arXiv:2602.03944v1 [math.AG] 3 Feb 2026

曲线上自然丛的稳定性

IZZET COSKUN、ERIC LARSON 和 ISABEL VOGT

Abstract. 本文综述了近期关于曲线上自然定义的向量丛稳定性的研究进展，这些向量丛在曲线的变形理论中发挥着核心作用。

1. Introduction

给定 $X \subset Y$ 两个光滑射影簇，有若干自然丛控制着 X 中 Y 的变形理论，并在几何和算术中都发挥着基础性作用。在本文中，我们将重点讨论这类向量丛中最重要的两个例子：由正合列定义的限制切丛 $TY|_X$ 和法丛 $N_{X/Y}$

$$0 \to TX \to TY|_X \to N_{X/Y} \to 0. \tag{1}$$

我们将综述近期关于证明 $TY|_X$ 和 $N_{X/Y}$ 稳定性的研究成果，主要关注 X 为曲线且 $Y = \mathbb{P}^r$ 的情形。

态射空间。 令 $\mathrm{Mor}(X, Y)$ 表示参数化态射 $f\colon X \to Y$ 的概形。该概形在枚举几何、莫里理论、Fano簇的研究以及双曲性问题中发挥着核心作用。态射 f 的一阶变形空间由 $H^0(X, f^*(TY))$ 给出，而提升这类变形的障碍位于 $H^1(X, f^*(TY))$ 中（见 [Ha10, 命题 24.9]）。特别地，如果 $H^1(X, f^*(TY)) = 0$，那么这些变形无障碍，并且 $\mathrm{Mor}(X, Y)$ 在 f 处光滑，且维数为预期维数 $h^0(X, f^*(TY))$。当 f 是一个嵌入时，$f^*(TY)$ 与受限切丛 $TY|_X$ 重合。

希尔伯特概形。 对于嵌入变形，也有类似的描述。令 $\mathrm{Hilb}^p(Y)$ 表示参数化 Y 的、具有固定希尔伯特多项式 p 的子概形的希尔伯特概形。在对应于 $X \subset Y$ 的点 $[X]$ 处，$\mathrm{Hilb}^p(Y)$ 的扎里斯基切空间自然地同构于 $H^0(X, N_{X/Y})$。当 $H^1(X, N_{X/Y}) = 0$ 时，$\mathrm{Hilb}^p(Y)$ 在 $[X]$ 处光滑，并具有预期维数 $h^0(X, N_{X/Y})$（见 [Ha10，定理 1.1]）。

因此，理解受限切丛和法丛的上同调，是变形与模空间理论的核心，也促成了本文综述的主要问题。

问题 1.1。 $TY|_X$ 和 $N_{X/Y}$ 何时是（半）稳定向量丛?

稳定丛具有良好的度量性质和上同调性质，并通过Harder–Narasimhan和H¨older滤过构成所有丛的基本构件。

设 X 是亏格为 g 的光滑射影曲线。相干层的叠 $\mathrm{Coh}(r, d)$（秩为 r、次数为 d，定义在 X 上）是不可约的（见 [Ho10]）。当 $g \geq 1$ 时，半稳定丛的轨迹构成 $\mathrm{Coh}(r, d)$ 的一个非空开子叠。此外，当 $g \geq 2$ 时，稳定丛的轨迹也构成一个非空开子叠（更详细的综述见 [CHN24, §3]）。因此，在不存在明显几何障碍的情况下，合理的预期是，一般而言，自然定义的

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：14H60，14M15。次要分类：14D20。*Key words and phrases.* 受限切丛、法丛、稳定性、Brill-Noether曲线。本文准备期间，I.C.获得了美国国家科学基金会DMS-2200684项目资助和西蒙斯基金会差旅奖，E.L.获得了美国国家科学基金会DMS-2440719项目资助，I.V.获得了美国国家科学基金会DMS-2338345项目资助。

向量丛在 $g = 1$ 时是半稳定的，在 $g \geq 2$时是稳定的。在这篇综述中，我们将展示这一理念适用的情形，以及出现几何障碍的实例。

在 §3 中，我们首先讨论当 X 是有理曲线时的 $T\mathbb{P}^r|_X$ 和 $N_{X/\mathbb{P}^r}$。由于有理曲线上的向量丛可分解为线丛的直和，这种情形比高亏格曲线的情形具体得多，而且这些丛可以通过线性代数显式计算。我们将讨论一些有代表性的例子，例如单项式曲线的情形。由于有理曲线在 Fano簇和有理连通性问题的研究中扮演着核心角色，我们会稍作题外讨论，探讨当 X 是有理曲线且 Y 是格拉斯曼流形，或更一般地说，是齐性簇或齐性簇中的 Fano完全交时的 $TY|_X$ 和 $N_{X/Y}$。

在 §4 中，我们将概述近年来关于当 X 是亏格为1的曲线时的 $T\mathbb{P}^r|_X$ 和 $N_{X/\mathbb{P}^r}$ 的研究进展。亏格为1的曲线上的丛已由 Atiyah [A57] 分类。结合 Atiyah 对它们的明确描述以及亏格 1 曲线具有群结构这一事实，我们将快速证明，对于一般的非退化亏格1曲线，$T\mathbb{P}^r|_X$ 和 $N_{X/\mathbb{P}^r}$ 都是半稳定的。

对于更高亏格的曲线，目前尚无此类稳定向量丛的显式描述。在这一领域，大部分进展来自专化技术。基本思路是将亏格为 g 、次数为 d 的曲线特殊化为由亏格和次数较低的曲线组成的节点并。这种方法对于限制切丛 $T\mathbb{P}^r|_X$尤其有效，因为当 X 特殊化为可约结点曲线 $X_1 \cup X_2$时，限制切丛 $T\mathbb{P}^r|_X$ 会特殊化为每个分支 X_i上的限制切丛 $T\mathbb{P}^r|_{X_i}$。这方面最全面的结果由 Farkas 和 E. Larson 给出 [FL25], ，他们证明，若 X 是亏格至少为 1 的一般 Brill–Noether 曲线，则 $T\mathbb{P}^r|_X$ 是半稳定的。此外，若 X 是亏格至少为 2 的一般 Brill–Noether 曲线，则 $T\mathbb{P}^r|_X$ 实际上是稳定的；但当 X 是次数为 $2r$ 且嵌入于 $\mathbb{P}^r$中的亏格 2 曲线时，结论例外。

法丛带来了大得多的困难。尽管当 X特化为一条结点可约曲线 $X_1 \cup X_2$时，法丛同样构成一个平坦族，但其极限并非法丛的简单并，而是法丛的某些初等修改。这一复杂性使法丛的研究显著更为微妙。此外，在低次数和低亏格的情形中，存在 $N_{X/\mathbb{P}^r}$ 不能成为半稳定的例子。因此，任何归纳方法都必须避开这些反例。在第5节中，我们综述当 X 是较高亏格的一般Brill–Noether曲线时，关于 $N_{X/\mathbb{P}^r}$ 的稳定性的现有认识。

最后，在第6节中，我们拓宽视角，讨论与曲线的有限覆盖自然相关联的向量丛的稳定性。给定曲线的有限覆盖 $f\colon X \to Y$，可以考虑相应的Tschirnhausen丛，以及 X上一般丛的推前。这些丛自然出现在丛的模空间上的塞塔除子、曲线的分支覆盖以及赫尔维茨空间的研究中。它们的稳定性性质近来受到了显著关注 [DP22, LL24, CLV24b, CLV24a]。最后一节综述关于这些丛的稳定性的近期结果。

致谢。 我们谨向 Atanas Atanasov、Arnaud Beauville、Lawrence Ein、Gavril Farkas、Henry Fontana、Joe Harris、Jack Huizenga、Eric Jovinelly、Hannah Larson、Aaron Landesman、Daniel Litt、Angelo Lopez、Sayanta Mandal、LucasMioranci、Eric Riedl、Geoff Smith、Jason Starr、Ravi Vakil 和 David Yang 致谢，感谢他们就本综述讨论的主题与我们进行了许多宝贵的讨论。

2. Preliminaries

本节概述一些基本定义和基础性结果，它们将在我们后续的讨论中发挥作用。

2.1. 稳定性。 我们首先回顾曲线上半稳定向量丛的定义和基本性质。有关更多细节和证明，请参阅 [LP97]。

定义 2.1。 设 $(X,\ H)$ 是一个维数为 n 的极化簇。那么，无挠相干层 V on X 的 H-斜率 μ_H 定义为

$$\mu_H(V) = \frac{c_1(V)\cdot H^{n-1}}{\mathrm{rk}(V)H^n},$$

其中，rk(V)是 V的秩，而 c_1(V)是 V的第一陈类。若所有秩较小的真子层 $W \subset V$ 均满足以下条件，则层 V是 μ_H-(半)稳定的

$$\mu_H(W) \underset{(-)}{<} \mu_H(V).$$

注记 2.2. 当 X 是光滑射影曲线时，每个无挠层都是局部自由的，即为一个¯向量丛。此外，若 E 是向量丛且 $F \subset E$ 是子层，令 F 为映射 $E \to (E/F)/(E/F)_{\mathrm{tors}}$的核，其中 ¯ ¯ ¯表示该映射。那么，rk F =rk F且deg $F \geq$=deg F，因为 $F \subset F$。因此，要确定 E的（半）稳定性，只需考虑同时局部自由且局部余自由的子层，即向量子丛。

备注 2.3。 对于高维簇，定义 2.1 取决于极化的选择，因为次数是根据 H计算的。相比之下，对于曲线，次数是内禀的，极化 H 不起作用（整体缩放除外）。由于本综述主要关注曲线，我们不会介绍其他稳定性概念，例如 Gieseker稳定性、Matsuki-Wentworth稳定性或 Bridgeland稳定性。关于高维簇上稳定性的详细论述，请读者参阅综述 [CH15、CHN24、HL10] 。

每个 X 上的无挠层 V 都存在唯一的滤过，称为 Harder–Narasimhan（HN）滤过

$$0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n = V,$$

使得连续商丛 $F_i := E_i/E_{i-1}$ 均为半稳定的，并且

$$\mu_H(F_1) > \cdots > \mu_H(F_n).$$

此外，每个半稳定层都存在一个进一步的滤过，称为 H¨older 滤过，使得连续商丛均为稳定的。虽然 H¨older 滤过并不唯一，但伴随分次对象是唯一的。如果两个层的 H¨older 滤过的伴随分次对象同构，则称它们为 S-等价。

假设 X 是亏格为 g 的光滑射影曲线。一般来说， X 上秩为 r 、次数为 d 的向量丛栈并非有界。例如，若X上有一个次数为 1 的线丛 L ，考虑秩为 2、次数为 d的向量丛族

$$V_a := L^{\otimes(-a)} \oplus L^{\otimes(d+a)}.$$

若 $d \geq 2g-2$ 且 $a > 0$，则由黎曼-罗赫定理可得 $h^0(X,\ V_a) = d + a - g + 1$。特别地，令 a 趋于无穷大，就能使 $h^0(X,\ V_a)$ 和 $h^1(X,\ V_a)$ 都任意大。因此，向量丛 V_a 不属于任何有界族。

相比之下，半稳定性施加了强有力的上同调约束。例如，若 V 是 X 上的斜率为 $\mu > 2g-2$ 的半稳定向量丛，则 V没有高阶上同调。事实上，由 Serre 对偶可得，

$$h^1(X,V) = h^0(X, V^\vee \otimes \omega_X),$$

其中 ω_X 表示 X的典范层。向量丛 $V^\vee \otimes \omega_X$ 是半稳定的，且斜率小于 0，因此它没有非零整体截面，因为非零截面会生成一个次数非负的子层，从而破坏 $V^\vee \otimes \omega_X$的稳定性。因此， $h^1(X,\ V) = 0$。这个例子说明，半稳定丛比任意丛具有更好的上同调性质。

更重要的是，存在一个不可约的射影模空间，用来参数化光滑射影曲线 X 上秩为 r 、次数为 d 的半稳定向量丛的 S-等价类；有关现代构造，参见 [ABBLT22]。

2.2. **不变量**。设 $X \subset \mathbb{P}^r$ 是一条次数为 d 、亏格为 g 的曲线。限制欧拉正合列

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)^{\oplus(r+1)} \to T\mathbb{P}^r \to 0$$

到 X，我们得到

$$\operatorname{rk}(T\mathbb{P}^r|_X) = r \quad \deg(T\mathbb{P}^r|_X) = (r+1)d.$$

$N_{X/\mathbb{P}^r}$ 的定义正合列 **(1)** 随即给出

$$\operatorname{rk}(N_{X/\mathbb{P}^r}) = r-1 \quad \deg(N_{X/\mathbb{P}^r}) = (r+1)d + 2g - 2.$$

