1\rangle.
\end{aligned}
$$

假设存在 $m \in \{0, 1, \ldots, 2^l - 1\}$ 使得

$$
\begin{aligned}
& yx_1^{1-m} = (yx_1^{1-m})^{-1} \\
\iff\ & yx_1^{1-m} = x_1^{m-1}y^{-1} \\
\iff\ & yy^{-2(1-m)} = y^{-2(m-1)}y^{-1} \\
\iff\ & y^{2m-1} = y^{-2m+1}.
\end{aligned}
$$

因此，$2m-1 = -2m+1+t2^{l+1}$；$t \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. 这意味着 $2m = 1+2(2^{l-1}t)$，该方程没有整数解。因此，$[y\langle x_1\rangle]^{-1} = y\langle x_1\rangle$，且其中不包含对合。由于 k 为奇数，因此存在 $m_1 \in \mathbb{Z}$ 使得 $k+1 = 2m_1$. 现在，

$$
\begin{aligned}
[yx_2\langle x_1\rangle]^{-1} &= \{yx_2x_1^i : i = 0, 1, \ldots, 2^l - 1\}^{-1} \\
&= \{x_1^{-i}x_2y^{-1} : i = 0, 1, \ldots, 2^l - 1\} \\
&= \{x_1^{-i}y^{-k}x_2 : i = 0, 1, \ldots, 2^l - 1\} \\
&= \{y^{(2i-k)}x_2 : i = 0, 1, \ldots, 2^l - 1\} \\
&= \{yy^{(2i-k-1)}x_2 : i = 0, 1, \ldots, 2^l - 1\} \\
&= \{yy^{-2(m_1-i)}x_2 : i = 0, 1, \ldots, 2^l - 1\} \\
&= \{yx_1^{(m_1-i)}x_2 : i = 0, 1, \ldots, 2^l - 1\} \\
&= y\langle x_1\rangle x_2 \\
&= yx_2\langle x_1\rangle.
\end{aligned}
$$

假设存在 $t \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ 使得

$$
\begin{aligned}
& [yx_2x_1^t]^{-1} = yx_2x_1^t \\
\iff\ & x_1^{-t}x_2y^{-1} = yx_2x_1^t \\
\iff\ & y^{2t}y^{-k}x_2 = yx_2y^{-2t} \\
\iff\ & y^{(2t-k)}x_2 = yy^{(-2t)k}x_2.
\end{aligned}
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
& 2t - k = 1 - 2tk + t_1 2^{l+1};\ t_1 \in \mathbb{N}\cup\{0\} \\
\iff\ & (2t-1)(1+k) = t_1 2^{l+1}.
\end{aligned}
$$

由于 k 是奇数，因此，$k \equiv -1$ （模 2^{l+1}）与给定条件矛盾。因此，由方程（2），我们得到 $[yH]^{-1} = yH$，且它不含对合。因此，H 在 S_n中不是完美的。□

我们利用上述结果说明，群同构未必保持子群码的完美性。下面的例子反映了这一结论。

Example 2 $H_1 = \langle 1\ 4\ 7\ 6\ 2\ 8\ 3\ 5, 2\ 5\ 3\ 8\ 4\ 6\rangle$ H_2 =设 ( ) $\langle 1\ 6\ 2\ 4\ 3\ 8\ 5\ 7, 1\ 8\ 5\ 4\ 2\ 7\ 3\ 6\rangle$ 8 S_8 H_1 ( ) ( )( )( ) 和 ( )( )( )( ) ( )( ) 是 中的 阶子群。 和 H_2 都同构于 D_4。因此， $H_1 \cong H_2$。由定理 6 的证明可知，(1 2 6 5 7 3 4 8)H_1 是逆封闭的，且不含对合。因此， H_1 在 S_8. 中不是完美码。现在， $N_{S_8}(H_2) = H_2 \cup (4\ 8)(6\ 7)H_2 \cup (2\ 3)(6\ 7)H_2 \cup (2\ 6)(3\ 7)(4\ 8)H_2 \cup (2\ 7)(3\ 6)(4\ 8)H_2 \cup (2\ 6\ 3\ 7)H_2 \cup (2\ 7\ 3\ 6)H_2$. 那么， H_2 在 $N_{S_8}(H_2)$ 中是完美的。由引理 2.6 可知， H_2 在 S_8中是完美的。因此，我们可以看出，群同构未必保留子群码的完美性。

定理 7 *Let* $\langle x_1\ x_2\rangle$ *be a non-commutative subgroup of order* 2^{l+1} *such that* , 0 , ( ) , $y^2 = x_1^{-1}$ *and* o $x_1 = 2^l$ *o* $x_2 = 2$ *for some* $y \in S_n$ $l \in \mathbb{N}$. *Suppose* $x_2 y^{-1} = y^{-k} x_2$ *for some odd integer* k *such that* $k \neq -1$ (模 2^{l+1}). *If* $x_3 y = y x_3$ *and* $x_2 x_3 = x_3 x_2$, *then* $\langle x_1\ x_2$, , $x_3\rangle$ *is not perfect in* S_n.

