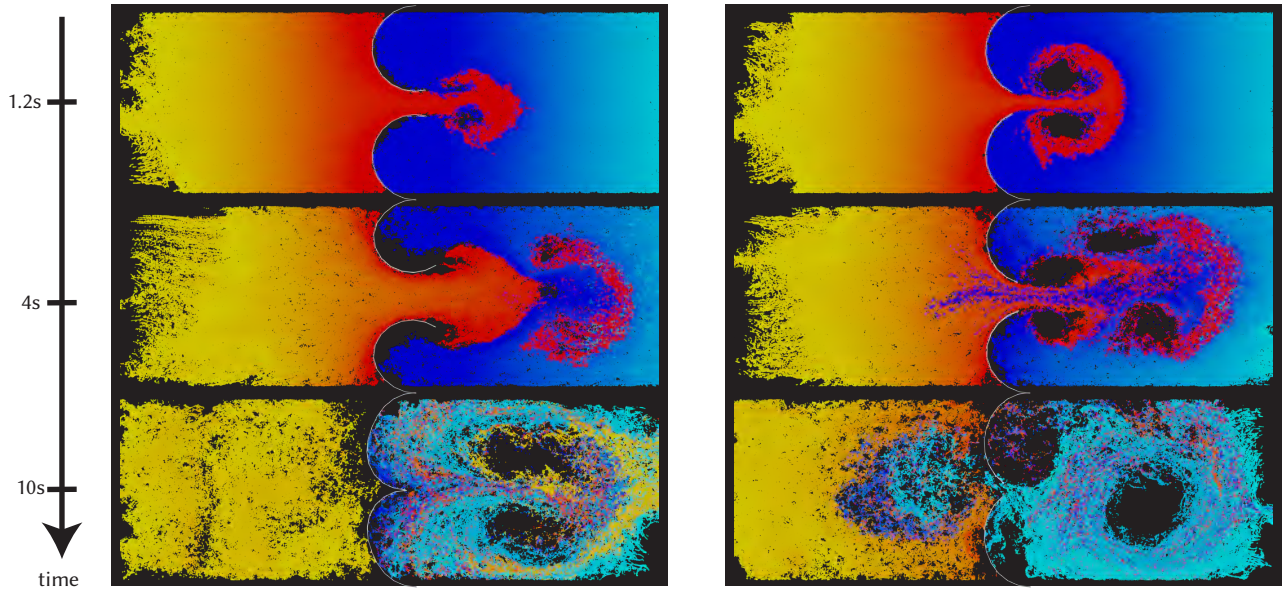
arXiv:2602.03988v1 [physics.comp-ph] 3 Feb 2026

用于不可压缩流体和薄型可变形体的拓扑与几何精确耦合

JONATHAN PANUELOS，多伦多大学（加拿大）
EITAN GRINSPUN，多伦多大学（加拿大） DAVID LEVIN，多伦多大学（加拿大）



(a) 健康瓣膜　　(b) 畸形瓣膜

图 1. **在多个泵循环中实现无泄漏流固耦合的柔性心脏瓣膜。** 从上到下依次展示第 60、120 和 180 帧，流体根据其初始位置着色（左侧为黄红色，右侧为蓝青色）。管内可变形瓣膜中的流动由周期性体力驱动。(a) 在解析充分的健康瓣膜中，正向流动会打开瓣膜，使流体通过；反向流动则会关闭瓣膜，在两侧之间形成无泄漏的隔离。(b) 如左侧腔室中大量蓝色流体所示，我们的方法能够区分流体流经健康瓣膜与伴有环状扩张的畸形瓣膜的情况。环状扩张会扩大瓣膜开口，导致流体反流。

我们提出了一种用于耦合不可压缩流体与薄可变形结构的拓扑保持离散化方法，通过保持流体域的连通性，确保流体不会泄漏。我们采用拼接算法处理由拉格朗日流体粒子生成的裁剪沃罗诺伊图，以维持障碍物周围的路径连通性。这种几何离散化能够自然贴合任意薄的结构，从而在流固界面处精确施加边界条件。通过在此相容网格上离散压力投影方程，我们能够在界面处对流体施加速度边界条件，同时将压力直接施加于固体边界，从而实现相间的精确双向耦合。所得方法可防止流体穿过固体泄漏，同时允许流体域中存在连续路径的任何位置发生流动。我们通过多种场景展示了该方法的有效性，包括薄膜周围的流动、具有狭窄通道的复杂几何结构，以及可变形浸没在液体中的结构，展现出稳健的双向耦合，且无需人工密封，也不会产生泄漏伪影。

作者联系信息：Jonathan Panuelos，jonathan.panuelos@mail.utoronto.ca，多伦多大学，加拿大安大略省多伦多；Eitan Grinspun，多伦多大学，加拿大安大略省多伦多；David Levin，多伦多大学，加拿大安大略省多伦多。

1 引言

引导血流的心脏瓣膜、减缓下落载荷速度的降落伞，以及鼓风的风扇，都是差异很大的现象；对这些现象进行建模，关键在于不可压缩流体流动与余维几何结构之间的相互作用。现有的不可压缩流体与可变形结构耦合方法，在处理薄结构或余维特征时面临根本性局限。采用流体域与固体域分别离散化的方法，会导致界面处几何错位，从而产生数值泄漏，使流体错误地穿过固体屏障。

相反，薄结构的体积表示会引入人工厚度，从而封堵有效的流动路径，阻止流体通过狭窄的孔口和间隙。这些问题

在涉及大幅变形的情形中变得尤为棘手，此时流体相中的拓扑变化变得常见。以心脏瓣膜有节奏地开合为例——存在泄漏的离散化会造成错误的回流，而与之相反的情况则会不准确地限制流动。

解决这些挑战需要一种仅在必要位置保证无泄漏的离散化方法：既能阻止流体穿过固体，又能保留所有有效的流体通道。关键要求是，流体域的路径连通性 必须与固体几何所诱导的路径连通性完全一致（“拓扑精确”）。我们通过在改进的非结构化 Voronoi 图上采用通量形式的有限体积离散来实现这一点。固体边界被明确纳入为有限体积面，而不是单独进行近似或采样（“几何精确”）。因此，不可压缩性可确保任意连通流体区域内的体积通量精确平衡，从而即使在狭窄的流体通道中以及绕过浸入式余维固体结构时，也能实现几何一致的体积耦合。

为实现拓扑和几何上的精确性，我们通过裁剪 *Voronoi* 缝合算法扩展基于 Voronoi 的拉格朗日流体方法。我们的方法先根据拉格朗日流体粒子构建 Voronoi 图，再对其进行裁剪，将固体边界面作为显式界面纳入网格结构。裁剪过程中，新生成的单元若未包含生成它的粒子，我们称之为“孤立单元”；随后通过保持连通性的过程，将这些单元重新分配给相邻的流体粒子，同时维持流体域的路径结构。这样可确保所得分区与薄固体结构精确吻合，同时保留所有可流通区域。

由此得到的相容网格支持对压力投影方程进行离散化，其中泊松方程求解同时纳入流体–流体界面和流体–固体界面的贡献。各相之间直接在这些共享边界面上耦合：在流体一侧施加速度边界条件，而计算得到的压力场则对固体表面施加力。这种共享离散可实现双向耦合，且不会引入虚假泄漏或人为连通性。

我们在多种场景下验证了该方法，包括薄膜周围的流动、具有狭窄通道的几何形状（如片材堆叠和阀门），以及浸没在液体中的可变形结构。这些示例展示了该方法处理任意薄结构、在无需人工密封的情况下维持精确防漏性，以及捕捉复杂流固相互作用的能力；这些问题以往容易出错，因为现有方法无法在有限分辨率下可靠地保持流体域正确的拓扑连通性。

1.1 贡献

In 总而言之，我们的工作作出了以下贡献 ons:

- 拓扑与几何精确的流体离散化：在经过修改的沃罗诺伊图上采用通量形式的有限体积离散，精确保持由任意薄且余维的固体几何所诱导的流体区域路径连通性，从而防止泄漏，同时避免人为密封有效流体通道。

- 与分辨率无关的流动连通性保持：采用裁剪式沃罗诺伊拼接过程，在粒子采样不足或局部缺失时重新分配孤立单元，以恢复有效的流体连通性，同时保持流体自由度数量不变。借助具备连通性感知能力的网格构造，即使在严重欠分辨的情况下（包括狭窄通道中起初没有任何粒子的情形），也能保持有效的流体通道。