2.3. **结点曲线的初等修改与法丛**。 设 X 是一个射影簇， X上有一个向量丛 V。设 D是一个Cartier除子，且 V在 D上的限制有一个子丛 $W \subset V|_D$。那么，沿着 D 、朝向 W 对 V作出的负初等修改 $V[D \dashrightarrow W]$ 由以下正合列定义：

$$0 \to V[D \dashrightarrow W] \to V \to V|_D/W \to 0.$$

沿着 D 、朝向 W 对 V 作出的正初等修改定义如下：

$$V[D \overset{+}{\dashrightarrow} W] \coloneqq V[D \dashrightarrow W](D).$$

关于修改的性质，详细讨论请参见 [ALY19, §2-6] 。修改 $V[D \overset{+}{\dashrightarrow} W]$ 在 D之外自然同构于 V，因此可以轻易定义沿支撑互不相交的除子对 V 进行多次修改，我们将其记作

$$V[D_1 \overset{+}{\dashrightarrow} W_1]\cdots[D_j \overset{+}{\dashrightarrow} W_j].$$

当除子的支集相交时，定义多个修改会更加微妙。当向量丛 W_i 可延拓为 D_i邻域内的向量丛时，在某些情形下可以定义多个修改。例如，当 X 是光滑曲线时，多个修改总是存在。详情请参阅 [ALY19, LV23]。

2.4. **结点曲线的法丛**。 设 $X = X_1 \cup X_2 \subset \mathbb{P}^r$ 是一条连通结点曲线。则在 C的结点 p_i处，切线 $T_{p_i}X_2$在$N_{X_1/\mathbb{P}^r}|_{p_i}$中定义了一个法方向。我们将$N_{X_1/\mathbb{P}^r}[p_i \overset{+}{\dashrightarrow} X_2]$的正初等修改记为$N_{X_1/\mathbb{P}^r}[p_i \overset{+}{\dashrightarrow} T_{p_i}X_2]$。于是得到 Hartshorne 和 Hirschowitz 的以下基本观察。

引理 2.4。 [HH85, 推论 3。2] 设 $X = X_1 \cup X_2 \in \mathbb{P}^r$ 是一条连通结点曲线。设 $X_1 \cap X_2 = \{p_1, \ldots, p_j\}$。则

$$N_{X/\mathbb{P}^r}|_{X_1} \cong N_{X_1/\mathbb{P}^r}[p_1 \overset{+}{\dashrightarrow} X_2]\cdots[p_j \overset{+}{\dashrightarrow} X_2]$$

引理 2.4 使我们能够通过归纳法研究法丛的稳定性。然而，要实施这一归纳法，需要考虑法丛的修改。

2.5. **结点曲线上的稳定性**。 当 X 是一条光滑射影曲线时，我们在备注 2.2 中指出，证明（半）稳定性时只需考虑向量子丛。为了运用特殊化，采用一种同样只使用向量子丛、且在族中也是开性质的结点曲线稳定性替代定义会更方便。详细内容请参阅 [CLV22, §2] 。设 X 为一条连通结点曲线， $\nu\colon X \to X$ 为其正规化。 X的任意结点 p 在 X 上方有两个点 $\tilde{p}_1$ 和 $\tilde{p}_2$ 。给定X上的一个向量丛 V ，其拉回 ν^*V 在 X 上方的 $\tilde{p}_1$ 和 $\tilde{p}_2$ 处的纤维可自然地视为相同。给定一个子丛$F \subseteq \nu^*V$，因此我们可以在 $\nu^*V|_{\tilde{p}_1} \simeq \nu^*V|_{\tilde{p}_2}$中比较 $F|_{\tilde{p}_1}$ 和 $F|_{\tilde{p}_2}$。

定义 2.5。设 V是连通结点曲线 X上的一个向量丛。对于子丛 $F \subset \nu^*V$，修正斜率 μ_X^{adj} 定义为

$$\mu_X^{\mathrm{adj}}(F) \coloneqq \mu(F) - \frac{1}{\operatorname{rk} F} \sum_{p \in X_{\mathrm{sing}}} \operatorname{codim}_F \left(F|_{\tilde{p}_1} \cap F|_{\tilde{p}_2}\right),$$

其中，$\operatorname{codim}_F(F|_{\tilde{p}_1} \cap F|_{\tilde{p}_2})$表示交集在 $F|_{\tilde{p}_1}$或 $F|_{\tilde{p}_2}$中的余维。若对于所有子丛 $F \subset \nu^* V$，均有

$$\mu^{\mathrm{adj}}(F) \underset{(-)}{<} \mu(\nu^* V) = \mu(V).$$

这一半稳定性概念在节曲线族中能很好地特殊化。

命题 2.6. [CLV22，命题 2.3] 设 $\mathcal{X} \to \Delta$ 为离散赋值环的谱上的连通节曲线族，且 $\mathcal{V}$ 为 $\mathcal{X}$ 上的向量丛。若特殊纤维 $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}|_0$是（半）稳定的，则一般纤维 $\mathcal{V}^* = \mathcal{V}|_{\Delta^*}$ 也是（半）稳定的。

引理 2.7. [CLV22，引理 4.1] 假设 $X = X_1 \cup X_2$ 是一条可约结点曲线，且 V是 X 上的向量丛，使得 $V|_{X_1}$ 与 $V|_{X_2}$ 是半稳定的。则 V是半稳定的。此外，若 $V|_{X_1}$ 或 $V|_{X_2}$ 之一是稳定的，则 V是稳定的。

3. Rational curves

本节将综述射影空间中有理曲线的受限切丛和法丛的相关结果。

3.1. 有理曲线上的丛。 </style}向量丛 V在 $\mathbb{P}^1$ 上可分解为线丛的直和，也就是说，存在唯一的整数序列

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_r$$

使得

$$V \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i).$$

因此，在 $\mathbb{P}^1$上不存在高秩稳定丛，而半稳定丛只有形如 $\mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(a)^{\oplus r}$ 的形式，且仅当秩整除次数 $d = ra$时才存在。以下概念是在 $\mathbb{P}^1$上向量丛的（半）稳定性最接近的可能替代概念。

定义 3.1. 若向量丛 V在 $\mathbb{P}^1$ 上满足 $a_r - a_1 \le 1$，则称其为平衡的；若满足 $a_1 = a_r$，则称其为完全平衡。该丛完全平衡当且仅当它是半稳定的。更一般地，若 $a_r - a_1 \le j$，则称该丛为 j-平衡的。

向量丛 V是 j-平衡的，当且仅当自同态丛 $\mathsf{End}(V) \cong V \otimes V^\vee$ 的每个直和项的次数都至少为 $-j$。因此， j-平衡向量丛可通过 $H^1(\mathsf{End}(V)(j-1))$ 的消灭来刻画。因此，在平坦族中， j-平衡这一性质是一个开条件。

在 $\mathbb{P}^1$上的向量丛平坦族中，给定分裂型 $V \cong \oplus \mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$ 的预期余维为

$$h^1(\mathrm{End}(V)) = \sum_{\{i,j | a_i - a_j \le -2\}} (a_j - a_i - 1).$$

这个余维与射影空间中希尔伯特概形内类型为$S_{a_1,\ldots,a_r}$ 的滚动曲面的余维相同（例如参见 [Cos08, 引理 2.4]），也是在具有该给定分裂型的 $\mathbb{P}^1$ 上向量丛的万有变形空间中该分裂型的余维。

3.2. **射影空间中有理曲线的限制切丛**。 次数为 e的有理曲线可视为态射 $f: \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^r$的像，其中 f由 $r+1$个关于两个变量的 e次齐次多项式给出。通过 f将欧拉正合列拉回到 $\mathbb{P}^1$ 上，我们得到正合列

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \xrightarrow{(f_0,\ldots,f_r)^T} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e)^{\oplus(r+1)} \to T\mathbb{P}^r|_X \to 0.$$

因此， $T\mathbb{P}^r|_X$ 的分裂型由 f的定义多项式之间的关系模的生成元次数决定。

例 3.2。 对于有理正规曲线的情形

$$(s^r : s^{r-1}t : \cdots : st^{r-1} : t^r)$$

列之间的关系由下式给出

$$t \cdot s^i t^{r-i} = s \cdot s^{i-1} t^{r-i+1}.$$

Hence，当 X 是一条有理正规曲线时， $T\mathbb{P}^r|_X$ 的分裂型为 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(r+1)^{\oplus}$ ^{r}.

例3.2 的一个重要推论如下。

推论3.3。 $T\mathbb{P}^r$ 的切丛是一个稳定向量丛。

证明。 设 H 是 $\mathbb{P}^r$ 上一个超平面的类。由于 $T\mathbb{P}^r$ 的秩 r 和次数 $r+1$ 互素，只需证明 $T\mathbb{P}^r$ 是半稳定的。设 $T\mathbb{P}^r$ 的一个子层为 W。如有必要，通过取双对偶，我们可以假设 W 的奇点的余维至少为 3。因此，一条一般的有理正规曲线 X 不与 W 的奇点相交，并且 W 在 X 上的限制是 $T\mathbb{P}^r|_X$ 的一个子层。由于后一个向量丛是半稳定的，

$$r\mu_H(W) = \mu(W|_X) \leq \mu(T\mathbb{P}^r|_X) = r\mu_H(T\mathbb{P}^r). \qquad \square$$

这个推论表明，有时可以通过证明重要向量丛在一条曲线上的限制是稳定的，来证明这些向量丛的稳定性。

例 3.4. 设 $k_0 = 0 < k_1 = 1 < k_2 < \cdots < k_{r-1} = e-1 < k_r = e$ 是一个非负整数递增序列。考虑由 X 给出的单项式有理曲线

$$(s^e : s^{e-1}t : \cdots : s^{e-k_i}t^{k_i} : \cdots : st^{e-1} : t^e).$$

对于 $1 \leq i \leq r$，令 $b_i = k_i - k_{i-1}$。那么列之间的关系由以下元素生成

$$t^{b_i} \cdot s^{e-k_{i-1}} t^{k_{i-1}} = s^{b_i} \cdot s^{e-k_i} t^{k_i}.$$

我们由此得出

$$T\mathbb{P}^r|_X \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e + b_i).$$

Re称有理曲线 $f\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^r$ 是无分歧的或浸入的，如果自然映射 p

$$f^*\Omega\mathbb{P}^r \to \Omega\mathbb{P}^1$$

是满射。在经典文献中，一些作者将此类映射的像称为具有普通奇点的有理曲线。

给定一个由基底 S 参数化的向量丛平坦族 $\mathrm{V} \to S$， $s \in S$ 处的 Kodaira–Spencer 映射是从 $T_sS \to \mathrm{Ext}^1(\mathrm{V}_s, \mathrm{V}_s)$ 出发的映射，它将 S 在 s 处的 Zariski 切向量映射为向量丛 V_s 的相应无穷小变形。对于具有普通奇点的有理曲线，我们断言，受限切丛的 Kodaira–Spencer 映射是满射的。我们可以将这类有理曲线参数化为 $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e)^{\oplus(r+1)})$ 中的一个开子集，该子集对应于逐纤维单射态射。Kodaira–Spencer 映射

$$\kappa\colon \mathrm{Hom}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e)^{\oplus(r+1)}\right) \to \mathrm{Ext}^1\left(f^*T\mathbb{P}^r, f^*T\mathbb{P}^r\right)$$

通过自然态射分解

$$\mathrm{Hom}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e)^{\oplus(r+1)}\right) \xrightarrow{\phi} \mathrm{Ext}^1\left(f^*T\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e)^{\oplus(r+1)}\right) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Ext}^1\left(f^*T\mathbb{P}^r, f^*T\mathbb{P}^r\right),$$

其中， ϕ 和 ψ 分别是将 $\mathrm{Hom}(-, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e)^{\oplus(r+1)})$ 和 $\mathrm{Hom}(f^*T\mathbb{P}^r, -)$ 应用于欧拉正合列的拉回后得到的长正合列中的映射。由于

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e)^{\oplus(r+1)}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e)^{\oplus(r+1)}) = 0 \quad \text{and} \quad \mathrm{Ext}^2(f^*T\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = 0,$$

我们得出， ϕ 和 ψ 都是满射。因此，Kodaira–Spencer 映射是满射。特别地，一般有理曲线上的受限切丛是平衡的，并且满足 $f^*T\mathbb{P}^r$ 具有指定分裂型的无分歧映射轨迹 f 具有预期余维。更准确地说，Ramella 证明了以下结论。

定理 3.5. [Ram90] 参数化无分歧态射的局部闭轨迹$\mathrm{More}(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}^r)$，其中 $f^*T\mathbb{P}^r$ 具有指定的分裂型，是不可约的，且维数等于预期维数

$$(e+1)(r+1)-1-h^1(\mathrm{End}(f^*T\mathbb{P}^r)).$$

3.3. 射影空间中有理曲线的法丛。 </style}当特征不整除有理曲线 X 的次数 e 时，我们可以利用欧拉正合列计算有理曲线的法丛。我们有如下交换图

(2)
$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} & \xrightarrow{\ e\ } & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} & & & & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle (s\ t)^T} & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus 2} & \xrightarrow{J} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e)^{\oplus(r+1)} & \longrightarrow & N_{X/\mathbb{P}^r} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & T\mathbb{P}^1 & \longrightarrow & T\mathbb{P}^r|X & \longrightarrow & N_{X/\mathbb{P}^r} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

其中第一列是 $\mathbb{P}^1$ 的欧拉正合列，第二列是 $\mathbb{P}^r$ 上欧拉正合列的拉回，顶部水平映射是乘以 e，而 J 是雅可比矩阵

$$J=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial s} & \frac{\partial f_1}{\partial s} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial s} \\ \frac{\partial f_0}{\partial t} & \frac{\partial f_1}{\partial t} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial t} \end{pmatrix}^T,$$