Proof 设 $H = \langle x_1, x_2\rangle$, $H_1 = \langle x_1, x_2, x_3\rangle$ 和 $[H_1 : H] = t$。则 $H_1 = H \bigsqcup_{i=1}^{t-1} x_3 H$。由于 $x_3 y = y x_3$，因此， $x_3 x_1 = x_1 x_3$。由定理 6 可知， yH 是逆封闭的，且不含对合。由于 $x_3 x_2 = x_2 x_3$， $(yH)^{-1} = yH$ 和 $x_3 y = y x_3$，因此， $[y x_3^i H]^{-1} = y x_3^{-i} H$。假设 $y x_3 H$ 含有一个对合。为了继续讨论，我们考虑以下两种情形。

情形 I: 当 $x_3^{-i} = x_3^i$ 时。假设 $y x_3^i \langle x_1\rangle$ 含有一个对合。那么存在 $m \in \{0, 1, \ldots, 2^l - 1\}$ 使得

$$\begin{aligned} & y x_3^i x_1^{1-m} = (y x_3^i x_1^{1-m})^{-1} \\ \iff & y x_1^{1-m} = x_1^{m-1} y^{-1} \\ \iff & y y^{-2(1-m)} = y^{-2(m-1)} y^{-1} \\ \iff & y^{2m-1} = y^{-2m+1}. \end{aligned}$$

因此， $2m - 1 = -2m + 1 + t_1 2^{l+1}$; $t_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. 这意味着 $y x_3^i \langle x_1\rangle$ $2m =$ $1 + 2\ 2^{l-1} t_1$, ( )，而该式没有整数解。因此， 不含对合。假设 $y x_3^i x_2 \langle x_1\rangle$ 含有一个对合。那么存在 $s \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\begin{aligned} & [y x_3^i x_2 x_1^s]^{-1} = y x_3^i x_2 x_1^s \\ \iff & x_1^{-s} x_2 y^{-1} = y x_2 x_1^s \\ \iff & y^{2s} y^{-k} x_2 = y x_2 y^{-2s} \\ \iff & y^{(2s-k)} x_2 = y y^{(-2s)k} x_2. \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned} & 2s - k = 1 - 2sk + t_2 2^{l+1};\ t_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ \iff & (2s-1)(1+k) = t_2 2^{l+1}. \end{aligned}$$

Sin由于 k 为奇数，因此 $k \equiv -1$ （模 2^{l+1}）。这与给定条件矛盾 .

情形 II: 当 $x_3^{-i} \neq x_3^i$时。则 $[yx_3^iH]^{-1} \neq yx_3^iH$。因此， yx_3H 不含对合。

因此， H_1 在 S_n中不是完美的。 □

注意，上述定理启发我们构造一个新的高阶码，它在某些限制下在 S_n 中不是完美的。下面的推论反映了我们的动机。

推论 7.1. 设 $\langle x_1、\ x_2\rangle$ 是阶为 2^{l+1}的非交换子群，使得 $y^2 = x_1^{-1}$且 $o\ (x_1) \ = 2^l$、$o\ (x_2) \ = 2$ 对某些 $y \in S_n$、 $l \in \mathbb{N}$成立。假设对某个奇整数 k 有 $x_2y^{-1} = y^{-k}x_2$，使得 $k \not\equiv -1$ （模 2^{l+1}）。若对 i、 $j \in \{3, 4, \ldots, m\}$有 $x_iy = yx_i$、 $x_2x_i = x_ix_2$ 且 $x_ix_j = x_jx_i$，则$\langle x_1、\ x_2、\ \ldots x_m\rangle$ 在 S_n中不是完美的。

为便于理解 S_n中非阿贝尔码的结构，我们先建立以下引理。

引理 4.1. 设 $k, l \in \mathbb{N}$ 满足 $k < 2^l$ 和 $l \geq 2.$。若 k 为奇数，则不存在 $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 使得 $k^i \equiv -1$ (模 2^{l+1})。

