基于超结构与分而治之的横截面数据因果发现*

1st Wenyu Wang计算机科学学院 南华大学衡阳，中国
2
0232008110502@stu.usc.edu.cn

2nd YapingWan计算机科学学院 南华大学衡阳，中国
ypwan@usc.edu.cn

arXiv:2602.03914v1 [cs.LG] 3 Feb 2026

摘要—**本文针对基于超结构的分治因果发现中的一个关键瓶颈展开研究：准确超结构构建的高计算成本，尤其是在条件独立性检验开销高且缺乏领域知识的情况下。我们提出了一种新颖、轻量级的框架，在保留分而治之算法优势的同时，放宽对超结构构建的严格要求。通过将弱约束超结构与高效的图划分和合并策略相结合，我们的方法在不牺牲准确率的情况下，大幅降低了条件独立性检验开销。我们将该框架具体应用于一种因果发现算法，并在合成数据上对其各个组成部分进行了严格评估。针对高斯贝叶斯网络（包括 MAGIC-NIAB、ECOLI70 和 MAGIC-IRRI）的综合实验表明，我们的方法在结构准确性方面达到或接近 PC 算法和 FCI 的水平，同时大幅减少了条件独立性检验的数量。在真实世界的中国健康与养老追踪调查（CHARLS）数据集上进行的进一步验证，也证实了其实际适用性。我们的研究结果表明，即使对初始超结构仅作最少假设，也能够实现准确且可扩展的因果发现，为将分而治之方法应用于生物医学和社会科学研究等大规模、知识稀缺领域开辟了新途径。**

索引词—**贝叶斯网络，计算复杂度，降维**

一、引言

因果发现旨在从观测数据中恢复有向无环图（DAG），从而支持机制解释和后续推理。然而在实践中，大规模学习因果结构仍面临挑战。主流范式包括基于约束的方法 [1]、基于评分的搜索 [2],以及混合方法 [3]。随着变量数量增加，这些方法往往受制于条件独立（CI）检验，或对候选图进行组合搜索，导致计算开销大幅增加，可靠性也随之下降 [4]。

为提升可扩展性，分而治之策略日益受到青睐：首先将变量划分为较小的子集，学习局部子图，然后将其合并为全局结构。一种具有代表性的思路是引入超结构，以约束候选边并指导图划分 [5]。然而，现有基于超结构的流程通常要求超结构包含（或近似于）真实骨架，这隐含地要求具有较高的召回率。若没有领域知识，构建这样一个高召回率的支架代价高昂，因为这仍需要进行大量条件独立性检验或繁重的预处理，而且构建成本可能抵消后续带来的收益。

本文通过放宽对超结构的约束，提出一种轻量级替代方案。我们不再要求真实骨架完全包含在超结构中，而只要求超结构是真实骨架的子图。这使设计目标从高召回率转向高精确率：超结构可以遗漏一些边，但其中包含的边可靠，因此可安全地用于划分。从概念上说，这类似于一种已在其他大规模学习系统中证明有效的原则：注入少量可靠结构，便能大幅降低搜索复杂度，同时保持整体质量。例如，在可控扩散和条件生成中，显式施加可靠约束（如数量和布局一致）可以稳定优化过程，并减少复杂编辑任务中的歧义 [6]。类似地，按属性或模块进行条件控制，可将假设空间限制在信息量最大的因素上，从而提升可控性和效率 [7], [8]。渐进式条件控制和统一的姿态引导形式进一步表明，结构化的中间表示有助于提升系统在严峻变化下的鲁棒性 [9], [10]。研究还表明，丰富上下文条件控制通过提供更可靠的上下文支架，可以减少序列生成中的长程不一致 [11],；而运动先验则可通过约束动态过程，稳定长时域的时间连贯性 [12]。受这些成果启发，我们将同样的结构视角应用于因果发现：一个弱但可靠的图支架，无需昂贵的高召回率预估步骤，便能实现高效分解。

我们通过一个具体算法实例化了所提出的框架，并在合成基准和真实世界数据集上进行了验证，包括大规模生物医学数据和社会科学数据。实验表明，我们的方法在保持竞争力的结构准确性的同时，大幅减少了条件独立性检验的数量，说明约束较弱的超结构能够在保真度损失极小的情况下带来显著的计算节省。

我们的贡献如下：

- 我们提出一种因果划分框架，将弱约束超结构与分而治之因果发现相结合，从而借助低成本骨架实现高效降维。
- 我们给出一种将该框架付诸实现的算法方案，并在高维场景中带来切实的效率提升。
- 我们在合成数据集和真实数据集上提供了实证证据，表明条件独立性检验次数大幅减少，而准确率仅有极小下降。