- 共形非结构网格上的显式双向耦合：一种耦合表述，利用压力拉格朗日乘子同时实现不可压缩性约束并向固体传递力，从而支持广泛的流固相互作用场景，并采用共享离散。

- 动态拓扑变化下的一致压力基准处理：一种实用策略，用于在流体域的连通分量动态分离和重新连接的过程中保持压力基准的一致性，避免因独立的压力零空间而产生不一致。

2 相关工作

2.1 固体-流体耦合

计算机图形学界针对不同的固体和流体离散化方式，探索了固体-流体耦合问题，包括欧拉方法 [Teng等人 2016], 拉格朗日方法 [Akinci等人 2012；Xie等人 2023], 以及混合方法 [Fang等人 2020；Guendelman等人 2005]。Batty等人的变分表述 [2007] 实现了稳健的双向交互，随后由Takahashi与Batty [2020] 扩展为真正的整体式固流耦合。离散化的局限性，尤其是固体相与流体相之间的不匹配，使这些方法无法应用于余维几何。一个关键挑战在于，在遵守固体界面的同时，正确识别流体域中哪些部分可以彼此交互。确保流体交互适当遵循这些拓扑约束，一直是一个难以解决的问题。

通过将流体视为由拉格朗日源点生成的功率图，De Goes 等人 [2015] 采用与我们所考虑的基于Voronoi的方法类似的离散化来模拟流体相。然而，他们没有考虑双向耦合，也不支持薄固体，因为这需要体积概念来解析其全部几何结构。

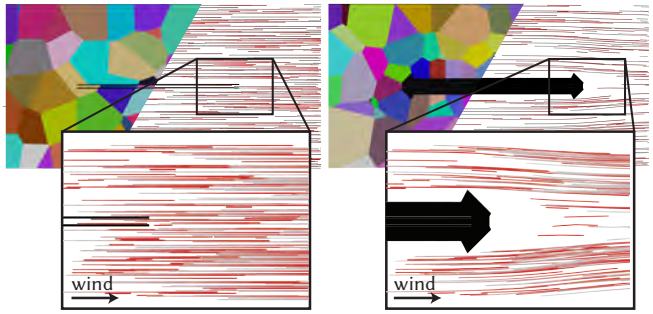
采用吸收性织物模型，Fei等人 [2018] 研究了余维固流交互，但由于材料模型本身允许流体渗透，他们的方法完全回避了防漏性要求。

Azevedo等人 [2016]提出了一种用于保持拓扑的流体模拟的切割单元法，可维持固体障碍周围的连通性。该方法在固体边界处裁剪网格单元，并

表 1。相关工作及其应用于不可压缩流体与薄壳双向耦合问题时的局限性总结。

方法	固体边界处理	余维?	双向耦合?	失效模式
Numerow等人 [2024]（可微Voronoi）	裁剪Voronoi	✗	✓	体积式，密封
De Goes 等人 [2015]（幂粒子）	裁剪Voronoi / 粒子采样	✗	✓	体积式，密封
Tao 等人 [2022] (VEMPIC)	切割单元	✓	✗	自由度激增，未进行耦合
Azevedo等人 [2016]	切割单元	✓	✗	自由度激增，未进行耦合
Peskin [1972]（浸入边界法）	平滑狄拉克函数	~（体积化）	✓	泄漏

为每个不连通的切割单元区域引入新的自由度。虽然这能实现精确的几何表示，但该方法存在可扩展性限制：当多个薄固体堆叠在单个网格单元内时，每个裁剪区域都会产生额外的自由度。因此，自由度总数可能大幅增加，降低计算效率。此外，他们的工作只涉及单向耦合，即流体会对固体作出响应，而固体不会反过来影响流体。类似地，Tao等人[2022] 研究了余维特征任意的非流形实体周围的流体模拟，展示了该方法处理复杂几何构型的能力。然而，该方法受到其稳健的切割单元网格生成器所导致的自由度激增带来的计算需求限制 [Tao等人 2019], , 因此不适用于具有复杂交互的场景。相比之下，我们的方法不会根据薄固体几何和拓扑复杂度随时间变化而增加流体离散化的复杂度，而是将仿真中的自由度总数维持为不变量，其数量由流体粒子的数目决定，从而避免变量激增。我们的方法通过显著简单的算法实现与固体边界的精确几何匹配，避免了复杂切割单元重建带来的计算开销。



(a) 我们的 (b) 体积式

图 2. **体积式解析余维固体（b）的失败案例，与我们的方法（a）进行对比。** 恒定的向右速度场穿过两片余维薄片。图中显示了沃罗诺伊图（彩色单元）和流线（红线）。请注意，以体积式解析固体时，速度场会错误地绕过固体弯曲，因为现在必须满足扩展后的边界条件。内部狭窄的通道也被完全堵塞。我们的方法保留了狭窄通道，并能正确解析速度场。

尽管在计算机图形学中，薄界面与流体的耦合研究相对较少，但流固耦合（FSI）在计算力学领域已受到广泛关注。

这方面的研究主要采用三类成熟的方法：任意拉格朗日-欧拉（ALE）界面 [Donea 等人提出的方法、 1982], 幽灵流体法 [Fedkiw 等人提出的方法，以及 1999],浸入边界法 [Peskin 1972], 提出的方法。每种方法各有优势，但在处理薄可变形结构时也面临特定挑战。

任意拉格朗日-欧拉方法采用变形流体网格，使其适配固体的网格表示，同时在远离界面的区域维持固定的欧拉离散化 [Donea 等人 1982]。其主要挑战在于变形过程中保持网格质量，这使得该方法受限于小位移和体积固体表示。近期研究探索了辅助粗网格，以便在不可压缩流中处理余维固体的较大变形 [Fernandes 等人 2019], , 但这些进展仍局限于二维场景和相对简单的几何形状。

幽灵流体法最初是一种用于欧拉多相模拟中锐利界面处理的技术 [Fedkiw 等人 1999]。光滑粒子流体动力学（SPH）方法也采用了类似技术，通过在固体区域布置虚拟粒子来缓解核函数支持不足的问题 [Randles 和 Libersky 1996 年; Schechter 和 Bridson 2012; Takeda 等人 1994]。然而，SPH核函数固有的平滑作用会模糊界面的锐利程度，而且该技术必然以体积方式处理固体。这些实现都面临一个根本挑战：实际固体边界几何形状与流体离散单元的边界并不对齐。我们的方法通过使流体网格边界与固体几何精确对齐，彻底规避了这一问题，从而能够通过在固体面上施加速度边界条件，直接实现不可渗透性。

浸入边界法将拉格朗日固体边界置于欧拉流体网格内，利用平滑的狄拉克 delta 函数将力从拉格朗日表示传递到欧拉表示的流体中

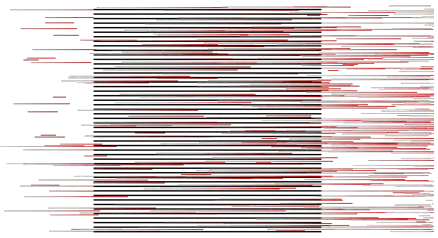


图 3。 **流体穿过余维薄几何堆叠**。 我们的方法能够成功解析由多个小孔口构成的复杂堆叠，且不会造成任何堵塞。

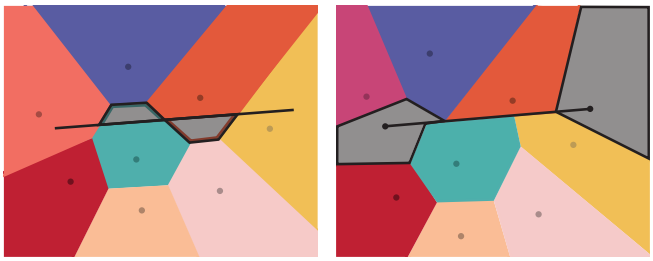
表示 [Peskin 1972, 2002]。该方法存在泄漏问题：固体拉格朗日点在运动过程中可能越过流体网格点。此外，delta 函数固有的有限支撑区域内的力平滑，无法实现流体相与固体相之间的精确速度匹配，从而导致流体渗透。后续研究主要通过切割单元和虚单元方法实现锐利的边界条件强制施加 [Mittal et al. 2008], ，这些方法对欧拉网格进行分割，使其仅位于区域边界的一侧。Ye 等人 [1999]开发了一种切割单元技术，通过扩展边界单元，将因固体边界而移除网格点后留下的空区域纳入其中，使边界附近的规则网格变形为梯形单元。我们的拼接过程在概念上与该方法相似，会将断开的流体区域重新分配给适当的流体源点。我们认为，我们的方法是将切割单元法自然拓展到非结构化 Voronoi 网格，并且能够解析以往技术无法捕捉的亚网格尺度流体通道。