Proof 我们将分两种情形证明此引理。

情形 I: 当 $l = 2.$ 时，则 $k = 1$ 或 3. 现在，对于偶数 $n \in \mathbb{N}$，有 $3^n \equiv 1$ (模 8)；对于奇数 $n \in \mathbb{N}.$，有 $3^n \equiv 3$ (模 8)。

情形 II: 当 $l \geq 3.$时，我们先证明对于 $n \geq 3$， $U_{2^n} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^{n-2}}.$。设 a 在 U_{2^n}中的阶记为 $o(a)$。我们断言，对于 $n \geq 3$， $o(5) = 2^{n-2}$属于 U_{2^n}。为证明这一点，我们使用归纳法。对于 $n = 3$，有 $U_{2^3} = \{1, 3, 5, 7\}$。现在， $5^2 \equiv 1$(模 2^3)。因此， $o(5) = 2^{3-2}.$。设 $o(5) = 2^{m-2}$ 属于 U_{2^m}。则对于某个奇数 $t \in \mathbb{N}.$，有 $5^{2^{m-2}} = t2^m + 1$。现在，

$$\begin{aligned} 5^{2^{m-1}} - 1 = (5^{2^{m-2}})^2 - 1 &= (t2^m + 1)^2 - 1 \\ &= 2(t^2 2^{2m-1} + t2^m) \\ &= 2^{m+1}(t^2 2^{m-1} + t). \end{aligned}$$

这意味着 $5^{2^{m-1}} \equiv 1$ （模 2^{m+1}）。由于 t是奇数，因此， $o(5) = 2^{m-1}$属于 $U_{2^{m+1}}.$。于是，根据数学归纳法， $o(5) = 2^{n-2}$属于 U_n，对 $n \geq 3.$均成立。现在，$2^n - 1 \equiv -1$ （模 2^n）在 U_{2^n}中的阶为 2，且 $o(U_{2^n}) = 2^{n-1}$。显然，5 和 -5是U_{2^n}中的不同元素。由于 $o(5) = 2^{n-2}$，因此，U_{2^n}中的每个元素都可以表示为 $(-1)^a 5^b$的形式，其中 $a \in \{0, 1\}$， $b \in \{0, 1, \ldots, 2^{n-2} - 1\}$。断言这种表示是唯一的。假设存在 $a' \in \{0, 1\}$ 和 $b' \in \{0, 1, \ldots, 2^{n-2} - 1\}$，满足 $a \neq a'$ 和 $b \neq b'$，使得 $(-1)^{a'} 5^{b'} = (-1)^a 5^b$。这意味着 $(-1)^{a'-a} 5^{b'-b} = 1$。因此。

12 交错群 S_n 的凯莱图中的子群完美码

$a-a'=0$和 $b'-b=t'2^{n-2}$，其中某个 $t'\in\mathbb{Z}$满足 $o(-1)=2$和 $o(5)=2^{n-2}$属于 U_n。由于 b，$b'\in\{0,1,\ldots,2^{n-2}-1\}$，因此我们得到 $t=0$.。因此， $b=b'$.。定义一个同态 ϕ: $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{2^{n-2}}\longrightarrow U_{2^n}$，其定义为 $\phi(a,b)=(-1)^a5^b$.。由上可知， ϕ 是一个同构。于是 $(1,0)\mapsto(-1)$。假设存在 $t_1\in\mathbb{N}$，使得 $k^{t_1}\equiv-1\,(\mathrm{mod}\ 2^{l+1})$，并且 $k<2^l$，其中 k为奇自然数。这意味着 $(-1)^1k^{t_1}\equiv1\,(\mathrm{mod}\ 2^{l+1})$。取群 $G=U_{2^{l+1}}$，其中 $l\geq3$。那么 $U_{2^{l+1}}\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{2^{l-1}}$.。现在， $\phi(a,b)=(-1)^a5^b$.。于是 $\phi(1,0)=-1$.。现在， $k^{t_1}\equiv-1\,(\mathrm{mod}\ 2^{l+1})$。于是存在 $(a,b)\in\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{2^{n-1}}$，使得 $\phi^{-1}(k)=(a,b)$。于是 $k^{t_1}=[\phi(a,b)]^{t_1}$.。这意味着 $k^{t_1}=\phi(t_1a,t_1b)$。因此， $\phi(t_1a,t_1b)=-1$.。由于 ϕ 是一个同构，因此 $t_1a=1$属于 $\mathbb{Z}_2$，且 $t_1b=0$属于 $\mathbb{Z}_{2^{n-1}}$.。这意味着 $a=1$且 $t_1=1$属于 $\mathbb{Z}_2$。因此， $b=0$属于 $\mathbb{Z}_{2^{n-1}}$.。于是，$k\equiv-1\,(\mathrm{mod}\ 2^{l+1})$，等价地，$k=2^{l+1}-1$属于 $U_{2^{l+1}}$。定义集合 $M=\{x\in\mathbb{N}:x<2^l\}$。那么 $[k]=[2^{l+1}-1]\cap M=\emptyset$，其中 $[k]$表示除以 2^{l+1}所得的余数集合。这与 t_1、 k的存在相矛盾，所需结果得证。□