II. 相关工作

几乎所有因果发现算法都通过在有向无环图（DAG）的结构化假设空间中搜索来运作。分而治之方法将变量集划分为若干子集，在每个子集上执行局部因果发现，然后合并结果以重建完整因果图，从而加速这一搜索。基于分而治之方法的因果发现方法可分为三类：

1）基于条件独立性检验的递归方法：Cai 等人 [13]提出了 SADA，这是一种递归算法，在每一步使用多次低阶条件独立性检验或一次高阶条件独立性检验来推断分解结构并导出变量子集。然而，所得子集规模不受控制，必须加以枚举才能满足目标约束。Zhang [14]提出了 CAPA，这是另一种递归方法，每次递归仅使用低阶条件独立性检验将变量划分为两个子集，并结合一种专为线性非高斯加性噪声模型设计的基于回归的条件独立性检验，以保持 d-分离 [15]。

2）基于聚类的方法：该方法通过层次聚类将变量（视为节点）划分为多个簇，并在连续数据上进行了验证。Huang 和 Zhou 将此方法扩展为 pHGS [16], ，使其能够将 PEF 用于离散数据。Chen 等人 [17] 提出了 CDSC，利用谱聚类在高维场景中进行降维；Wei 等人 [18] 则开发了 CDKM，这是一种基于 K 均值的方法，使用最小相关距离进行变量聚类。

3）基于超结构的方法：借助超结构，因果划分问题可以自然地转化为图划分问题。Zhang [19] 提出了 CPA，将因果划分重新表述为在邻接图上进行边切割，从而稳定地将变量划分为两个子集。
在同一基础上，Shah等人 [5] 提出了扩展性因果划分框架，该框架统一了多种图划分策略，以实现灵活且可扩展的因果分解。

Perrier [20]提出了超结构——一种通过低阶条件独立性检验和/或领域知识构建的因果搜索框架，旨在降低计算复杂度。虽然也可以通过条件独立性检验或基于约束的方法推导超结构，但这些替代方法在高维场景中会带来大量开销。为此，我们提出了一种弱约束超结构，在放宽构建要求的同时，仍与超结构框架兼容。我们的方法支持多种构建策略，包括领域知识、相关性度量和基于评分的因果发现，详情见**第三节**。

III. 方法

遵循Perrier [20], 的做法，包含真实骨架的超结构被视为可靠；否则即为不完整。在本研究中，我们对弱约束超结构采用相反的约定：包含于真实骨架之内的超结构被标记为可靠，其余则为不完整。先前的方法需要高度可靠的超结构，以在各子图之间保持d-分离并尽量减少冗余的条件独立性检验——但其构建严重依赖领域知识。在缺乏此类先验的高维混合分布设置中，实现可靠性在计算上变得难以承受。为克服这一问题，我们采用一种轻量策略，有意使用不完整的弱约束超结构，从而避开构建完全可靠超结构的负担。该方法将问题重新表述为优化算法的初始搜索点：只要弱约束超结构比朴素起点（例如完全图）更接近真实图，就能有效降低计算开销。借助此类超结构，我们采用低成本的图划分将问题分解为更小的子图——从而大幅降低维度，避免代价高昂的高阶条件独立性检验，并缩小搜索空间。基于这一思路，我们提出一种分治因果发现框架；流程概览如图1所示。

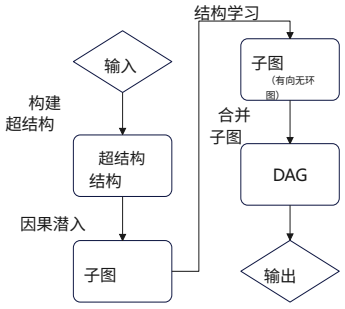


图1. 流程总览图。

在本节接下来的内容中，我们将展示如何基于所提出的框架构建因果发现算法。

A. 超结构构建模块

该模块以数据集为输入，并输出一个弱约束超结构。为了与 Perrier 的“可靠”超结构形成鲜明对比 [20]，我们采用 Chow–Liu 算法 [21], ，该算法基于依赖矩阵构建最大生成树（MST），从而得到对底层图的稀疏树结构近似。该过程包括：（i）构建成对依赖矩阵；（ii）计算其最大生成树。

