arXiv:2602.03993v1 [math.RA] 3 Feb 2026

Bogolyubov 自同构何时是内自同构?

NIKITA ARSKYI 和 OKSANA BEZUSHCHAK

Abstract. 设 V 是特征不等于 2 的域上的无限维向量空间。给定 V上的一个非退化二次型 f，我们考虑克利福德代数 Cl(V, f)。 V的任意正交线性变换都可扩张为 Cl(V, f)的 Bogolyubov 自同构。我们给出了 Bogolyubov 自同构为内自同构的充要条件。

1. 引言

设 $\mathbb{F}$ 是特征不等于 2 的域，且 V 是其上的向量空间。映射 $f\colon V \to \mathbb{F}$ 称为**二次型**，若满足以下条件:

(1) $f(\lambda v) = \lambda^2 f(v), \qquad \lambda \in \mathbb{F},\ v \in V;$
(2) $(v \mid w) = f(v+w) - f(v) - f(w)$ is a bilinear form on V.

若相伴的双线性型 $(v \mid w)$ 是非退化的，即 $(v \mid V) = (0)$ 蕴含 $v = 0.$，则称二次型是**非退化**的

Cl(V, f) 是由向量空间 V和单位元素 1 生成的结合代数，其定义关系为 $v^2 = f(v) \cdot 1$对所有 $v \in V$均成立。如果二次型 f 固定，则简记为 Cl(V)。

若 $\{v_i\}_{i\in I}$ 是 V 的一个基，且指标集 I 是全序集，则由单位元素 1 和所有有序乘积组成的集合

$$v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_k}, \qquad i_1 < i_2 < \cdots < i_k,$$

构成克利福德代数 Cl(V) 的一个基。

克利福德代数 Cl(V) 按 2 阶循环群分级:

$$\mathrm{Cl}(V) = \mathrm{Cl}(V)_{\bar{0}} + \mathrm{Cl}(V)_{\bar{1}},$$

其中

$$\mathrm{Cl}(V)_{\bar{0}} = \mathbb{F}\cdot 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{V \cdots V}_{2n}, \qquad \mathrm{Cl}(V)_{\bar{1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{V \cdots V}_{2n-1}.$$

设 $\varphi\colon V \to V$是一个正交线性变换，即对所有 $v \in V.$，均有 $f(\varphi(v)) = f(v)$。众所周知，φ 可唯一延拓为克利福德代数 Cl(V) 的一个自同构$[\varphi]$ 。这类自同构称为 **Bogolyubov自同构**。

关于 Hilbert 空间和预 Hilbert 空间上的克利福德代数，以及这些代数的 $\mathbb{C}^*$-完备化，已有大量文献（例如参见 [1, 7, 9]）。特别是，H. Araki [1]描述了克利福德 $\mathbb{C}^*$代数中作为内自同构的 Bogolyubov自同构（另见 [9]）。

2020 数学主题分类。15A66（主要）16W20（次要）。关键词和短语。Bogolyubov 自同构、克利福德代数、局部矩阵代数。1

设 $\varphi\colon V \to V$ 是一个线性变换。对于 φ的特征值 α，我们记

$$V(\alpha) = \ker(\varphi - \alpha \cdot \mathrm{Id})$$

相应的特征空间，其中 Id 表示 V 上的恒等算子。

线性变换 φ 称为**有限余维的**，如果子空间 $V(1)$ 在 V 中具有有限余维。

设 $W \subset V$ 是一个具有有限余维的 φ-不变子空间。则 φ 诱导出有限维商空间 V/W 上的线性变换 $\varphi|_{V/W}$。

本文在纯代数框架下描述克利福德代数 Cl(V) 的内 Bogolyubov自同构。

定理 1. 设 $\mathbb{F}$ 是特征为 $\neq 2$ 的代数闭域，并设 V是 $\mathbb{F}$ 上具有非退化二次型的无限维向量空间。设 φ 是一个正交线性变换。克利福德代数 $\mathrm{Cl}(V)$ 的 *Bogolyubov* 自同构 $[\varphi]$ 是内的，当且仅当