其中 T 表示转置。顶部方块的交换性由齐次多项式 g（含 $n+1$ 个变量）的欧拉关系得出

$$\sum_{i=0}^{n} x_i\frac{\partial g}{\partial x_i}=\deg(g)g$$

因此， X 的法丛是由雅可比矩阵 J所给映射的余核

$$0\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus 2}\xrightarrow{J}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e)^{\oplus(r+1)}\to N_{X/\mathbb{P}^r}\to 0.$$

因此，通过计算 J^T的各列之间关系模的生成元的次数，可以确定 $N_{X/\mathbb{P}^r}$ 的分裂型。

注3.6。 注意，当次数 e 能被特征整除时，这个论证不再成立，因为乘以 e 不再是同构。

例 3.7。 对于有理正规曲线 $(s^r:s^{r-1}t:\cdots:t^r)$，雅可比矩阵为

$$\begin{pmatrix} rs^{r-1} & (r-1)s^{r-2}t & \cdots & is^{i-1}t^{r-i} & \cdots & t^{r-1} & 0 \\ 0 & s^{r-1} & \cdots & (r-i)s^it^{r-i-1} & \cdots & (r-1)st^{r-2} & rt^{r-1} \end{pmatrix}^T.$$

令 C_i 表示该矩阵的第 i 列。注意，列之间的关系由以下关系生成

$$t^2C_i - 2stC_{i+1} + s^2C_{i+2} = 0.$$

由此可得

$$N_{X/\mathbb{P}^r} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(r+2)^{\oplus(r-1)}.$$

虽然此计算假设特征不整除 r，但即使特征整除 r，答案仍然相同（例如，参见 [CR19，推论 2.5]）。

例 3.8。更一般地，假设基域的特征大于 e。令X 为例 3.4 中引入的单项式有理曲线（$s^e : s^{e-1}t : \cdots : s^{k_i}t^{e-k_i} : \cdots : st^{e-1} : t^e$）。那么，雅可比矩阵 J 具有如下形式

$$\begin{pmatrix} es^{e-1} & (e-1)s^{e-2}t & \cdots & k_is^{k_i-1}t^{e-k_i} & \cdots & t^{r-1} & 0 \\ 0 & s^{e-1} & \cdots & (e-k_i)s^{k_i}t^{e-k_i-1} & \cdots & (e-1)st^{e-2} & et^{e-1} \end{pmatrix}^T.$$

矩阵中连续的三列 C_{i-1}，C_i，C_{i+1} 满足关系式

$$(k_i - k_{i+1})s^{k_{i+1}-k_{i-1}}C_{i-1} + (k_{i+1} - k_{i-1})s^{k_{i+1}-k_i}t^{k_i-k_{i-1}}C_i + (k_{i-1} - k_i)t^{k_{i+1}-k_{i-1}}C_{i+1} = 0.$$

这些关系生成关系模。对于 $1 \le i \le r-1$，令

$$c_i := k_{i+1} - k_{i-1}.$$

由此我们得出

$$N_{X/\mathbb{P}^r} \cong \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e + c_i).$$

备注 3.9。曲线的法丛分裂型可能取决于特征。在较小的特征下，由于某些系数变为 0，列之间可能存在次数较低的关系。例如，曲线的法丛

$$(s^5 : s^4t : s^2t^3 : st^4 : t^5)$$

在特征不等于 2 或 5 时，具有平衡的分裂型 $\mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(7) \oplus \mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(8)^{\oplus 2}$。在特征 2 下，分裂型变为 $\mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(7)^{\oplus 2} \oplus \mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(9)$（参见 [CR19，命题 3.7]）。

当基域的特征为 0 时，Sacchiero [S80] 确定了具有普通奇点的有理曲线的法丛可能具有的分裂型 $\mathbb{P}^r$。

备注 3.10。设有理曲线 X 的次数为 e，且是退化的，即它张成一个 $\mathbb{P}^s \subset \mathbb{P}^r$，其中 $s < r$。那么

$$N_{X/\mathbb{P}^r} \cong N_{X/\mathbb{P}^s} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e)^{\oplus(r-s)}.$$

要证明这一点，注意到我们有法丛正合列

$$0 \to N_{X/\mathbb{P}^s} \to N_{X/\mathbb{P}^r} \to N_{\mathbb{P}^s/\mathbb{P}^r}|_X \to 0.$$

由于 $N_{\mathbb{P}^s/\mathbb{P}^r} \cong \mathsf{O}_{\mathbb{P}^s}(1)^{\oplus(r-s)}$，我们得出

$$N_{\mathbb{P}^s/\mathbb{P}^r}|_X \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e)^{\oplus(r-s)}.$$

由于 $N_{X/\mathbb{P}^s}$ 每个直和项的次数至少为 e，我们得出该短正合列分裂。因此，要理解有理曲线的法丛，可以将讨论限制在非退化有理曲线上，接下来的讨论中我们将这样做。

并非总能找到如例 3.8 中具有平衡法丛的单项式有理曲线。例如，$\mathbb{P}^4$ 中的这类有理曲线具有形式 $(s^e : s^{e-1}t : s^kt^{e-k} : st^{e-1} : t^e)$，因此其法丛为 $\mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(e-k) \oplus \mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(e-2) \oplus \mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$，当 $e \ge 7$ 时绝不会是平衡的。因此，我们必须考虑更一般的一类有理曲线。

设 $2 \le b_1 \le \cdots \le b_{r-1}$ 为满足 $\sum_{i=1}^{r-1} b_i = 2e-2$ 的整数。定义 $\delta_1 = 1$，并令 $\delta_i = b_{i-1} - \delta_{i-1}$ 对于 $1 < i \le r-1$。令 $c = 1 + \sum_{i=1}^{r-1} \delta_i$。设 $p(s,\ t)$ 和 $q(s,\ t)$ 为两个一般的 $e-c$ 次齐次多项式。令 $k_i = c - \sum_{j=1}^{i} \delta_j$ 对于 $0 \le i \le r-1$。注意到 $k_0 = c$、$k_1 = c-1$ 和 $k_{r-1} = 1$。考虑由下式定义的有理曲线 $f\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^r$

$$f = (s^{k_0}p : s^{k_1}t^{c-k_1}p : \cdots : s^{k_{r-1}}t^{c-k_{r-1}}p : t^c q).$$

引理 3.11 (Sacchiero 引理)。 映射 f 无分歧，且法丛的分裂型为

$$N_f \cong \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e+b_i).$$

推论 3.12。 假设基域的特征大于 e。对于 $1 \le i \le r-1$，设 $b_i \ge 2$ 为满足 $\sum_{i=1}^{r-1} b_i = 2e-2$ 的整数。那么存在一个次数为 e 的无分歧非退化映射$f\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^r$，使得法丛 N_f的分裂型为

$$N_f \cong \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e+b_i).$$

在任意特征下，法丛都可以通过正合列计算：

$$0 \to N^\vee_{X/\mathbb{P}^r}(1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus(r+1)} \to \mathcal{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e)) \to 0,$$

其中 $\mathrm{P}(\mathrm{O}_{\mathbb{P}^1}(e))$ 是与 $\mathrm{O}_{\mathbb{P}^1}(e)$ 相关联的主部丛；参见 [CLV25，第 2.4] 节。令$F\colon X \to X$表示相对 Frobenius 态射。当底域的特征为 2 时，主部丛可表示为

$$\mathcal{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e)) = F^* F_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e).$$

因此，最后两个向量丛是 $\mathbb{P}^1$ 上向量丛的 Frobenius 拉回，而且稍加推导即可看出，它们之间的映射也是经由 F 拉回的。由此可知，$N^\vee_{X/\mathbb{P}^r}(1)$ 也是某个向量丛经由 Frobenius 的拉回。因此，它的所有直和项的次数都必须是 2 的倍数。由此得到以下命题。

命题 3.13。 假设底域的特征为 *2*，且 X 是 $\mathbb{P}^r$ 中次数为 e 的有理曲线。那么 $N_{X/\mathbb{P}^r} \cong \oplus_{i=1}^{r-1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$，其中所有 $a_i \equiv e$ 都是模 *2* 的。

特别地，在特征 2 下，有理曲线的法丛的分裂型还受到进一步限制，而且一般非退化有理曲线的法丛不一定是平衡的。以下定理总结了一般有理曲线的法丛的分裂型（参见 [CLV25, CR18, LV23, S83, R07]）。

定理 3.14。 $\mathbb{P}^r$ 中一般有理曲线的法丛是 *2*-平衡的。此外，如果基域的特征不为 *2*，那么一般非退化有理曲线具有平衡的法丛。如果基域的特征为 *2*，那么一般有理曲线的法丛是唯一的向量丛 $\oplus_{i=1}^{r-1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$，它既是 *2*-平衡的，又满足 $a_i \equiv e$ 模 2。

现在我们转而研究这样的问题：理解法丛具有指定分裂型的有理曲线所构成的轨迹。在 $\mathbb{P}^3$中，Eisenbud 和 Van de Ven 证明了这些轨迹是不可约的，且具有预期维数（见 [EV81、GS80]）。

定理 3.15。 [EV81] 在特征零下，次数为 e 、位于 $\mathbb{P}^3$ 中且法丛具有指定分裂型的光滑非退化有理曲线 X 的轨迹是不可约的，并且具有预期维数。

Eisenbud 和 Van de Ven 猜想，在 $\mathbb{P}^r$ 中也应成立类似结果。第一个反例由 Alzati 和 Re [AR17] 给出，他们证明了：$\mathbb{P}^8$ 中次数为 11 且法丛具有分裂型 $\mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(13)^{\oplus 3} \oplus \mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(14)^{\oplus 2} \oplus \mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(15)^{\oplus 2}$ 的有理曲线轨迹具有两个不可约分支。Coskun 和 Riedl 证明，当 $r \geq 5$ 时，法丛具有给定分裂型的有理曲线轨迹通常具有许多不同维数的不可约分支 [CR18]。

问题 3.16。描述 $\mathbb{P}^r$ 中法丛具有指定分裂型的有理曲线轨迹的不可约分支。给出这些轨迹维数的紧确上下界。

由于有理曲线在 Fano簇的研究中发挥着核心作用，因此研究其他 Fano簇上有理曲线的限制切丛和法丛也很有意义。接下来我们将概述这一方向上的一些最新进展。

3.4. **格拉斯曼流形中有理曲线的限制切丛。** 令 $G(k,n)$ 表示参数化 n 维向量空间 V 中 k 维子空间的格拉斯曼流形。该格拉斯曼流形带有两个典范丛：

(1) 秩为 k 的典范子丛 S 将点 $[W] \in G(k,n)$ 关联到 k 维子空间 W。(2) 秩为 $n-k$ 的典范商丛 Q 将点 $[W] \in G(k,n)$ 关联到 $(n-k)$ 维商空间 V/W。

格拉斯曼流形的切丛具有张量结构

$$TG(k,n) \cong S^\vee \otimes Q.$$

因此，受限切丛 $TG(k, n)|_X$ 不可能是平衡的，除非有理曲线的次数 e 能被 k 或 $n-k$ 整除。

例 3.17。设 X 是 $G(2, 4)$ 中一条一般的扭三次曲线。那么，$S^\vee$ 和 Q 在 X 上的限制均分裂为 $\mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$。因此，$TG(2, 4)|_X \cong \mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(3)^{\oplus 2} \oplus \mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(4)$ 不是平衡的。事实上，对于所有奇数次有理曲线，这种现象都成立。

Mandal [Ma19] 研究了格拉斯曼流形中有理曲线的受限切丛的分裂型。他首先研究 S 和 Q 的分裂型。设 $a_1, \ldots, a_k$ 为非正整数，其和为 $-e$。设 $b_1, \ldots, b_{n-k}$ 为非负整数，其和为 e。设 $S(a_1, \ldots, a_k)$ 为 $G(k, n)$ 中次数为 e、满足 $S|_X \cong \bigoplus_{i=1}^k \mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$ 的有理曲线 X 的轨迹。同样，设 $Q(b_1, \ldots, b_{n-k})$ 为 $G(k, n)$ 中次数为 e、满足$Q|_X \cong \bigoplus_{j=1}^{n-k} \mathsf{O}_{\mathbb{P}^1}(b_j)$ 的有理曲线 X 的轨迹。首先，Mandal 证明了以下命题。

命题 3.18. [Ma19, 命题 5] 轨迹 $S(a_1, \ldots, a_k)$ 与 $Q(b_1, \ldots, b_{n-k})$ 是光滑的，且具有预期维数。特别地，对于 $G(k, n)$ 中的一般有理曲线，S 与 Q 的限制都是平衡的。

对于 $S(a_1, \ldots, a_k)$ 与 $Q(b_1, \ldots, b_{n-k})$ 的交集中的曲线 X，我们有

$$TG(k,n)|_X \cong \bigoplus_{i,j} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b_j - a_i).$$

在特征零下，Mandal 进一步证明了如下定理。

定理 3.19. [Ma19, 定理 22] $S(a_1, \ldots, a_k)$ 与 $Q(b_1, \ldots, b_{n-k})$ 的交集非空，且为一般位置横截。