定理 8 *Let* $\langle x_1\ x_2\rangle$ *be a non-commutative subgroup of order* 2^{l+1} *such that*，($o=2^l$ $o=2$ x_1)，(x_2)，*and* $y^2=x_1^{-1}$ *for some* $y\in S_n$，$l\in\mathbb{N}$. *Let* $x_2x_3^{-1}=x_3^{-s}x_2$，$x_2y^{-1}=y^{-k}x_2$ *and* $x_3y^{-1}=y^{-k}x_3$ *for some* s $k\in\mathbb{N}$. *Then* $\langle x_1\ x_2\ x_3\rangle/\langle x_1\ x_2\rangle$，，，„，*is cyclic.*

Proof 设 $H=\langle x_1,\ x_2\rangle$, $H_1=\langle x_1,\ x_2,\ x_3\rangle$, $[H_1:H]=t$，且 $o(x_3)=t_1$。已知 $x_2x_3^{-1}=x_3^{-s}x_2$，因此，

$$x_2x_3^{-i}=x_3^{-is}x_2. \tag{3}$$

将 $i=t_1-1$ 代入方程（3），得到 $x_2x_3=x_3^sx_2$。我们有 $x_2y^{-1}=y^{-k}x_2$ 以及 $y^2=x_1^{-1}$。因此

$$x_2x_1=(x_2y^{-1})y^{-1}=y^{-2k}x_2=x_1^kx_2 \tag{4}$$

and

$$x_2y^{-i}=y^{-ik}x_2. \tag{5}$$

现在， $x_3^2y^{-1}=x_3(x_3y^{-1})=x_3(y^{-k}x_3)=(x_3y^{-1})(y^{-(k-1)}x_3)=y^{-k}($ $x_3y^{-1})y^{-(k-2)}x_3=y^{-2k}(x_3y^{-1})y^{-(k-3)}x_3=y^{-3k}(x_3y^{-(k-3)})x_3^2$. 继续这一过程，我们得到 $x_3^2y^{-1}=y^{-k\cdot k}x_3=y^{-k^2}x_3^2$. 因此，对于 $i\in\mathbb{N}$，

$$x_3^{-i}y^{-1}=x_3^{t_1-i}y^{-1}=y^{-k^{t_1-i}}x_3^{-i}. \tag{6}$$

同样地，由方程（4），我们得到

$$x_2x_1^i=x_1^{ik}x_2 \tag{7}$$

and

$$x_3^jx_1^i=x_1^{ik^j}x_3^j. \tag{8}$$

因此，对于 i，$j\in\mathbb{N}$，

$$x_1^{-i}x_3^{-j}=x_3^{-j}x_1^{-ik^j},\ \text{i.e.,}\ x_1^{2^l-i}x_3^{t_1-j}=x_3^{t_1-j}x_1^{2^l-ik^j}. \tag{9}$$

将 $i=2^l-1,j=t_1-1$ 代入方程 (9)，得到 $x_1x_3=x_3x_1^{k^{t_1-1}}$。这意味着 $x_1^ix_3=x_3x_1^{ik^{t_1-1}}$。现在， $x_1x_3^2=(x_3x^{(k^{t_1-1}-1}{}_1)(x_3x_1^{k^{t_1-1}})=$

$(x_3x^{(k^{t_1-1}-2)}{}_1)(x_1x_3)x_1^{k^{t_1-1}} = (x_3x^{(k^{t_1-1}-2)}{}_1)(x_3x_1^{2k^{t_1-1}})$. 继续这一过程，得到 $x_1x_3^2 = x_3^2x_1^{2(t_1-1)}$。因此，$x_1x_3^i = x_3^ix_1^{i(t_1-1)}$。于是，$x_1^ix_3^j = x_3^jx_1^{ik^{j(t_1-1)}}$ 当 $i,j \in \mathbb{N}$. 由于 $x_2x_3 = x_3^{-s}x_2$ 且 $x_1x_3 = x_3x_1^{k^{t_1-1}}$，因此，$x_1x_2x_3^iH = x_3^jH$对某个 $i,j \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. 类似地，$x_1^ix_2x_3^jH = x_3^kH$对某个 $i,j,k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. 因此 $\langle x_1, x_2, x_3\rangle/\langle x_1, x_2\rangle$ 是一个循环群。□