我们用 Copula 熵 [22]（一种与模型无关的非参数依赖度量）取代原有的皮尔逊相关系数，以便更好地捕捉复杂的非高斯关系。形式上，对于具有边缘分布和 Copula 密度 $c(u)$ 的随机变量 X，Copula 熵无需依赖分布假设即可量化依赖关系，从而增强其在不同数据类型上的稳健性。X 的 Copula 熵为

$$H_c(X) = -\int_u c(u)\log c(u)\mathrm{d}u \tag{1}$$

B. 因果划分模块

该模块以超结构为输入，输出分割后的子图，具体流程如图 2 所示。这里我们使用 Girvan 方法 [23] 来实现图

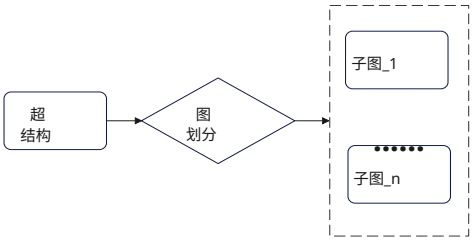


图 2. 因果划分模块。

划分，并使用因果扩展方法 [5] 处理划分后的子图。该模块通过超结构将节点划分为子图，从而降低维度和计算成本。然而，弱约束超结构可能会遗漏真实骨架，破坏子图之间的 d-分离，因此在合并过程中需要额外进行条件独立性检验，部分抵消了最初的计算收益。

C. 子图学习模块

该模块以上一阶段得到的子图为输入，并输出骨架图。它采用一种基本的两阶段搜索策略，以子图作为起点进行初始化：**(1) 前向阶段**，迭代测试所有尚未测试的非相邻节点对，并为表现出依赖关系的节点对添加边；**(2) 后向阶段**，重新评估所有相邻节点对，并删除被判定为条件独立的边。

D. 子图合并模块

本模块的输入是前一模块的学习结果，输出为合并后的有向无环图。本文中，本模块首先采用与子图学习模块相同的策略，遍历所有尚未检验的节点对并进行条件独立性检验，从而完成校正；随后使用 Shah 方法 [5] 实现合并。具体流程如下：

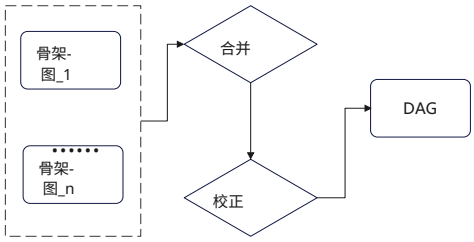


图 3. 子图合并模块。

IV. 实验

A. 评估指标

因果发现旨在恢复因果关系，其评估指标通常用于衡量推断所得因果结构的准确性。我们采用以下指标：结构汉明距离（SHD）、F1 分数、精确率、召回率、准确率和 CI检验次数——其中，CI检验次数指骨架学习过程中执行的唯一 CI 检验数量。在前文所述的三种条件下，重复的 CI 检验会被缓存，因此其时间开销可以忽略不计；由此，骨架学习成为基于约束的算法执行 CI 检验的主要阶段。鉴于本研究聚焦于骨架学习阶段，我们的实验也集中于这一方面。上述评估指标适用于骨架图，而非有向无环图。

B. 仿真实验

1) CD 模块消融实验：本实验评估因果划分（CD）模块对算法性能的影响。我们在合成数据上比较了一个部分变体（不进行子图划分）与完整算法的表现，并进一步评估使用基于不同依赖度量构建的权重矩阵所导出的最大生成树初始化超结构时的性能。合成数据集按照 Strobl 方法 [24] 生成：对于给定的节点数 p，我们构造一个期望入度为 $E(n) = 0.3795p$ 的随机有向无环图。具体而言，从 $Bernoulli(0.075p/(p-1))$ 中采样一个下三角邻接矩阵，然后随机置换以打破拓扑序。边权重从 $Uniform[0.5, 0.9]$ 中独立同分布地赋值，形成加权邻接矩阵，该矩阵定义线性高斯结构方程模型的系数。为单独考察 CD 模块的作用，我们生成了$p \in \{20, 22, \ldots, 40\}$ 的数据集，每个数据集包含 5,000 个样本并添加高斯噪声。条件独立性检验采用 Fisher Z 检验。对于每个 p，创建五个图实例；两种算法变体分别在每个实例上运行四次，并对各项指标取平均值。结果总结如下：

图 4~图 9：因果划分（CD）模块消融实验结果。横轴显示节点数，纵轴对应图例中所示的指标。绿色图例表示未使用 CD 模块的结果，蓝色图例表示使用 CD 模块的结果。