特别地，该定理确定了 $TG(k, n)|_X$ 所有可能的分裂型。然而，与 $\mathbb{P}^r$ 的情形不同，$TG(k, n)|_X$ 具有指定分裂型的有理曲线轨迹不一定是不可约的。S 和 Q 的不同分裂型可能导致 $TG(k, n)|_X$ 具有相同的分裂型。这通常会产生许多不同的不可约分支，它们都属于满足以下条件的轨迹：

$TG(k,\ n)|_X$ 具有给定的分裂型。Mandal 证明了不可约分支数量的上下界，并表明总是存在一个维数等于预期维数的不可约分支。

3.5. **格拉斯曼流形中有理曲线的法丛**。 在某些数值条件下， $TG(k,n)|_X$ 不是平衡的，这一事实阻碍了法丛 $N_{X/G(k,n)}$ 成为平衡的。由带余除法，记

$$e = kq_1 + r_1 \quad \text{and} \quad e = (n-k)q_2 + r_2$$

其中 $0 \le r_1 < k$ 且 $0 \le r_2 < n-k$。若 X 是 $G(k,n)$中次数为 $e > 1$ 的一般有理曲线，则 $TG(k,n)|_X$的分裂型为

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(q_1+q_2+2)^{\oplus r_1 r_2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(q_1+q_2+1)^{\oplus (r_1(n-k-r_2)+r_2(k-r_1))} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(q_1+q_2)^{\oplus (k-r_1)(n-k-r_2)}.$$

若 $q_1+q_2-1 < (k-r_1)(n-k-r_2)$，则将序列扭变

$$0 \to T_X \to TG(k,n)|_X \to N_{X/G(k,n)} \to 0$$

用$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-q_1-q_2-2)$扭变，并比较第一上同调群，可见 $N_{X/G(k,n)}$ 必有一个等于$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(q_1+q_2)$的直和项。另一方面，若 $r_1 r_2 \neq 0$，则 $N_{X/G(k,n)}$ 也必有一个等于$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(t)$且满足 $t \ge q_1+q_2+2$的直和项。因此，法丛不可能是平衡的。然而，我们有如下定理。

定理 3.20. [CLV25，定理1。1] 设 X 是 $G(k,n)$ 中次数为 e 的一般有理曲线。那么，法丛 $N_{X/G(k,n)}$ 是 2-平衡的。

类比于 $\mathbb{P}^r$，自然会预期：当曲线的次数 e 足够大（且特征不为 2）时，一般有理曲线 $N_{X/G(k,n)}$ 的法丛是平衡的。事实上，在 [CLV25]中，作者提出了以下更精确的猜想。

猜想 3.21. [CLV25，猜想 1。2] 设 X 是 $G(k,n)$ 中次数为 e 的一般有理曲线，其中不失一般性地取 $k \le n-k$。那么， $N_{X/G(k,n)}$ 平衡当且仅当 $e=1$ 或以下情况均不发生：

- 退化例外：我们有 $e < n-k$ 和 $e \neq k$。
- 特征2 的例外情况：特征为2，且 $k=1$ 和 $e \not\equiv 1$ 模 $n-k-1$。
- 切丛分裂例外：我们有 $q_1+q_2 \le (k-r_1)(n-k-r_2)$ 以及 $r_1 r_2 \neq 0$。

最近，An Cao 在特征为 0 [Cao]时解决了以下情形的猜想：$(k,n) = (2,4)$、$(2,5)$ 和 $(2,6)$。

3.6. **超曲面中有理曲线的限制切丛**。 在特征零下，Mioranci 研究了一般超曲面中有理曲线的限制切丛，见 $\mathbb{P}^r$[Mi25b]。他的主要定理如下。

定理 3.22。 [Mi25b，定理1。1] 设 $Y \subset \mathbb{P}^r$ 是一个次数为 d的光滑 *Fano* 超曲面，且$3 \le d \le r$。

(1) 次数为 $e \le \frac{r-1}{r+1-d}$ 的有理曲线 $TY|_X$ 的受限切丛 $X \subset Y$从不平衡。(2) 一般超曲面 Y 包含次数为 e 的有理曲线，其受限切丛对每个 $e > \frac{r-1}{r+1-d}$ 都是平衡的。

在 Pl¨ucker 嵌入下，格拉斯曼流形 $G(2,4)$ 是 $\mathbb{P}^5$中的光滑二次超曲面。我们已经看到，对于 $G(2,4)$ X 上的奇次数有理曲线，受限切丛 $TG(2,4)|_X$并不平衡。Mioranci 证明，这一现象对于 $\mathbb{P}^r$中的二次超曲面上的奇次数有理曲线仍然成立。

Theo推论 3.23. [Mi25b，定理1。2] 设 $Y \subset \mathbb{P}^r$, $r \ge 3$, 是一个二次超曲面。

(1) 对于每个偶数次 $e \geq 2$，二次超曲面 Y 包含一条次数为 e 的有理曲线 X，其限制切丛 $TY|_X \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e)^{r-1}$是平衡的。(2) </style}对于奇数次有理曲线，受限切丛 绝不会是平衡的。对于每个奇数，存在一条次数为 的有理曲线，其受限切丛满足 $\mathrm{O}_{\mathbb{P}^1}(e-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e)^{\oplus(r-3)} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e+1)$（因此特别是 2-平衡的）。

研究关于 $\mathbb{P}^r$ 中的 Fano 完全交，以及更一般地，齐性簇中的 Fano 完全交的类似问题，将会很有意思。

问题 3.24。设 Y为一个 Fano 流形。确定 $TY|_X$ 的可能分裂型，其中X 是一条有理曲线。描述具有给定分裂型的$TY|_X$ 的有理曲线轨迹的不可约分支，并确定它们的维数。

3.7. 齐性簇中完全交内有理曲线的法丛。 我们先讨论 $\mathbb{P}^r$的情形。设 X 是 $\mathbb{P}^r$中一条次数为 e 的光滑有理曲线，并考虑自然映射

$$I_{X/\mathbb{P}^r} \to \mathcal{H}\mathrm{om}(N_{X/\mathbb{P}^r}, \mathcal{O}_X).$$

将其与 $\mathrm{O}_{\mathbb{P}^r}(d)$ 作张量积并取整体截面，可得到一个自然映射

$$\phi\colon H^0(I_{X/\mathbb{P}^r}(d)) \to \mathrm{Hom}(N_{X/\mathbb{P}^r}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(ed)).$$

主要观察结果是，若 $d \geq 3$ 且 X 是一条次数为 $e \leq r$、张成一个 $\mathbb{P}^e$ 的有理曲线，则此映射是满射（见 [CR19, §3]）。由此可得以下定理。

定理 3.25。 [CR19，主定理] 设 $2 \leq d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_c$ 为满足$\sum_{i=1} d_i \leq r$的正整数。设 $Y \subset \mathbb{P}^r$ 为一个一般的、类型为$(d_1, \ldots, d_c)$的 *Fano* 完全交。

(1) 若 $d_c \geq 3$，则 Y 包含每个次数为$1 \leq e \leq r$的、具有平衡正规丛的有理曲线。(2) 若 $d_1 = \cdots = d_c = 2$ 且 $r \geq 2c+1$，则 Y 包含每个次数为 $1 \leq e \leq r-1$的、具有平衡正规丛的有理曲线。

Ran 也研究了 Fano 超曲面上的有理曲线（见 [R21, R23a] ）.

若存在一个簇 Z 和一个态射 $e\colon Z \times \mathbb{P}^1 \to Y$，使得其在乘积上的诱导态射为：则称不可约簇 Y 是可分有理连通的（SRC）。

$$e^{(2)}\colon Z \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to Y \times Y,$$

是光滑的（因而是占优的）。关于 SRC 簇的性质，请参阅 [K96] 。若有理曲线 $X \subset Y$ 的法丛 $N_{X/Y}$ 整体生成，或者等价地，若 $N_{X/Y}$ 的分裂型中所有直和项的次数均非负，则称曲线 X 是自由的。若 $N_{X/Y}$ 的分裂型中所有直和项的次数均为正，或者等价地，若 $N_{X/Y}$ 丰沛，则称曲线 X 是非常自由的。若 Y 是代数闭域上的光滑簇，则当且仅当 Y 包含一条非常自由的有理曲线 [K96, 定理 IV.3.7] 时， Y 是 SRC。

在特征零下，有理连通性与可分有理连通性一致，且光滑法诺簇都是 SRC [K96, 定理 V.2.13]。Koll´ar 指出，SRC 是将有理连通性推广到任意特征时合适的概念，并提出了这样一个问题：正特征下的每个光滑法诺簇都是 SRC 吗？ $\mathbb{P}^r$ [CZ14, Ti15] 对一般的 Fano 完全交给出了肯定回答。类似地，若 Y 是任意一个类型为 $(d_1, \ldots, d_c)$、法诺指标至少为 2 的光滑 Fano 完全交，且基域的特征大于 $\max(d_1, \ldots, d_c)$，则 Y 是 SRC [STZ18]。定理 3.25 有以下重要推论（见 [CR19, 定理 5.6]）。

定理 3.26. 设 $Y \subset \mathbb{P}^r$ 是一个类型为 $(d_1, \ldots, d_c)$的一般 *Fano*完全交。令$d = \sum_{i=1}^{c} d_i$。那么 Y包含任意次数 $e \geq \left\lceil \frac{r-c+1}{r-d+1} \right\rceil$的非常自由有理曲线。特别地， Y是 *SRC*。

注 3.27. 已知某些特殊的 Fano 超曲面不存在低次数的非常自由曲线 [She12a, Br13,Che25]。

这一讨论可以推广到其他齐性簇或加权射影空间中的 Fano 完全交（见 [CS22]）。主要技术工具是以下定理。

定理 3.28。 [CS22, 定理 2。1] 设 $Y \subset \mathbb{P}^r$ 是一个射影簇，其理想层由次数 k的元素生成。设 X 是 Y的光滑轨迹中包含的一条次数为 e 的有理正规曲线。设 $1 \le c \le$维数$(Y) - 2$是一个整数。对于 $1 \le i \le c$，设 $D_i = d_i H + E_i$是 Y上的 ***Cartier*** 除子类，其中 $d_i \ge$最大值$(k、3)$， H 是超平面类，且 E_i 是有效除子，使得限制映射

$$H^0(Y, E_i) \to H^0(X, E_i|_X)$$

是满射。给定一个满射

$$q \in \mathrm{Hom}\left(N_{X/Y}, \bigoplus_{1\le i\le c} \mathcal{O}(D_i)|_X\right),$$

存在超曲面 Z_i 满足 $[Z_i] = D_i$，使得如果 $Z = \bigcap_{i=1}^c Z_i$，那么 Z 沿着 C 光滑，余维为c，且 $N_{X/Z} \cong$ 核 q。

例如，当 $Y = G(k, n)$ 时，定理 3.28 可具体化为以下定理。

定理 3.29。 设 $d_1, \dots, d_c \ge 3$ 为满足 $\sum_{i=1}^c d_i < n$ 的整数，其中 $c \ge 1$。设 X 是 $G(k,n)$ 中次数为 e 的有理正规曲线，即次数为 e 的有理曲线，其在 ***Pl¨ucker*** 嵌入下的像张成一个 $\mathbb{P}^e$，并设 Z_i 是 $G(k,n)$ 中包含 X 的一般次数为 d_i 的超曲面。设 $Z = \bigcap_{i=1}^c Z_i$。则 $N_{X/Z}$ 是平衡的。特别地， Z 是 ***SRC***。

关于射影空间乘积、旗簇、舒伯特簇和加权射影空间的类似结论，请参见 [CS22] 。以下问题在一般情况下仍远未解决。

问题 3.30。 设 Y 是 Fano 流形。确定 $N_{X/Y}$ 的可能分裂型，其中 X 是 Y 中的一条有理曲线。描述 $N_{X/Y}$ 具有给定分裂型时有理曲线轨迹的不可约分支，并确定它们的维数。

在描述当 Y 是 $\mathbb{P}^r$ 中的一般超曲面且 X 是次数较小的有理曲线时，其法丛具有指定分裂型的有理曲线轨迹方面，已取得一些进展。例如，H. Larson [L21]证明， $\mathbb{P}^r$ 中一般超曲面Y 上、且 $N_{L/Y}$ 具有指定分裂型的直线 L轨迹具有预期维数。H. Larson 进一步计算了该轨迹在格拉斯曼流形 $G(2, r+1)$中的类。类似地，Mioranci 研究了 $\mathbb{P}^r$ 中一般超曲面 Y 上、且 $N_{X/Y}$ 具有指定分裂型 [Mi25a]的有理正规曲线 X 轨迹。

4. Genus 1 curves

在本节中，我们讨论射影空间中亏格 1 曲线的受限切丛与法丛。

4.1. 亏格 1 曲线上的半稳定丛。 亏格 1 曲线上的向量丛已由 Atiyah [A57]分类。设 X 为一条亏格为 1 的曲线。当且仅当 d 与 r 互素时， X 上存在秩为 r、次数为 d的稳定向量丛。在这种情况下，这类稳定向量丛构成 X的雅可比簇上的一个主齐性空间。若 $\gcd(r, d) = a$，令 $r = ar_1$ 和 $d = ad_1$。那么，每个秩为 r 、次数为 d 的不可分解向量丛都可表示为某个秩为 r_1 、次数为 d_1 的稳定向量丛对自身的迭代扩张（因此特别是半稳定的）。此外， X 上的任意向量丛都可写成不可分解向量丛的直和，并且该直和分解中出现的不可分解向量丛是唯一的。

