arXiv:2602.03956v1 [math.DS] 3 Feb 2026

关于保体积流存在整体截面

斯洛博丹·N·西米奇

2026年2月5日

摘要

我们为闭光滑流形 M 上的非奇异保体积流 Φ 建立了一个关于全局截面存在性的新判据。具体而言，若 X 是该流的无穷小生成元，且 Φ 保持光滑体积形式 Ω 不变，那么只要存在流形 M 上的光滑黎曼度量 g，其黎曼体积为 Ω，并且 $g(X,X) = 1$ 满足 $\|\delta_g\, i_X \|_g < 1$ δ_g g $\|dX^\flat\|_g < (\Omega)$，则 Φ 存在全局截面。其中，表示相对于 的余微分；（等价地，）。在这种情况下，事实上还存在流形 上的另一个光滑黎曼度量，使典范形式 $i_X\Omega$ 余闭，因此也是调和的。

1 引言与结果陈述

在这篇短文中，我们考虑一个光滑的（即 C^∞）非奇异向量场 X 及其相应的流 $\Phi = \{\phi_t\}$，它定义在一个维数为 M 的闭光滑流形 n上。关于 Φ，一个基本问题是它是否存在全局截面，因为在这种情况下，其动力学可以归约为该截面上的首次返回微分同胚的动力学。关于这个问题已有大量研究；例如参见[Fri82、Pla72、Sch57、Ver70、EG89、Sim97、Sim16、Sim23]。

回忆一下，若闭子流形 Σ of M 是定义在 M 上的 Φ 的全局截面，如果它与 Φ 的每条轨道都横截相交，则称其为全局截面。不难看出，这保证了每个点$x \in \Sigma$ 的轨道都会返回到 Σ，从而定义了 Σ的首次返回映射（或庞加莱映射） P。更准确地说，对于每个 $x \in \Sigma$，存在唯一的 $\tau(x) > 0$（称为首次返回时间），使得 $P(x) = \phi_{\tau(x)}(x)$ 属于 Σ；但对于每个 $t \in (0, \tau(x))$，$\phi_t(x) \notin \Sigma$。

首次回归映射 $P\colon\ \Sigma \to \Sigma$ 是一个微分同胚。因此，全局截面使我们能够从流转到微分同胚。若要从首次回归映射恢复流，可以使用称为悬垂的构造；例如参见 [KH95]。

若 g 是 M上的光滑黎曼度量，我们将 M 上的相应余微分算子记为 δ_g。对于次数为 k的光滑微分形式， δ_g 由 $\delta_g\omega = (-1)^{n(k+1)+1} \star_g d\star_g$给出，其中 $\star_g$ 是相应的霍奇星算子（参见 [War83]）。给定一个黎曼度量 g，我们将微分形式上的相应范数记为 $\|\omega\|_g$。更确切地说，若 ω 是 k上的一个 M-形式，则

$$\|\omega\|_g = \sup_{p\in M} |\omega_p|_g\,,$$

其中， $|\omega_p|_g$ 是 ω_p 作为相对于 g 的 k-线性映射 $T_pM \times \cdots \times T_pM \to \mathbb{R}$ 的算子范数（或 C^0）.

事实证明，流的典范（闭）$n-1$ 形式 $i_X\Omega$（其中 i_X 表示由 X 进行的内乘）与全局截面的存在密切相关。本文旨在证明以下结论：

定理。 设 Φ 是光滑闭流形 M 上的光滑无奇点流，其无穷小生成元为 X。假设 Φ 保持光滑体积形式 Ω 不变。若 M 具有一个光滑黎曼度量 g，使得 g 的黎曼体积为 Ω，并且

$$\|\delta_g(i_X\Omega)\|_g < m_g(X)^2,$$

其中 $m_g(X) = \text{下确界}_{p\in M} \|X\|_g$（等价地，$\left\|dX^\flat\right\|_g < m_g(X)^2$），则 Φ 有一个全局截面。此外，M 是一个以 S^1 为底空间的丛。