Numerow等人 [2024]提出了一种通过将每个单元表示为 Voronoi 区域，并计算单元体积和界面面积的可微梯度，从而实现单元间作用力的基于梯度的优化与仿真的单元力学耦合方法。该方法将固体离散为体积裁剪区域，因此会产生图 4 所示的伪影：当几何结构过薄时，会生成空单元。

这种以体积方式解析固体的局限性，在缺乏锐利边界离散化的方法中普遍存在，会使余维边界偏离其真实空间位置。这不仅会造成伪力，还可能破坏流体域的实际拓扑，使小孔口不再可流通，如图 2 所示。相比之下，我们的方法能够清晰地解析余维几何，即使存在多个极小通道，也能解析向右流动，如图 3 所示。

2.2 修正的沃罗诺伊图

现有的 Voronoi 方法不足以模拟余维
几何结构，因为它们无法在真实位置上完整地解析固体几何，如图 4 所示。Voronoi 裁剪方法将固体视为裁剪半平面，删除源点 [对侧的几何结构 2010] Yan 等人。这会在流体几何中留下空隙，这些空隙要么必须视为体积固体，从而



(a) 裁剪Voronoi (b) 约束 Voronoi

图 4. **现有的 Voronoi 网格划分方法无法为浸入式余维薄片划分网格**。(a) 裁剪 Voronoi 方法将余维薄片用作裁剪平面，实际上会删除薄片另一侧的部分单元，仿佛薄片是一条半平面。(b) 约束 Voronoi 方法将遮挡物顶点视为 Voronoi 站点，从而生成未分配给任何流体粒子的额外站点。值得注意的是，所示示例将区域分隔成两个独立的流体区域，破坏了流体域原有的拓扑。

错误地扩张固体表面；要么将其视为空隙，让流体填充，从而在流体域中形成虚假的散度汇。我们的方法通过将这些空隙重新连接到相邻源点，解决了这一误差，从而再次将它们纳入流体域。

约束与可见性感知 Voronoi 方法将标准沃罗诺伊图推广到能够考虑几何约束或遮挡的情形。经典的约束 Voronoi 构造作为约束 Delaunay 三角剖分的对偶，会将约束顶点引入为 Voronoi 站点 [Seidel 1988 年；Tournois 等人 2010]。这实际上赋予站点固体的属性，使其表示在体积上扩展，并可能使边界条件发生位移，进而破坏流体域原有的拓扑（图 2）。类似地，计算几何中研究的可见性约束 Voronoi 图会考虑遮挡或方向可见性限制 [Aurenhammer 等人 2014 年；Okabe 等人 2000],，生成的单元可能是非凸的、不连通的，且组合复杂度达到二次级别。在这两类方法中，在固体顶点或障碍物端点处设置 Voronoi 站点，都会不可避免地引入人工厚度并改变流体域连通性。

Tsin 和 Wang [1996] 提出了一种 Voronoi 构造方法，其中屏障会限制可见性，但不会生成自身的采样点；不过，他们的公式仅适用于二维直线屏障。这与我们所处理的情形更为接近：余维固体边界无法生成自身的体积。然而，将这项工作扩展到任意屏障几何形状和三维区域，会带来重大的理论和计算挑战，迄今文献中尚未解决。因此，现有的 Voronoi 网格剖分算法都无法在不破坏预期流体域拓扑的情况下进行模拟。

与这些将源点添加到边界片的方法相比，我们仅使用以下内容构建沃罗诺伊图

流体粒子源，然后显式裁剪生成的单元以纳入固体几何结构。通过此裁剪生成的孤立单元会经由拼接过程重新分配，从而保持路径连通性。我们有效解决了标准裁剪 Voronoi 算法中的空洞问题。这一策略将固体界面直接嵌入流体分区，实现了基于可见性的方法所缺乏的锐利边界分辨率，并确保流体拓扑保持。

3 运动方程

设 Ω 表示流体域，$\partial\Omega$ 表示固体边界。该边界可以由任意薄的结构组成，包括将流体域分隔开的余维曲面。我们的目标是在 Ω内求解不可压缩流体流动，并使 $\partial\Omega$处的流体速度与固体速度一致。

Ω 内的流体运动由不可压缩欧拉方程控制：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \mathbf{f}, \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \tag{2}$$

其中，$\mathbf{u}(\mathbf{x}\ t)$表示流体速度，$p(\mathbf{x}\ t)$表示压力，$\rho$为恒定的流体密度，而$\mathbf{f}$表示重力等体力。在固体边界 $\partial\Omega$处，我们施加速度边界条件：

$$\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{u}_s\cdot\hat{\mathbf{n}} \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \tag{3}$$

其中，$\mathbf{u}_s$ 是固体表面的指定速度。该条件确保流体不会渗透固体边界，同时允许流体沿运动表面切向滑动。该边界条件耦合了流体相与固体相。固体边界为流体施加速度边界条件，而压力拉格朗日乘子既用于确保不可压缩性，也用于向固体施加接触力，从而实现双向耦合。

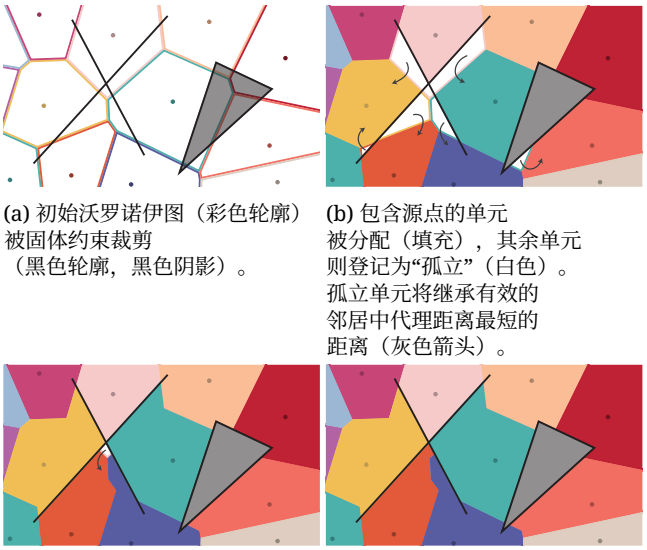
4 拓扑保持离散化

形状任意的固体会施加离散化必须解析的边界条件，包括薄壳及其他余维界面。固定分辨率方法和体积固体表示需要进行过度细化才能捕捉这类薄结构，因此不适合作为离散化方案。静态网格以及具有固定连通性的可变形网格方法（如 ALE）也不适用，因为它们通常仅适用于低变形的体积固体；当网格发生畸变或翻转时，尝试解析紧邻固体网格的边界流体会产生问题 [Fernandes 等，2019；Shamanskiy 和 Simeon 2021]。

拉格朗日流体表示天然满足这些要求。我们采用 Börgers 和 Peskin 的基于 Voronoi 的离散化 [2005]，，其中拉格朗日粒子跟踪流体运动并生成空间分区，将每个粒子分配到离它最近的空间区域。

4.1 防泄漏面临的挑战

由流体点集合生成的 Voronoi 网格不会自动与固体边界匹配。为了清晰地分辨固体，必须确保流体离散化中的面与固体的面相匹配。



(a) 初始沃罗诺伊图（彩色轮廓）被固体约束裁剪（黑色轮廓，黑色阴影）。

(b) 包含源点的单元被分配（填充），其余单元则登记为“孤立”（白色）。孤立单元将继承有效的邻居中代理距离最短的距离（灰色箭头）。

(c) 新的连通性揭示出更多可以被继承的孤立单元。(d) 最终修改后的沃罗诺伊图。

图 5. 根据路径连通性约束，将孤立单元重新连接到裁剪 Voronoi中的有效单元。

将边界条件与流体粒子正确耦合，需要修改沃罗诺伊图，将边界纳入其中作为面。此外，屏障一侧的粒子区域不得延伸至屏障另一侧，除非另一侧存在连通的流体通道。换句话说，每个粒子的区域都必须表示一个单一的连通流体区域。