例 4.1。设 L 是 X 上的一个线丛，$p \in X$ 是一个点。那么 $\mathrm{Ext}^1(L, L)$ 和 $\mathrm{Ext}^1(L(p)\ L)$ 都是一维的。因此，存在（相差一个比例因子意义下）唯一的非分裂扩张

$$0 \to L \to V_L \to L \to 0 \quad \text{and} \quad 0 \to L \to V_{L,p} \to L(p) \to 0.$$

向量丛 V_L 不可分解，且向量丛$V_{L,\ p}$ 是稳定的。

给定任意自同构 $\phi: X \to X$，我们通过拉回得到诱导作用 ϕ_a^*:Picard簇$^a(X) \to$Picard簇$^a(X)$。映射 $f:$Picard簇$^a(X) \to$Picard簇$^b(X)$是自然的，如果对每个自同构 $\phi: X \to X$，映射 f与诱导作用交换：

$$\phi_b^* \circ f = f \circ \phi_a^*$$

设 $\phi: X \to X$ 是由一个阶为 a的点所作的平移。由于 ϕ_a^* 在Picard簇$^a(X)$上是恒等映射，若$f:$ Picard簇$^a(X) \to$Picard簇$^b(X)$是自然映射，则 ϕ_b^*也必须是恒等映射。我们得出如下重要观察。

引理4.2. [CLV25b，引理2.7] 若 $f:$Picard簇$^a(X) \to$Picard簇$^b(X)$ 是自然映射，则 a 整除 b。

固定一条亏格1曲线 X，并考虑 X 到 $\mathbb{P}^r$ 的次数为 d的嵌入。$T\mathbb{P}^r|_X$ 与$N_{X/\mathbb{P}^r}$ 的Harder–Narasimhan 滤过的连续商丛的第一陈类典范地与该嵌入相关联。由于具有固定的$\mathrm{O}_X(1) \in$ Picard簇$^d(X)$的此类嵌入空间构成一个有理簇，且从有理簇到阿贝尔簇的每一个有理映射都是常值映射，因此这些第一陈类自然地依赖于$\mathrm{O}_X(1) \in$Picard簇$^d X$。因此，由引理4.2，对于一般的此类嵌入，它们的次数必须能被 d 整除。这对丛 $T\mathbb{P}^r|_X$与$N_{X/\mathbb{P}^r}$可能的Harder–Narasimhan 滤过施加了很强的条件。

4.2. **亏格 1 曲线在 $\mathbb{P}^r$中的限制切丛**。我们说明如何利用这一观察来证明 $T\mathbb{P}^r|_X$ 对于一般非退化亏格1曲线 X 、次数为 d时的半稳定性。考虑欧拉正合列到 X的限制

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(1)^{\oplus(r+1)} \to T\mathbb{P}^r|_X \to 0.$$

假设 $T\mathbb{P}^r|_X$不是半稳定的。令 Q 为 $T\mathbb{P}^r|_X$的最小斜率半稳定商丛，其次数必定能被 d整除。此外，由于 Q 是 $\mathrm{O}_X(1)^{\oplus(r+1)}$ 的商丛，若Q 的斜率为 d，那么 Q 必定是 $\mathrm{O}_X(1)$ 的迭代扩张，并且存在一个到 $\mathrm{O}_X(1)$ 的满射。将其与来自欧拉正合列的映射复合，我们便会得出 $\mathrm{O}_X(1)$ 的截面满足一个线性关系，这与 X 非退化的假设矛盾。因此，我们得出结论：

$$d < \mu(Q) < \frac{d(r+1)}{r}.$$

假设 Q的秩为 s。那么，将这些不等式乘以 s，可得

$$ds < \deg(Q) < ds + \frac{ds}{r}.$$

由于 d 整除 $\deg(Q)$，我们得到一个形如以下形式的整数 q

$$s < q < s + \frac{s}{r}.$$

由于 $s < r$，这样的整数 q不可能存在，由此产生矛盾。我们得出结论，$T\mathbb{P}^r|_X$是半稳定的。事实上，Farkas 和 E. Larson 证明了以下更详细的定理。

定理 4.3。[FL25，定理1。2] 设 $X \subset \mathbb{P}^r$ 是亏格为1 且次数为 e 的一般曲线。设$a =$ 最大公约数(r, e)，并设 $r = ar_1$ 和 $e = ae_1$。则

$$T\mathbb{P}^r|_X \cong \bigoplus_{i=1}^{a} V_i,$$

其中 V_i 是 X 上秩为 r_1、次数为$(r+1)a_1$ 的稳定向量丛，并且 (行列式$(E_1)\dots,$ 行列式(E_a)) 在 $\prod_{i=1}^{a}$Picard簇$^{(r+1)d_1}$ 中为一般点。

4.3. **亏格为1的曲线在 $\mathbb{P}^r$中的法丛**。

例 4.4。 设 X 是 $\mathbb{P}^3$中的一条次数为4、亏格为1的非退化曲线。那么 X 是两个二次曲面的完全交，并且 $N_{X/\mathbb{P}^3} \cong \mathsf{O}_X(2) \oplus \mathsf{O}_X(2)$。

例 4.5。 设 X 是 $\mathbb{P}^5$中的一条次数为6、亏格为1的非退化曲线。若基域的特征不为2，则嵌入线丛 $\mathsf{O}_X(1)$有四个不同的平方根。每个平方根都给出 X 到 $\mathbb{P}^2$ 中的一个嵌入，使其成为一条次数为3的曲线。曲线 X 包含在与这四个平方根对应的四个Veronese曲面中。因此， $N_{X/\mathbb{P}^4}$ 是四个不同的次数为9的线丛的直和。在特征为2时，线丛$\mathsf{O}_X(1)$只有两个平方根，而法丛是这两个丛的秩为2的非分裂自扩张的直和。

Ein 和 Lazarsfeld [EiL92, 定理 4.1] 证明了， $\mathbb{P}^r$中次数为 $r+1$ 且亏格为 1 的椭圆正规曲线（即非退化曲线）的法丛是半稳定的。

定理 4.6 ([CS25, 定理 3.1])。 设 $X \subset \mathbb{P}^r$ 是一条次数为 $d \geq r+1 \geq 4$、亏格为 $g = 1$ 的一般 *BN* 曲线。则 $N_{X/\mathbb{P}^r}$ 是半稳定的。

证明。 将法丛替换为映射 $X \to \mathbb{P}^2$ 的法层，从而将该论述扩展到覆盖 $r = 2$ 的情形；法层是一个线丛，因而自动半稳定。这构成了我们关于 r 的归纳法的基例。对于归纳步骤，我们使用从一般点 $p \in X$ 投影得到的正合列：

$$0 \to [N_{X\to p} \simeq \mathcal{O}_X(1)(2p)] \to N_{X/\mathbb{P}^r} \to N_{\bar{X}/\mathbb{P}^{r-1}}(p) \to 0.$$

根据我们的归纳假设，商是半稳定的。因此，如果 $N_{X/\mathbb{P}^r}$ 不是半稳定的，其最大不稳定子丛 S 的斜率将满足：

$$d + \frac{2d}{r-1} = \mu(N_{X/\mathbb{P}^r}) < \mu(S) \leq \max\left(\mu(N_{X\to p}) = d+2, \mu(N_{\bar{X}/\mathbb{P}^{r-1}}(p)) = d + \frac{2d-2}{r-2}\right) < d + \frac{2d}{r-2}.$$

根据引理4.2及后续讨论，deg(S)是 d的倍数。记 s 为 S的秩，那么deg(S)/d将是满足以下条件的整数

$$s + \frac{2s}{r-1} < \frac{\deg(S)}{d} < s + \frac{2s}{r-2}.$$

但对于任何满足 $0 < s < r-1$的 s，都不存在这样的整数。 □

事实上，我们可以得到更精确的信息。

命题4.7。 [CS25，命题3。3] 设 $r \geq 4$，且设 $C \subset \mathbb{P}^r$ 为次数为 d、亏格为 $g = 1$ 的一般非退化曲线，其中 $r-1$ 整除 $2d$。

(1) 如果基域的特征为2，且 r 为奇数，并且 $r-1$ 不整除 d，那么$N_{C/\mathbb{P}^r}$ 是$\frac{r-1}{2}$ 个不可分解的秩 2 向量丛的直和。(2) 否则， $N_{C/\mathbb{P}^r}$ 是互不相同的线丛的直和。

5. Higher genus curves

本节将综述 $\mathbb{P}^r$ 中高亏格曲线的限制切丛和法丛稳定性的一些最新进展。在本节中，我们始终假设 $g \geq 2$。令

$$\rho(g, r, d) := g - (r+1)(g - d + r)$$

表示布里尔–诺特数。根据 Brill–Noether 定理，一般的亏格为 g 的光滑射影曲线 X 存在一个次数为 d、映至 $\mathbb{P}^r$ 的非退化映射，当且仅当布里尔–诺特

数 $\rho(g,\ r,\ d) \geq 0$ [GH80, ACGH85, O14, JP24]。当 $r \geq 3$ 时，这类一般映射的像是一个嵌入 [EH83]。此外，存在唯一一个支配模空间 M_g 的希尔伯特概形分支，其一般成员参数化了射影空间 $\mathbb{P}^r$ [EH87] 中亏格为 g、次数为 d 的非退化曲线。该分支的成员称为 Brill–Noether 曲线，简称 BN 曲线。

备注 5.1. 提醒读者，希尔伯特概形中可能还存在其他参数化次数为 d 、亏格为 g的非退化光滑曲线的不可约分支。然而，这些不可约分支参数化的是特殊曲线，且不支配 M_g。

讨论“一般曲线”的限制切丛或法丛的稳定性时，自然会重点关注 BN 曲线。

例 5.2. 希尔伯特概形中有许多曲线的不可约分支，其一般成员的法丛并非（半）稳定。例如，令 X 为次数为 $1 < d_1 \leq \cdots \leq d_{r-1}$的超曲面的完全交。则

$$N_{X/\mathbb{P}^r} \cong \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathcal{O}_X(d_i).$$

因此， $N_{X/\mathbb{P}^r}$ 是半稳定的当且仅当 $d_1 = \cdots = d_{r-1}$ ，并且当 $r \geq 3$时永远不会稳定。

5.1. **BN 曲线的限制切丛**。 Farkas 和 E. Larson [FL25], 确定了高亏格 BN 曲线的限制切丛的稳定性，并推广和统一了包括 [BH98、BBN08、Mis08、BBN15]在内的早期研究成果。

例 5.3。 当 $g = 2$ 和 $d = 2r + 2$时，Bhosle、Brambilla-Paz 和 Newstead [BBN08] 指出， $H^0(X,\ \Omega_{\mathbb{P}^r}|_X \otimes \omega_X) \neq 0$。因此，存在一个非零态射 $T\mathbb{P}^r|_X \to \omega_X$。由于这两个向量丛的斜率均为 2，我们得知 $T\mathbb{P}^r|_X$ 不是稳定的。

定理 5.4。 [FL25，定理1。3] 设 $X \subset \mathbb{P}^r$ 是亏格为 $g \geq 2$的一般 *BN* 曲线。那么，除非 $g = 2$、$d = 2r$ 和 $r \geq 3$， $T\mathbb{P}^r|_X$是稳定的。在后一种情况下， $T\mathbb{P}^r|_X$ 是严格半稳定的。

5.2. **BN 曲线的法丛**。 本节综述一般 Brill–Noether 曲线法丛稳定性的最新进展。我们对法丛稳定性的了解，不如对限制切丛稳定性的了解全面。

若三个非负整数 $(g,\ r,\ d)$ 满足 $\rho(g,\ r,\ d) \geq 0$，则称其为 BN 三元组。若次数为 d 、亏格为 g 的一般 BN 曲线在 $\mathbb{P}^r$ 中的法丛是（半）稳定的，则 BN 三元组 $(g,\ r,\ d)$ 是（半）稳定的。否则，$(g,\ r,\ d)$ 是不稳定的。

有若干 个例子表明，一般 BN 曲线的法丛并不稳定 .