请注意，摘要中的陈述是这一更一般陈述的直接推论。这两个陈述实际上是等价的。

推论 1.1. 设 N 为一个紧黎曼流形。记 $M = SN$ 为其单位切丛，X 为 M 上的测地流的无穷小生成元。那么，对于任意在 M 上满足 $g(X,X) = 1$ 的光滑黎曼度量 g，若 g 的体积形式为刘维尔体积形式 Ω，则有 $\|\delta_g(i_X\Omega)\|_g \geq 1$。等价地，$\left\|dX^\flat\right\|_g \geq 1$。

证明。 这是测地流不存在全局截面这一事实的直接推论。 □

因此，如果 $i_X\Omega$ 的余微分相对于 X 的大小足够小，那么就存在全局截面。在 $\delta_g(i_X\Omega) = 0$ 这一特殊情形下，形式 $i_X\Omega$ 既闭又余闭，因而相对于 g 是调和的。根据以下结果（证明中将用到），可知该流存在全局截面。

定理 1.2 ([Sim23])**.** 设 Φ 是闭光滑流形 M 上的非奇异光滑流，其无穷小生成元记为 Φ，并假设 X 保持一个光滑体积形式 $\Phi\Omega$。那么 Φ 存在光滑全局截面，当且仅当 $i_X\Omega$ 是内蕴调和的。

若存在闭流形 M 上的光滑黎曼度量 g，使得光滑微分形式 ω 是 g-调和的，即 $\Delta_g\omega = 0$，则称 ω 是内蕴调和的。其中，$\Delta_g = d\delta_g + \delta_g d$ 表示由 g 诱导的微分形式上的拉普拉斯–贝尔特拉米算子（参见 [dR84, Hod41, War83, Jos08]）。光滑形式 ω 是 g-调和的，当且仅当 ω 既闭（$d\omega = 0$）又余闭（$\delta_g\omega = 0$，即 $\star_g\omega$ 是闭的）。

以下推 论是主定理和定理 1.2的直接推论 .

推论 1.3。 若 $i_X\Omega$ 满足上述定理的假设，则存在一个光滑黎曼度量 h，使得 $i_X\Omega$ 关于 h 余闭，因此是 h-调和的。

在他的博士论文中，[Hon97] Honda 对内蕴调和闭 $(n-1)$-形式给出了刻画。对于非奇异(即不消失的)$(n-1)$-形式，他的结果如下：

定理 1.4 ([Hon97])**.** 一个光滑、闭且处处非零的 $(n-1)$-形式 Θ 定义在一个 n维流形 M 上，当且仅当对于每个 $p \in M$，都存在一个 $(n-1)$维子流形 N_p，它位于 M 中，并且 Θ 在 N_p 上的限制是 N_p的体积形式。

1.1 到闭形式空间的距离

我们还需要一个技术性结果，该结果已在 [Sim16]，中证明，现陈述如下。为求完整，我们也附上 [Sim16]中的证明。

首先考虑定义在 $M \times [0,1]$ 上的微分形式 ω，其中 M 是一个闭流形，并用 t 表示 $[0,1]$ 上的坐标。令 $\pi_M\colon M \times [0,1] \to M$ 和 $\pi_I\colon M \times [0,1] \to [0,1]$ 为显然的投影。由于

$$T_{(p,t)}(M \times [0,1]) = T_pM \oplus T_t[0,1],$$

$M \times [0,1]$ 上的任意 k-微分形式都可以唯一地写成

$$\omega = \omega_0 + dt \wedge \eta,$$

其中，若某个 v_i 属于 $(\pi_M)_*$ 的核，则 $\omega_0(v_1, \ldots, v_k) = 0$；而 η 是具有类似性质的 $(k-1)$-形式（即，对于每个“垂直”向量 $v \in T(M \times [0,1])$，都有 $i_v\omega_0 = i_v\eta = 0$，其中 i_v 表示对 v 的内乘）。

