arXiv:2602.03946v1 [math.DG] 3 Feb 2026

余同调一流形之间调和映射的构造

ANNA SIFFERT

Abstract. 我们构造余维一流形之间的等变调和映射。

1. Introduction

黎曼流形之间调和映射及其推广的研究，是几何分析领域中一个蓬勃发展的研究方向，近期发表的论文 [6, 7, 23] 及其中的相关参考文献便是明证。关于调和映射的更多背景知识，另请参阅这本精彩的著作[4] 。

回顾一下，黎曼流形之间的光滑映射 $\varphi\colon (M,\ g) \to (N,\ h)$，若为能量泛函的临界点，则称为调和映射。现在我们将更详细地解释调和映射的定义，并主要遵循 [13, 23] ，有时几乎逐字照录其中的句子。下文中，我们用 $\Omega \subset M$ 表示边界 C^1分片光滑的区域 $\partial\Omega$。映射 φ在区域 Ω 上的能量积分定义为

$$E_\Omega(\varphi) = \frac{1}{2}\int_\Omega |d\varphi|^2 v_g, \tag{1.1}$$

其中 v_g 表示相对于度量 g 的 M 体积形式。考虑 φ 的一参数变分，也就是说，设 $\Phi\colon M \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to N, (x,t) \mapsto \Phi(x,t) =: \varphi_t(x),\ \varepsilon \in \mathbb{R}$ with $\varepsilon > 0$ 是一个满足 $\Phi(x,0) = \varphi(x)$ 的光滑映射。若映射 Φ 在 Ω 外满足 $\varphi_t = \varphi$，则称其支撑于 Ω，其中 Ω° 表示 Ω 的内部。若光滑映射 $\varphi : (M,g) \to (N,h)$ 是式 (1.1) 的临界点，则称其为调和映射；这意味着，对于所有紧区域 Ω 以及所有支撑于 Ω 的 φ 的光滑一参数变分 Φ，都有

$$\frac{d}{dt}E_\Omega(\varphi_t)_{|t=0} = 0.$$

换言之，能量泛函的第一变分为零。
通过直接计算可验证，能量泛函的第一变分为

$$\frac{d}{dt}E_\Omega(\varphi_t)_{|t=0} = -\int_M \langle \tau(\varphi), \frac{\partial\varphi_t}{\partial t}_{|t=0}\rangle v_g, \tag{1.2}$$

其中 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 表示由 h诱导的 $\varphi^{-1}TN$上的内积。此外，φ的张力场记为 $\tau(\varphi)$，定义为

$$\tau(\varphi) = \sum_{i=1}^{\dim M} ({}^\varphi\nabla_{e_i}(d\varphi\, e_i) - d\varphi(\nabla_{e_i}e_i)),$$

其中 ∇ 表示(M,g)的Levi-Civita联络，而$(e_i)_{i=1}^{\dim M}$是 M上的局部正交归一标架。此外，我们用 ${}^\varphi\nabla$ 表示(N,h)的Levi-Civita联络到丛 $\varphi^{-1}TN$的拉回。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 58E20; 53C43.*Key words and phrases.* 调和映射；初值问题。
Anna Siffert 感谢德国研究基金会（DFG）提供资助——项目编号 427320536——SFB 1442。本项目是 Anna Siffert 在 SFB 资助期 2020-2024 年间开展的余维一流形之间调和映射构造项目的一部分。

由(1.2)可得，映射 φ是调和的当且仅当

$$\tau(\varphi) = 0. \tag{1.3}$$

在局部坐标中，恒等式 (1.3) 是一个二阶半线性椭圆偏微分方程组。由于这类微分方程组尚无通用的解理论，因此求解方程 (1.3) 通常很困难。构造解的一种常用方法是施加对称条件。这些条件可以简化原问题，有时还能使其（部分）可解。不过，需要注意的是，找到合适的对称条件往往很困难，而这些条件应能将原问题化简为一个（部分）可解的问题。

事实证明，研究余维一流形之间关于调和性的等变映射，是一种很好的对称条件选择。Urakawa [25], 开创了对余维一流形之间的等变调和映射的研究，随后 P¨uttmann 和 Siffert 在 [19]中大大拓展了这一研究。借助这一设定，针对某些余维一流形，研究者构造出了余维一流形之间的调和映射实例，参见例如 [5, 19, 21, 22, 25]。

回顾一下，如果 M 支持紧李群G 的光滑等距作用 $G \times M \to M$ ，且轨道空间 M/G 是一维的，那么 M 称为余维一流形。轨道有两种类型：正则轨道和非正则轨道。正则轨道（也称为主轨道）的余维为一，其并集在 M中构成一个开稠密集 M_0 。奇异类型的轨道是余维严格大于一的非正则轨道。 M/G 的边界点与非正则轨道相关联。具体而言，非正则轨道对应于 M/G 的边界点在自然投影映射 $\pi : M \to M/G$下的纤维。进一步回顾，等变映射是余维一流形之间的保结构映射，即将轨道映射到轨道。

对于余维一流形之间的等变映射 φ，方程（1.3）简化为一个奇异边值问题（还可能附带一个代数条件）。具体而言，可以得到如下形式的二阶常微分方程

$$\ddot{r}(t) + h_1(t)\dot{r}(t) + h_2(t, r(t)) = 0, \tag{1.4}$$

其中 $r : (M/G)^\circ \to \mathbb{R}$ 是一个光滑函数。此外， $h_1 : (M/G)^\circ \to \mathbb{R}$， $h_2 : (M/G)^\circ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是光滑函数，而 $(M/G)^\circ$ 表示 M/G的内部。要使 φ 调和，方程 (1.4) 的解 r 必须能够光滑延拓至 M/G ，并在 M/G的边界点处满足特定的边界条件。在 M/G中对应于奇异轨道的边界点处，微分方程 (1.4) 是奇异的。在 M/G中，自然投影 $\pi : M \to M/G$ 下纤维不属于奇异轨道的点处，微分方程 (1.4) 是正则的。关于 [23], 中奇异边界点处的初值问题，近期已有研究给出解：研究表明，若 $0 \in M/G$ 是一个边界点，则对每个 v，都存在唯一的光滑解 $r : (M/G)^\circ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ ，满足 (1.4)，且 $r(0) = 0$ 、 $\dot{r}(0) = v$；该解连续依赖于 v。

通过考察度量变形来生成调和映射这一概念，已在许多论文中得到探讨，包括 [3, 6, 8, 9, 20] 及其中引用的文献。这一领域最重要的问题之一是渲染问题：给定紧致光滑黎曼流形(M, g)和(N, h)，以及光滑映射的一个同伦类 $\mathcal{H}$ $M \to N$，是否存在 $\mathcal{H}$中的调和代表元？伊尔斯和费雷拉在 [8] 中针对维数 $M \geq 3$彻底解决了这一问题。具体而言，这两位作者证明，若维数为 $M \geq 3$，则存在一个与 g共形等价的光滑度量 $\tilde{g}$ ，以及一个映射 $\psi \in \mathcal{H}$ ，使得$\psi : (M, \tilde{g}) \to (N, h)$是调和映射。

在本文的第一部分，我们研究球面的调和自映射的构造。Eeles 和费雷拉的上述结果 [8] 表明，我们总能以某种方式改变定义域度量，使得存在一个从 $\mathbb{S}^n$, $n \geq 3$ 到球面的调和自映射。然而，如果不允许改变度量，要证明给定流形之间存在调和映射，往往很困难

。在本文的第一部分，我们证明了若干圆球面的调和自映射的存在性。具体而言，我们证明：

定理 1.1. 对于 $n \in \{3,4,5,7\}$，存在两个从 $\mathbb{S}^n$ 到自身的调和自映射。

请注意，该定理的陈述并非新结果，因为此前已在定理 1.1 所列的球面之间构造出调和自映射，参见 [5, 21]。为了避免引言内容过于繁杂，我们决定暂不在此更精确地表述该定理，而是在第 3 节详细解释这一存在性结果为何值得关注。

在本文的第二部分，我们利用度量变形来构造非紧余维一流形的调和映射。受渲染问题的启发，我们借鉴 Ratto 的工作 [20] 中的概念，并证明非紧余维一流形之间调和映射的存在性

$$M = \mathbb{R}^{k_0+1} \times G_1/H_1 \times \cdots \times G_m/H_m,$$

其中 $k_0 \in \mathbb{N}$ 具有 $k_0 \geq 2$，且每个 G_i/H_i 都是维数为 k_i 的紧致不可约齐性空间，并且不是平坦的。主轨道为

$$\mathbb{S}^{k_0} \times G_1/H_1 \times \cdots \times G_m/H_m,$$

奇异轨道是

$$N = \{0\} \times G_1/H_1 \times \cdots \times G_m/H_m.$$

我们证明以下定理：

定理 1.2。 设(M, g) 是如 *(4.1, 4.2)* 所述的非紧余维一流形。那么，度量 g 可以变形为度量 $\tilde{g}$，使得存在一个非平凡的（即既非恒定映射也非恒等映射）等变调和映射$(M, \tilde{g}) \to (M, g)$。

组织结构：我们在第 2 节介绍余维一流形以及此类流形之间的调和映射的预备知识。在第 3 节中，我们构造特定球面之间的调和映射。在第 4 节中，我们构造非紧余维一流形之间的调和映射，并证明定理 1.2。

2. Preliminaries

本节介绍预备知识，即简要回顾余维一流形的基础背景，简要讨论余维一度量的光滑性条件，并概述余维一流形之间的调和映射。最后，我们简要介绍球面上的调和自映射。前三个小节的内容与文献 [23]的第 2 节非常接近。

2.1. 余维一流形。

本小节简要回顾余维一流形。本小节主要依据 [19, 23], 的论述，其中有几句话几乎逐字照录。

若连通黎曼流形 M 具有紧李群 G 的光滑等距作用 $G \times M \to M$，且轨道空间 M/G 的维数为一，则称其为余维一流形。在这种情况下， M 也称为余维一流形。

Mostert [15, 16] 为余维一流形建立了以下分类结果，即他证明这类流形的轨道空间 M/G 与以下空间之一等距：

（1）实直线，即 $M/G = \mathbb{R}$；（2）圆，即 $M/G = S^1$;
（3）闭区间，即对于某个 $L \in \mathbb{R}_+$ 的 $M/G = [0, L]$；
（4）半直线，即 $M/G = [0, \infty)$。