先前通过体积式方法强制施加固体边界的方法（例如 De Goes 等人 [2015] ）无法精确处理任意薄的特征。正如图 2 所示，“增厚”方法并不适用于浸没在流体中的薄结构：两个平薄片浸没在切向流动的流体中。沿薄固体表面平行流动的无黏流体不应引起流体速度发生任何变化。然而，体积式方法需要有限厚度，导致流体必须绕过增厚后的固体流动。这种“增厚”方法也不适用于流经小孔口的情况，因为两片薄片之间的间隙会完全闭合。小孔的这种数值堵塞会带来问题，例如可能导致心脏瓣膜仿真中出现伪影。我们的方法保证流体能够在流体连通性允许的任何地方流动，从而避免此类堵塞现象。

因此，我们寻求一种离散化，能够精确恢复由固体边界产生的连通性，仅在需要之处实现无泄漏，并允许流体在任何存在有效路径的地方流动。

4.2 裁剪 Voronoi 缝合算法

我们提出一种拼接算法，将固体表面直接嵌入 Voronoi 网格；当固体阻碍连通性时，引入新的界面，将单元细分为彼此不连通的流体连通分量。空间区域会以路径连通的方式重新分配给相应的流体粒子

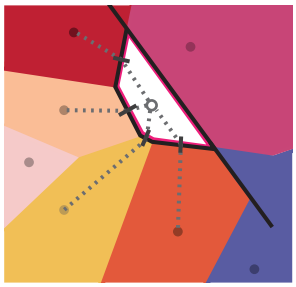
算法 1 裁剪 Voronoi 拼接

```
计算初始 Voronoi 镶嵌
按固体边界裁剪沃罗诺伊单元
对每个单元执行
    如果单元不包含其生成点则
        将单元标记为孤立
    结束如果
结束循环
当存在孤立单元时 执行
    对于每个孤立单元 执行
        对于每个相邻非孤立单元 执行
            计算从单元质心到面质心的路径长度，再到相邻单元质心
        结束循环
        将孤立单元与相邻非孤立单元合并，选择路径长度最短的单元
        更新孤立单元标签
    结束循环
结束 while 循环
```

，从而生成拓扑能够正确反映固体所致分隔的网格。因此，只要固体周围存在有效路径，流体就能沿这些路径继续流动，且只能沿这些有效路径流动。

我们的方法通过构造由流体粒子在整个空间中诱导的标准沃罗诺伊图来初始化。随后，通过用所有固体面对所有沃罗诺伊单元进行裁剪，将这些面纳入该结构中。移除体积固体内部的沃罗诺伊面，同时将同维固体面作为新面添加到图中。通过为每个流体面标记其相邻流体单元的标签，构造邻域图，其中每条边都代表一条仅经过流体区域的有效空间路径。

这些固体面周围的若干裁剪后单元会变成“孤立”单元，即单元内不再包含源点。这些单元会被标记，随后将每个孤立单元分配给一个非孤立邻居，如图 5 所示。我们采用贪心策略来连接单元，依据是哪个邻居



从孤立单元的质心到共享面质心，再到邻居的站点，路径最短，如上方插图所示。

这实质上是一个易于计算的代理量，用于近似仅存在于流体域内的测地距离（即 不会穿过固体）。虽然图求解比贪心方法更准确，能求出真正的最短路径，但实践中，大多数孤立单元距离有效单元仅一步之遥，如表2所示。多步跳转出现在固体边界之间狭窄且分辨率不足的通道中，此时固体已显著限制了邻域路径（参见第6.2节中的迷宫）。这一过程会迭代执行，因为某些孤立单元可能被其他孤立单元围困，直到这些单元被分配为止。

表2. 到达帧1上的有效单元所需的跳数。初始有效单元标记为0跳。

	0	1	2	3+
兔子	7480	836	32	248
迷宫（0个粒子）	6357	9	3	130
迷宫（完全解析）	9156	528	4	0
Fan	8216	75	0	0
阀门	14316	197	0	0
降落伞	1440	14	0	0

通过最短测地距离连接单元，旨在保持良好的网格质量，同时尽可能提高凸性并遵循流动连通性。文献普遍认为，凸性是网格单元的一项理想属性，因为它有助于提高数值稳定性，并为椭圆问题（例如投影方法所依据的压力泊松方程）提供良态离散 [Batdorf 等人，1997年；Katz 和 Sankaran 2011]。近似凸且形状良好的单元可产生均匀的模板系数、降低偏斜度，并有助于避免伪压力模态。形状不佳或高度非凸的单元会导致离散算子出现较大变化，从而减缓求解器收敛，并产生不准确或振荡的压力。因此，在非结构网格上保持高质量的凸单元，能够提升求解器的稳健性和计算压力的保真度，尤其是在复杂固体边界附近。

算法 1 展示了这一拼接过程。我们的孤立单元重新分配概念上类似于广度优先区域生长或泛洪填充，但经过调整，优先选择代理测地距离最短的区域，并在裁剪沃罗诺伊单元上进行操作。

4.3 压力投影

现在我们已经构建了离散化，接下来要根据动量方程求解通常的压力投影问题，

$$\frac{\rho}{\Delta t}\mathbf{u} + \nabla p = \frac{\rho}{\Delta t}\mathbf{u}^*, \tag{4}$$

以及无散约束，

$$-\nabla \cdot p = 0 \tag{5}$$

其中速度为 $\mathbf{u}$，压力为 p。

我们旨在使用通常的 Chorin 投影 [Chorin 1968] 来求解该系统：

$$\Delta p = \frac{\rho}{\Delta t}\nabla \cdot \mathbf{u}^* \tag{6}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* - \frac{\Delta t}{\rho}\nabla p. \tag{7}$$

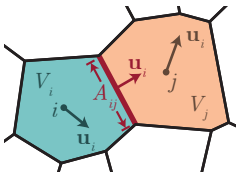
接下来需要确定上述各算子适用于我们网格的离散化形式。我们将压力和速度置于同一位置，这意味着离散拉普拉斯算子 L 就是邻域连通性的面积加权图拉普拉斯算子，其元素为：

连通性，其元素为：

$$L_{ij} = \frac{A_{ij}}{l_{ij} V_i} \tag{8}$$

$$L_{ii} = -\sum_j L_{ij} \tag{9}$$

其中，$j \in \mathrm{N}(i)$ 是i的邻居，$l_{ij} = \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|_2$ 是单元位置之间的距离，而 A_{ij} 是 i 与 j之间面的长度。虽然对于规则网格状态，压力与速度共置会产生问题，但我们不会遇到压力求解中的棋盘格零空间，因为在我们的情况下，单元中心之间的连通图是非结构化的。在邻域图中，所有指回查询单元的路径都经过奇数次跳转的可能性微乎其微。如果这确实构成问题，实现 Rhie-Chow 插值可以缓解该问题 $j \in$ Rhie 和 Chow i，但根据我们的实验，这并无必要。



由于在我们的情形中单元中心之间的连通图是非结构化的，因此为我们的压力求解考虑 boarding 零空间。几乎不可能出现每一条指回查询单元的路径在邻域图中都经历奇数次跳跃的情况。如果这值得关注，实现 Rhie-Chow 插值可以缓解该问题 [Rhie and Chow 1983], ，但根据我们的实验，并无必要。

与规则网格中一样，我们通过应用散度定理并积分每个面的贡献来计算公式 6 的右侧：

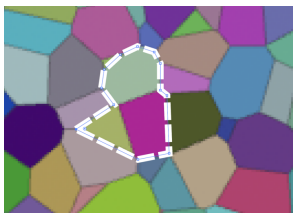
$$\frac{\rho}{\Delta t} D\mathbf{u}^*\Big|_i = \frac{\rho}{\Delta t\, V_i}\left[\sum_j (\mathbf{u}_{ij}\cdot\hat{\mathbf{n}}_{ij})a_{ij} + \sum_b (\mathbf{u}_b\cdot\hat{\mathbf{n}}_b)a_{ib}\right], \tag{10}$$