在 M 上定义一个 $(k-1)$-形式 $\mathscr{H}(\xi)$：

$$\mathscr{H}(\omega)_p = \int_0^1 j_t^*\eta_{(p,t)}\, dt,$$

其中 $j_t : M \to M \times [0,1]$ 定义为 $j_t(p) = (p, t)$。众所周知（参见 [Spi05]），

$$j_1^*\omega - j_0^*\omega = d(\mathscr{H}\omega) + \mathscr{H}(d\omega). \tag{1}$$

将 $\mathscr{H}$视为从 $M \times [0,1]$ 上的 k-形式到 M上的 $(k-1)$-形式的线性算子，且两者均配备 C^0 范数，不难看出

$$\|\mathscr{H}\| = 1. \tag{2}$$

我们断言：

命题 1.5。设 ξ 是闭流形 M上的一个 C^r 微分 k-形式$(r \geq 1)$。则

$$\inf\{\|\xi - \eta\| : \eta \in C^r,\ d\eta = 0\} \leq \|d\xi\|.$$

换言之，$\|d\xi\|$是 ξ 到闭形式空间的距离的上界。对于具有连续外微分的连续形式，该不等式同样成立。

命题的证明。首先，我们证明该结果对任意流形 M 均成立，该流形可通过 $H\colon M \times [0,1] \to M$ 光滑地缩至一点 p_0，其中对所有 $p \in M$，$H(p, 0) = p_0$ 且 $H(p, 1) = p$。由于 $H \circ j_1$ 是 M 的恒等映射，而 $H \circ j_0$ 是 p_0的常值映射，因此可得

$$\xi = (H \circ j_1)^*\xi = j_1^*(H^*\xi) \quad \text{and} \quad 0 = (H \circ j_0)^*\xi = j_0^*(H^*\xi).$$

将（1）应用于 $H^*\xi$，我们得到

$$\begin{aligned}\xi &= \xi - 0\\ &= j_1^*(H^*\xi) - j_0^*(H^*\xi)\\ &= d\mathscr{H}(\xi) + \mathscr{H}(d\xi).\end{aligned}$$

利用（2），我们得到

$$\|\xi - d\mathscr{H}(\xi)\| = \|\mathscr{H}(d\xi)\| \leq \|d\xi\|.$$

因此，该定理的陈述对可缩的 M成立。

现在设 M 为任意闭流形， ξ 为 M上的一个 C^r k-形式， $r \geq 1$。用可缩开集 U_1、……、U_m覆盖 M 。记限制在 U_i 上的形式上的算子 $\mathscr{H}$为 $\mathscr{H}_i$，并令 ξ_i为 ξ 在 U_i上的限制。定义 M 上的一个 k-形式 η，使其在 U_i 上的限制等于 $d\mathscr{H}_i(\xi_i)$。我们断言， η 定义良好且是闭形式。

事实上， $\xi_i = \xi_j$ 在 $U_i \cap U_j$上成立，并且对于定义在 $(U_i \cap U_j) \times [0,1]$上的每个 k-形式 ω，都有 $\mathscr{H}_i(\omega) = \mathscr{H}_j(\omega)$。因此在 $U_i \cap U_j$ 上，我们有 $d\mathscr{H}_i(\xi_i) = d\mathscr{H}_j(\xi_j)$，所以 η 定义良好。由于 η 局部恰当，因此它是闭形式。由此可得

$$\|\xi - \eta\| \leq \max_{1\leq i\leq m} \|\xi_i - d\mathscr{H}_i(\xi_i)\| \leq \max_{1\leq i\leq m} \|d\xi_i\| \leq \|d\xi\|.$$