下文中，我们将分别把这四种可能性称为情形（1）、（2）、（3）和（4）。我们用 $\partial(M/G)$ 表示轨道空间 M/G 的边界点，即 $\partial(\mathbb{R}) = \emptyset$、$\partial(S^1) = \emptyset$、$\partial([0, L]) = \{0, L\}$ 和 $\partial([0, \infty) = \{0\}$。此外，$(M/G)^\circ$ 表示轨道空间 M/G 的内部。

下文中，设 M 为余维一流形。记 $\pi\colon M \to M/G$ 为自然投影映射。轨道空间边界点的纤维，即 $\partial(M/G)$ 的元素，是一个非主轨道 N。在情形 (3) 中，恰有两个非主轨道 N_0 和 N_1。在情形 (4) 中，恰有一个非主轨道 N_0。此外，轨道空间 M/G 中每个内部点的纤维都是主轨道。

非主轨道有两种类型，即异常轨道和奇异轨道。若非主轨道 N 的维数等于主轨道的共同维数，则称其为异常轨道，或简称异常轨道。非主轨道中不是异常轨道的称为奇异轨道，或简称奇异轨道。所有主轨道的集合记为 M_0，称为 M 的正则部分。

设 γ 为单位速法向测地线。我们以此指一条单位速测地线 $\gamma\colon \mathbb{R} \to M$，它垂直穿过所有轨道，并且在情形 (3) 中还满足 $\gamma(0) \in N_0$ 与 $\gamma(L) \in N_1$，在情形 (4) 中满足 $\gamma(0) \in N_0$。正则点 $\gamma(t)$、$t \in (M/G)^\circ$ 的各向同性群是常数。这个共同的主各向同性群此后记为 H。

在情形 (3) 中，即当 M/G 等距于一个闭区间时，我们进一步假设 γ 是闭的，或者等价地，魏尔群 W 是有限的。回顾一下，魏尔群 W 定义为李群 G 中使 γ 保持不变的元素所成的子群，模去逐点固定 γ 的元素所成的子群。魏尔群是 $N(H)/H$ 的一个二面体子群，由分别固定 $\gamma(0)$ 与 $\gamma(L)$ 的两个对合生成，并且它在法测地线的正则线段上单可迁地作用。

g M 的黎曼度量由主轨道 G/H上的 G不变度量g_t 的单参数族描述。具体而言，我们有

$$g = g_t + dt^2, \tag{2.1}$$

其中， g_t 在情形（2）中必须满足不变性条件，在情形（3）和（4）中必须满足光滑性条件，参见例如 [12]及其中的参考文献。下一小节将讨论情形（3）和（4）中度量的光滑性条件。最后请注意，由于 M_0在 M中稠密，式（2.1）也适用于描述整个 M 上的度量。

2.2. 余维一度量的光滑性条件。本小节讨论式（2.1）在奇异轨道处的光滑性条件。因此，假设 M 是一个包含（至少一个）奇异轨道的余维一流形。此外，假设稠密开集 $M_0 \subset M$ 上具有一个形如（2.1）的 G不变度量。在 [10]和 [26] 中，研究了该度量延拓至奇异轨道时保持光滑所需的条件，并给出了光滑性判据。在实践中，应用 Verdiani 和 Ziller 在 [26] 中所述的光滑性条件，通常比应用 [10]中给出的条件更容易；比较见 [27] 。以下内容主要沿用 [26]中的表述。

具有奇异轨道的非紧余维一流形可视为一个向量丛，而紧余维一流形可视为两个向量丛的并，参见例如 [1, 2] 及其中的参考文献。本小节讨论将度量 (2.1) 延拓到奇异轨道的局部问题。因此，以下讨论可以限定在单个向量丛上。

设 G 是一个紧李群，并设 H 和 K 是 G 的闭李子群，使得 $H \subset K \subset G$ 且 $K/H = \mathbb{S}^\ell$，其中 $\ell \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$。这意味着 K 在 $\mathbb{S}^\ell$ 上传递作用；换言之，存在一个表示 $\rho\colon K \to O(\ell + 1)$，使得对于每个 $x \in \mathbb{S}^\ell$，$\rho(K)x = \mathbb{S}^\ell$。各向同性群 K 在球面 $\mathbb{S}^\ell$ 上作用，并且该作用可以扩展为在圆盘 D 上的线性作用：$= D^{\ell+1} \subset \mathbb{R}^{\ell+1}$。因此， $M = G \times_K D$ 构成一个齐性圆盘丛，其底空间为 G/K，结构群为 H。各向同性群 K

按如下方式作用于 $G \times D$：

$$(k,(g,d)) \mapsto (gk^{-1}, \rho(k)d).$$

此外，注意到通过左乘， G 在 M 上的作用具有余维一

$$(g,[\hat{g},d]) \mapsto [g\hat{g},d]$$

对于 $d \in D$ 和 g，$\hat{}g \in G$。奇异轨道 $N := G \times_K \{0\}$ 与空间 G/K微分同胚。当 t的值足够小时，主轨道可表示为 $P_t := G \times_K \mathbb{S}^{\ell}_t$。这里，$\mathbb{S}^{\ell}_t \subset D$ 表示半径为 t的球面。每个 P_t 都是 G/H的一个微分同胚副本。圆盘D 可通过指数映射与一个在点 γ(0)处垂直于奇异轨道的流形作 G-等变识别。因此， D 可视为 G在 M上作用的切片。

为陈述 [26], 的主要结果，考虑一条法测地线 γ: $[0,\infty) \to \mathbb{R}^{\ell+1}$。沿着 γ，度量在 M_0 上的取值决定了该度量。这是因为这些取值以及 G 的作用决定了 M_0上的整个度量。令 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$ 分别表示对应于G 和 H的李代数。令 Q 表示 G上的一个预先指定的双不变度量。此外，将李代数 $\mathfrak{h}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中的标准正交补记为 $\mathfrak{n}$。补空间 $\mathfrak{n}$ 可通过作用场识别为沿 γ 的正则轨道的切空间，即通过映射 $X \in \mathfrak{n} \mapsto X^*(\gamma(t))$。

设 X_i 是 $\mathfrak{n}$的一组基。那么，对于每个 $t > 0$， $X_i^*(\gamma(t))$ 构成 $\dot{\gamma}^{\perp}(t) \subset T_{\gamma(t)}M$ 的一组基。此外，度量由 r 函数 $g_{ij}(t) = g(X_i^*, X_j^*)^{c(t)}$， $i \leq j$ 所确定。

有了这些准备，我们可以引用以下定理，它给出了 g 的光滑性条件：

定理 2.1 （[26]）。设 g_{ij}（t） $t > 0$ 是一族光滑的正定矩阵，它们描述了沿法测地线 γ（t）在正则部分上的余齐性一度量。则存在整数 a_{ij}^k 和 d_k，其中 $d_k \geq 0$，使得该度量能够光滑延拓至整个 M，当且仅当

$$\sum_{i,j} a_{ij}^k \, g_{ij}(t) = t^{d_k}\phi_k(t^2) \quad for\ k = 1, \cdots, r, \quad and\ t > 0$$

其中 ϕ_1、$\cdots$、ϕ_r 是定义在 $t \geq 0$ 上的光滑函数。

2.3. **余维一流形之间的调和映射**。我们将简要回顾余维一流形之间调和映射的基础知识，并与 [19, 23] 进行比较。

L且 G 和 K 分别以余维一的方式作用于 M 和 N。此外，令

$$A : G \to K$$

表示一个群同态。选取 M 上的单位速法向测地线 γ，以及 N上的单位速法向测地线 $\hat{}\gamma$。

我们如下定义等变映射 ψ：

$$\psi(g \cdot \gamma(t)) = A(g) \cdot \hat{\gamma}(r(t)),$$

其中 $r : (M/G)^{\circ} \to \mathbb{R}$ 是满足情形 (3) 和 (4) 中边界条件的光滑函数，详见第 2.3 小节的 (i) 和 (ii)。张力场的等变性意味着，只需研究 ψ 沿 γ(t)的张力场。

为了以便于计算的形式表示张力场的法向分量，我们首先需要引入一些记号：沿用 [19],的记法，令

$$\Pi_t^{r(t)} : T_{\hat{\gamma}(t)}(K \cdot \hat{\gamma}(t)) \to T_{\hat{\gamma}(r(t))}(K \cdot \hat{\gamma}(r(t)))$$

表示沿法测地线 $\hat{}\gamma$ 的平行移动。此外，我们令 $J_t^{r(t)}$ 为 $T_{\hat{\gamma}(t)}(K \cdot \hat{}\gamma(t))$ 的自同态，它由将作用场同态 $X^*_{|\hat{\gamma}(t)} \mapsto X^*_{|\hat{\gamma}(r(t))}$ 与 $(\Pi^t_{r(t)})^{-1} = \Pi_t^{r(t)}$ 复合而得。另外，我们定义 $f_0 = \ddot{}\hat{}\gamma(t)$，并

选取 $F_1,\dots,F_m\in\mathfrak{k}$，使得 $f_1=F^*_{1|\hat\gamma(t)}\cdots,f_m=F^*_{m|\hat\gamma(t)}$ 构成$T_{\hat\gamma(t)}(K\cdot\hat\gamma(t))$ 的标准正交基。

有了这 些准备，我们现在可以给出张力场的法向分量 .