其中，$j \in \mathrm{N}(i)$ 和 b是与 i相邻的固体边界元素，其法向量为 $\hat{\mathbf{n}}_b$（从流体一侧指向外部）。$\hat{\mathbf{n}}_{ij}$是从 i的视角看流体间面的外法向量。由于速度共置，我们通过取简单平均$\mathbf{u}_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_j)$来计算面速度。相应的梯度算子如下：

$$Gp|_i = \frac{1}{V_i}\sum_j a_{ij}(p_j - p_i)\hat{n}_{ij} \tag{11}$$

5 离散高斯定理

由于我们的散度算子以通量形式定义在 Voronoi控制体上（式 10），因此满足离散高斯定理。对任意一组沃罗诺伊单元求离散散度之和时，共享面上的通量方向相反



，因此会恰好抵消。结果是，该区域内的总积分散度等于穿过区域边界的通量（高斯定理）。

离散高斯定理意味着，经过压力投影后，任意一组沃罗诺伊单元边界上的总通量在求解器容差范围内为零。

图8所示的迷宫展示了这种离散守恒性质如何与路径连通性的保证相辅相成。沃罗诺伊拼接算法保证迷宫内部是由沃罗诺伊单元构成的路径连通集合

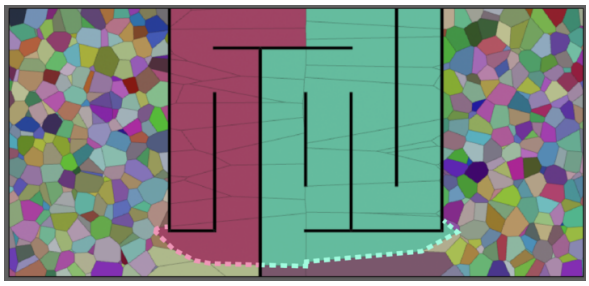


图 6. **与分辨率无关的离散通量抵消。** 在此配置中，整个迷宫内部仅由两个沃罗诺伊单元（粒子）表示。尽管离散化较为粗糙，对路径连通的迷宫区域内通量形式的散度求和时，所有内部面通量都会恰好抵消，仅留下两个开口处的边界通量。经过压力投影后，这些边界通量必须平衡，因此进入迷宫的总通量等于离开迷宫的总通量，从而确保仅通过狭窄迷宫相连的流体区域之间实现精确的通量平衡。

其边界由固体壁和两个开口构成。由于散度以通量形式离散化，迷宫内部单元之间的所有通量在求和时会精确抵消，如图6所示。

因此，无论几何结构有多复杂，也无论离散化中使用多少流体粒子，穿过一个开口进入迷宫的总通量都必须等于穿过另一个开口流出的总通量。

5.1 表压

缺少压力狄利克雷边界条件的不可压缩模拟中，压力只能确定到一个加性常数。虽然在许多标准的纯流体仿真中，这个常压力零空间并无影响，但纳入可能改变流体域拓扑的动态固体后，就必须谨慎处理。具体而言，固体可能将流体分割成多个互不相连的区域；如果未能一致地维持压力基准，这些区域的压力就可能各自漂移。

如果管理不当，分隔两个不相连流体区域的固体两侧压力可能分别产生不同的常数偏移，从而导致非物理现象，例如施加于固体的力突然跳变。有趣的是，即使迭代求解器从上一个时间步热启动，也可能出现这个问题，因为每个不相连区域最终仍可能各自收敛到不同的内部常压力。

为解决这一问题，我们明确确保所有流体区域采用一致的压力基准。在每个时间步，我们首先根据邻域连通图识别彼此不连通的流体区域。对于每个不连通区域，我们分别计算其上一时间步的体积平均压力和当前原始解中的体积平均压力。随后，对该区域的压力施加一个常数偏移，使体积平均压力与上一时间步一致。若固体运动导致该区域总体积发生变化，即膨胀或压缩，我们还会相应地根据

理想气体定律 $P_{\text{new}}V_{\text{new}} = P_{\text{old}}V_{\text{old}}$ 调整压力，以确保更新在物理上保持一致。该过程确保固体两侧的流体彼此兼容，避免产生虚假的压力偏移，并提高固体-流体相互作用的稳定性和真实性。

5.2 时间步进

我们提出的基于 Voronoi 的固体-流体耦合算法对流体和固体的更新均采用显式时间步进方案，如算法 2 所示。在每个时间步，我们首先处理流体相，求解满足无散边界条件的问题，并使其符合固体当前状态下的固体速度边界条件。

压力拉格朗日乘子既用于在流体状态中施加不可压缩条件，也会通过在每个固体面上积分压力来传递到固体状态 F_s：

$$\mathbf{F}_{fluid\rightarrow solid}\big|_{F_s} = -\sum_{j\in\mathcal{N}(F_s)} p_j A_{F_s j}\hat{\mathbf{n}}_{F_s j} \tag{12}$$

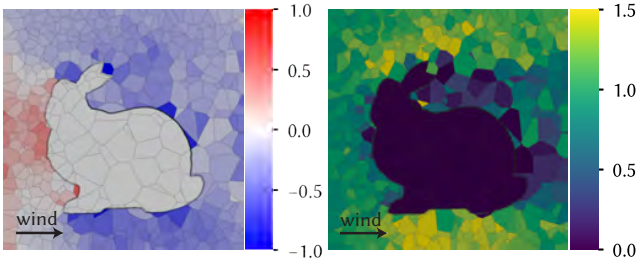
其中，$\mathcal{N}(F_s)$ 是与 F_s 共享一个面的流体粒子集合，A_{ij} 是共享面的面积，其法向量 $\hat{\mathbf{n}}_{F_s j}$ 指向外侧。

算法 2 基于 Voronoi 的固体-流体耦合时间步 要求：时间 t^n 的流体状态 $(\mathbf{x}_f^n, \mathbf{v}_f^n, p^n)$、带有顶点速度 $\mathbf{v}_s^n$ 的固体网格 $\mathbf{M}_s^n$。确保：更新后的状态 $(\mathbf{x}_f^{n+1}, \mathbf{v}_f^{n+1}, p^{n+1})$、$(\mathbf{M}_s^{n+1}, \mathbf{v}_s^{n+1})$，时间为 $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ 1：生成网格（算法 1） 2：使用当前流体位置 $\mathbf{x}_f^n$ 和固体网格 $\mathbf{M}_s^n$ 构建拼接 Voronoi 网格 3：流体演化 4 $\overset{n}{f} \rightarrow \overset{*}{f}$： 施 5加外力以更新流体速度 v v：求解压力投影以更新压力 $p^n \rightarrow p^*$（公式 6） 6：对于每个连通流体域，匹配其上一时间步的压力基准 7 p^*, p^* ：更新流体速度 $\mathbf{v}_f^* \rightarrow \mathbf{v}_f^{n+1}$（公式 7） 8：使用 $\mathbf{v}_f^{n+1}$ 推进流体位置 $\mathbf{x}_f^n \rightarrow \mathbf{x}$ $\overset{n+1}{f}$ 9：流体到固体的力耦合 10：根据压力场计算作用于固体网格的流体力（公式 12） 11：固体演化 12：使用现成求解器（刚体或 FEM）更新固体网格 $\mathbf{M}_s^{n+1}$

有了这些力，固体的更新可由任何标准的现成求解器处理。我们的示例同时采用了刚体求解器和可变形固体有限元求解器。所有状态更新，包括流体速度、流体位置和固体网格构型，均通过前向欧拉积分完成，因此整体方法简单、高效且易于实现，同时保持流体与固体之间物理上一致的耦合。

5.3 插值

拉格朗日流体离散化可能会导致局部欠分辨
已求解的流体区域。这些情况可能发生在固体



(a) 压力　　(b) 速度（x 分量）

图 7. **风洞中的水密密封兔子**。 请注意，内部流体始终完全静止，而外部空气则在场景左侧的入口边界作用下掠过兔子。

结构附近，例如流体进入固体狭窄通道，导致能够通过的流体粒子数量很少。不过在这些情况下，固体几何结构通过已知的表面速度提供了额外信息，而这些信息独立于整体流体运动。这使得我们能够利用插值，通过标记粒子平流提升视觉保真度。我们强调，这严格来说是一个后处理步骤：真实流体粒子已在仿真过程中，基于上述不可压缩纳维-斯托克斯演化完成了物理计算。