至此，命题得证。 □

2 主要结果的证明

假设存在一个光滑黎曼度量 g on M，其体积形式等于 Ω，且满足 $\|\delta_g(i_X\Omega)\|_g < m_g(X)^2$。定义 θ_X on M上的一个 1-形式 $\theta_X(v) = g(X,v)$；也就是说， $\theta_X = X^\flat$。由于g 和 X 都是光滑的，因此 θ_X也光滑。不难证明（参见 [Lee13], 习题 16-21）

$$\star_g(i_X\Omega) = (-1)^{n-1}\theta_X.$$

由于在 k-形式上有 $\star_g\star_g = (-1)^{k(n-k)}$，因此我们得到 $\star_g\theta_X = i_X\Omega$。回想一下，霍奇星算子$\star_g$ 是逐点等距的，于是可得

$$\begin{aligned}\|d\theta_X\|_g &= \|\star_g(d\theta_X)\|_g \\ &= \|\star_g d \star_g (i_X\Omega)\|_g \\ &= \|\delta_g(i_X\Omega)\|_g \\ &< m_g(X)^2.\end{aligned}$$

根据命题1.5 存在一个光滑闭 1-形式 ω 使得

$$\|\theta_X - \omega\|_g \leq \|d\theta_X\|_g < m_g(X)^2.$$

我们断言 $\omega(X) > 0$ 处处成立。事实上：

$$\begin{aligned}\omega(X) &= [\omega(X) - \theta_X(X)] + \theta_X(X) \\ &\geq -\|\omega(X) - \theta_X(X)\|_g + m_g(X)^2 \\ &> 0.\end{aligned}$$

由弗罗贝尼乌斯定理，光滑平面场 E =Ker(ω) 的余维为常数，且可唯一积分。由于 $\omega(X) > 0$，它也处处横截于 X。

设 $p \in M$ 为任意对象，并将 E 经过 p 的积分流形记为 N_p。任取 $q \in N_p$。由于 $T_qN_p = E_q$ 与 X_q横截， $i_X\Omega$ 在 T_qN_p 上的限制非零，即为一个体积形式。由定理 1.4， $i_X\Omega$ 是内蕴调和的。因此，根据定理1.2， Φ 存在一个全局截面。根据 2.10 定理，见 [Pla72]， M 是一个以 S^1为底空间的丛。

□

参考文献

[dR84] 乔治·德拉姆，《微分流形：形式、流、调和形式》，《数学科学基础丛书》第266卷，施普林格出版社，1984年。[EG89] ´Etienne Ghys，《余维一阿诺索夫流与悬垂》，《数学讲义》第1331卷，第59–72页，施普林格出版社，1989年。[Fri82] David Fried，《流截面的几何》，《拓扑学》21（1982），353–371。[Hod41] 霍奇，《调和积分理论及其应用》，剑桥大学出版社，1941年。[Hon97] Ko Honda，《通有度量上的调和形式》，博士论文，普林斯顿大学，1997年。[Jos08] J¨urgen Jost，《黎曼几何与几何分析》，第5版，Universitext，施普林格出版社，2008年。[KH95] Anatole Katok 和 Boris Hasselblatt，《现代动力系统理论导论》，《数学及其应用百科全书》第54卷，剑桥大学出版社，1995年。[Lee13] John M. Lee，《光滑流形导论》，第2版，《数学研究生教材》第218卷，施普林格出版社，纽约，2013年。[Pla72] Joseph Plante，《阿诺索夫流》，《美国数学杂志》94（1972），729–754。[Sch57] Saul Schwartzman，《渐近循环》，《数学年刊》66（1957），270–284。[Sim97] Slobodan N. Simi´c，《余维一阿诺索夫流与 Verjovsky 猜想》，《遍历论与动力系统》17（1997），1211–1231。[Sim16] Slobodan N. Simi´c，《阿诺索夫流的整体截面》，《遍历论与动力系统》36（2016），第8期，2661–2674。[Sim23] ，《流的截面与内蕴调和形式》，《动力系统》38（2023），第2期，314–319。[Spi05] Michael Spivak，《微分几何综合导论》，第3版，第1卷，Publish or Perish，2005年。[Ver70] Alberto Verjovsky，《具有截面的流》，《美国国家科学院院刊》66（1970），1154–1156。MR 0268916[War83] Frank W. Warner，《微分流形与李群基础》，《数学研究生教材》第94号，施普林格出版社，1983年。