定理

9 *Let* $\langle x_1\ x_2\rangle$ *be a non-commutative subgroup of order* 2^{l+1} *such that* ,() , $y^2 = x_1^{-1}$ *and* $o\ x_1\ = 2^l\ \ o\ x_2\ = 2$ *for some* $y \in S_n\ \ l \in \mathbb{N}$. *Let* $x_2x_3^{-1} = x_3^{-s}x_2$ () ,,$x_2y^{-1} = y^{-k}x_2$ *and* $x_3y^{-1} = y^{-k}x_3$ *for some* $s\ \ k \in \mathbb{N}$. *If* k *is odd and* $k < 2^l$ *then* ,,,, $\langle x_1\ x_2\ x_3\rangle$ *is not perfect in* S_n.

Proof 设 $H = \langle x_1, x_2\rangle$, $H_1 = \langle x_1, x_2, x_3\rangle$, $[H_1 :\ H] = t$，且 $o(x_3)\ = t_1$。由定理8 可知

$$H_1 = H \bigsqcup_{i=1}^{t-1} x_3^iH. \tag{10}$$

Now,

$$\begin{aligned}
[yx_3^i\langle x_1\rangle]^{-1} &= \{yx_3^ix_1^j : j = 0,1,\ldots,2^l-1\}^{-1}\\
&= \{x_1^{-j}x_3^{-i}y^{-1} : j = 0,1,\ldots,2^l-1\}\\
&= \{x_3^{-i}x_1^{-jk^i}y^{-1} : j = 0,1,\ldots,2^l-1\} && \text{(from (9))}\\
&= \{x_3^{-i}y^{-1}x_1^{-jk^i} : j = 0,1,\ldots,2^l-1\} && \text{(as } x_1y = yx_1\text{)}\\
&= \{y^{-k^{(t_1-i)}}x_3^{-i}x_1^{-jk^i} : j = 0,1,\ldots,2^l-1\} && \text{(from (6))}\\
&= \{yy^{-(k^{(t_1-i)}+1)}x_3^{-i}x_1^{-jk^i} : j = 0,1,\ldots,2^l-1\},
\end{aligned}$$

并且这些结论对 $1 \le i \le t-1.$ k $m'\ r'\ n'$ 成立。由于 为奇数，$\mathbb{N}\cup\{0\}$ $k^{t_1-i}+1 = 2m'$ $m' = n'2^l + r'$ $0 \le r' < 2^l$
因此存在 、 、使得 且满足 。于是

$$\begin{aligned}
[yx_3^i\langle x_1\rangle]^{-1} &= \{yy^{-2m'}x_3^{-i}x_1^{-jk^i} : j = 0,1,\ldots,2^l-1\}.\\
&= \{yx_1^{m'}x_3^{-i}x_1^{-jk^i} : j = 0,1,\ldots,2^l-1\}\\
&= \{yx_1^{r'}x_3^{-i}x_1^{-jk^i} : j = 0,1,\ldots,2^l-1\}\\
&= \{yx_1^{2^l-(2^l-r')}x_3^{-i}x_1^{-jk^i} : j = 0,1,\ldots,2^l-1\}\\
&= \{yx_3^{-i}x_1^{2^l-(2^l-r')k^i}x_1^{-jk^i} : j = 0,1,\ldots,2^l-1\} && \text{(from (9))}\\
&= \{yx_3^{-i}x_1^{(r'-j)k^i} : j = 0,1,\ldots,2^l-1\}\\
&= yx_3^{-i}\langle x_1\rangle.
\end{aligned}$$