定理 2.2. 张力场的法向分量 $\tau^{\mathrm{nor}}_{|\gamma(t)}=\langle\tau_{|\gamma(t)},\hat\gamma(r(t))\rangle$ 由下式给出

$$\tau^{\mathrm{nor}}_{|\gamma(t)}=\ddot r(t)-\dot r(t)\operatorname{Tr}S_{|\gamma(t)}+\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{m}c_{\mu,i}c_{\mu,j}\langle(J_t^{r(t)})^*(\Pi_t^{r(t)})^{-1}\hat S_{|\hat\gamma(r(t))}\Pi_t^{r(t)}J_t^{r(t)}f_i,f_j\rangle_{|\hat\gamma(t)},$$

其中

$$c_{\mu,i}:=c_{\mu,i}(t):=\langle(dA_eE_\mu)^*,f_i\rangle_{|\hat\gamma(t)}.$$

这里， e 表示 G的单位元。此外， $S_{|\gamma(t)}$ 表示轨道 $G\cdot\gamma(t)$ 在 $\gamma(t)$处的形算子，$\hat{}\ S_{|\hat\gamma(t)}$ 表示轨道 $K\cdot\hat\gamma(t)$ 在$\hat\gamma(t)$ 处的形算子，而$(J_t^{r(t)})^*$表示 $J_t^{r(t)}$ 的伴随自同态。

与 [19], 类似，我们给出张力场法向分量的第二个公式，具体而言，该公式利用作用群 G 和 K 的数据。设 Q 为定义在 K上的一个固定双不变度量。令$\hat{\mathfrak{n}}$ 为 $\mathfrak{k}$中主各向同性群的李代数的标准正交补。定义度量自同态 $P_t:\hat{\mathfrak{n}}\to\hat{\mathfrak{n}}$ 如下:

$$\hat Q(X,\hat P_t\cdot Y)=\langle X^*,Y^*\rangle_{|\hat\gamma(t)}.$$

我们有

$$\begin{aligned}\langle X^*,\hat S\cdot X^*\rangle_{|\hat\gamma(r(t))}=-\langle X^*,\nabla_{\hat T}X^*\rangle_{|\hat\gamma(r(t))}&=-\tfrac{1}{2\dot r(t)}\tfrac{d}{dt}\langle X^*,X^*\rangle_{|\hat\gamma(r(t))}\\&=-\tfrac12\hat Q(X,(\dot{\hat P})_{r(t)}X)=-\tfrac12\langle X^*,(\hat P_t^{-1}(\dot{\hat P})_{r(t)}X)^*\rangle_{|\hat\gamma(t)}\end{aligned}$$

因此，以下结论成立。

定理 2.3. 张力场的法向分量由下式给出

$$\tau^{\mathrm{nor}}_{|\gamma(t)}=\ddot r(t)+\tfrac12\dot r(t)\operatorname{Tr}P_t^{-1}\dot P_t-\tfrac12\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{m}c_{\mu,i}c_{\mu,j}P_{i,j},$$

其中

$$c_{\mu,i}:=c_{\mu,i}(t):=\langle(dA_eE_\mu)^*,f_i\rangle_{|\hat\gamma(t)}.$$

.和$P_{i,\ j}$是(i,j)项，即$\hat P_t^{-1}(\hat P)^{r(t)}$的表示矩阵中的对应项。

张力场的切向分量如下:

定理2.4。 张力场的切向分量为

$$\tau^{\tan}_{|\gamma(t)}=\big(\hat P^{-1}_{r(t)}\sum_{\mu=1}^{n}[dA_eE_\mu,\hat P_{r(t)}dA_eE_\mu]\big)^*_{|\hat\gamma(r(t))}$$

其中 E_1、...、 $E_m\in\mathfrak{n}$满足： $E^*_{1|\gamma(t)}$、...、 $E^*_{n|\gamma(t)}$ 构成 $T_{\gamma(t)}(G\cdot\gamma(t))$的标准正交基。

回顾式（2.1），余维一流形上的度量具有如下形式

$$g=g_t+dt^2,$$

其中 g_t 是主轨道 G/H上 G-不变度量 g_t 的单参数族。我们现在考虑定义域度量的度量 g_t 的共形改变，并得到如下引理，见 [23]:

引理 2.5. 设 (M, g) 为一个余维一流形，且

$$g = g_t + dt^2,$$

其中， g_t 是主轨道 g_t 上的 G不变度量的单参数族 G/H。此外，设 $\psi\colon (M, dt^2 + \exp(2\alpha(t))g_t) \to (M, g)$ 为如下给出的等变映射

$$\psi(g \cdot \gamma(t)) = g \cdot \gamma(r(t)),$$

其中， $r : (M/G)^\circ \to \mathbb{R}$ ，它还满足情形（3）和（4）中的边界条件。于是有

$$\tau^{\mathrm{nor}}_{|\gamma(t)} = \ddot{r}(t) + \tfrac{1}{2}\dot{r}(t)\,\mathrm{Tr}\,P_t^{-1}\dot{P}_t + \dim(\mathfrak{n})\dot{\alpha}(t)\dot{r}(t) - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,P_t^{-1}(\dot{P})_{r(t)}.$$

2.4. 球面的调和自映射。 本小节介绍了若干关于球面调和自映射的结果。在大多数段落中，本小节的论述与 [19], 中的内容基本一致，有些句子几乎是逐字照录的。

显然，本小节考察的是情形（3）。设 M 是一个黎曼流形，紧李群 G 通过 $G \times M \to M$等距作用于其上。假设轨道空间 M/G 与闭区间 $[0, L]$ 等距，且该作用具有有限魏尔群W。P¨uttmann通过将 $g \cdot \gamma(t)$映射到 $g \cdot \gamma(kt)$，构造了 M的一族无穷多个等变自映射，详见 [18]。在此情形下， γ 是一条单位速率的法测地线，且$\gamma(0)$位于某个非主轨道中。整数 k 可表示为 $j|W|/2 + 1$，其中 $j \in 2\mathbb{Z}$ （根据作用的不同，奇数也可能符合条件）。映射$g\cdot\gamma(t) \mapsto g\cdot\gamma(kt)$称为 M的 k-映射 。当两个非主轨道的余维均为奇数时， k-映射的度为 k；否则为0或 ± 1。给定 M 后，一个自然的问题是：这些 k-映射中是否有调和映射？更一般地，我们考察等变的（k, r）-映射，其定义为如下映射

$$g \cdot \gamma(t) \mapsto g \cdot \gamma(r(t))$$

其中 $r : [0, L] \to \mathbb{R}$ 是满足 $r(0) = 0$ 且 $r(L) = kL$ 的光滑函数。显然，任意 $(k,\ r)$-映射都与相应的 k-映射等变同伦。若 $(k,\ r)$-映射的定义域为 M，且其张力场 τ 为零，则该映射是调和的。张力场自然分为两个分量：分量 $\tau^{\text{切向}}$ 于轨道，另一分量 τ^{nor}则垂直于轨道。

到目前为止，本小节的所有讨论都适用于具有 $M/G = [0, L]$ 的任意余维一流形。从现在起，我们将重点讨论圆球面。Hsiang 和 Lawson [14] 对球面上的余维一作用进行了分类。他们证明，这些作用都与某个秩二黎曼对称空间的各向同性表示轨道等价。任意等距余维一作用 $G\times\mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{S}^{n+1}$ 所产生的轨道在球面上构成等距超曲面叶状结构。Takagi 和 Takahashi [24] 确定了轨道不同主曲率的个数 g，以及它们的重数 m_0，.....，m_{g-1}。结果表明

$$m_0 = m_2 = \ldots = m_{g-2} \quad \text{and} \quad m_1 = m_3 = \ldots = m_{g-1}.$$

具体而言，$n = \frac{m_0+m_1}{2}g$。M¨unzner [17]后来证明，该恒等式对球面上的所有等主曲率叶状结构都成立。除 m_0 和 m_1的排列顺序外，仅存在以下（g， m_0， m_1）作用：

$$(1, m, m), (2, m_0, m_1), (3, 1, 1), (3, 2, 2), (3, 4, 4), (3, 8, 8),$$
$$(4, m_0, 1), (4, 2, 2), (4, 2, 2\ell + 1), (4, 4, 4\ell + 3), (4, 4, 5), (4, 6, 9), (6, 1, 1), (6, 2, 2).$$

根据分类，具有指定数据（g， m_0， m_1）的所有余维一作用都轨道等价，但（4，2，1）的情形除外，该情形存在两个不同的等价类。详细列表见 [11]。

由数据（g， m_0， m_1）刻画的球面上的余维一作用称为（g， m_0， m_1）-作用。若 $m_0 = m_1 =: m$ （根据 M¨unzner 的结果，对于奇数 g，这必然成立），则称该作用为（ g， m ） - 作用。

如上所述，张力场自然分为两个分量：与轨道相切的分量 $\tau^{\tan}$，以及垂直于轨道的分量 τ^{nor}。对于（g，m_0，m_1）-作用，（k，r）-映射的张力场法向分量已在 [19] 中给出：

定理 2.6 ([19]中的定理 E). </style}给定球面 上一个 (g, m_0, m_1)-作用，且满足 $n = \frac{m_0+m_1}{2} g$，则一个 (k, r)-映射的张力场的法向分量消失，当且仅当 r 满足 (g, m_0, m_1, k)-边值问题

$$\begin{aligned} 0 = 4\sin^2 gt \cdot \ddot{r}(t) + \big(g(m_0+m_1)\sin 2gt + 2g(m_0-m_1)\sin gt\big)\dot{r}(t) \\ - g(g-2)\sin 2(r(t)-t)\big(m_0+m_1+(m_0-m_1)\cos gt\big) \\ - 2g\sin\big(2(r(t)-t)+gt\big)\big((m_0+m_1)\cos gt + m_0 - m_1\big) \end{aligned} \tag{2.2}$$

对于满足条件的函数 $r\colon\ ]0, \frac{\pi}{g}[\to \mathbb{R}$

$$\lim_{t\to 0} r(t) = 0 \quad and \quad \lim_{t\to \frac{\pi}{g}} r(t) = k\tfrac{\pi}{g}$$

注意，如果 $m_0 = m_1 = m$ 成立，则前述定理中的常微分方程可简化为 t o

$$\begin{aligned} 0 = 2\sin^2 gt \cdot \ddot{r}(t) + mg\sin 2gt \cdot \dot{r}(t) \\ - mg\big((g-1)\sin 2(r(t)-t) + \sin 2(r(t)+(g-1)t)\big). \end{aligned} \tag{2.3}$$