我们采用 Shepard 插值，根据标记粒子所在单元的面速度来近似粒子处的速度 [Shepard 1968]。具体做法是，计算查询点到包围该点的单元各个面的最短距离，并对这些面的速度进行反距离加权。我们注意到，插值所得速度场的不可压缩性并无保证；不过近年来，不可压缩插值已成为一个颇具前景的研究方向 [Chang 等，2022年；Nabizadeh 等 2024]，尤其是在我们的场景中，我们旨在支持含有余维障碍物的非凸单元。

6 结果

我们将该方法实现为 Houdini 中的一个求解器节点 [Side Effects Software Inc. 2025]，，并在补充材料中附上了代码。固体模拟使用了 Houdini 内置的刚体和有限元法求解器 [Side Effects Software Inc. 2025]。场景参数见表 3。

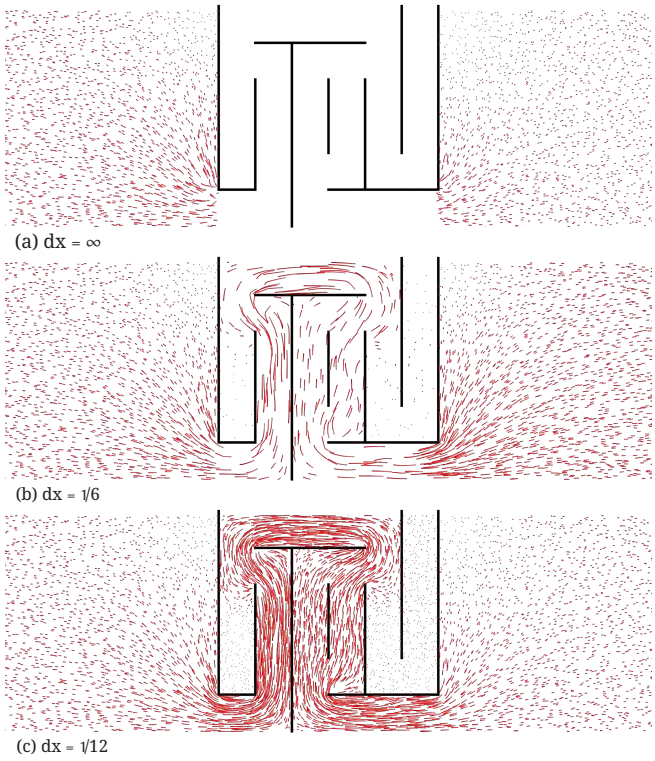
6.1 密封兔子

我们将一只静态兔子放置在风洞中，如图7所示。外部流体以沿兔子纵向的速度 $u_x = 1$ 进行初始化，而内部流体则以零速度初始化。在风洞两端设置流入边界与流出边界，以维持外部流体速度。我们发现，对于兔子内部，我们的防泄漏处理能够将静态流体维持到机器单精度，这表明我们的方法能够通过薄壳维持相互分离的互不作用的流体域。

作为对拼接算法的压力测试，我们还使用相同的外部流体粒子进行了模拟，但只在兔子内部放置了一个流体

表3. 所展示示例的场景参数与运行时间。

	区域	#帧	*Time*	*#P*	固体处理与 *#V*	秒/帧
兔子	1 x 1 x 1	180	3	7480	6880 静态	3.3
Fan	1.5 x 1.5 x 1.5	720	12	8216	2405 脚本控制	52.6
Maze	1 x 0.2 x 0.04	120	1	6357 - 9156	88 静态	70.5
阀门	3 x 1 x 0.125	2880	24	14316	104 可变形	26.06
降落伞	8 x 16 x 8	300	5	1440	200 可变形 + 26刚体	19.5



(a) dx = ∞

(b) dx = 1/6

(c) dx = 1/12

图8. **内部流体在不同分辨率下流经迷宫。** 不可压缩流体在由狭窄蜿蜒迷宫连接的入口储液区与出口储液区之间通过。我们逐步降低迷宫内部的流体分辨率，其中包括通道内没有初始粒子的情形。在所有情形中，出口速度均得以保持，表明我们的拼接方法能够独立于分辨率维持流动连通性与拓扑。

粒子。我们发现，拼接算法能够正确地将兔子内部的所有单元分配给这一个粒子。这意味着整个几何结构由单个粒子状态表示。该状态始终保持完全水密，且未与外部流体发生流体连通性，因此其原始值保持不变，精度达到机器精度。

6.2 迷宫

为展示我们的拼接方法在低分辨率下的能力，我们让流体流过一个狭窄迷宫（图8）。该迷宫由入口储液区与出口储液区组成，余维墙在两个储液区之间形成蜿蜒路径。我们将两个储液区中的流体初始化为初始速度 $u_x = 1$，并在两端施加流入与流出边界，以维持该流体速度。

我们对同一仿真设置在迷宫内逐步降低流体分辨率进行消融实验，表明无论分辨率如何，流动仍能通过迷宫得以保持。在最坏情况下，我们移除迷宫内的全部初始粒子，并表明借助我们的拼接方法，入口储液区与出口储液区之间的流体自由度仍能构建出流体通道。由此我们表明，无论分辨率如何，我们的方法都能保证流体始终保持流体区域的拓扑（即流动连通性）。表2表明，随着内部分辨率降低，众多内部孤立单元需要更多跳转才能找到通往有效流体单元的路径。

由于流体不可压缩，无论流体如何在迷宫中流动，出口储液区的流速都必须保持不变。如第5节所述，Voronoi控制体满足离散高斯定理。图6展示了两个相连的控制体。因此，流入一侧的流体量必然与从另一侧流出的流体量相等。我们验证了对于任意一组单元（包括延伸进入迷宫的单元），其控制体边界上的总积分通量在机器精度范围内为零。

6.3 风扇

我们使用图9所示的程序控制的旋转风扇推动空气。值得注意的是，这个示例高度依赖亚网格表面的分辨率，因为风扇比粒子分辨率薄得多。即便如此，我们的方法仍能将速度从固体传递到流体相；风扇启动旋转时会产生环形涡旋，从风扇外缘吸入空气，并从中心将空气推出。

6.4 柔性瓣膜

我们模拟柔性心脏瓣膜周围的流体对周期为 3.5 秒的正弦体力作出响应的情形，使射血期（收缩期）的平均前向速度达到 0.25，舒张期（舒张期）的后向速度达到 -0.1。管道远端采用无牵引入口边界条件，并允许在分辨率不足时生成粒子（即边界 0.25 个单位范围内的粒子数量

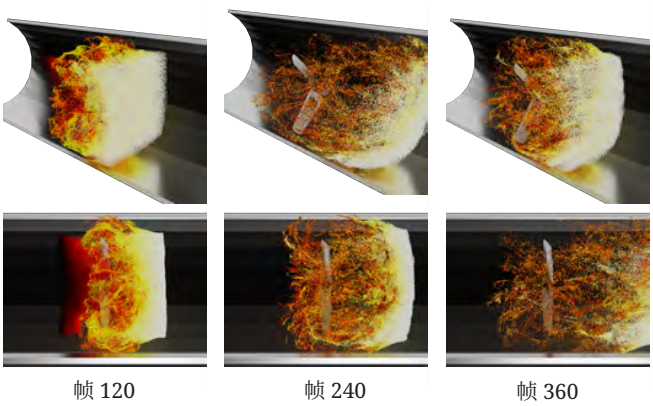


图 9。 **脚本控制的风扇在启动时形成涡旋**。 请注意，叶片几何形状远小于粒子分辨率。

低于初始分辨率时）。

我们在两种不同条件下运行阀门：健康瓣膜和缺陷瓣膜。缺陷瓣膜是通过删除几何结构中央十分之一（0.5 个单位）来构造的，从而形成一个更大的开口，以代表一种称为环状扩张的病况 [Fuster 等人 2017]。

我们展示了，对于健康瓣膜，当流体沿阀门方向流动时，流体能够打开瓣膜壁并自由流动。当流体反向流动时，瓣膜壁闭合，形成完全防漏的界面，使两侧的流体不再相互作用。我们的方法能够处理与薄固体界面的耦合，并能通过两个流体域的分离和重新接合，自然地处理拓扑变化。