Now,

$$\begin{aligned}
[yx_3^ix_2\langle x_1\rangle]^{-1} &= \{yx_3^ix_2x_1^j : j = 0,1,\ldots,2^l-1\}^{-1}\\
&= \{x_1^{-j}x_2x_3^{-i}y^{-1} : j = 0,1,\ldots,2^l-1\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{x_1^{-j}x_2y^{-k^{(t_1-i)}}x_3^{-i} : j = 0, 1, \ldots, 2^l - 1\} && \text{(from (6))}\\
&= \{x_2x_1^{-jk}y^{-k^{(t_1-i)}}x_3^{-i} : j = 0, 1, \ldots, 2^l - 1\} && \text{(with the help of (4))}\\
&= \{x_2y^{2jk-(k^{(t_1-i)})}x_3^{-i}\colon\ \ j = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2^l - 1\} && \text{(as } y^2 = x_1^{-1}\text{)}\\
&= \{x_2y^ky^{2jk-(k^{(t_1-i)}-k)}x_3^{-i}\colon\ \ j = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2^l - 1\}
\end{aligned}
$$

且这些对 $1 \le i \le t-1$. 成立。由于 k 为奇数，因此存在 $m_j \in \mathbb{Z}$，使得 $2jk - k^{(t_1-i)} - k = -2m_j$。

情形 A： 当 $m_j \le 0$ 时。于是

$$
\begin{aligned}
[yx_3^ix_2\langle x_1\rangle]^{-1} &= \{yx_2x_1^{m_j}x_3^{-i} : j = 0, 1, \ldots, 2^l - 1\} && \text{(by the given condition)}\\
&= \{yx_2x_1^{-|m_j|}x_3^{-i} : j = 0, 1, \ldots, 2^l - 1\}\\
&= \{yx_2x_3^{-i}x_1^{-|m_j|k^i} : j = 0, 1, \ldots, 2^l - 1\} && \text{(from (9))}\\
&= \{yx_3^{-is}x_2x_1^{m_jk^i} : j = 0, 1, \ldots, 2^l - 1\} && \text{(from (3))}\\
&= yx_3^{-is}x_2\langle x_1\rangle.
\end{aligned}
$$

情形 B： 当 $m_j > 0$ 时。于是存在 $^nj,\ r_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，使得 $m_j = n_j2^l + r_j$且 $0 \le r_j < 2^l$。因此，

$$
\begin{aligned}
[yx_3^ix_2\langle x_1\rangle]^{-1} &= \{yx_2x_1^{r_j}x_3^{(t_1-i)} : j = 0, 1, \ldots, 2^l - 1\}\\
&= \{yx_2x_1^{2^l-(2^l-r_j)}x_3^{(t_1-i)} : j = 0, 1, \ldots, 2^l - 1\}\\
&= \{yx_2x_3^{t_1-i}x_1^{2^l-(2^l-r_j)k^i} : j = 0, 1, \ldots, 2^l - 1\} && \text{(from (9))}\\
&= \{yx_3^{-is}x_2x_1^{r_jk^i} : j = 0, 1, \ldots, 2^l - 1\} && \text{(from (3))}\\
&= yx_3^{-is}x_2\langle x_1\rangle.
\end{aligned}
$$

上述论证和定理 7 证明了 yH_1 是逆封闭的。我们考虑以下四种情形，以证明 yH_1 不含对合。

情形 I: 当 $x_3^i = x_3^{-i}$对某个 $i \in \{1, 2, \ldots, t-1\}$. 成立时，则 $[yx_3^i\langle x_1\rangle]^{-1} = yx_3^i\langle x_1\rangle$.。假设 $yx_3^i\langle x_1\rangle$ 含有一个对合。那么存在 $k_1 \in \{0, 1, \ldots, 2^l - 1\}$使得 $yx_3^ix_1^{k_1} = (yx_3^ix_1^{k_1})^{-1}$. 。这意味着 $yx_3^ix_1^{k_1} = x_1^{-k_1}x_3^{-i}y^{-1}$. 。由方程 (6) 和 (9) 可得 $yx_1^{k^ik_1}x_3^i = x_1^{-k_1}y^{-k^{t_1-i}}x_3^{-i}$. 。因此，$y^{1-2k_1k^i} = y^{2k_1-k^{t_1-i}}$.。所以，$y^{1-2k_1k^i-2k_1+k^i} = 1$.。这意味着 $(2k_1-1)(k^i+1) = s'2^{l+1}$，其中某个 $s' \in \mathbb{Z}$.。那么 $k^i \equiv -1 \pmod{2^{l+1}}$。由于 $k < 2^l$ 且 k 为奇数，根据引理 4.1，我们由此得到矛盾。

情形 II： 当 $x_3^i \ne x_3^{-i}$ 对于 $i \in \{1, 2, \ldots, t-1\}$. 时，则 $[yx_3^i\langle x_1\rangle]$ 不包含对合。