下文将此常微分方程称为 *(g,m)*-常微分方程。

对于 (g，m_0，m_1)-作用，文献 [19] 给出了关于一个 (k，r)-映射的张力场切向分量的如下结果：

定理 2.7 （参见 [19]中的定理 H）。 给定 $\mathbb{S}^{n+1}$ 上的一个（g, m_0, m_1）-作用，任意（k, r）-映射的张力场的切向分量除以下情况外均为零

$$(g, m_0, m_1) \in \{(4,2,2\ell+1), (4,4,4\ell+3), (4,4,5), (4,6,9)\}.$$

对于 $g = 1$ 和 $2 \le m \le 5$，文献 [5] 给出了无穷多个 $(1, m, \pm 1)$-边值问题的解。对于 $g = 2$ 和 $2 \le m_0 \le 5$, $m_0 \le m_1$，文献 [21] 给出了无穷多个 $(2, m_0, m_1, \pm 1)$-边值问题的解。

3. Construction of harmonic maps between spheres

本节构造若干圆球面的调和自映射。全文只讨论 $m_0 = m_1 = m$ 的情形。

3.1. 准备工作。

本小节汇集了后文证明圆球面存在多个调和自映射所需的各种准备工作。

3.1.1. 变量 x。

为便于后续讨论，我们将区间 $(0, \frac{\pi}{g})$ 的两端分别延伸至 $-\infty$ 和 ∞。具体而言，定义变量 $\bar{x} := \log(\tan \frac{gt}{2})$。用 x 表示时，(g, m)-边值问题可写为

$$\begin{aligned} r''(x) = (m-1)\tanh x\, r'(x) \\ + \tfrac{m}{2g}\left[(g-1)\sin\big(2r(x)-2a(x)\big) + \sin\big(2r(x)+2(g-1)a(x)\big)\right] \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中 $\lim_{x\to-\infty} r(x) = 0$ 且 $\lim_{x\to\infty} r(x) = (kg+1)\frac{\pi}{g}$，$k \in \mathbb{Z}$，其中

$$a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tfrac{2}{g}\arctan\exp x.$$

边值问题 (2.2) 的线性解 $r(t) = t$ 和 $r(t) = -(g-1)t$ 分别对应于边值问题 (3.1) 中的解 $r(x) = a(x)$ 和 $r(x) = -(g-1)a(x)$。为避免符号滥用，我们也将后者称为 (3.1) 的“线性解”。

3.1.2. 函数 W。本文始终使用函数 W，它起着李雅普诺夫函数的作用。

对于（g，m）常微分方程的任意解 r，定义 $W\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为

$$W(x)=\tfrac{1}{2}r'(x)^2-\tfrac{m}{2g}\big((g-1)\cos 2a(x)+\cos 2(g-1)a(x)\big)\sin^2 r(x)\\ -\tfrac{m}{2g}\big(-(g-1)\sin 2a(x)+\sin 2(g-1)a(x)\big)\sin^2\big(r(x)-\tfrac{3\pi}{4}\big).$$

代入（g，m）常微分方程，得到

$$W'(x):=\tfrac{d}{dx}W(x)=(m-1)\tanh(x)r'(x)^2\\ +\tfrac{m(g-1)}{g^2\cosh x}\big(\sin 2a(x)+\sin 2(g-1)a(x)\big)\sin^2 r(x)\\ -\tfrac{m(g-1)}{g^2\cosh x}\big(-\cos 2a(x)+\cos 2(g-1)a(x)\big)\sin^2\big(r(x)-\tfrac{3\pi}{4}\big).$$

引入 $h_i\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, i\in\{1,2\}$ 是很方便的，定义为

$$h_1(x)=(g-1)\cos 2a(x)+\cos 2(g-1)a(x),\\ h_2(x)=-(g-1)\sin 2a(x)+\sin 2(g-1)a(x).$$

显然，

$$W(x)=\tfrac{1}{2}r'(x)^2-\tfrac{m}{2g}h_1(x)\sin^2 r(x)-\tfrac{m}{2g}h_2(x)\sin^2\big(r(x)-\tfrac{3\pi}{4}\big)$$

and

$$r''(x)=(m-1)\tanh x\, r'(x)+\tfrac{m}{2g}[\sin(2r(x))h_1(x)+\cos(2r(x))h_2(x)].$$

为后续使用，我们陈述 h_1 和 h_2 的一些基本性质。

引理 3.1 (h_1的性质)。(1) $g=2$：函数 $h_1(\cdot)$ 严格递减，在负 x轴上为正，在 $x=0$ 时为零，在正 x轴上为负。

(2) $g=3$：函数 $h_1(\cdot)$ 严格递减。存在唯一的 $z_0>0$ 使得$h_1(z_0)=0$，$h_1(x)$ 在 $x<z_0$ 时为正，在 $x>z_0$时为负。*(3)* $g=4$：函数 $h_1(\cdot)$ 为正且严格递减。*(4)* $g=6$：函数 $h_1(\cdot)$ 为正。存在唯一的 $x_0>0$ 使得 $h_1'(x_0)=0$，$h_1'(x)$ 在 $x<x_0$ 时为负，在 $x>x_0$时为正。

引理 3.2 (h_2的性质)。函数 $h_2(\cdot)$ 恒等于零。对于 $g\in\{3,4,6\}$，有 $h_2(\cdot)<0$，且 $h_2(\cdot)$ 严格递减。

3.1.3. 对称边值问题。本小节讨论所谓的对称（g，m，ℓ_1，ℓ_2）边值问题。

下述引理断言，满足 $r(0)=y_j:=(jg+1)\frac{\pi}{2g}$, $j\in\mathbb{Z}$ 的（g，m）微分方程的每个解，都关于点 $P_j=(0,\ y_j)$中心对称。证明显然，故略去。

引理 3.3。设 r 是（g，m）微分方程的一个解。

(1) 映射 $x\mapsto 2y_j-r(-x)$、$j\in\mathbb{Z}$ 是（g，m）微分方程的解。(2) 若 $r(0)=y_j$, $j\in\mathbb{Z}$，则 r 与 P_j 中心对称。

因此，满足条件 $r(0)=y_j$（其中某个 $j\in\mathbb{Z}$）且 $\lim_{x\to\infty}r(x)=2y_k$（其中某个 $k\in\mathbb{Z}$）的（g，m）微分方程的每个解 r 都必定与 P_j 中心对称。此边值问题今后称为对称（g，m，$jg+1$，$kg+1$）边值问题。

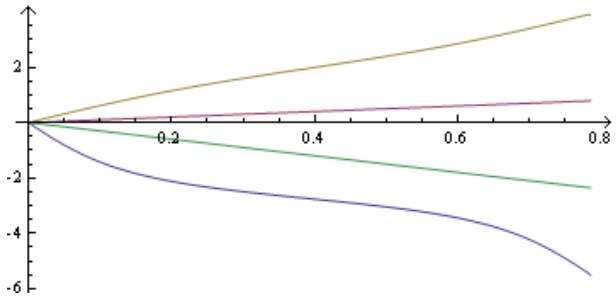
每个对称的（g，m，j'，j''）边值问题的解都会产生一个（g，m，k）边值问题的解。事实上，如果 r 是对称的（g，m，j'，j''）边值问题的解，那么 $r+(j''-j')\pi$ 就是（g，m，（$2j''-j'$）$g+1$）边值问题的解。然而，反过来则不一定成立：（g，m，k）边值问题的解不一定都会产生对称的（g，m，j'，j''）边值问题的解。原因在于，（g，m，k）边值问题可能存在相对于诸如 P_i 这样的点不对称的解。我们的数值研究表明，例如当（g，m）=（3，2）时，情况确实如此。

注 3.4。（1）注意，只需考察 $j \in \mathbb{Z}_2$，因为（g，m，j，k）边值问题的解与（g，m，$j+2$，$k+2$）边值问题的解显然一一对应。（2）边值问题（g，m，1）和（g，m，$-(g-1)$）的线性解 $r(x) = a(x)$ 和 $r(x) = -(g-1)a(x) + \pi$，分别是对称边值问题（g，m，0，0）和（g，m，-1，-1）的解。（3）容易证明，对称的（g，m，j，k）边值问题存在一个线性解，当且仅当 $k = j$ 和 $j \in \{0, 1\}$。

3.2. **针对 $m = 1$ 的情形进行数值研究**。本小节展示数值研究的结果。

为求解满足 $g \in \{2, 3, 4, 6\}$ 的 $(g, 1, k)$-边值问题，我们在 $t = 0$ 处采用射击法。数值研究结果表明，对于每个 $k \in \{1-2g, 1-g, 1, 1+g\}$，$(g, 1, k)$-边值问题恰有一个解。对于 $k = 1$ 和 $k = 1-g$，它们分别对应已知的线性解 $r(x) = a(x)$ 和 $r(x) = -(g-1)a(x) + \pi$。对于 $k = 1-2g$ 和 $k = 1+g$，数值求得的解分别关于 P_{-2} 和 P_1 中心对称。此外，对于其他取值的 $k \in \mathbb{Z}$，似乎不存在 $(g, 1, k)$-边值问题的解。

下图展示了前一段中提及的关于 $g = 4$ 和 $m = 1$的结果。粉色和绿色的曲线分别表示 $k = 1$ 和 $k = 1-g$。黄色和蓝色的曲线分别对应 $k = 1+g$ 和 $k = 1-2g$。



鉴于上述数值研究，我们将只考虑对称的 $(g, 1, k', k'')$ 边值问题。换言之，我们考察带有初始条件 $r(0) = \frac{(jg+1)}{2g}\pi$ 和 $r'(0) = v$的（g,1）微分方程的解 r，并寻找能使 r 成为对称的（g, 1, $jg+1$, k）边值问题解的初始速度。当 W 对 v 的依赖对我们的讨论至关重要时，我们将把 W 称为 W_v。

数值研究表明，$W_v(-\infty)$ 的符号能够在一定程度上揭示 r 的行为：

- 若 $W_v(-\infty) = 0$，则 r 是一个对称的（g，1，$jg+1$，k）边值问题的解；
- 若 $W_v(-\infty) > 0$，则 r 要么严格递增，要么严格递减，并且满足 $\lim_{x\to\infty} r(x) = \pm\infty$；
- 若 $W_v(-\infty) < 0$ 且 $r(0) = (g+1)\frac{\pi}{2g}$，则对所有 $x \in \mathbb{R}$，都有 $0 \le r(x) \le (g+1)\frac{\pi}{g}$；
- 若 $W_v(-\infty) < 0$ 且 $r(0) = (1-2g)\frac{\pi}{2g}$，则对所有 $x \in \mathbb{R}$，不等式 $(1-2g)\frac{\pi}{g} \le r(x) \le 0$ 成立；而在前述两种情形下，r' 都会无穷多次变号。