我们看到，缺陷瓣膜会产生显著回流；输入几何形状仅有极小变化，结果在定性上却截然不同。两种阀门之间的差异，取决于能否区分瓣膜完全闭合与允许少量流体通过这两种几何形状——我们的方法通过精确解析固体表面，自然地捕捉到了这种区别。

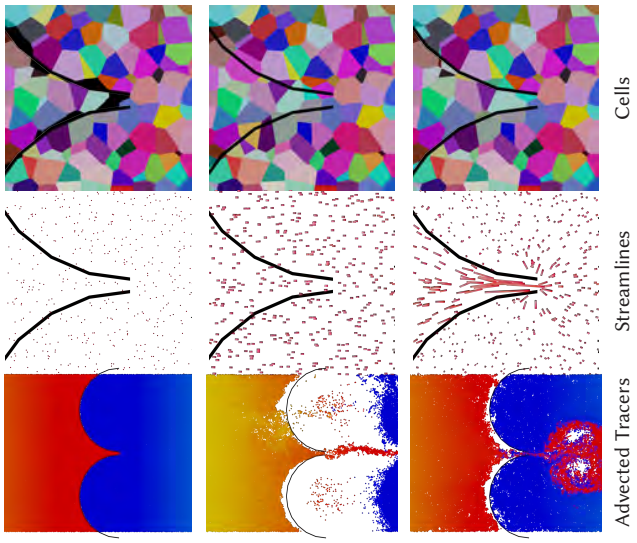


图 10. **未能正确处理孤立单元会破坏局部流体拓扑，导致对阀门的仿真不准确**。顶部两行展示了阀门开口附近区域的放大图，其中（上）单元根据其对应流体粒子的 ID 随机着色，（中）描绘了粒子速度。（下）展示了帧 100 时的完整仿真结果，其中平流示踪粒子的颜色根据其相对于阀门的初始位置确定。（a）展示了使用常规裁剪沃罗诺伊单元的结果：孤立单元被直接丢弃并视为固体。这会使固体边界偏离其原始空间位置向外扩张，容易导致密封过度，封住阀门的小开口，使流体无法流动。（b）展示了将孤立单元直接重新连接到其原始生成点的朴素做法。这会在边界两侧建立拓扑连接，使速度能够穿过边界，从而产生泄漏。我们的方法（c）能够精确解析固体边界，并完美保留流体拓扑，将固体边界视为不同流体区域之间的理想分隔面。

6.5 降落伞

我们将一个刚性箱体与一顶可变形软质降落伞相连，并用弹簧模拟绳索，在三种不同情形下让箱体下落：不使用我们的方法、使用我们的方法模拟破损的降落伞，以及使用我们的方法模拟完好的降落伞（图 11）。不使用我们的方法时，箱体在重力作用下自由落体。使用我们的方法时，降落伞下落过程中会遇到静止空气，导致局部出现负散度，在求解中对应一个高压区。随后，这一压力会传递到降落伞上，抵消其下落趋势，直到固体与空气的速度相匹配，达到力平衡。最终，物体缓慢匀速下降。

在撕裂的降落伞上，人为制造了一道细小的X形撕裂口。随着降落伞下落、撕裂口张开，降落伞底部与顶部之间形成了一条流体通道，使织物两侧的空气压力得以平衡。这降低了潜在的压力梯度从而降低薄片产生阻力并阻止物体下落的能力。

7 讨论与结论

我们提出了一种将不可压缩流体与固体耦合的方法，同时尊重流体连通性，构建出一种仅在必要时防漏、其他情况下允许流动的离散化方法。我们利用沃罗诺伊图对空间进行划分，并对其进行修改，使其符合固体边界，从而实现固体与流体区域之间自然的力传递。

我们工作的若干扩展方向为未来研究提供了良好的前景。计算沃罗诺伊图的开销是我们方法的主要瓶颈：目前，我们在每个时间步都重新计算沃罗诺伊结构，占用了仿真运行时间的 85%。利用时间相干性来更新前一

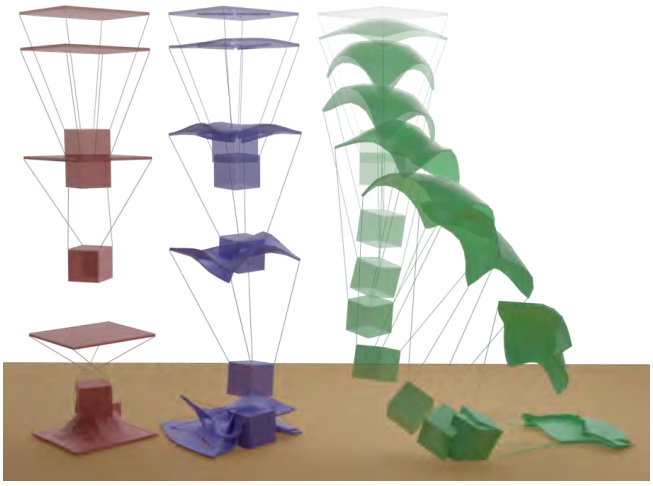


图 11. **不同物理条件下的降落伞下落仿真对比，按每隔 30 帧（0.5 秒）显示。**（绿色，右侧）使用我们无泄漏的固体–流体耦合方法仿真的固体降落伞，表现出较大的阻力和减缓的下降速度。（蓝色，中间）使用相同的无泄漏方法仿真的破损降落伞，空气可从破口处泄漏，因此阻力较小、下降速度较快。（红色，左侧）无空气时的自由落体参考状态，不受空气动力作用，仅在重力作用下做纯弹道运动。

时间步的结构是一种很有前景的加速方法 [Guibas 2018]。不过，我们注意到，该图只用于确定连通性和面面积。若能在保持相同连通性属性的同时近似计算面面积，而不必完整计算沃罗诺伊图，就能显著提升性能。

此外，我们对沃罗诺伊图所做的修改绕开了真正期望的结构，即可见性约束沃罗诺伊图。在这种结构中，每个单元都应包含空间中所有距其最近点所构成的区域，同时考虑固体边界施加的可见性约束。概念上，若源点在具有若干遮挡平面的区域内向外扩展，这些点就会传播波，并自然地绕过遮挡平面的端部弯曲。已有研究探讨了二维中的直线型遮挡物 [Tsin 和 Wang 1996], , 但如何将其扩展到三维中的任意屏障仍是一个未解决的问题。类似方法也有望实现更准确的单元内梯度，因为指向各面的梯度应根据这些单元内的遮挡物而变化。

对支持非凸单元形状与余维几何的无散度插值方案进行探索，也将带来显著助益；我们强调，无论分辨率如何，我们的方法都能恢复流体域的真实流动连通性。因此，能够以较低分辨率运行是一项关键优势；同样，在形状不佳的单元内对速度进行更精确的无散度插值，将进一步提升其视觉效果，即使在较粗的分辨率下也能产生更平滑、视觉上更准确的流动。

最后，我们选择显式方法意味着耦合通过多重时间步进来处理。流体对固体施加边界条件，固体随后演化，并将边界条件再施加回流体。更精确的方法将求得两种体系之间的力平衡在每个时间步内，例如借助牛顿迭代求解器。这将避免潜在的时间步进约束，这些约束会导致固体出现抖动行为，因为固体与流体试图在固体表面就局部压力和速度达成一致。

参考文献

Nadir Akinci、Markus Ihmsen、Gizem Akinci、Barbara Solenthaler 和 Matthias Teschner。2012。不可压缩 SPH 的通用刚体–流体耦合。《*ACM* 图形学汇刊 *(TOG)*》31, 4 (2012), 1–8。