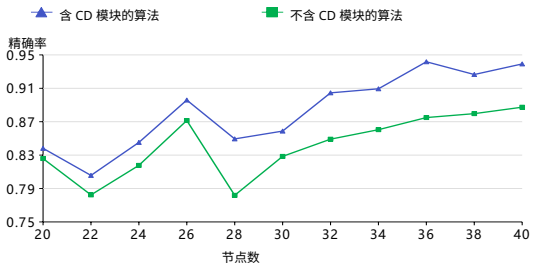


图4. 消融实验的精确率。

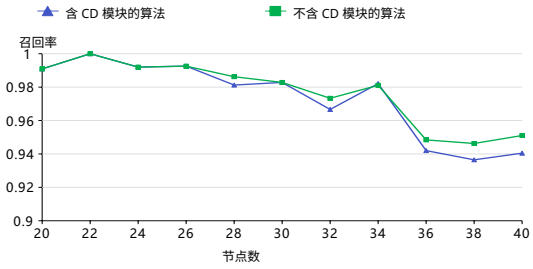


图5. 消融实验的召回率。

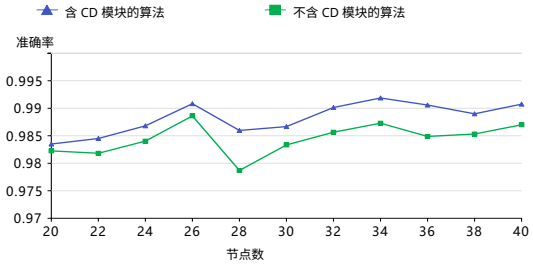


图6. 消融实验的准确率。

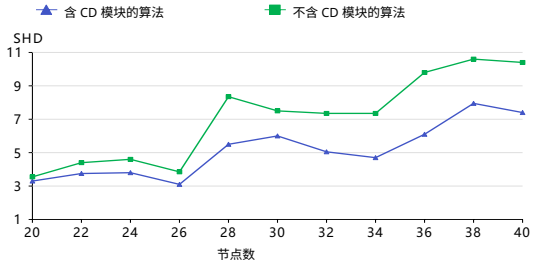


图7. 消融实验的结构汉明距离。

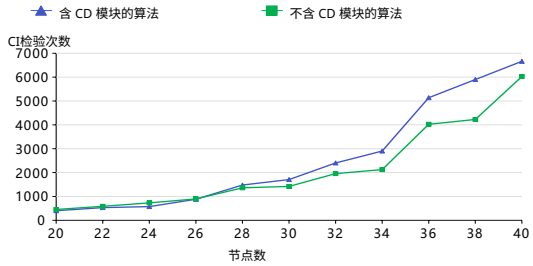


图8. 消融实验的CI检验次数。

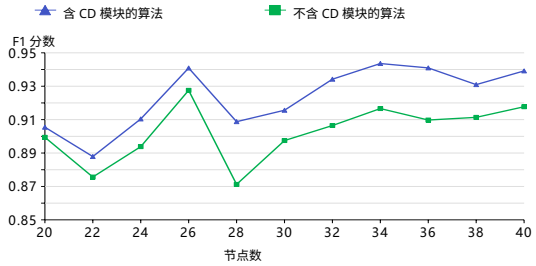


图9. 消融实验的F1分数。

实验结果表明，采用 CD 模块的算法在大多数指标上优于消融版本——仅表现出略高的CI检验次数和略低的召回率——在运行时间开销极小的情况下提升了准确率。随着图规模增大，这一增益更为显著，证实了在弱约束超结构框架下通过图划分降低因果子集维度能够有效提升准确率。CI检验次数的增加主要归因于d-分离违例，这需要进行额外的CI校正。鉴于当前超结构构建的保真度有限，对其进行改进以更好地逼近真实骨架，有望大幅降低这一计算开销。

2）相关性度量比较实验：本实验评估在构建弱约束超结构时，不同相关性度量对算法性能的影响。我们在高斯分布、指数分布、伽马分布和均匀分布四种噪声分布下生成了包含24个节点和5,000个样本的合成数据集，每种分布生成两个数据集。使用Petersen的非参数条件独立性检验 [25], ，我们比较了四种相关性度量：Copula熵、互信息、皮尔逊相关系数和斯皮尔曼相关系数。每个数据集运行两次，并对各次运行的结果取平均。研究结果总结如下：

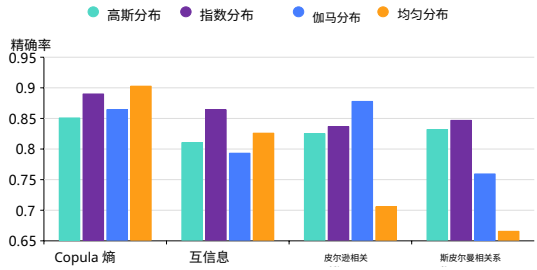


图10. 相关性度量比较实验的精确率。

图 10~图1：相关性度量有效性实验。横轴对应图例中标示的度量，纵轴从左到右分别表示相关性度量：Copula 熵、互信息、Pearson 系数和 Spearman系数。绿色、紫色、