对于每种选择 $m = 1$、$g \in \{2, 3, 4, 6\}$，数值结果表明，存在l_j，$u_j \in \mathbb{R}$ 使得：若 $v \in (l_j, u_j)$，则 $W_v(-\infty) < 0$；若 $v \in \{l_j, u_j\}$，则 $W_v(-\infty) = 0$；其余情况下则为 $W_v(-\infty) > 0$。数值研究得到

g	2	3	4	6
u_1	0.881	0.954	0.975	0.989
l_0	-0.881	-0.750	-0.648	-0.507

此外，它们分别表示 $l_1 = -\frac{g-1}{g}$和$u_0 = \frac{1}{g}$，即线性解的初始速度。

3.3. **存在性证明**。对于每个 $g \in \{2,3,4,6\}$，我们证明存在两个 $(g, 1)$-边值问题的解，它们不与线性解重合。

引理 3.5。如果极限$_{x\to\infty} r(x)$ 存在且有限，则极限$_{x\to\infty} r(x) = k\pi + \frac{\pi}{g}$, $k \in \mathbb{Z}$。如果极限$_{x\to-\infty} r(x)$ 存在且有限，则极限$_{x\to-\infty} r(x) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$。

证明。假设对于某个 $c \in \mathbb{R}$，$\lim_{x\to\infty} r(x) = c$。当 x 趋于无穷时，$(g, 1)$-微分方程的右端收敛于

$$\frac{1}{2g}\left[(g-1)\sin\left(2c-2\frac{\pi}{g}\right)+\sin\left(2c+2(g-1)\frac{\pi}{g}\right)\right].$$

该项必须消失，否则 $\lim_{x\to\infty} r(x)$ 将不存在。这就得出了结论。第二种情况的处理类似。□

引理 3.6。如果 $m = 1$ 且

（1）$g \in \{2,3,4\}$，则函数 W 严格递增。（2）且 $g = 6$，则函数 W 在负 x-轴上严格递增。

证明。使用引理 3.1 和引理 3.2。 □

引理 3.7。对于 $m = 1$，我们有 $\lim_{x\to\pm\infty} W'(x) = 0$。此外，极限 $W(\pm\infty) := \lim_{x\to\pm\infty} W(x)$ 存在且有限。

证明。第一个结论可由第 3.1.2 小节直接得出。

由于 $m = 1$，我们得到 $W'(x) = -\frac{1}{2g}\left(h_1'(x)\sin^2 r(x) + h_2'(x)\sin^2(r(x) - \frac{3\pi}{4})\right)$，其中 $h_i'(x) := \frac{d}{dx}h_i(x)$, $i \in \{1,2\}$。设 $g \in \{2,3,4\}$ 和 $a \in \mathbb{R}$ 给定。那么上述恒等式意味着

$$W(x) = W(a) + \int_a^x -\frac{1}{2g}\left(h_1'(\xi)\sin^2 r(\xi) + h_2'(\xi)\sin^2(r(\xi) - \tfrac{3\pi}{4})\right)d\xi.$$

引理 3.1 和引理 3.2 表明被积函数为正。因此，由$x \mapsto W_v(x)$定义的函数是递增的。此外，它有上界，因为

$$\begin{aligned} W(x) - W(a) &= \int_a^x -\tfrac{1}{2g}\left(h_1'(\xi)\sin^2 r(\xi) + h_2'(\xi)\sin^2(r(\xi) - \tfrac{3\pi}{4})\right)d\xi \\ &\le \int_a^x -\tfrac{1}{2g}\left(h_1'(\xi) + h_2'(\xi)\right)d\xi \\ &= -\tfrac{1}{2g}\left(h_1(x) + h_2(x) - h_1(a) - h_2(a)\right). \end{aligned}$$

由于该不等式右端有界，极限 $\lim_{x\to\infty} W(x)$ 存在且有限。类似地，我们证明 $\lim_{x\to-\infty} W(x)$ 存在且有限。下文给定 $g = 6$ 和 $a \in \mathbb{R}$。引入 $I_j: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $j \in \{1,2\}$，定义为

$$\begin{aligned} I_1 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & x &\mapsto \int_a^x -\tfrac{1}{12}h_2'(\xi)\sin^2(r(\xi) - \tfrac{3\pi}{4})d\xi, \\ I_2 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & x &\mapsto \int_a^x -\tfrac{1}{12}h_1'(\xi)\sin^2 r(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

显然，$W(x) = W(a) + I_1(x) + I_2(x)$。如上所述，我们证明 I_1 单调递增且有上界。因此，极限 $\lim_{x\to\infty} I_1(x)$ 存在且有限。

由引理 3.1，函数 $h_1'(x)$ 存在唯一零点 $x_0 > 0$，使得 $h_1'(x)$ 在 $x < x_0$ 时为负，在 $x > x_0$ 时为正。给定 $a > x_0$。函数 I_2 在 $[a,\infty)$ 上单调递减。由于它也有下界，极限 $\lim_{x\to\infty} I_2(x)$ 存在且有限。因此，$\lim_{x\to\infty} W(x) = \lim_{x\to\infty}(I_1(x) + I_2(x))$ 存在且有限。类似地，我们证明 $\lim_{x\to-\infty} W(x)$ 存在且有限。□

受前一个引理的启发，我们定义函数

$$L: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ v \mapsto W_v(-\infty).$$

引理 3.8. 设 r_v 是对称$(g, 1, j)$-微分方程的一个解。若 $L(v) < 0$，则对于某个 $k \in \mathbb{Z}$，不可能有 $\lim_{x\to-\infty} r_v(x) = k\pi$。此外，函数 r_v 有界。

证明. 若 $\lim_{x\to-\infty} r_v(x) = k\pi$，则得到 $W_v(-\infty) \geq 0$，这与我们的假设矛盾。对于任意满足 $r_v(x_0) = k\pi$，$k \in \mathbb{Z}$ 的点 $x_0 \in \mathbb{R}$，有 $W_v(x_0) \geq 0$。由于 $W_v(-\infty) < 0$，因此必存在一点 $x_1 \in \mathbb{R}$，使得对于所有 $x \leq x_1$ 和所有 $k \in \mathbb{Z}$，都有 $r_v(x) \neq k\pi$。因此，由于 r_v 连续且关于 P_j 点对称，可知函数 r_v 有界。□

引理 3.9. 设 r_v 是对称的 $(g,1,j)$-微分方程的一个解，并假设$L(v) > 0$。那么存在一点 $x_0 \in \mathbb{R}$，使得对所有 $x \leq x_0$，$r_v'(x) \neq 0$。此外，不可能有$\lim_{x\to-\infty} r_v'(x) = 0$。

证明。引入简记 $w := W_v(-\infty)$。根据假设，存在一点$x_1 \in \mathbb{R}$，使得对所有 $x \leq x_1$，$W_v(x) > \frac{w}{2}$。此外，由于 $\lim_{x\to-\infty} h_1(x) = g$ 且 $\lim_{x\to-\infty} h_2(x) = 0$，存在一个 $x_2 \in \mathbb{R}$，使得对所有 $x \leq x_2$，$W_v(x) - \frac{1}{2}r_v'(x)^2 < \frac{w}{2}$。定义$x_0 = \min(x_1, x_2)$。因此，

$$\frac{w}{2} - \frac{1}{2}r_v'(x)^2 < W_v(x) - \frac{1}{2}r_v'(x)^2 < \frac{w}{2}$$

对所有 $x \leq x_0$，从而对所有 $x \leq x_0$，$r_v'(x) \neq 0$。
如果 $\lim_{x\to-\infty} r'(x) = 0$，则存在一点 $x_3 \in \mathbb{R}$，使得对所有 $x \leq x_3$，$\frac{1}{2}r'(x)^2 < \frac{w}{4}$。定义$x_4 = \min(x_2, x_3)$。于是对所有 $x \leq x_4$，$W_v(x) < \frac{3w}{4}$。这与假设矛盾，因为根据假设，必须存在一点 $x_5 \in \mathbb{R}$，使得对所有 $x \leq x_5$，$W_v(x) > \frac{3w}{4}$。□

推论 3.10。设 r_v 是对称 $(g$、1、$j)$-微分方程的一个解，并假设$L(v) > 0$。则有 $\lim_{x\to-\infty} r(x) = \pm\infty$ 以及 $\lim_{x\to\infty} r(x) = \pm\infty$。

引理 3.11. 设 $g \in \{2,3,4,6\}$。假设 r 关于点$P_1^x = (0, (g+1)\frac{\pi}{2g})$点对称。那么存在 $v_+ > 0$，使得 $r'(0) = v_+$，且 $L(v_+) = 0$。此外，存在 $v_- < 0$，使得 $r'(0) = v_-$，且 $L(v_-) = 0$。

证明。首先，我们证明 $L(0) < 0$。随后，我们验证：如果选择绝对值足够大的 $v \in \mathbb{R}$，则 $L(v) > 0$。因此，根据介值定理，存在初始速度 $v_+ > 0$ 和 $v_- < 0$，使得 $L(v_+) = L(v_-) = 0$。

对于 $g = 2$，我们得到 $W_v(0) = \frac{1}{2}r'(0)^2 = \frac{1}{2}v^2$。因此，若选择 $v = 0$，则得到 $W_0(0) = 0$。于是，由引理 3.6 可知 $W_0(-\infty) < 0$。对于 $g \in \{3,4,6\}$，我们得到 $W_v(0) = \frac{1}{2}r'(0)^2 - c_g$，其中 c_g 为正常数。因此，若选择 $r'(0) = 0$，则得到 $W_0(0) < 0$。于是，由引理 3.6 可知 $W_0(-\infty) < 0$。根据第 3.1.2 小节，我们得到 $|W_v'(x)| \leq 4g^{2^{g-1}}$双曲余弦$x$，对所有$x \in \mathbb{R}$ 均成立，因此

$$-2\pi\tfrac{g-1}{g^2} \leq W_v(0) - W_v(-\infty) \leq 2\pi\tfrac{g-1}{g^2}.$$

因此，若我们选取足够大的 $v > 0$，就得到 $L(v) = W_v(-\infty) > 0$。类似地，若我们选取绝对值足够大的 $v < 0$，就得到 $L(v) = W_v(-\infty) > 0$。
由于 $L(v)$ 关于 v 连续，介值定理表明，存在一个 $v_+ > 0$，使得 $r'(0) = v_+$，且 $L(v_+) = 0$。此外，存在 $v_- < 0$，使得 $r'(0) = v_-$，且 $L(v_-) = 0$。□