例 5.5（典范曲线）。 与亏格为 4 和 6 的典范曲线相对应的三元组 (4， 3，6) 和 (6， 5， 10) 是不稳定的，下面解释原因。亏格为 4 的典范曲线 X 是 $\mathbb{P}^3$ 中的一个 (2，3) 完全交，且该曲线在二次曲面中的法丛会使其不稳定 $N_{X/\mathbb{P}^3}$。亏格为 6 的一般典范曲线 X 位于一个次数为 5 的德尔佩佐曲面 S 上，且 $N_{X/S}$ 会使其不稳定 $N_{X/\mathbb{P}^5}$。与亏格为 5 的典范曲线相对应的 BN 三元组 (5，4，8) 是半稳定但不稳定，因为亏格为 5 的一般典范曲线 X 是 $\mathbb{P}^5$ 中的一个 (2，2，2) 完全交，因此$N_{X/\mathbb{P}^5} = \mathrm{O}_X(2)^{\oplus 3}$。

例 5.6（亏格 2 曲线）。我们现在说明，BN 三元组 (2，3，5)、(2，4，6)、(2，5，7) 和 (2，6，8) 都是不稳定的。每条亏格 2 曲线 X 都是超椭圆曲线，并且位于一个有理曲面卷曲面 S上；该卷曲面由超椭圆映射的纤维所张成的直线扫成。法丛 $N_{X/S}$ 是一个次数为 12 的线丛，对于这 4 个三元组而言，它会使 $N_{X/\mathbb{P}^r}$ 不稳定。

例 5.7（二次曲面上的曲线）。设 X 是一个次数为 7、亏格为 3 的一般 BN 曲线，位于 $\mathbb{P}^4$中。则 X 位于一个 3 维二次曲面向量空间上，其剩余部分是一条三割线 ℓ。设$\ell \cap X = \{p_1, p_2, p_3\}$。那么

$$N_{X/\mathbb{P}^4} \cong \bigoplus_{i=1}^{3} \mathcal{O}_X(2)(-p_i),$$

且半稳定但不稳定。

类似地，设 X 是 $\mathbb{P}^4$ 中的一条一般 BN 曲线，且满足 $(g, d) = (6, 9)$ 或 $(7, 10)$。那么 X 位于一个二次超曲面 Q 上，而商丛 $N_{X/\mathbb{P}^4} \to \mathrm{O}_X(2)$ 使法丛不稳定。

20世纪80年代，数位作者研究了低次数、低亏格情形下 $\mathbb{P}^3$ 中 BN 曲线的法丛稳定性。Sacchiero 证明了 $(g, d) = (2, 6)$ 的稳定性 [S83]，；Newstead 证明了 $(g, d) = (9, 9)$ 的稳定性 [N83]，；Ellia 证明了 $(g, d) = (3, 6)$ 的稳定性 [E83]，；Ballico 和 Ellia 则证明了 $(g, d) = (5, 7)$ 的稳定性[BE84]。Ellingsrud 和 Hirschowitz [ElH84] 宣布证明了次数和亏格处于渐近范围内的空间曲线法丛的稳定性。最终，作者在 $\mathbb{P}^3$ 中完整分类了稳定 BN 三元组。

定理5.8。 [CLV22，定理 1] 设 X 是 $\mathbb{P}^3$ 中次数为 d 、亏格为$g \geq 2$的一般 *BN* 曲线。那么，$N_{X/\mathbb{P}^3}$ 是稳定的，但以下情形除外：$(g, d) \in \{(2, 5), (4, 6)\}$。

注 5.9。 请注意，我们在 $\mathbb{P}^3$ 中遇到了两个例外情形，即以及 $(4, 3, 6)$，分别见例5.6和例 $(2, 3, 5)$ 5.5。

Coskun、Jovinelly 和 E. Larson [CJL26]即将发表的工作对 $\mathbb{P}^4$ 中稳定 BN 三元组进行了分类。

一般典范曲线的法丛的稳定性也受到了广泛关注。Aprodu、Farkas 和 Ortega [AFO16] 猜想，亏格至少为 7 的一般典范曲线的法丛是稳定的，并解决了情形 $g = 7$。Bruns [B17] 证明了当 $g = 8$ 时的稳定性。作者刻画了半稳定的典范三元组 $(g, g-1, 2g-2)$。

定理 5.10。 [CLV25b，定理1。1] 设 X 是一条亏格为 $g \notin \{4, 6\}$ 的一般典范曲线。则 $N_{X/\mathbb{P}^{g-1}}$ 是半稳定的。特别地，若 $g \equiv 1$ 或 3 (模 6)，则 $N_{X/\mathbb{P}^{g-1}}$ 是稳定的。

注 5.11。 设 H 表示 $\mathbb{P}^g$ 上的超平面类。当 $3 \leq g < 10$ 或 $g = 11$ 时，一般典范曲线可作为 K3 曲面的超平面截面得到（参见 [Mu92, Mu96]），因此定理 5.10 蕴含，次数为 $2g-2$ 的一般 K3 曲面在 $\mathbb{P}^g$ 中的法丛当 $g \in \{3, 5, 7, 8, 9, 11\}$ 时是 μ_H-半稳定的。

接下来我们将说明证明该定理所涉及的几个关键思路。证明通过退化到一条可约结点曲线 $E \cup R$ 来进行，其中 E 是次数为g的椭圆曲线，而 R 是一条次数为 $g-2$、经过 E 的超平面截面的有理曲线。

根据引理 2.7，只需证明 $N_{E\cup R}|_E$ 与 $N_{E\cup R}|_R$ 均为半稳定。当 g 为奇数时，这一策略可以奏效；而当 g 为偶数时， $N_{E\cup R}|_R$ 是不稳定的，因此需要更精细的分析。为简单起见，我们在此假设 $g = 6k+3$，并专注于限制$N_{E\cup R}|_E$。在这种情况下，我们找到 $N_{E\cup R}|_E$ 的特化 N_b，它们可嵌入正合列

$$0 \to S_b \to N_b \to Q_b \to 0$$

其斜率为

$$\mu(S_b) = 6k + 6 + \frac{1}{k} > \mu(N_b) = 6k + 6 + \frac{6}{6k+1} > \mu(Q_b) = 6k + 6 + \frac{5}{5k+1}. \tag{3}$$

请注意，这意味着 N_b 是不稳定的！尽管如此，这些斜率非常接近；事实上，它们是分母不超过 $6k+1$ 的法里数列中的相邻分数。使我们能够从不稳定 特化推出半稳定性的关键依据如下：

引理 5.12。 [CLV25b，引理 2。6] 设 N_b 是由光滑曲线 C 上的有理基底 B 参数化的一族向量丛，其中 $b \in B$。假设对于 b_1、$b_2 \in B$，特化 N_{b_i} 满足以下正合列：

$$0 \to S_i \to N_{b_i} \to Q_i \to 0$$

其中 S_i 和 Q_i 稳定，其斜率由 (3) 给出。若 $c_1(S_1) \neq c_1(S_2)$，则 N 的一般纤维是半稳定的。

证明概要。关于 S_i 和 Q_i 的假设意味着 S_i 是 N_{b_i} 的唯一不稳定子丛。因此，如果 N 的一般纤维不稳定，那么它的最大不稳定子丛必定会在 b_i 处特殊化为 S_i。其最大不稳定子丛的第一陈类因而会给出一个非常值有理映射 $B \dashrightarrow \operatorname{Pic} C$，这就导致矛盾。□

备注 5.13。这一论证在更一般的情形下也适用；关于哪些斜率是允许的精确刻画（以 Farey 序列表述），见 [CLV25b，Lemma 26]。

通过对 R 作适当退化来构造相应的特化，使得从某个线性空间作投影可得到所需的正合列。

问题 5.14。加强定理 5.10，证明当 $g \geq 7$ 时，一般典范曲线的法丛是稳定的。

注 5.15。即使一般 BN 曲线的法丛稳定，某些特殊 BN 曲线的法丛也可能不稳定。例如，三重点典范曲线和四重点典范曲线的法丛总是不稳定，下面我们对此作出解释。三重点典范曲线 X 包含在有理正规曲面滚动体 S 中。法丛 $N_{X/S}$ 是 $N_{X/\mathbb{P}^{g-1}}$ 的一个不稳定子丛。在特征零时，Fontana 最近证明，对于一般三角曲线 [，这就是 $N_{X/\mathbb{P}^{g-1}}$ 的 Harder–Narasimhan 滤过 Fo25a]。

类似地，四重点典范曲线 X 位于有理正规三维滚动体 S 上。法丛 $N_{X/S}$ 使 $N_{X/\mathbb{P}^{g-1}}$ 不稳定。曲线 X 是 S 中的一个完全交。当亏格为奇数时，定义 X 的两个因子类相同，且法丛 $N_{X/S}$ 是半稳定的。Fontana 证明，对于一般的奇亏格四角曲线，$N_{X/S} \subset N_{X/\mathbb{P}^{g-1}}$ 是 Harder–Narasimhan 滤过。当亏格为偶数时，定义 X 的两个因子类不相同，且 X 位于一个特殊曲面 $Y \subset S$ 上（这类似于例 5.5 中 $g = 6$ 情形下的德尔佩佐曲面）。于是 $N_{X/Y}$ 使 $N_{X/S}$不稳定。在特征零时，Fontana 证明，对于一般的偶亏格四角曲线，$N_{X/Y} \subset N_{X/\mathbb{P}^{g-1}}$ 是 Harder–Narasimhan 滤过 [Fo25b]。

这些例子引出了以下问题。

问题 5.16. 设 X 为亏格 g、冈纳数 $4 < k < \lfloor (g+3)/2 \rfloor$ 的一般曲线。$N_{X/\mathbb{P}^{g-1}}$是否（半）稳定?

问题 5.17. 设 X 为 $\mathbb{P}^g$ 中 K3 曲面在 $g = 10$ 与 $g \geq 12$ 情形下的一般超平面截面。法丛 $N_{X/\mathbb{P}^{g-1}}$ 是否（半）稳定?

问题 5.18. 确定法丛不稳定的典范曲线的轨迹 e.

More 一般地，可以提出以下问题。

问题 5.19. 证明一般的 n-典范曲线的法丛是稳定的（前提是g 和 n 足够大）。确定法丛不稳定的 n-典范曲线的轨迹。给定一条亏格为 g的任意曲线 X，是否存在 $n \gg 0$，使得 X 的 n-典范嵌入的法丛稳定?

与稳定性密切相关的一个概念是插值。粗略地说，插值问题询问给定类型的曲线最多能经过多少个一般点。通过变形理论，这个问题可以改写为关于法丛上同调性质的问题。

定义 5.20. 曲线 X 上的向量丛 V 满足插值条件，如果 $H^1(X,V) = 0$，并且对于所有 $e > 0$，都存在一个次数为 e、位于 X 上的有效除子 D，使得 $H^0(X,V(-D)) = 0$ 或 $H^1(X,V(-D)) = 0$。

基于 Atanasov、E. Larson 和 Yang 的早期工作 [ALY19], ，E. Larson 和 Vogt 对一般 BN 曲线的法丛满足插值条件的情形进行了分类。

定理5.21。 [LV23，定理1。2] 次数为 d、亏格为 $g \geq 1$ 的一般 *BN* 曲线的法丛满足插值条件，但以下情形除外：

$$(g,r,d) \in \{(2,3,5),(4,3,6),(2,4,6),(2,5,7),(6,5,10)\}$$

一般而言，插值和稳定性是不同的概念。不过，当秩整除次数时，插值意味着半稳定性。

推论5.22 （由 [LV23], 参见 [V18，注记1。6]推出）。 设 (g,r,d) 是一个 *BN* 三元组，满足$r-1$ 整除 $2d+2g-2$。假设

$$(g,r,d) \notin \{(2,3,5),(4,3,6),(2,5,7)\}.$$

那么，对于类型为 (g,r,d) 的一般 *BN* 曲线 X， $N_{X/\mathbb{P}^r}$ 是半稳定的。

证明. 若 $r-1$ 整除 $2d+2g-2$，则 $\mu(N_{X/\mathbb{P}^r})$为整数。设 D 为 X 上次数为 $\mu(N_{X/\mathbb{P}^r}) - g + 1$的除子，使得 $H^0(X,N_{X/\mathbb{P}^r}(-D)) = 0$或 $H^1(X,N_{X/\mathbb{P}^r}(-D)) = 0$。由于$\chi(X,N_{X/\mathbb{P}^r}(-D)) = 0$，我们实际上必有

$$H^0(X,N_{X/\mathbb{P}^r}(-D)) = H^1(X,N_{X/\mathbb{P}^r}(-D)) = 0.$$

设 V为 $N_{X/\mathbb{P}^r}$的非零子丛。则我们有 $H^0(X,V(-D)) = 0$，因此

$$\chi(X,V(-D)) = \mathrm{rk}(V)\cdot(\mu(V) - \mu(N_{X/\mathbb{P}^r}))$$

为非正，从而 $\mu(V) \leq \mu(N_{X/\mathbb{P}^r})$。 □

注记 5.23. 例外情形(2,4,6)与(6,5,10)未出现在该推论中，因为$r-1$ 不整除 $2d+2g-2$。

鉴于这些定理，自然可以猜想如下结论。

猜想 5.24. [CLV22，猜想 1。1] 除有限多个以外，所有满足 $g \geq 2$ 的 *BN* 三元组 (g,r,d) 都是稳定的。

Ballico 和 Ramella [BR99] 证明了，若 $g \geq 2r$ 且 $d \geq 2g+3r+1$，则一般 BN 曲线具有稳定法丛。最近，Ran 针对 $\mathbb{P}^r$ 中 BN 曲线的法丛，以及更一般地针对超曲面[R23a] 中曲线的法丛，得到了不同的渐近（半）稳定性结果。Coskun 和 Smith 对这些结果进行了加强和推广，为猜想 6.5 提供了一些证据。

定理 5.25. [CS25，定理 1。1] 设 $X \subset \mathbb{P}^r$ 是次数为 d、亏格为 $g \geq 2$ 的一般 *BN* 曲线。设 $u = \left\lfloor \frac{(r+1\ 2)()}{2\ r-1} \right\rfloor$。令 ~~$k$ 为~~满足 $(k-1)u < g-1 \leq ku$ 的整数。则若满足以下条件之一， $N_{X/\mathbb{P}^r}$ 是半稳定的：

(1) $g \geq \binom{r-1}{2} + 2 + \left\lceil \frac{5r^2-7r}{2(r-1)} \right\rceil r(r-1)$,

(2) $d \geq \min\left(g + \frac{r^2}{4} + 2r - 3, (k+1)(r+1), (g-1)(2r-3) + r + 1\right)$.