Franz Aurenhammer、Therese Biedl、Michel Brevilliers、Thomas Hackl、Rolf Klein、Elmar Langetepe 和 Günter Rote。2014。关于可见性约束 Voronoi 图的注记。《信息处理快报》114, 7 (2014), 357–361。https://doi.org/10.1016/j.ipl.2014.01.014 Vinicius C Azevedo、Christopher Batty 和 Manuel M Oliveira。2016。为具有薄障碍物和狭窄间隙的流体流动保留几何结构和拓扑。*ACM* 图形学汇刊（*TOG*）35, 4 (2016), 1–12。Michael Batdorf、Lori Freitag、Carl Ollivier-Gooch、Michael Batdorf、Lori Freitag 和 Carl Ollivier-Gooch。1997。非结构网格质量对求解效率影响的计算研究。载于第 *13* 届计算流体动力学会议。1888。Christopher Batty、Florence Bertails 和 Robert Bridson。2007。用于精确固体-流体耦合的快速变分框架。*ACM* 图形学汇刊（*TOG*）26, 3 (2007), 100–es。Christoph Börgers 和 Charles S Peskin。2005。基于沃罗诺伊图的拉格朗日方法：用于周期域上的不可压缩 Navier-Stokes 方程。载于《自由拉格朗日方法：第一届自由拉格朗日方法国际会议论文集，*1985*年*3*月*4*日至*6*日于南卡罗来纳州希尔顿黑德岛举行》87 113–。Springer，–。Jumyung Chang、Ruben Partono、Vinicius C. Azevedo 和 Christopher Batty。2022。Curl-Flow：用于基于网格的流体的边界保持逐点不可压缩速度插值。*ACM* 图形学汇刊41, 6 (2022)。Alexandre Joel Chorin。1968年。Navier-Stokes 方程的数值解。计算数学22, 104 (1968), 745–762。Fernando De Goes、Corentin Wallez、Jin Huang、Dmitry Pavlov 和 Mathieu Desbrun。2015。幂粒子：一种基于功率图的不可压缩流体求解器。*ACM* 图形学汇刊34, 4 (2015), 50–1。Jean Donea、S HJP Giuliani 和 Jean-Pierre Halleux。1982年。一种用于瞬态动态流固相互作用的任意拉格朗日-欧拉有限元方法。《计算机在应用力学与工程中的方法》33, 1-3 (1982), 689–723。Yu Fang、Ziyin Qu、Minchen Li、Xinxin Zhang、Yixin Zhu、Mridul Aanjaneya 和 Chenfanfu Jiang。2020。IQ-MPM：一种用于非黏性强双向耦合非线性固体与流体的界面求积物质点法。*ACM* 图形学汇刊（*TOG*）39, 4 (2020), 51–1。Ronald P Fedkiw、Tariq Aslam、Barry Merriman 和 Stanley Osher。1999。一种处理多材料流动中界面的非振荡欧拉方法（幽灵流体法）。计算物理学杂志152, 2 (1999), 457–492。Yun Fei、Christopher Batty、Eitan Grinspun 和 Changxi Zheng。2018。用于仿真液体-织物相互作用的多尺度模型。*ACM* 图形学汇刊（*TOG*）37, 4 (2018), 1–16。Jeferson Wilian Dossa Fer nandes、Humberto Breves Coda 和 Rodolfo André Kuche Sanches。2019。基于高阶辅助网格和位置壳有限元的 ALE 不可压缩流体-壳耦合。计算力学63 (2019), 555–569。Valentin Fuster、Robert A. Harrington、Jagat Narula 和 Zubin J. Eapen。2017。。McGraw-Hill Education，纽约，NY。accessmedicine.mhmedical.com/content.aspx?aid=1152055642 Eran Guendelman、Andrew Selle、Frank Losasso 和 Ronald Fedkiw。2005。将水与烟雾耦合到薄可变形壳与刚性壳。*ACM* 图形学汇刊（*TOG*）24, 3 (2005), 973–981。Leonidas Guibas。2018。运动数据结构。载于《数据结构与应用手册》。Chapman and Hall/CRC，377–388。Aaron Katz 和 Venkateswaran Sankaran。2011。网格质量对非结构网格上 CFD 求解结果精度的影响。计算物理学杂志230, 20 (2011), 7670–7686。Rajat Mittal、Haibo Dong、Meliha Bozkurttas、FM Najjar、Abel Vargas 和 Alfred Von Loebbecke。2008。一种适用于具有复杂边界的不可压缩流的通用尖锐界面浸入边界法。计算物理学杂志227, 10 (2008), 4825–4852。

Mohammad Sina Nabizadeh、Ritoban Roy-Chowdhury、Hang Yin、Ravi Ramamoor- thi 和 Albert Chern。2024。余伴随轨道上的流体隐式粒子。*ACM* 图形学汇刊（*TOG*）43, 6 (2024), 270:1–270:38。Logan Numerow、Yue Li、Stelian Coros 和 Bernhard Thomaszewski。2024。用于仿真基于细胞的机械系统的可微 Voronoi 图。*ACM* 图形学汇刊（*TOG*）43, 4 (2024), 1–11。Atsuyuki Okabe、Barry Boots、Kokichi Sugihara 和 Sung Nok Chiu。2000。《空间镶嵌：Voronoi 图的概念与应用》（第 2 版）。John Wiley & Sons，奇切斯特。Charles S Peskin。1972。心脏瓣膜周围的流动模式：一种数值方法。计算物理学杂志10, 2 (1972), 252–271。Charles S Peskin。2002。浸入边界法。数值学报11 (2002), 479–517。Phil W Randles 和 Larry D Libersky。1996。光滑粒子流体动力学：近期改进与应用。《计算机在应用力学与工程中的方法》139, 1-4 (1996), 375–408。Chae M Rhie 和 Wei-Liang Chow。1983。带尾缘分离的翼型周围湍流的数值研究。*AIAA* 期刊21, 11 (1983), 1525–1532。Hagit Schechter 和 Robert Bridson。2012。用于水体动画的幽灵光滑粒子流体动力学。*ACM* 图形学汇刊（*TOG*）31, 4 (2012), 1–8。Raimund Seidel。1988 年。带障碍物的约束 Delaunay 三角剖分和沃罗诺伊图。报告260 (1988), 178–191。Alexander Shamanskiy 和 Bernd Simeon。2021。流固耦合中的网格移动技术：鲁棒性、累积变形与计算效率。计算力学 67, 2 (2021), 583–600。Donald Shepard。1968年。一种用于非规则间隔数据的二维插值函数。载于*1968 年第 23 届 ACM 全国会议论文集*。517–524。Side Effects Software Inc.。2025。*Houdini*。https://www.sidefx.com/ 三维动画与视觉特效软件。

Tetsuya Takahashi 和 Christopher Batty。2020 年。Monolith：用于强双向刚体-刚体、刚体-流体耦合的整体式压力-黏性-接触求解器。*ACM* 图形学汇刊 39，6（2020），1–16。Hidenori Takeda、Shoken M Miyama 和 Minoru Sekiya。1994 年。利用光滑粒子流体动力学进行黏性流动的数值模拟。理论物理进展 92，5（1994），939–960。Michael Tao、Christopher Batty、Mirela Ben-Chen、Eugene Fiume 和 David IW Levin。2022 年。VEMPIC：针对复杂固体边界的多面体内粒子流体模拟。*ACM* 图形学汇刊 41，4（2022），1–22。Michael Tao、Christopher Batty、Eugene Fiume 和 David IW Levin。2019年。Mandoline：任意三角网格的稳健切割单元生成。*ACM* 图形学汇刊 38，6（2019年），1–17。Yun Teng、David IW Levin 和 Theodore Kim。2016。欧拉固液耦合。*ACM* 图形学汇刊 35，6（2016），1–8。Jane Tournois、Pierre Alliez 和 Olivier Devillers。2010 年。带约束的二维质心沃罗诺伊镶嵌。数值数学：理论、方法与应用 3，2（2010 年），212–222。Yung H. Tsin 和 Cao An Wang。1996 年。存在直线屏障时的测地沃罗诺伊图。*Nord. J. Comput.* 3，1（1996 年），1–26。Tianyi Xie、Minchen Li、Yin Yang 和 Chenfanfu Jiang。2023。用于拉格朗日固体-流体耦合的接触代理分裂法。*ACM* 图形学汇刊 42，4（2023），1–14。Dong-Ming Yan、Wenping Wang、Bruno Lévy 和 Yang Liu。2010 年。三维裁剪沃罗诺伊图的高效计算。载于国际几何建模与处理会议。Springer，269–282。Tao Ye、Rajat Mittal、HS Udaykumar 和 Wei Shyy。1999年。具有复杂浸入边界的黏性不可压缩流的精确笛卡尔网格法。计算物理学杂志 156，2（1999年），209–240。