数值结果表明，即使假设 r 关于 $P_{-2}^x = (0, (1-2g)\frac{\pi}{2g})$ 点对称，前一个引理的断言仍然成立。然而，在这种情况下无法应用前一个证明，因为对于 $g \in \{3,4,6\}$，$W_0(0) > 0$。

引理 3.12. 设 $g \in \{2,3,4,6\}$ 和 r 关于点 $P_{-2}^x = (0, (1-2g)\frac{\pi}{2g})$点对称。则存在 $v_\pm \in \mathbb{R}$，使得 $r'(0) = v_\pm$，且 $v_- < v_+$ 满足 $L(v_\pm) = 0$。

证明. 证明思路与引理 3.11 的证明完全相同。对于 $g = 2$，可直接应用引理 3.11 的证明，因此只剩下 $g \in \{3,4,6\}$ 的情形。
我们将分别讨论 g 的三种可能情形。我们如下证明存在 $v_0 \in \mathbb{R}$，使得$W_{v_0}(-\infty) < 0$：对于每个 $v \in \mathbb{R}$，我们证明 $W_v(\infty) - W_v(0) < c_1$，其中 c_1 是 $\mathbb{R}$ 中的一个常数。我们还证明 $c_2 := W_v(\infty) - W_v(-\infty)$，且它不依赖于 v。随后，我们证明可以找到一个值 $v_0 \in \mathbb{R}$，使得下式

成立： $W_{v_0}(\infty) < c_1 + W_{v_0}(0) < c_2$。因此， $W_{v_0}(-\infty) < 0$，这正是我们要证明的结论。然后，仿照引理 3.11 的证明即可完成该引理的证明。首先，假设 $g = 3$ 且 $r'(0) = -\varepsilon$，其中 $\varepsilon > 0$。那么，存在一点 $x_0 \in \mathbb{R}$，使得 $r(x_0) = -\pi$，并且对每个 $x \in [0, x_0]$，都有 $-\pi \le r(x) \le -\frac{5\pi}{6}$。由 $r(0) = -\frac{5\pi}{6}$ 和 $r'(0) < 0$，以及 $(g, 1)$-常微分方程，可以很容易地推出这一点。此外，$(g, 1)$-常微分方程表明，对每个 $x \in \mathbb{R}$， $r''(x)$ 介于 $-\frac{1}{2}$ 和 1 2 之间。因此，对每个 $x \in \mathbb{R}$，都有 $-\frac{1}{2}x \le r'(x) - r'(0) \le \frac{1}{2}x$。于是，对所有满足 $0 \le x \le 2 - 2\varepsilon$ 的 x，都有 $-1 \le r'(x) \le 1$。从而得到 $x_0 \ge \frac{\pi}{6}$。下面令 $x_0 = \frac{\pi}{6}$。由于当 $0 \le x \le 2 - 2\varepsilon$ 时， $|r'(x)| \le 1$，因此对所有 $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$，都有 $-\frac{7\pi}{6} \le r(x) \le -\frac{5\pi}{6}$。利用第 3.1.2 小节中推导出的 $W_v'(x)$ 的恒等式，我们得到

$$
\begin{aligned}
\int_0^x W_v'(\xi)d\xi \le \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{3}} & \frac{2}{9\cosh\xi}\big(\sin 2a(\xi) + \sin 4a(\xi)\big)d\xi \\
& + \frac{1}{8}(1+\sqrt{3})^2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} -\frac{2}{9\cosh\xi}\big(-\cos 2a(\xi) + \cos 4a(\xi)\big)d\xi \\
& + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\infty} \frac{2}{9\cosh\xi}\big(\sin 2a(\xi) + \sin 4a(\xi)\big)d\xi \\
& + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\infty} -\frac{2}{9\cosh\xi}\big(-\cos 2a(\xi) + \cos 4a(\xi)\big)d\xi
\end{aligned}
$$

只要满足 $-\frac{7\pi}{6} \le r \le -\frac{5\pi}{6}$，我们就会用到 $\sin^2(r) \le \frac{1}{4}$ 和 $\sin^2(r - \frac{3\pi}{4}) \le \frac{1}{8}(1+\sqrt{3})^2$。因此，$W_{-\varepsilon}(x) \le W_{-\varepsilon}(0) + 0.41 \le \frac{1}{2}\varepsilon^2 + 0.53$ 对所有 $x \ge 0$ 都成立。于是， $W_{-\varepsilon}(\infty) \le \frac{1}{2}\varepsilon^2 + 0.53.$。此外，可以证明，对所有 $v \in \mathbb{R}$， $W_v(\infty) = W_v(-\infty) + \frac{1}{8}(3+\sqrt{3})$。因此， $W_{-\varepsilon}(-\infty) \le \frac{1}{2}\varepsilon^2 + 0.53 - \frac{1}{8}(3+\sqrt{3})$。所以，当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，我们有 $W_{-\varepsilon}(-\infty) < 0$。

我们假设 $g = 4$ 和 $r'(0) = -\varepsilon$，其中 $\varepsilon > 0$。那么存在一点 $x_0 \in \mathbb{R}$，使得 $r(x_0) = -\frac{5\pi}{4}$，并且对所有 $x \in [0, x_0]$， $-\frac{5\pi}{4} \le r(x) \le -\frac{7\pi}{8}$。由 $r(0) = -\frac{7\pi}{8}$ 和 $r'(0) < 0$，结合 $(g, 1)$-常微分方程，可轻易推出这一点。此外，$(g, 1)$-常微分方程得出结论：对每个 $x \in \mathbb{R}$，都有 $-\frac{1}{2} \le r''(x) \le \frac{1}{2}$。因此，对每个 $x \in \mathbb{R}$，都有 $-\frac{1}{2}x \le r'(x) - r'(0) \le \frac{1}{2}x$。于是，对每个满足 $0 \le x \le 2 - 2\varepsilon$ 的 x，都有 $-1 \le r'(x) \le 1$。由此得到 $x_0 \ge \frac{3\pi}{8}$。下文中，我们假设 $x_0 = \frac{3\pi}{8}$。因此，对每个 $x \in \left[0, \frac{3\pi}{8}\right]$，都有 $-\frac{5\pi}{4} \le r(x) \le -\frac{7\pi}{8}$。利用第3.1.2小节中推导出的关于 $W_v'(x)$ 的恒等式，可得

$$
\begin{aligned}
\int_0^x W_v'(\xi)d\xi \le \sin^2\tfrac{7\pi}{8} & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3}{16\cosh\xi}\big(\sin 2a(\xi) + \sin 4a(\xi)\big)d\xi \\
& + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{8}} \frac{3}{16\cosh\xi}\big(\sin 2a(\xi) + \sin 4a(\xi)\big)d\xi \\
& + \int_{\frac{3\pi}{8}}^{\infty} \frac{3}{16\cosh\xi}\big(\sin 2a(\xi) + \sin 4a(\xi)\big)d\xi \\
& + \int_0^{\infty} -\frac{3}{16\cosh\xi}\big(-\cos 2a(\xi) + \cos 4a(\xi)\big)d\xi,
\end{aligned}
$$

其中，我们对 $-\frac{9\pi}{8} \le r \le -\frac{7\pi}{8}$ 使用 $\sin^2 r \le \sin^2(\frac{7\pi}{8})$，并对 $-\frac{5\pi}{4} \le r \le -\frac{9\pi}{8}$ 使用 $\sin^2 r \le \frac{1}{2}$。因此，我们特别将 $r(\frac{\pi}{4}) = -\frac{9\pi}{8}$ 取为给定。在所有其他可能情形中，上述不等式会进一步改进。因此，对所有 $x \ge 0$，成立 $W_{-\varepsilon}(x) \le W_{-\varepsilon}(0) + 0.34 \le \frac{1}{2}\varepsilon^2 + 0.47$。从而， $W_{-\varepsilon}(\infty) \le \frac{1}{2}\varepsilon^2 + 0.47$。鉴于对每个 $v \in \mathbb{R}$ 均有 $W_v(\infty) = W_v(-\infty) + \frac{1}{2}$，我们得到 $W_{-\varepsilon}(-\infty) \le \frac{1}{2}\varepsilon^2 + 0.47 - \frac{1}{2}$。因此，若 $\varepsilon > 0$ 充分小，则有 $W_{-\varepsilon}(-\infty) < 0$。

接下来，我们取 $g = 6$ 和 $r'(0) = -\varepsilon$，其中 $\varepsilon > 0$。于是，存在一点 $x_0 \in \mathbb{R}$，使得 $r(x_0) = -\frac{5\pi}{4}$，并且对所有 $x \in [0, x_0]$，都有 $-\frac{5\pi}{4} \le r(x) \le -\frac{11\pi}{12}$。这可以

由 $r(0) = -\frac{11\pi}{12}$ 和 $r'(0) < 0$，以及 $(6, m)$-常微分方程轻易推出。此外，该常微分方程意味着，对每个 $x \in \mathbb{R}$，都有 $-\frac{1}{2} \leq r''(x) \leq \frac{1}{2}$。因此，对每个 $x \in \mathbb{R}$，都有 $-\frac{1}{2}x \leq r'(x) - r'(0) \leq \frac{1}{2}x$。于是，对每个满足 $0 \leq x \leq 2 - 2\varepsilon$ 的 x，都有 $-1 \leq r'(x) \leq 1$。由此得到 $x_0 \geq \frac{\pi}{3}$。为作进一步考察，我们取 $x_0 = \frac{\pi}{3}$。因此，对所有 $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$，都有 $-\frac{5\pi}{4} \leq r(x) \leq -\frac{11\pi}{12}$。利用第 3.1.2 小节中推导出的 $W_v'(x)$ 恒等式，我们得到

$$\begin{aligned}
\int_0^x W_v'(\xi)d\xi \leq \sin^2 \tfrac{11\pi}{12} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \tfrac{5}{36\cosh \xi}\big(\sin 2a(\xi) + \sin 4a(\xi)\big)d\xi \\
+ \sin^2 \tfrac{5\pi}{4} \int_{\frac{\pi}{6}}^{z_1} \tfrac{5}{36\cosh \xi}\big(\sin 2a(\xi) + \sin 4a(\xi)\big)d\xi \\
+ \sin^2 \tfrac{5\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} -\tfrac{5}{36\cosh \xi}\big(-\cos 2a(\xi) + \cos 4a(\xi)\big)d\xi \\
+ \tfrac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} -\tfrac{5}{36\cosh \xi}\big(-\cos 2a(\xi) + \cos 4a(\xi)\big)d\xi \\
+ \int_{\frac{\pi}{3}}^{\infty} -\tfrac{5}{36\cosh \xi}\big(-\cos 2a(\xi) + \cos 4a(\xi)\big)d\xi,
\end{aligned}$$