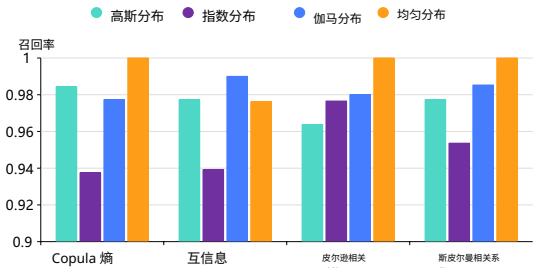


图11. 相关性度量比较实验的召回率。

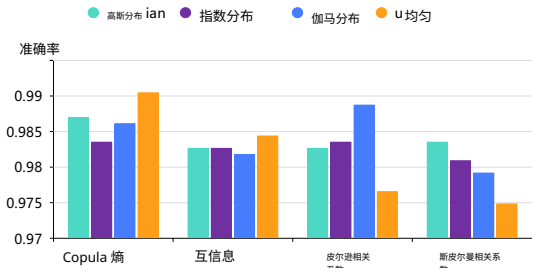


图12. 相关性度量比较实验的准确率。

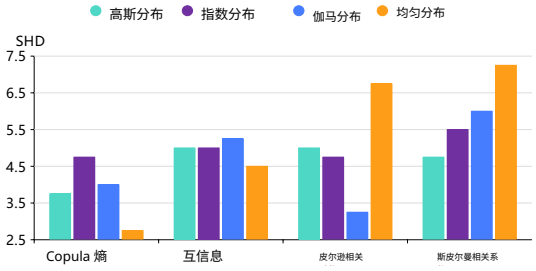


图13. 相关性度量比较实验的结构汉明距离。

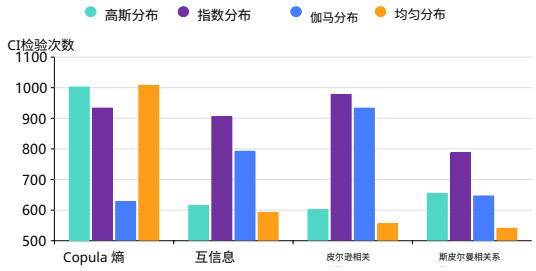


图14. 相关性度量比较实验的CI检验次数。

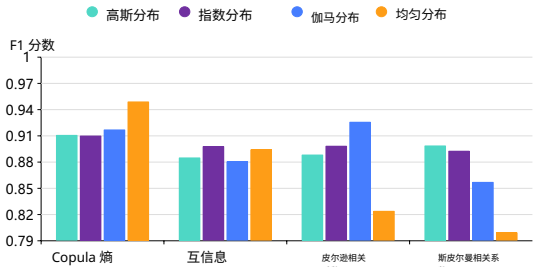


图15. 相关性度量比较实验的 F1 分数。

蓝色和橙色图例分别对应高斯分布、指数分布、伽马分布和均匀分布。

比较实验表明，在相关性度量中，**Copula 熵**能够构建最稳健的超结构，从而使我们的算法更好地处理具有异质噪声分布的数据集。除召回率和 CI检验总次数外，该方法在所有指标上均优于其他方法，证明其是此任务的最优选择。进一步实验表明，Copula 熵具有最高的跨分布鲁棒性，并能有效捕获混合分布数据中的主导依赖关系。

3）算法性能比较实验：我们使用高斯贝叶斯网络 MAGIC-NIAB [26],ECOLI70 [27], 和 MAGIC-IRRI [26] 进行采样并生成模拟数据，以测试我们算法的性能，参数如下所示。

表 I 贝叶斯网络的属性

贝叶斯网络	MAGIC-NIAB	ECOLI70	MAGIC-IRRI
节点数	44	46	64
弧数	66	70	102
平均马尔可夫毯	9.88	3.65	9.97
平均度	3	3.04	3.19
最大入度	9	4	11

使用 bnlearn R 包从 .rdn 文件中抽样高斯贝叶斯网络来生成数据。每个网络生成 10 个测试集，每个测试集包含 5,000 个样本；每个测试集均评估四次，并报告平均性能指标。条件独立性检验采用 Fisher Z 检验，且不使用先验知识。基线方法为 FCI 和 PC 算法；我们的方法记为 Ag。结果如下：

表 II MAGIC-NIAB 实验结果

算法	**Ag**	**FCI**	**PC**
准确率	0.9840	0.9846	0.9841
精确率	0.8108	0.8176	0.8124
召回率	1.0000	1.0000	1.0000
F1 分数	0.8952	0.8992	0.8961
SHD	15.5	14.9	15.4
CI检验次数	16366.4	94287.3	18893.8

表 III ECOLI70 的实验结果

算法	**Ag**	**FCI**	**PC**
准确率	0.9856	0.9863	0.9861
精确率	0.8672	0.8841	0.8803
召回率	0.9396	0.9314	0.9350
F1 分数	0.8979	0.9018	0.9016
SHD	14.5	13.9	14.0
CI检验次数	11633.0	77255.9	27422.5