令 $b_2(r)$ 为满足以下条件的最小整数：对于所有的 $d \geq b_2(r)$，都存在正整数 d_1、d_2，使得 $d = d_1 + d_2$、 d_1、$d_2 \geq r+1$，且 $\gcd(r-1$、$2d_1+1) = 1$。若 $p \geq 5$ 是不整除 $r-1$ 的最小素数，则 $b_2(r) \leq 2r + \frac{p-1}{2}$。一般而言， $b_2(r) = 2\overline{r} + O(\log(r))$，且 $b_2(r) \leq \frac{5r-3}{2}$。事实上，若 $r \geq 16\overline{36,}$ 则 $b_2(r) \leq 2.01r + 2.015$。沿用定理 5.25 中的记号，我们有：

定理 5.26。 [CS25，定理 1。2] 设 $X \subset \mathbb{P}^r$ 是一条次数为 d 、亏格为$g \geq 2$的一般 *BN* 曲线。那么，若满足以下任一条件， $N_{X/\mathbb{P}^r}$ 就是稳定的：

(1) $g \geq \binom{r-1}{2} + 3 + \left\lceil \frac{2(r+1)b_2(r)+3r^2-13r-2}{2(r-1)} \right\rceil r(r-1)$,

(2) $d \geq b_2(r) + \min\left(g + \frac{r^2}{4} + r - 5, k(r+1), (g-1)(2r-3)\right)$.

特别地，我们得到以下推论。

推论 5.27。 对于每个 r，只有有限多个 *BN* 三元组(g, r, d) 不是（半）稳定的 .

问题 5.28。 对不是（半）稳定的 BN 三元组进行分类。

人们可以更详细地探讨 $N_{X/\mathbb{P}^r}$ 不稳定处的几何轨迹。关于以下问题，似乎几乎一无所知。

问题 5.29。 描述法丛不稳定的 BN 曲线的轨迹。确定该轨迹的维数及不可约分支的数量，并计算每个不可约分支的一般 HN 滤过。

到目前为止，我们主要集中讨论环境簇为 $\mathbb{P}^r$ 的情形。当环境簇不是 $\mathbb{P}^r$ 时，即使 Brill–Noether 定理的类似结果通常也尚未知晓。

问题 5.30。 确定其他齐性簇中的曲线或齐性簇中的完全交的法丛何时稳定。当它们不稳定时，确定其 HN 滤过。

Ran 已经取得了关于 Fano 超曲面上曲线的一些部分结果（见 [R23b、R24、R25]）。

我们只考察了 X 为曲线时的这些问题。对于高维簇，也可以提出类似的问题。

问题 5.31。 设 $f\colon \mathbb{P}^s \to \mathbb{P}^r$ 为一般非退化映射。法丛 N_f 是否稳定?

众所周知，当 f 是 d重 Veronese 嵌入时， N_f 是半稳定的；至少在特征为零时如此（例如参见 [Sha24，定理1.1]）。

问题 5.32. 设 X 是 $\mathbb{P}^r$中的一般有理正规卷曲。$N_{X/\mathbb{P}^r}$ 是否稳定？将 X 替换为任意其他簇时，也可以提出同样的问题。若能解决这一问题，将对一些受到深入研究的簇类非常有意义，例如 K3 曲面、阿贝尔簇和光滑托里克簇。当 X 的皮卡秩较大时，也可以针对不同的极化考虑这一问题。

6. Bundles associated to covers

在最后这一节中，我们将综述一些关于与曲线有限覆盖相关联的自然丛的近期结果。

6.1. **Tschirnhausen 丛**。 设 $f\colon X \to Y$是两个非奇异、不可约射影曲线之间的有限映射，其次数为 r，两条曲线的亏格分别为 $g(X) = g$ 和 $g(Y) = h$；这些曲线定义在特征为零或大于 r的代数闭域上。若诱导的映射 $f\colon X \to Y$在étale 基本群 $f_*\colon \pi_1^{\text{ét}}(X) \to \pi_1^{\text{ét}}(Y)$上是满射，则称映射为本原映射。一般而言，每个有限映射 $f\colon X \to Y$都唯一地分解为一个本原映射 $f^{\text{pr}}\colon X \to Z$后接一个 étale 映射 $f^{\text{ét}}\colon Z \to Y$，其中 Z对应于 $\pi_1^{\text{ét}}(Y)$中 $f_*\pi_1^{\text{ét}}(X)$的像。

由函数的拉回给出的包含映射 $\mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ 有一个由 $\frac{1}{r}$ 乘以迹映射构成的分裂。因此，

$$f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y \oplus \mathrm{Tsch}^\vee(f)$$

对于向量丛 $\mathrm{Tsch}^\vee(f)$。$\mathrm{Tsch}^\vee(f)$ 的对偶称为与 f 相关的 Tschirnhausen 丛 $\mathrm{Tsch}(f)$。向量丛 $\mathrm{Tsch}(f)$ 在研究曲线的覆盖以及

Hurwitz 概形的几何中发挥着核心作用。[DP22] 和 [LL24] 提出了一个自然问题，并给出了渐近意义下的答案：何时 Tsch(f) 是稳定的。

由于 $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y \oplus \mathrm{Tsch}(f)^\vee$，我们有

$$\mathrm{rk}(\mathrm{Tsch}(f)) = r-1 \quad \text{and} \quad \deg(\mathrm{Tsch}(f)) = \deg(f_*\mathcal{O}_X).$$

设 b 为 $f\colon X \to Y$ 的分歧除子的次数。由黎曼–罗赫定理，

$$1-g = \chi(\mathcal{O}_X) = \chi(f_*\mathcal{O}_X) = \deg(\mathrm{Tsch}(f)^\vee) + r(h-1).$$

由黎曼–赫尔维茨定理，我们得出

$$\deg(\mathrm{Tsch}(f)) = \frac{b}{2}.$$

注 6。 1. 注意到 Tsch($f^{\text{ét}}$) 自然是 Tsch(f) 的一个直和项。此 r,

$$\deg(\mathrm{Tsch}(f^{\text{ét}})) = 0 \quad \text{and} \quad \deg(\mathrm{Tsch}(f)) > 0 \text{ when } f \text{ is not étale.}$$

因此，如果 $f\colon X \to Y$具有非平凡分解 $f = f^{\text{ét}} \bigcirc f^{\text{pr}}$，分解为一个 ′平展部分与本原部分，则Tsch($f$) 是不稳定的。因此，Tschirnhausen丛的（半）稳定性问题仅当 f 为本原或 ′平展时才有意义。

该 ′平展情形。 若 $f\colon X \to Y$为 ′平展，则伽罗瓦群Gal(X/Y)通过置换作用在 f的纤维上。固定一个基点后，该作用将Gal(X/Y)实现为对称群 $\mathfrak{S}_r$的一个子群。在此情形下，Tsch(f)总是半稳定的，而其是否稳定取决于Gal(X/Y)之作用的表示论性质。

命题6.2。 [CLV24b，命题1。3] 设 $f\colon X \to Y$是次数为 r的 ′平展覆盖。则$\mathrm{Tsch}(f)$ 是半稳定的。此外，$\mathrm{Tsch}(f)$ 是稳定的，当且仅当 $\mathfrak{S}_r$ 的标准表示到$\mathrm{Gal}(X/Y)$ 的限制是不可约的。

本原情形。 当基域的特征为零或大于 r 时，若分歧除子的次数为正，则 Y 的本原 r 次、亏格 g 覆盖的 Hurwitz 空间不可约；否则为空。因此，我们可以讨论 Y 的一般 r 次、亏格 g 本原覆盖。

定理 6.3 ([Ba89] 适用于 $h=0$，以及 [CLV24b, 定理 1。4] 适用于 $h \geq 1$)。 设 $f\colon X \to Y$ 是一般的本原 r 次覆盖，其中 X 的亏格为 g，Y 的亏格为 h，且定义在特征为零或大于 r 的代数闭域上。

(1) 若 $h=0$，则 $\mathrm{Tsch}(f)$ 是平衡的。(2) 若 $h=1$，则 $\mathrm{Tsch}(f)$ 是半稳定的。(3) 若 $h \geq 2$，则 $\mathrm{Tsch}(f)$ 是稳定的。

定理 6.3 表明，可以从参数化 Y 本原覆盖的 Hurwitz 概形到 Y 上稳定向量丛的模空间构造一个有理映射。关于此有理映射的基点集，似乎鲜有研究。

问题 6.4. 描述 Hurwitz 概形中参数化本原覆盖 $f\colon X \to Y$且使得 Tsch(f) 不稳定的轨迹。

6.2. **一般推前**。 我们再次假设特征为 0 或大于 r。如果不是推前 $\mathcal{O}_X$，而是推前一个一般线丛（或更一般地，一个一般向量丛），则该推前将不再分裂。受对曲线上向量丛模空间的 theta 线性系的研究启发，Beauville 在 [Bea00]（另见 [Bea06，猜想 6.5]）中提出了如下猜想：

猜想 6.5 (Beauville)。设 $f\colon X \to Y$ 是光滑不可约射影曲线之间的有限态射，且 V 是 X 上的一般向量丛。那么，当 Y 的亏格至少为2 时，f_*V 是稳定的；当 Y 的亏格为 1 时，则是半稳定的。

令 $\mathrm{H}_{r,\ g}(Y)$ 表示参数化 Y 的光滑连通、次数为 r 、亏格为 g 的覆盖的 Hurwitz 空间。一般而言，$\mathrm{H}_{r,\ g}(Y)$ 是可约的，其不可约分支对应于本原-´etale 分解中的 ´etale 部分。更明确地说，这些不可约分支对应于 (´etale) 基本群 $\pi_1(Y)$ 的子群；若 $g = r(h-1)$，其指数等于 r；若 $g > r(h-1)$，其指数则整除 r。

定理 6.6 ([Bea00] 对于 $h = 0$，以及 [CLV24a，定理1。2] 对于 $h \geq 1$)。 假设特征为 0 或大于 r。设 Y 为亏格 h 的任意光滑不可约射影曲线。设 $f\colon X \to Y$ 为 $\mathcal{H}_{r,\ g}(Y)$ 的任意分支中的一般态射。设 V 为 X 上任意次数与秩的一般向量丛。

(1) 若 $h = 0$，则 f_*V 是平衡的。(2) 若 $h = 1$，则 f_*V 是半稳定的。(3) 若 $h \geq 2$，则 f_*V 是稳定的。

注 6.7。 特别地，Beauville 猜想对 Hurwitz 空间 $\mathrm{H}_{r,\ g}(Y)$ 任意分支的一般成员成立。然而，预言每一个 覆盖的一般推前之稳定性的 Beauville 的原始猜想仍然未解决。

注记 6.8. 对于某些特殊的 V，向量丛 f_*V 可能不是半稳定的。例如，我们已经看到，$f_*\mathrm{O}_X$ 以 O_Y 为直和项。当映射 f 发生分歧时，O_Y 会使 $f_*\mathrm{O}_X$ 不稳定。这个例子引出了以下问题。

问题 6.9. 对于一般的 $f\colon X \to Y$，描述半稳定向量丛 $V \in M_X(r,\ d)$ 中满足 f_*V 不是半稳定的那些丛所构成的轨迹。

本节中，我们再次只关注曲线的情形。也可以针对高维簇提出这些问题的类似版本。

References

[ABBLT22] J. Alper、P. Belmans、D. Bragg、J. Liang 和 T. Tajakka，《曲线上向量丛模空间的射影性》，载于 *Stacks Project Expository Collection (SPEC)*，London Math. Soc. Lecture Note Ser.，480，剑桥大学出版社，（2022，）90–125。[AR17] A. Alzati 和 R. Re，《具有给定法丛的有理曲线希尔伯特概形的不可约分支》，Algebr. Geom.，4 no. 1 (2017)，79–103。[AFO16] M. Aprodu、G. Farkas 和 A. Ortega，《受限 Lazarsfeld-Mukai 丛与典范曲线》，载于《模理论的发展——京都 2013》，Advanced studies in pure mathematics，第 69 卷，日本数学会 (2016)，303–322。[ACGH85] E. Arbarello、M. Cornalba、P. A. Griffiths 和 J. Harris，《代数曲线几何》第一卷，Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 267，SpringerVerlag，纽约，1985，xvi+386。[ALY19] A. Atanasov、E. Larson 和 D. Yang，《一般曲线法丛的插值》，Mem. Amer. Math. Soc.，257 no. 1234 (2019)，v +105。[A57] M.F. Atiyah，《椭圆曲线上的向量丛》，Proc. London Math. Soc.，7 (1957)，414–452。[BE84] E. Ballico 和 Ph. Ellia，《具有稳定法丛的 P3 中曲线的更多例子》，《纯粹与应用数学杂志》350 (1984)，87–93。[Ba 89] E. Ballico，《关于一般 k-重覆盖曲线上线性系的一点注记》，Boll. Un. Mat. Ital. A (7) 3 no. 2 (1989)，195–197。[BH98] E. Ballico 和 G. Hein，《射影曲线上 $T\mathbb{P}^n$ 的限制的稳定性》，Arch. Math. 71 (1998)，80–88。[BR99] E. Ballico 和 L. Ramella，《关于 $\mathbb{P}^n$ 中存在具有稳定法丛的曲线》，Ann. Polon. Math. 72 no.1 (1999)，33–42。[Bea00] A. Beauville，《一般向量丛直接像的稳定性》，预印本 (2000)。[Bea06] A. Beauville，《曲线上的向量丛与西塔函数》，《模空间与算术几何》（京都 2004），Advanced Studies in Pure Mathematics 45 (2006)，145–156。[BBN08] U. Bhosle、L. Brambila-Paz 和 P. Newstead，《Petri 曲线上类型为 $(n, d, n+1)$ 的相干系统》，Manuscripta Math. 126 (2008)，409–441。[BBN15] U. Bhosle、L. Brambila-Paz 和 P. Newstead，《关于线性系与 D.C. Butler 的一个猜想》，International Journal of Math. 26 (2015)，1550007，18 页。