其中 z_1 定义了 $h_1'(x, 6)$ 的唯一零点。此外，我们对 $-\frac{13\pi}{12} \leq r \leq -\frac{11\pi}{12}$ 使用 $\sin^2 r \leq \sin^2(-\frac{11\pi}{12})$ 与 $\sin^2(r - \frac{3\pi}{4}) \leq \sin^2(\frac{5\pi}{3})$；对 $-\frac{5\pi}{4} \leq r \leq -\frac{13\pi}{12}$ 使用 $\sin^2 r \leq \sin^2(\frac{5\pi}{4})$ 与 $\sin^2(r - \frac{3\pi}{4}) \leq \frac{1}{4}$。我们特别假设 $r(\frac{\pi}{6}) = -\frac{13\pi}{12}$。在所有其他可能情形中，上述不等式会进一步改进。因此，对每一个 $x \geq 0$，都有 $W_{-\varepsilon}(x) \leq W_{-\varepsilon}(0) + 0.19 \leq \frac{1}{2}\varepsilon^2 + 0.3$，从而推出 $W_{-\varepsilon}(\infty) \leq \frac{1}{2}\varepsilon^2 + 0.3$。由于对每一个 $v \in \mathbb{R}$，$W_v(\infty) = W_v(-\infty) + \frac{1}{8}(1+\sqrt{3})$ 成立，这蕴含 $W_{-\varepsilon}(-\infty) \leq \frac{1}{2}\varepsilon^2 + 0.3 - \frac{1}{8}(1+\sqrt{3})$。因此，对于充分小的 $\varepsilon > 0$，有 $W_{-\varepsilon}(-\infty) < 0$。
对于每种情形 $g \in \{3, 4, 6\}$，现在我们可以用与引理 3.11 相同的方法证明该断言。□

引理 3.13. 设 $g \in \{2, 3, 4, 6\}$。假设 r 关于 $(0, (g+1)\frac{\pi}{2g})$ 点对称。设 $v \in \mathbb{R}$ 满足 $r'(0) = v$，且 $L(v) < 0$。那么存在 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $x_0 \in \mathbb{R}$，使得对所有 $x \leq x_0$，都有 $(k-1)\pi < r(x) < k\pi$。

证明。根据引理 3.7，极限 $\lim_{x\to-\infty} W(x) = \lim_{x\to-\infty}(\frac{1}{2}r'(x)^2 - \frac{m}{2}\sin^2 r(x))$ 存在。由假设，该极限为负，因此结论成立。□

准备工作完成后，我们现在可以证明定理 1.1：

定理 3.14。 对于每个 $g \in \{2, 3, 4, 6\}$，存在四个（不一定互不相同的）$k \in \mathbb{Z}$ 值，使得 $(g, 1, k)$-边值问题有解。

证明。对于每一种可能的 g 取值，引理 3.11 和 3.12 表明，存在两个实数 $v_\pm \in \mathbb{R}$，满足 $v_- < v_+$，使得 $L(v_\pm) = 0$。此外，由引理 3.11 和 3.12 的证明可知，存在 $v \in (v_-, v_+)$，使得 $L(v) < 0$。根据引理 3.13、对 v 的连续依赖性以及 $\lim_{x\to-\infty} W_{v_\pm}(x) = \lim_{x\to-\infty}(\frac{1}{2}r'(x)^2 - \frac{m}{2}\sin^2 r(x)) = 0$，可得结论。□

注 3.15. (1) 如上所述，数值计算表明，$k \in \mathbb{Z}$ 的四个值各不相同，分别为 $1-2g, 1-g, 1, 1+g$，但我们并未证明这一点。

(2) 定理 3.14 通过构造证明，对于 $n \in \{3, 4, 5, 7\}$，存在四个从 $\mathbb{S}^n$ 出发的调和自映射。需要注意的是，对于给定的 $g \in \{2, 3, 4, 6\}$，相应边值问题目前只有两个已知解。因此，至少有两个构造出的解是新的（并且如前所述，数值计算表明恰好有两个解是新的）。还要注意，这些解并非在 [5, 21], 中构造出来的，因为这两篇论文都只构造了满足 $m_0 > 1$ 的解。

(3) 正如引言中所述，已知对于 $n \in \{3,4,5,7\}$，存在从 $\mathbb{S}^n$ 出发的调和自映射；例如参见 [5, 21]。然而，前述手稿中描述的构造方法，关键在于这样一个事实：对于 $g = 1$, $2 \le m \le 5$和 $g = 2$, $2 \le m_0 \le 5$, $m_0 \le m_1$, $(g,\ m_0,\ m_1)$-常微分方程是由一个振荡方程推导而来的。这使得在这些情形下可以构造出无穷多个解。其他调和映射的构造方法，例如 R. Wood 在 [4], 第 80 页和第 102 页所述的所谓等角函数构造，则利用了特殊的几何情形。据我们所知，文献中尚无研究采用本文所用的方法来构造调和映射。

定理 3.14 还蕴含特殊正交群之间存在特定映射。以下内容摘自 [19]: 任意等距余维一作用 $G \times \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{S}^{n+1}$ 均可提升为 SO($n+1$) 在 SO($n+2$) 上的等距余维一作用 $G \times$，其度量1 2 $\underline{\mathrm{Tr}}\, X^{\mathrm{t}}Y$为

$$G \times \mathrm{SO}(n+1) \times \mathrm{SO}(n+2) \to \mathrm{SO}(n+2), \quad \left(A, \begin{pmatrix} 1 & \\ & B \end{pmatrix}\right) \cdot C = AC \begin{pmatrix} 1 & \\ & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

$\mathbb{S}^{n+1}$ 上的 (g, m_0, m_1)-作用的提升称为 SO($n+2$) 上的 (g, m_0, m_1)-作用（如果 $m_0 = m_1$，则简称为 (g, m)-作用）。

对于 SO($n+2$) 上的 (g, m_0, m_1)-作用， [19] 得到了以下两个定理:

定理 3.16 （ 中的定理 F [19]）。给定 *SO(n+2)* 上的（g、 m_0、 m_1）-作用，且 $n = \frac{m_0+m_1}{2} g$，映射 ~~$g \cdot$~~ $\tilde{\gamma}$（$2t$） $\to g \cdot \tilde{\gamma}$（$2r$（$t$）） 的张力场的法向分量为零，当且仅当 r 满足（$2g$、 m_0、 m_1、 k）-边值问题。

定理 3.17 （见 [19] 中的定理 H）。给定 (g, m_0, m_1) 对 $\mathrm{SO}(n+2)$ 的作用，任意 (k, r)-映射的张力场的切向分量除以下情况外均为零

$$(g, m_0, m_1) \in \{(4,2,2\ell+1), (4,4,4\ell+3), (4,4,5), (4,6,9)\}.$$

因此，由定理 3.14 可得以下定理:

定理 3.18。 对于 $\ell \in \{5,6\}$，$\mathrm{SO}(\ell)$ 有四个调和自映射。

注 3.19。 值得一提的是，SO(5)，SO(6) 的（非平凡）调和自映射的存在性此前已得到证明，例如可由 [5] 以及 [19] 中先前提及的与特殊正交群相关的结果推出。然而，据作者所知，对于每个 $\ell \in \{5,6\}$，SO(ℓ) 的两个调和自映射是新的。

4. Harmonic maps between non-compact cohomogeneity one manifolds

我们给出了非紧余维一流形之间等变调和映射的存在性。

我们研究如下形式的非紧余维一流形

$$M = \mathbb{R}^{k_0+1} \times G_1/H_1 \times \cdots \times G_m/H_m, \tag{4.1}$$

其中 $k_0 \in \mathbb{N}$ 与 $k_0 \ge 2$ ，且每个 G_i/H_i 是维数为 k_i 的紧致不可约非平坦齐性空间。设

$$G = \mathrm{SO}(k_0+1) \times G_1 \times \cdots \times G_m.$$

主轨道由下式给出

$$\mathbb{S}^{k_0} \times G_1/H_1 \times \cdots \times G_m/H_m,$$

奇异轨道由下式给出

$$N = \{0\} \times G_1/H_1 \times \cdots \times G_m/H_m.$$

我们假设 $M/G = [0, \infty)$。对于每个 $i \in \{1, \ldots, m\}$，令 g_i为 G_i-不变度量，在G_i/H_i上。每个 G-不变光滑度量 g 在 $M \setminus N$ 上均具有如下形式

$$g = dt^2 + f_0^2(t) g_{\mathbb{S}^{k_0}} + \sum_{j=1}^{m} f_j^2(t) g_i, \tag{4.2}$$

其中 f_0, f_1, ..., f_m : (0, ∞) $\to \mathbb{R}_+$ 为光滑函数。为了使度量 g 能够光滑地延拓到 N，根据 [10, 26]，我们必须施加以下初始值

$$f_0(0) = \dot{f}_i(0) = 0, \dot{f}_0(0) = 1, f_i(0) = a_i,$$

对于 $i \in \{1, \dots, m\}$，其中 $a_i > 0$。

以下令 γ : $\mathbb{R} \to M$ 为 M 的一条固定的完备单位速率法测地线。我们研究如下形式的等变映射

$$\psi : M \to M, g \cdot \gamma(t) \mapsto g \cdot \gamma(r(t)),$$

其中 r : (0, ∞) $\to \mathbb{R}$ 是一个满足 r(0) $= 0$ 的光滑函数。根据 [18] 中的引理 2.1 可证明这些映射是光滑的。