实验结果表明，除最大的网络（MAGIC-IRRI）外，我们的方法准确率与基线相当——精确率和 F1 值略低，且

表 IV MAGIC-IRRI 的实验结果

算法	Ag	FCI	PC
准确率	0.9856	0.9860	0.9858
精确率	0.8429	0.8544	0.8501
召回率	0.9475	0.9406	0.9429
F1 分数	0.8888	0.8908	0.8897
SHD	19.5	19.1	19.4
CI检验次数	17303.4	199399.2	31921.0

结构汉明距离和召回率略高。所有方法在更稀疏的 ECOLI70 上的表现均优于在 MAGIC-NIAB 上的表现。至关重要的是，我们的方法在所有网络上所需的非冗余条件独立性检验都显著更少，实现了其核心设计目标。这些结果表明，即使超结构的准确性较低，整体因果学习性能仍然稳健。作为一种优先减少条件独立性检验次数而非追求最高准确率的分治算法，我们的方法成功验证了其核心前提：放宽对超结构的严格约束，既能保持正确性，也能提升适用范围。

4）真实世界数据：我们将该方法应用于中国健康与养老追踪调查（CHARLS） [28]中中年及老年人的认知功能数据。纳入标准要求参与者：（i）完成第三轮的全球认知评估和抑郁症问卷；以及（ii）完成第二轮的认知测试，并参加第三轮的体格检查和第二次采血。排除标准为自述患有痴呆症或帕金森病。变量定义见下表。我们从三类异质

表V 变量名称及定义

变量	定义
X1	抑郁
X2	认知功能
X3	白细胞
X4	血红蛋白
X5	血细胞比容
X6	平均红细胞体积
X7	血小板
X8	甘油三酯
X9	肌酐
X10	血尿素氮
X11	高密度脂蛋白胆固醇
X12	低密度脂蛋白胆固醇
X13	总胆固醇
X14	葡萄糖
X15	尿酸
X16	胱抑素C
X17	C反应蛋白
X18	糖化血红蛋白
X19	Age
X20	肾小球滤过率
X21	平均脉搏测量值
X22	身体质量指数
X23	最大肺功能峰流量
X24	认知功能下降（相较于之前的峰值）

多种来源——体格检查、血液检查和量表评估——各自呈现不同的分布。StandardCI

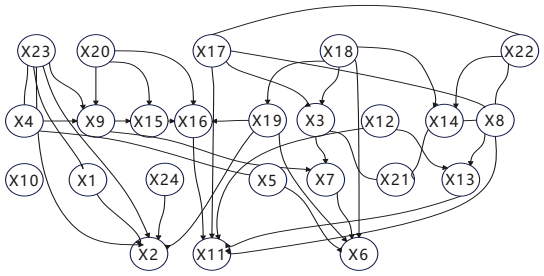


图16. 算法执行结果

检验难以处理此类跨分布依赖关系。为解决这一问题，我们采用基于分位数回归和偏Copula的Petersen的非参数CI检验 [25]，该方法擅长检测任意分布的连续变量之间的条件独立关系。然而，其较高的计算成本意味着，在中等规模的图上进行结构学习之前，必须先降维——而这恰恰是分治因果发现最有价值的应用场景。传统的基于约束的分治方法需要先进行成本高昂的条件独立性检验，以构建超结构或划分变量；尤其是在缺乏领域知识的情况下，这使得这些方法不适用于此类数据。相比之下，我们的方法**无需进行任何条件独立性检验**即可构建超结构，大幅减少了条件独立性查询的总数。这一效率提升使得在真实世界的异质数据集中使用功能强大但计算成本高昂的非参数条件独立性检验（如Petersen的方法）成为可能。对所有输入数据进行 Z 分数标准化，并使用Strobl 方法处理缺失值后 [24]，最终结果如图16所示。算法分析结果表明，抑郁症状、先前认知评分的下降、年龄和肺活量等因素会影响认知评分。这些发现与认知科学领域的既有共识一致：中老年人的认知功能往往会随着年龄增长而衰退 [29]。由于认知评分本质上反映了个体的认知能力，而认知能力与受教育程度密切相关；同时，受教育程度会影响中老年人群认知衰退的轨迹 [30]。抑郁症状与认知功能显著相关，是一个重要的风险因素 [31]。肺活量可以在一定程度上反映中老年人的身体活动水平，而规律运动已被证明能够减缓阿尔茨海默病的进展 [32]。通过将算法学习结果与领域知识进行比较，我们发现，该算法能够在一定程度上重建数据中的因果关系。