情形 III： 当对于某个 $i \in \{1, 2, \ldots, t-1\}$ 有 $x_3^i = x_3^{-is}$ 时。假设 $[yx_3^i x_2\langle x_1\rangle]$ 包含一个对合。则存在 $m \in \{0, 1, \ldots, 2^l - 1\}$ 使得

$$\begin{aligned}
& yx_3^i x_2 x_1^m = (yx_3^i x_2 x_1^m)^{-1} \\
\iff\ & yx_3^i x_2 x_1^m = x_2 x_1^{-mk} x_3^{-i} y^{-1} && \text{（来自（7））} \\
\iff\ & yx_2 x_3^{is} x_1^m = x_2 x_1^{-mk} y^{-k^{t_1-i}} x_3^{-i} && \text{(from (3), (6))} \\
\iff\ & x_2 y^k x_3^{is} x_1^m = x_2 x_1^{-mk} y^{-k^{t_1-i}} x_3^{-i} && \text{（来自（5））} \\
\iff\ & y^k x_3^{-i} x_1^m = x_1^{-mk} y^{-k^{t_1-i}} x_3^{-i} && \text{（如 } x_3^{is} = x_3^{-i}\text{）} \\
\iff\ & y^k x_3^{t_1-i} x_1^m = x_1^{-mk} y^{-k^{t_1-i}} x_3^{-i} \\
\iff\ & y^k x_1^{mk^{t_1-i}} x_3^{-i} = x_1^{-mk} y^{-k^{t_1-i}} x_3^{-i} && \text{(from (8))} \\
\iff\ & y^{k-2mk^{t_1-i}} = y^{2mk-k^{t_1-i}}.
\end{aligned}$$

这表明，$k - 2mk^{t_1-i} - 2mk + k^{t_1-i} \equiv 0$（模 2^{l+1}）。由此可得（$2m-1$）（$1 + k^{t_1-i-i-1}$）$\equiv 0$（模 2^{l+1}），因为 k 为奇数。因此，（$k^{t_1-i-1} + 1$）$\equiv 0$（模 2^{l+1}），这与引理 4.1 矛盾。

情形 IV： 当

$$x_3^i \neq x_3^{-is} \qquad i \in \{1, 2, \ldots, t-1\}. \qquad [yx_3^i x_2\langle x_1\rangle]^{-1} \neq \text{对某}$$

$yx_3^i x_2\langle x_1\rangle$ $yx_3^i x_2\langle x_1\rangle$
个 则。因此，不含对合。故由方程（10）可知 yH_1 是逆封闭的且不含对合。□

*Example 3*设 $G = S_{11}$，$K = \langle(4\,8)(5\,6),\ (3\,7)(4\,8),\ (1\,8\,2\,4)(3\,5\,7\,6),\ (9\,10\,11)\rangle$，$H = \langle 4\ \ 8\ \ 5\ \ 6, 3\ \ 7\ \ 4\ \ 8, 1\ \ 8\ \ 2\ \ 4\ 3\ \ 5\ \ 7\ \ 6\rangle$ $H_1 = ()()()()$ $\langle 3\ 7\ \ 4\ 8, 1\ 8\ 2\ 4\ \ 3\ 5\ 7\ 6\rangle$ H 2 K H_1
$()()$ 与 $()()()()$。则 是 的一个 Sylow - 子群，并设 是一个 2- 子群，所属对象为 G。由定理 9 可知 H 在下列对象中不是完美的：G。又由定理 7，H_1 在下列对象中不是完美的：G。因此，K 在下列对象中不是完美的：G，依据引理 2.10。

那么，定理 9结合推论 7.1 可推出以下结论 .

推论 9.1。 设 $\langle x_1, x_2\rangle$ 是一个阶为 2^{l+1} 的非交换子群，使得 $y^2 = x_1^{-1}$ 且 $o(x_1) = 2^l$，$o(x_2) = 2$，其中 $y \in S_n$，$l \in \mathbb{N}$。设$x_i x_j^{-1} x_i \in \langle x_j\rangle$ 和 $x_i y^{-1} = y^{-k} x_i$ 为某些 $m, k \in \mathbb{N}$，且对于 $i, j \in \{2, 3, \ldots, m\}$。如果 k 是奇整数且 $k < 2^l$，那么 $\langle x_1, x_2, \ldots, x_m\rangle$ 在 S_n 中不是完美的。

5 结论

本研究全面分类了 S_n 中的循环 2-子群完美码。通过详细分析，我们阐明了这些子群码的结构和性质。此外，我们的研究结果还适用于对称群 S_n 中范围更广的子群码，涵盖交换和非交换两种情形。此外，这些结果