由 (2.2)、(2.4) 和 (4.2)，调和自映射的构造（在当前考虑的情形下）可归结为求出满足奇异边值问题的光滑解 r : $[0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$\ddot{r}(t) + (\sum_{i=0}^{m} k_i \frac{\dot{f}_i(t)}{f_i(t)})\dot{r}(t) - \sum_{i=0}^{m} k_i \frac{f_i(r(t))\dot{f}_i(r(t))}{f_i^2(t)} = 0 \tag{4.3}$$

其中 r(0) $= 0$，且 $\dot{r}$(t) $= v$，其中 $v \in \mathbb{R}$。由 ([23]) 可知，给定 f_i, $i \in \{0, \dots, m\}$，函数 W r 可光滑延拓至 $t = 0$。

以下讨论受到 Ratto 的工作 [20] 启发。考虑如下形式的度量

$$\tilde{g} = dt^2 + e^{2\alpha_0(t)} f_0^2(t) g_{\mathbb{S}^{k_0}} + \sum_{j=1}^{m} e^{2\alpha_j(t)} f_j^2(t) g_i, \tag{4.4}$$

其中 α_i : $[0, \infty) \to \mathbb{R}$ 是满足以下条件的光滑函数

$$\alpha_i(t) = 0 \tag{4.5}$$

对所有 $t \in [0, \varepsilon]$, $i \in \{0, \dots, m\}$ 其中某个 $\varepsilon > 0$ 已给定。对函数 α_i 的条件确保 (4.4) 在奇异轨道 N 的某个邻域内与 (4.2) 一致。利用 ([23]) 中的定理 3.3 和 3.5，我们得到映射的张力场

$$\psi : (M, \tilde{g}) \to (M, g), g \cdot \gamma(t) \mapsto g \cdot \gamma(r(t)) \tag{4.6}$$

当且仅当.....时消失

$$\ddot{r}(t) + (\sum_{i=0}^{m} k_i \frac{\dot{f}_i(t)}{f_i(t)} + \sum_{i=0}^{m} k_i \dot{\alpha}_i(t))\dot{r}(t) - \sum_{i=0}^{m} k_i \frac{f_i(r(t))\dot{f}_i(r(t))}{f_i^2(t)} = 0. \tag{4.7}$$

我们将构造满足 r(0) $= 0$ 的 (4.7) 的光滑解 r : $[0, \infty) \to \mathbb{R}$。对于任意 $v \in \mathbb{R}$，存在满足 r (0) $= 0$ 且 $\dot{r}$(0) $= v$ 的 (4.7) 的光滑解 r : $[0, \varepsilon] \to \mathbb{R}$，并且该解连续依赖于 v，见 [23]。

以下令 $v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 和 r 为相应的解。不失一般性，我们可以假设 $\dot{r}(\varepsilon) \neq 0$。事实上，若 $\dot{r}(\varepsilon) = 0$，则 r 的光滑性以及 $\dot{r}(0) = v \neq 0$ 意味着存在一个 $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon)$，使得 $\dot{r}(\varepsilon_0) \neq 0$。然后我们可以相应地调整假设 (4.5)。

设 r 是 r 的任意光滑延拓: $[0, \varepsilon] \to \mathbb{R}$，且 $r_{|[\varepsilon, \infty)}$ 严格单调。因此，由（4.7）可得

$$\sum_{i=0}^{m} k_i \dot{\alpha}_i(t) = -\frac{\ddot{r}(t)}{\dot{r}(t)} - \sum_{i=0}^{m} k_i \frac{\dot{f}_i(t)}{f_i(t)} - \sum_{i=0}^{m} k_i \frac{f_i(r(t))\dot{f}_i(r(t))}{f_i^2(t)\dot{r}(t)},$$

因此我们有

$$\sum_{i=0}^{m} k_i \alpha_i(t) = \int_{\varepsilon}^{t} (-\frac{\ddot{r}(s)}{\dot{r}(s)} - \sum_{i=0}^{m} k_i \frac{\dot{f}_i(s)}{f_i(s)} - \sum_{i=0}^{m} k_i \frac{f_i(r(s))\dot{f}_i(r(s))}{f_i^2(s)\dot{r}(s)}) ds. \tag{4.8}$$

显然，对于每个给定的光滑 r，都存在无穷多个满足 (4.5) 和 (4.8) 的函数 α_i。特别地，由此我们证明了调和映射 (M, $\tilde{g}$) $\to$ (M, g) 的存在性。注意，我们可以选择 r，使得构造出的调和映射不是平凡映射，即不是

恒等映射或负恒等映射。此外，注意构造出的调和映射是满射，因为 r 被选为在区间 $[\varepsilon,\infty)$ 上严格单调。特别地，构造出的调和映射不可能是常值映射。

由此，我们证明了定理 1.2：

定理4.1。 设(M,g) 是如（*4.1*，*4.2*）所述的非紧余维一流形。设给定 $v\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 。则存在一个 $\varepsilon>0$ ，使得方程（*4.3*）的光滑 r 解定义在 $[0,\varepsilon]$ 上，并且 $\dot r(\varepsilon)\neq 0$。对于 r 到$[\varepsilon,\infty)$ 的任意严格单调光滑延拓，都存在无穷多个形如（*4.4*）的度量，使得映射（*4.6*）是调和的。

注4.2。 值得一提的是，定理4.1可以很容易地推广到不同非紧流形之间的光滑等变映射；不过，为了便于表述，我们将讨论限制在当前情形。

References

[1] A. V. Alekseevskiˇ i 和 D. V. Alekseevskiˇ i。 G具有一维轨道空间的流形。载于 *Lie groups, their discrete subgroups and invariant theory* 8 1 31 ，第 *Adv. Soviet Math.* 卷，页码 – 。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1992 年。[2] Marcos M. Alexandrino 和 Renato G. Bettiol。 *Lie groups and geometric aspects of isometric actions*。施普林格，尚，2015 年。[3] Paul Baird。 *Harmonic maps with symmetry, harmonic morphisms and deformations of metrics*, *Research Notes in Mathematics*丛书第 87 卷。Pitman（高级出版项目），波士顿，马萨诸塞州，1983 年。[4] Paul Baird 和 John C. Wood。 *Harmonic morphisms between Riemannian manifolds* 29 *London* ，第 卷。*Mathematical Society Monographs. New Series* 2003 克拉伦登出版社，牛津大学出版社，牛津，。[5] Piotr Bizo´ń 和 Tadeusz Chmaj。球面之间的调和映射。 *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*，453 1957 403 415，1997（）：–。[6] Volker Branding 和 Anna Siffert。各维椭球上的调和自映射的无限族。*Nonlinear Anal.*，261：论文编号 113874，11，2025 年。[7] Volker Branding 和 Anna Siffert。欧氏球面上的稳定适当双调和映射，2025 年。[8] J. Eells 和 M. J. Ferreira。关于用调和映射表示同伦类。 *Bull. London Math. Soc.*，23 2 160 162，1991（）：–。[9] J. Eells 和 L. Lemaire。度量变形及其相关调和映射。 *Proc. Indian Acad. Sci.* ，（）：–。 *Math. Sci.* 90 1 33 45, 1981

[10] J.-H. Eschenburg 和 McKenzie Y. Wang。余维一爱因斯坦度量的初值问题。*J. Geom. Anal.*，10(1):109–137，2000 年。[11] Karsten Grove、Burkhard Wilking 和 Wolfgang Ziller。正曲率余维一流形与 3-Sasakian几何。 *J. Differential Geom.*，78(1):33–111，2008 年。[12] Karsten Grove 和 Wolfgang Ziller。具有正里奇曲率的余维一流形。 *Invent.* , *Math.* 149 3 619 646, 2002

（）：–。[13] Fr´éd´eric H´élein 和 John C. Wood。调和映射。载于 *Handbook of global analysis*，页码 417–491，1213。Elsevier Sci. B. V.，阿姆斯特丹，2008 年。[14] Wu-yi Hsiang 和 H. Blaine Lawson, Jr. 低余维极小子流形。 *J. Differential Geom-* , ：–。 *etry* 5 1 38, 1971

[15] Paul S. Mostert。勘误：“紧李群在流形上的作用”。 *Ann. of Math. (2)*，66:589，1957 年。[16] Paul S. Mostert。紧李群在流形上的作用。 *Ann. of Math. (2)*，65:447–455，1957 年。[17] Hans Friedrich M¨ünzner。球面上的等距超曲面。 *Math. Ann.*，251(1):57–71，1980 年。[18] Thomas P¨üttmann。余维一流形与非平凡次数的自映射。 *Transform. Groups*，14 1 225 247，2009（）：–。[19] Thomas P¨üttmann 和 Anna Siffert。余维一流形的调和自映射。 *Math. Ann.*，375 1 2 247 282，2019（-）：–。[20] Andrea Ratto。从变形球面到球面的调和映射。 *Amer. J. Math.*，111(2):225–238，1989 年。[21] Anna Siffert。球面上调和自映射的无限族。 *J. Differential Equations*，260 2925，2016 3 2898（）：–。[22] Anna Siffert。SU(3)上的调和自映射。 *J. Geom. Anal.*，28(1):587–605，2018 年。[23] Anna Siffert。余维一流形调和映射的初值问题，2026 年。[24] Ryoichi Takagi 和 Tsunero Takahashi。关于球面齐性超曲面的主曲率。载于 *Differential geometry (in honor of Kentaro Yano)*，页码 469–481。纪伊国屋书店，东京，1972 年。[25] Hajime Urakawa。余维 1 紧黎曼流形之间的等变调和映射。*Michigan Math. J.*，40(1):27–51，1993 年。[26] L. Verdiani 和 W. Ziller。余维一流形中的光滑性条件。 *Transform. Groups*，27 1 311 342，2022（）：–。

[27] Luigi Verdiani 和 Wolfgang Ziller。《余维一流形上的初值问题》，i，2024。

Universität Münster, Mathematisches Institut, Einsteinstr. 62, 48149 Münster, Germany
Email address: asiffert@uni-muenster.de