V. 结论

我们提出了一种轻量级因果发现框架，将弱约束超结构与分而治之策略相结合，无需领域知识即可低成本构建，因此非常适用于大规模探索性医学研究。我们的工作提供了清晰的

方法论贡献，将整个流程形式化为三个阶段：超结构构建、子图划分和合并。在合成数据集、基准数据集和真实世界数据集上开展的大量实验，证明了该框架的稳健性和实际适用性。尽管其准确率尚未达到最先进水平，但该框架在计算方面具有显著优势，并为简化因果发现和降维开辟了新途径，促使人们重新审视 d-分离在分而治之方法中的作用。未来的工作将着重提高弱约束超结构构建的效率和保真度，并整合先进的学习与合并策略，以扩大适用范围。

参考文献

[1] P. Spirtes、C. Glymour、N. 和 R. Scheines，载于《因果、预测与搜索》。麻省理工学院出版社，2000 年，第 116–124 页。[2] D. M. Chickering，“基于贪心搜索的最优结构识别”，《机器学习研究杂志》，第 3 卷，第 11 期，第 507–554 页，2005 年 11 月。[3] I. Tsamardinos、L. E. Brown 和 C. F. Aliferis，“最大-最小爬山贝叶斯网络结构学习算法”，《机器学习》，第 65 卷，第 1 期，第 31–78 页，2006 年 10 月。 [在线]。获取地址：http://link.springer.com/

10 1007 10994 006 6889 7 。 /s - - - W. Bergsma、Pieter，“连续随机变量的条件独立性检验”，Eurandom，技术报告，2004 年。[5] A. Shah、A. DePavia、N. Hudson、I. Foster 和 R. Stevens，“通过因果图划分在高维结构化假设空间中进行因果发现”，《机器学习研究汇刊》，2025 年。[在线]。获取地址：https://openreview.net/forum?id=FecsgPCOHk [6] F. Shen、X. Du、Y. Gao、J. Yu、Y. Cao、X. Lei 和 J. Tang，“Imaghar-mony：通过一致的物体数量和布局实现可控图像编辑”，arXiv 预印本 arXiv:2506.01949，2025 年。[7] F. Shen、J. Yu、C. Wang、X. Jiang、X. Du 和 J. Tang，“Imaggarment-1：面向可控时尚设计的精细化服装生成”，arXiv 预印本 arXiv:2504.13176，2025 年。[8] F. Shen、X. Jiang、X. He、H. Ye、C. Wang、X. Du、Z. Li 和 J. Tang，“Imagdressing-v1：可定制的虚拟试衣”，载于AAAI人工智能大会论文集，第 39 卷，第 7 期，2025 年，第 6795–6804 页。[9]F. Shen、H. Ye、J. Zhang、C. Wang、X. Han 和 Y. Wei，“通过渐进式条件扩散模型推进姿态引导图像合成”，载于第十二届国际学习表征会议，2024 年。 [在线]。获取地址：https://openreview.net/forum?id=rHzapPnCgT [10] F. Shen 和 J. Tang，“Imagpose：用于姿态引导人物生成的统一条件框架”，《神经信息处理系统进展》，第 37 卷，第 6246–6266 页，2024 年。[11] F. Shen、H. Ye、S. Liu、J. Zhang、C. Wang、X. Han 和 Y. Wei，“利用丰富上下文条件扩散模型提升故事可视化的一致性”，载于AAAI人工智能大会论文集，第 39 卷，第 7 期，2025 年，第 6785–6794 页。[12] F. Shen、C. Wang、J. Gao、Q. Guo、J. Dang、J. Tang 和 T.-S. Chua，“通过运动先验条件扩散模型生成长期说话人脸”，载于第四十二届国际机器学习会议。[13] R. Cai、Z. Zhang 和 Z. Hao，“SADA：支持稳健因果发现的通用框架”，载于JMLR：W&CP，第 28 卷。亚特兰大：PMLR，2013 年。 [在线]。获取地址：https://api.semanticscholar.org/CorpusID:15780170

[14] H. Zhang、S. Zhou、C. Yan、J. Guan、X. Wang、J. Zhang 和 J. Huan，“基于分而治之学习因果结构”，IEEE《控制论汇刊》，第 52 卷，第 5 期，第 3232–3243 页，2022 年 5 月。[在线]。获取地址：https://ieeexplore.ieee.org/document/9165127/ [15] J. PEARL，载于《因果性：模型、推理与推断》。纽约：剑桥大学出版社，2000 年，第 7–16 页。[16] J. Huang 和 Q. Zhou，“贝叶斯网络结构的分区混合学习”，《机器学习》，第 111 卷，第 5 期，第 1695–1738 页，2022 年 5 月。 [在线]。获取地址：https://link.springer.com/10.1007/s10994- 022-06145-4

[17] S. Chen、Y. Peng、G. He、H. Zhang、L. Cai 和 C. Wei，“CDSC：基于谱聚类的因果分解”，《信息科学》，第 657 卷，第 119985 页，2024 年 2 月。 [在线]。获取地址：https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0020025523015700