(1) φ 是有限余维的，并且 $\varphi = \mathrm{Id}$ 或 $\det\left(\varphi|_{V/V(1)}\right) = 1$,

or

(2) $-\varphi$ 是有限余维的，$\varphi \neq -\mathrm{Id}$、$\dim_{\mathbb{F}}(V/V(-1)) = k \geq 1$，并且

$$(-1)^k \cdot \det\left(\varphi\big|_{V/V(-1)}\right) = -1.$$

例1。 设 V是可数维的，并设 $v_1, v_2, \ldots$是 V的标准正交基。由下式定义的线性变换 φ:

$$\varphi(v_1) = v_1, \quad \varphi(v_i) = -v_i \text{ for } i \geq 2,$$

是正交的。我们有 $\dim_{\mathbb{F}}(V/V(-1)) = 1$且 $\det\left(\varphi|_{V/V^{(-1)}}\right) = 1$。对于任意元素 $a \in \mathrm{Cl}(V)$，我们有

$$[\varphi](a) = v_1^{-1} a v_1.$$

在 [3], 中，我们描述了Cl(V)的内Bogolyubov导子。

克利福德代数 Cl(V) 是一个含幺局部矩阵代数，对应于施泰尼茨数 2^∞ （见 [4, 5, 6]）。任意可数维含幺局部矩阵代数的自同构和导子已在 [2]中描述。

2. Proof of the Lemmas

如果二次型在 U 上的限制是非退化的，则称有限维子空间 $U \subset V$ **非退化**。

引理 1。 (1) 假设 $V(1)$ 在 V 中具有有限余维。则存在一个偶数维、非退化的、 φ-不变子空间 $W \subset V$，使得

$$W^\perp = \{v \in V \mid (v \mid W) = (0)\} \subseteq V(1).$$

(2) 假设 $V(-1)$ 在 V 中具有有限余维。则存在一个偶数维、非退化的、 φ-不变子空间 $W \subset V$，使得

$$W^\perp = \{v \in V \mid (v \mid W) = (0)\} \subseteq V(-1).$$

证明。 我们只证明第(1)部分。第(2)部分可类似证明。子空间 (Id$-\varphi$)(V) 是有限维的。设 $\chi(t)$ 为φ 在子空间 (Id $-\varphi$)(V) 上的限制的特征多项式。则 φ 是多项式 $(1-t)\chi(t)$ 的一个根。

存在一个有限维的 φ-不变子空间 $U \subseteq V$，使得 $V = U + V(1)$。对于任意元素 v_1，$v_2 \in V$，我们有

$$(\varphi(v_1) \mid v_2) = (v_1 \mid \varphi^{-1}(v_2)).$$

因此，

$$\big((\varphi - \mathrm{Id})(v_1) \mid v_2\big) = \big(v_1 \mid (\varphi^{-1} - \mathrm{Id})(v_2)\big) = \big(v_1 \mid \varphi^{-1}(\mathrm{Id} - \varphi)(v_2)\big).$$

这意味着 $\big((\varphi - \mathrm{Id})(V) \mid V(1)\big) = (0)$。

设 $v \in U^\perp$，并假设 $(\varphi - \mathrm{Id})(v) \neq 0$。那么 $(\varphi - \mathrm{Id})(v)$ 与 U 和 $V(1)$ 都正交。这与 V 上二次型的非退化性矛盾。因此，我们证明了 $U^\perp \subseteq V(1)$。

假设子空间 U 是非退化的。若 $\dim_{\mathbb{F}} U$ 为偶数，则结论成立。假设 $\dim_{\mathbb{F}} U$ 为奇数。由于二次型在 $U^\perp$ 上的限制是非退化的，因此存在一个元素 $v \in U^\perp$，使得 $(v \mid v) \neq 0$。子空间 $U + \mathbb{F}v$ 满足所有必要的假设。