[Br13] T. Bridges、R. Datta、J. Eddy、M. Newman 和 J. Yu，《射入 Fermat 超曲面的自由态射与非常自由态射》，Involve 6 (2013)，no. 4，437–445。[B17] G. Bruns，《亏格 8 典范曲线的法丛》，arXiv:1703.06213v2。[Cao] A. Cao，《格拉斯曼流形中有理曲线法丛的平衡性》，进行中。[CZ14] Q. Chen 和 Y. Zhu，《Fano 完全交上的非常自由曲线》，Algebr. Geom.，1 no. 5 (2014) 558–572。[Che25] R. Cheng，《Fano 超曲面中的自由曲线必须具有高次数》，Proc. Amer. Math. Soc. 153 (2025)，2841–2846。[Cos08] I. Coskun，《跳跃曲线的 Gromov-Witten 不变量》，Trans. Am. Math. Soc.，360 (2008)，989–1004。[CH15] I. Coskun 和 J. Huizenga，《平面上层模空间的双有理几何》，《G¨okova 几何-拓扑会议论文集 2014》，(2015)，114–155。[CHN24] I. Coskun、J. Huizenga 和 H. Nuer，《曲面上层模空间的 Brill-Noether理论》，载于《模空间与向量丛：新趋势》，Contemp. Math. 803 (2024)，103–151。[CHS25] I. Coskun、J. Huizenga 和 G. Smith，《射影空间中核丛的稳定性与上同调》，Michigan Math. J. 75 no. 1 (2025)，173–198。[CJL26] I. Coskun、E. Jovinelly 和 E. Larson，《 $\mathbb{P}^4$中 Brill-Noether 曲线法丛的稳定性》，准备中。[CLV22] I. Coskun、E. Larson 和 I. Vogt，《空间曲线法丛的稳定性》，Algebra Number Theory 16 no. 4 (2022)，919–953。[CLV24a] I. Coskun、E. Larson 和 I. Vogt，《一般情形下的 Beauville 猜想》，Forum Math. Sigma 12 (2024)，论文编号 e51，7 页。[CLV24b] I. Coskun、E. Larson 和 I. Vogt，《Tschirnhausen 丛的稳定性》，Int. Math. Res. Not. (IMRN) 2024 no. 1, (2024)，597–612。[CLV25] I. Coskun、E. Larson 和 I. Vogt，《格拉斯曼流形中有理曲线的法丛》，即将发表于 Algebra Number Theory [CLV25b] I. Coskun、E. Larson 和 I. Vogt，《亏格至少为 7 的一般典范曲线的法丛是半稳定的》，即将发表于 J. Eur. Math. Soc. [CR18] I. Coskun 和 E. Riedl，《射影空间中有理曲线的法丛》，Math. Z. 288 (2018)，803–827。[CR19] I. Coskun 和 E. Riedl，《完全交上有理曲线的法丛》，Communications in Contemporary Math. 21 no. 2 (2019)，（23 页）。[CS22] I. Coskun 和 G. Smith，《Fano簇上的非常自由有理曲线》，J. Algebra 611 (2022)，246–264。[CS25] I. Coskun 和 G. Smith，《Brill-Noether曲线法丛的稳定性》，Math. Ann.，391 no. 4 (2025)，4997–5032。[DP22] A. Deopurkar 和 A. Patel，《向量丛与有限覆盖》，Forum Math. Sigma 10 40，30 2022( )，论文编号 e 页。[EiL92] L. Ein 和 R. Lazarsfeld，《Picard丛的稳定性与限制及其在椭圆曲线法丛中的应用》，《复射影几何》（的里雅斯特，1989/卑尔根，1989），149–56，London Math. Soc. Lecture Note Ser.，179，剑桥大学出版社，剑桥，1992。[EH83] D. Eisenbud 和 J. Harris，《一般曲线上的除子与尖点有理曲线》。 *Invent. Math.*，74 no. 3 (1983)，371–418。[EH87] D. Eisenbud 和 J. Harris，《若干线性系族的不可约性与单值化》，Ann. Sci. ´Ecole Norm. Sup. (4) 20 no. 1 (1987)，65–87。[EV81] D. Eisenbud 和 A. Van de Ven，《光滑有理空间曲线的法丛》，Math. Ann.，256 (1981)，453–463。[EV82] D. Eisenbud 和 A. Van de Ven，《具有给定次数和法丛的光滑有理空间曲线簇》，Invent. Math.，67 (1982)，89–100。[E83] Ph. Ellia，《法丛半稳定、稳定的 $\mathbb{P}^3$ 纤维曲线的例子》，Math. Ann. 264 (1983)，389–396。[ElH84] G. Ellingsrud 和 A. Hirschowitz，《关于空间曲线的法丛》，C. R. Acad. Sci. Paris S´er. I Math. 299 no. 7 (1984)，245–248。´ElL[G. Ellingsrud、D. Laksov，《五次椭圆空间曲线的法丛》，载于《第 18 届斯堪的纳维亚数学大会论文集 1980》，E. Balslev 编，波士顿 1981，258–287。81] FL[G. Farkas 和 E. Larson，《一般曲线上点的最小分解性质》，Ann. Sci. 25] Ec. Norm. Sup ´er.，58 no. 2 (2025)，433-462。 ´Fo a H. Fontana，《三重点典范曲线的 Harder-Narasimhan滤子》，预印本，arXiv: 。Fo b H. Fontana，《四重点典范曲线》，预印本，arXiv: 。

[25] 2505 14907

[25] 2512 16191

GS F. Ghione 和 G. Sacchiero，《[80] $\mathbb{P}^3$ 中有理曲线的法丛》，Manuscripta Math.，33 (1980)，111–128。[Gi82] D. Gieseker，《稳定曲线与特殊除子：Petri 猜想》，Invent. Math. 66 no. 2 (1982)，251–275。[GH80] P. Griffiths 和 J. Harris，《一般代数曲线上特殊线性系簇》，Duke Math. J.，47 no. 1 (1980)，233–272。[Ha10] R. Hartshorne，《变形理论》，Graduate Texts in Mathematics 257，施普林格，纽约，2010。

[HH85] R. Hartshorne 和 A. Hirschowitz，《代数空间曲线的光滑化》，载于《代数几何》，锡切斯（巴塞罗那），1983，数学讲义，1124，施普林格，柏林（1985），98–131。[Ho10] N. Hoffmann，《曲线上的向量丛模叠与 King–Schofield 有理性证明》，载于《解决有理性问题的上同调与几何方法》，133–148，数学进展，282，Birkhäuser Boston，波士顿，马萨诸塞州，2010。[HL10] D. Huybrechts 和 M. Lehn，《层模空间的几何》，剑桥大学出版社，剑桥，2010。[JP24] D. Jensen 和 S. Payne，《热带独立性 I：除子的形状与 Gieseker–Petri 定理的证明》，《代数与数论》，8 卷第 9 期（2014），2043–2066。[K96] J. Koll´ar，《代数簇上的有理曲线》，施普林格，1996。[LL24] A. Landesman 和 D. Litt，《非常一般曲线上的几何局部系统与等单值变形》，《美国数学会杂志》37（2024），683–729。[L24] E. Larson，《正特征下 $N_C(-2)$ 的上同调》，《当代数学通讯》，26（2024），第 10 期，论文编号 2350067，共 11 页。[L21] H. Larson，《超曲面上直线的法丛》，《密歇根数学杂志》70 卷第 1 期（2021），115–131。[LV23] E. Larson 和 I. Vogt，《Brill-Noether 曲线的插值》，《Forum Mathematicum Pi》，第 11 卷（2023），e25。[LP97] J. Le Potier，《向量丛讲义》，A. Maciocia 译，高等数学剑桥研究丛书，54，剑桥大学出版社，剑桥，1997。[Ma19] S. Mandal，《关于从 $\mathbb{P}^1$ 到 $G(r,n)$ 的态射轨迹：限制的泛子丛或商丛具有固定分裂型》，《代数学杂志》585（2021），759–783。[Mi25a] L. Mioranci，《超曲面上有理正规曲线的法丛》，《密歇根数学杂志》75 卷第 3 期（2025），639–671。[Mi25b]L. Mioranci，《射影超曲面上有理曲线的限制切丛》，预印本，arXiv:2507.13927[Mis08] E. Mistretta，《关于低余维子空间的曲线上的线丛变换的稳定性》，《伦敦数学会会刊》78（2008），171–182。[Mu92] S. Mukai，《Fano 三维簇》，载于《复射影几何》，伦敦数学会讲义丛书 179，剑桥大学出版社（1992），255–263。[Mu96] S. Mukai，《亏格十一的曲线与 K3 曲面》，载于《向量丛模空间》，纯数学与应用数学讲义 179，Dekker（1996），189–197。[N83] P. E. Newstead，《一条法丛稳定的空间曲线》，《伦敦数学会会刊》（第二辑）28（1983），428–434。[O14] B. Osserman，《Brill–Noether 定理的一个简单的无关特征证明》，《巴西数学会公报》45 卷第 4 期（2014），807–818。[Ram90] L. Ramella，《由限制切丛对 $\mathbb{P}^n$ 中有理曲线的希尔伯特概形进行分层》，《巴黎科学院报告·数学辑》311 卷第 3 期（1990），181–184。[R07] Z. Ran，《射影空间中有理曲线的法丛》，《亚洲数学杂志》11 卷第 4 期（2007），567–608。[R21] Z. Ran，《射影空间超曲面上的低次数有理曲线及其扇退化》，《纯粹与应用代数学杂志》225（2021），第 2 期，论文编号 106492，共 20 页。[R23a] Z. Ran，《Fano 超曲面上的平衡曲线与极小有理连通性》，《国际数学研究通知》IMRN 2023 年第 6 期，4555–4600。[R23b] Z. Ran，《Fano 超曲面上法丛半稳定的曲线》，预印本（2023），arXiv:2211.12661。[R24] Z. Ran，《Fano 超曲面上的曲线插值》，《当代数学通讯》26（2024），第 1 期，论文编号 2350002，共 41 页。[R25] Z. Ran，《Fano 超曲面上曲线的极化插值与法后设》，《乌克兰数学杂志》77 卷第 1 期（2025），105–115。[S80] G. Sacchiero，《射影空间中有理曲线的法丛》，费拉拉大学年刊·第七辑，26（1980），33–40。[S82] G. Sacchiero，《参数化法丛固定的有理空间曲线的簇》，Manuscripta Math.，37（1982），217–228。[S83] G. Sacchiero，《一个法丛稳定的 $\mathbb{P}^3$ 曲线例子》，《代数学通讯》11 卷第 18 期（1983），2115–2121。

[24] 2411 16664 Sha R. Shang，《
[12]
Veronese 法丛的斜率半稳定性》，预印本，arXiv: 。M. Shen，《Fermat 超曲面上的有理曲线》，《巴黎科学院数学报告》350 第 16 期，781 2012 15 784 ( )，第 - – 。[She12b] M. Shen，《Fano 三维簇上有理曲线的法丛》，《亚洲数学杂志》16 卷第 2 期（2012），237–270。[ST18] J. Starr 和 Z. Tian，《正特征下的可分有理连通性与弱逼近》，预印本，arXiv:1907.07041。[STZ18] J. Starr、Z. Tian 和 R. Zong，《正特征下 Fano 完全交的弱逼近》，预印本，arXiv:1811.02466。

[Ti15] Z. Tian, 《可分有理连通性与稳定性》, 载于《代数簇上的有理点、有理曲线与整全纯曲线》, Contemp. Math., **654** (2015), 155–160。[V18] I. Vogt, 《Brill-Noether 空间曲线的插值》, Manuscripta Math. **156** (2018), 137–147。[Zh11] Y. Zhu, 《正特征下的 Fano 超曲面》, 预印本, arXiv:1111.2964。

Department of Mathematics, Statistics, and CS, University of Illinois at Chicago, Chicago IL 60607*Email address*: icoskun@uic.edu

Department of Mathematics, Brown University
Email address: elarson3@gmail.com

Department of Mathematics, Brown University
Email address: ivogt.math@gmail.com