如果我们对该群的平方元素进行分类，就有助于研究任意有限群中的子群完美码。

作者贡献Ankan Shaw：概念构思、资源提供、研究、撰写初稿。Shibesh Kotal：研究、计算、撰写。Satya Bagchi：指导、审阅与编辑。

资金支持 论文第一作者谨向 CSIR-HRDG（印度）致谢，感谢其为开展本研究提供资金支持。本研究还得到印度政府科学与工程研究委员会（SERB）的资助（资助编号：MTR/2021/000611）。

声明

伦理审批 本文不涉及人体受试者，因此无需知情同意。

发表许可 本文所有作者均完全同意发表所提交的稿件。

Co利益冲突 作者声明不存在利益冲突 t.

参考文献

[1] Biggs N.L.，《图中的完美码》。组合理论杂志B辑**15**，289–296（1973年）。[2]Brouwer A.E.、Cohen A.M.、Neumaier A.，《距离正则图》。Springer，柏林（1989年）[3] Chen J.、Wang Y.、Xia B.，《凯莱图中子群完美码的刻画》。离散数学**343**，111813（2020年）。[4] Chihara L.，《关于Askey–Wilson多项式的零点及其在编码理论中的应用》。SIAM数学分析杂志**18(1)**，191–207（1987年）。[5] Dejter I.J.、Serra O.，《凯莱图中的高效支配集》。离散应用数学**129**，319–328（2003年）。[6] Feng R.、Huang H.、Zhou S.，《循环图中的完美码》。离散数学**340**，1522–1527（2017年）。[7] Golomb S.W.、Welch L.R.，《Lee 度量中的完美码与多联骨牌的铺砌》。SIAM应用数学杂志**18**，302–317（1970年）。[8] Hammond P.、Smith D.H.，《图中的完美码》 O_k。组合理论杂志B辑**19**，239–255（1975年）。

[9] HorakP., Kim D., Golomb–Welch猜想五十周年。IEEE信息论汇刊 64, 3048–3061 (2018年)。[10] Huang H., Xia B., Zhou S., 凯莱图中的完美码。SIAM离散数学杂志 32, 548–559 (2018年)。[11] Krotov D.S., Doob图中完美码的存在性。IEEE信息论汇刊 66(3), 1423–1427(2020年)。[12] Lee J., 凯莱图中的独立完美控制集。图论杂志 37, 213–219 (2001)。[13] Lloyd S.P., 二元分组编码。贝尔系统技术杂志 36, 517–535 (1957)。[14] Ma X., Walls G.L., Wang K., Zhou S., 凯莱图中的子群完美码。SIAM离散数学杂志 34, 1909–1921 (2020年)。[15] MacWilliams F.J., Sloane N.J.A., 纠错码理论。North-Holland, 阿姆斯特丹 (1977年)。[16] Martin W.J., Zhu X.J., Grassman图和双线性型图的反码。设计、编码与密码学 6(1), 73–79 (1995)。[17] Shi M., Huang D., Krotov D.S., Doob图中的加性完美码。设计、编码与密码学 87(8), 1857–1869 (2019年)。[18] Thas J.A., 极空间、广义六边形与完美码。组合理论杂志A辑 29, 87–93(1980)。[19] Tiet¨av¨ainen A., 关于有限域上完美码不存在性的研究。SIAM应用数学杂志 24, 88–96(1973年)。[20] Van Lint J. H., 完美纠错码不存在性定理。载于：代数与数论中的计算机, 第IV卷，SIAM-AMS会议论文集 (1971)。[21] Van Lint J.H., 完美码综述。落基山数学杂志 5, 199–224 (1975年)。[22] Zhang J., Zhou S., 关于凯莱图中的子群完美码。欧洲组合学杂志 91, 103228 (2021年)。[23] Zhang J., Zhou S., 《关于凯莱图中的子群完美码》的勘误。 [欧洲组合学杂志 91, 103228 (2022年)]。欧洲组合学杂志 101, 103461 (2022年)。[24]Zhang J., 通过2-子群刻画子群完美码。设计、编码与密码学 91,) 2811–2819 (2023年)。

[25] Zhou S.，《分圆图与完美码》。《纯粹与应用代数杂志》**223**，931–947（2019年）。

[26]Zinoviev V.A.、Leontiev V.K.，《伽罗瓦域上完美码的不存在性》。Probl. Control Inf. Theory **2**，123–132（1973年）。