现在假设子空间 U 不是非退化的。设 $0 \neq u \in U \cap U^\perp \subseteq U \cap V(1)$。由于 V 上的二次型是非退化的，因此存在一个元素 $v \in V(1)$，使得 $(u \mid v) \neq 0.$。子空间 $\mathbb{F}u + \mathbb{F}v$ 是非退化的，因此我们得到正交分解 $V = (\mathbb{F}u + \mathbb{F}v) \oplus (\mathbb{F}u + \mathbb{F}v)^\perp$.

考虑投影 $\pi\colon V \to V' = (\mathbb{F}u + \mathbb{F}v)^\perp.$。我们有 $V' = \pi(U) + V'(1)$，其中子空间 $\pi(U)$ 是 φ-不变的，且 $\dim_{\mathbb{F}} \pi(U) < \dim_{\mathbb{F}} U.$。对 $\dim_{\mathbb{F}} U$ 使用归纳法，我们找到一个偶数维的 φ-不变非退化子空间 $W' \subset V'$，使得 $(W')^\perp \cap V' \subseteq V'(1)$。剩下的就是选取 $W = \mathbb{F}u + \mathbb{F}v + W'$.

引理的证明至此完成。 □

对于代数 A 的子集 S，令

$$Z_A(S) = \{a \in A \mid ax = xa \text{ for each } x \in S\}$$

为集合 S 在 A 中的中心化子。

引理2. 设 U 是 V 的一个非退化偶维子空间。设 $v_1, \ldots, v_n$ 是 U 的一个标准正交基。则

$$Z_{\mathrm{Cl}(V)}(\mathrm{Cl}(U)) = \mathrm{Cl}(U^\perp)_{\overline{0}} + v_1 \cdots v_n \mathrm{Cl}(U^\perp)_{\overline{1}}.$$

证明. 设 $\{u_i\}_{i \in I}$ 是 $U^\perp$ 的一个有序基。考虑一个元素

$$x = v_{i_1} \cdots v_{i_k} u_{j_1} \cdots u_{j_l},$$

其中 $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, $j_1 < \ldots < j_l$。对于每个 $i \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$,

$$v_i x = (-1)^{k+l} x v_i.$$

对于每个 $t \in \{1, \ldots, k\}$,

$$v_{i_t} x = (-1)^{k+l-1} x v_{i_t}.$$

因此，元素 x 将与元素 v_1、.....、v_n 中的每一个对易，当且仅当 $k = 0$ 和 l 都是偶数，或者 $k = n$ 和 l 都是奇数。否则，对于某个 i，x 将与 v_i 反对易。这就完成了引理的证明。 □

引理 3. 设 $\varphi\colon V \to V$ 是一个正交线性变换，$[\varphi]$ 是相应的 *Bogolyubov* 自同构。设 v_1、$v_2 \in V$ 线性无关。若 $[\varphi](v_1 v_2) = v_1 v_2$，则子空间 $\mathbb{F}v_1 + \mathbb{F}v_2$ 是 φ-不变的。

证明。 假设 $\varphi(v_1) \notin \mathbb{F}v_1 + \mathbb{F}v_2$。 将系统 v_1, v_2 扩充为 V的一组基$v_1, v_2, v_3, \dots$。 令

$$\varphi(v_1) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \quad \text{and} \quad \varphi(v_2) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i.$$

不失一般性，设 $\alpha_3 \neq 0$。我们有

$$v_1 v_2 = [\varphi](v_1 v_2) = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) v_1 v_2 + \sum_{i \leq j} \alpha_j \beta_i f(v_i, v_j) 1 +$$

$$+ \sum_{\substack{i<j \\ (i,j)\neq(1,2)}} (\alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i) v_i v_j.$$