[18] H. Wei、C. Wei、S. Chen、G. He 和 Z. Li，“CDKM：基于 K 均值聚类的因果分解方法”，《广西科学》，第 32 卷，第 1 期，第 121–131 页，2025 年。[19] H. Zhang、Y. Ren、Y. Xia、S. Zhou 和 J. Guan，“通过切割伴随图的边实现有效因果划分”，《IEEE模式分析与机器智能汇刊》，第 46 卷，第 12 期，第 10 259–10 271 页，2024 年 12 月。 [在线]。获取地址：https://ieeexplore.ieee.org/document/10614830/ [20] E. Perrier、S. Imoto 和 S. Miyano，“给定超结构时寻找最优贝叶斯网络”，《机器学习研究杂志》，第 9 卷，第 2251–2286 页，2008 年。[21] C. Chow 和 C. Liu，“利用依赖树近似离散概率分布”，《IEEE信息论汇刊》，第 14 卷，第 3 期，第 462–467 页，1968 年 5 月。 [在线]。获取地址：https://ieeexplore.ieee.org/document/1054142/ [22] M. Jian，“互信息即 Copula 熵”，《清华科学与技术》，第 16 卷，第 1 期，第 4 页，2011 年。[23] M. Girvan 和 M. E. J. Newman，“社交网络和生物网络中的社群结构”，《美国国家科学院院刊》，第 99 卷，第 12 期，第 7821–7826 页，2002 年 6 月，arXiv:cond-mat/0112110。

[ ] 0112110 在线。获取地址：http://arxiv.org/abs/cond-mat/ [24] E. V. Strobl、S. Visweswaran 和 P. L. Spirtes，“通过逐检验删除处理非随机缺失的快速因果推断”，《国际数据科学与分析杂志》，第 6 卷，第 1 期，第 47–62 页，2018 年 8 月。 [在线]。获取地址：http://link.springer.com/10.1007/s41060-017- 0094-6 [25] L. Petersen 和 N. R. Hansen，“通过分位数回归检验条件独立性：基于偏Copula的方法”，《机器学习研究杂志》，第 22 卷，第 1–47 页，2021 年。[26] M. Scutari、P. Howell、D. J. Balding 和 I. Mackay，“利用贝叶斯网络进行多定量性状分析”，《遗传学》，第 198 卷，第 1 期，第 129–137 页，2014 年 9 月。 [在线]。获取地址：https://academic.oup.com/genetics/article/

198 1 129 6081358 / / / J. Schafer 和 K. Strimmer，“大规模协方差矩阵估计的收缩方法及其对功能基因组学的影响”，《遗传学与分子生物学中的统计应用》，第 4 卷，第 1 期，2005 年 1 月。[28] Y. Zhao、Y. Hu、J. P. Smith、J. Strauss 和 G. Yang，“队列概况：中国健康与养老追踪调查（CHARLS）”，《国际流行病学杂志》，第 43 卷，第 1 期，第 61–68 页，2014 年 2 月。 [在线]。获取地址：https://academic.oup.com/ije/article-lookup/doi/

[27] ..

10 1093 203 。/ije/dys J. Su 和 X. Xiao，“采用基于群组的轨迹建模探究导致中老年人认知衰退轨迹的因素：一项队列研究”，《医学》，第 101 卷，第 47 期，第 e31817 页，2022 年 11 月。 [在线]。获取地址：https://journals.lww.com/

[29]

10 1097 0000000000031817 。/MD. H. Li、C. Li、A. Wang、Y. Qi、W. Feng、C. Hou、L. Tao、X. Liu、X. Li、W. Wang、D. Zheng 和 X. Guo，“中国中老年人的社交与智力活动和认知轨迹之间的关联：一项具有全国代表性的队列研究”，《阿尔茨海默病研究与治疗》，第 12 卷，第 1 期，第 115 页，2020 年 12 月。 [在线]。获取地址：https://alzres.biomedcentral.com/articles/

[30]

10 1186 13195 020 00691 6 。/s - - - Y. Sun、J. Feng、Z. Lei、G. Qu、X. Li 和 Y. Gan，“中国中老年人群抑郁症状与认知功能的相关性：基于 CHARLS 基线数据的分析”，《中华公共卫生杂志》，第 40 卷，第 10 期，第 1206–1211 页，2024 年。[32] R.-x. Jia、J.-h. Liang、Y. Xu 和 Y.-q. Wang，“身体活动与运动对阿尔茨海默病患者认知功能的影响：一项荟萃分析”，《BMC老年医学》，第 19 卷，第 1 期，第 181 页，2019 年 12 月。 [在线]。获取地址：https://bmcgeriatr.biomedcentral.com/articles/10.1186/s12877-019- 1175-2

[31]