由于向量组 $\{1; v_i v_j, i < j\}$ 线性无关，因此可得$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 1$、 $\alpha_1\beta_3 = \alpha_3\beta_1$ 和 $\alpha_2\beta_3 = \alpha_3\beta_2$。 然而，后两个等式与第一个等式矛盾。因此， $\varphi(v_1) \in \mathbb{F}v_1 + \mathbb{F}v_2$。 类似地， $\varphi(v_2) \in \mathbb{F}v_1 + \mathbb{F}v_2$，引理得证。 □

3. Proof of the Theorem

定理的证明 1. 必要性。 设 $[\varphi]$ 是由可逆元x共轭得到的。存在一个非退化偶维子空间 $V' \subseteq V$ ，使得$x \in \mathrm{Cl}(V')$。

任取一个向量 $0 \neq v \in V'^{\perp}$。任取元素 $v_1, v_2 \in V'^{\perp}$，使得系统 v, v_1, v_2 线性无关。元素 vv_1 和 vv_2 属于 $Z_{\mathrm{Cl}(V)}(\mathrm{Cl}(V'))$。因此，

$$[\varphi](vv_1) = vv_1, \qquad [\varphi](vv_2) = vv_2.$$

根据引理3，子空间 $\mathbb{F}v + \mathbb{F}v_1$ 和 $\mathbb{F}v + \mathbb{F}v_2$ 是 φ-不变的。因此，

$$\varphi(v) \in (\mathbb{F}v + \mathbb{F}v_1) \cap (\mathbb{F}v + \mathbb{F}v_2) = \mathbb{F}v.$$

我们已经证明，任意元素 $v \in V'^{\perp}$ 都是 φ的特征向量，其中

$$\varphi(v) = v \quad \text{or} \quad \varphi(v) = -v.$$

因此， $V'^{\perp} \subseteq V(1)$ 或 $V'^{\perp} \subseteq V(-1)$。考虑第一种情况。第二种情况的论证类似。

设 $v_1, \dots, v_n$ 是 V'的一组标准正交基。由引理2可知，对每个 $u \in V'^{\perp}$，

$$[\varphi](v_1 \cdots v_n u) = v_1 \cdots v_n u.$$

我们有

$$[\varphi](v_1 \cdots v_n u) = \det \varphi|_{V/V(1)} v_1 \cdots v_n u.$$

因此，$\det \varphi|_{V/V(1)} = 1$。

充分性。 假设定理 1 的条件 (1) 成立。情形 (2) 的证明类似。由引理 1，存在一个非退化的偶数维 φ-不变子空间 V'，它包含于 V，使得 $V'^{\perp} \subseteq V(1)$。我们有 $\mathrm{Cl}(V) = \mathrm{Cl}(V') \otimes Z_{\mathrm{Cl}(V)}(\mathrm{Cl}(V'))$；参见 [8, 10]。

令 $v_1, \dots, v_n$ 为 V' 的一个标准正交基。对于每个线性无关的 $u_1, u_2 \in V'^{\perp}$，

$$[\varphi](v_1 \cdots v_n u_1) = \text{行列式 } \varphi|_{V/V(1)} v_1 \cdots v_n u_1 = v_1 \cdots v_n u_1 \text{ 和 } [\varphi](u_1 u_2) = u_1 u_2.$$

由引理2可知， $[\varphi]$ 在 $Z_{\mathrm{Cl}(V)}(\mathrm{Cl}(V'))$上的作用为恒等。因此， $[\varphi]$ 必定是用$\mathrm{Cl}(V')$中的一个元素所作的共轭。

定理 1 的证明至此完成。 □

Acknowledgments

作者谨向 Efim Zelmanov 对其宝贵的讨论表示深切感谢。

References

[1] H. Araki, 《关于 CAR 和 Bogolyubov 自同构的准自由态》，京都大学数理解析研究所出版物 **6** （1971），385-442。1[2] O. Bezushchak, 《局部矩阵代数的导子与自同构》，《代数杂志》**576**（2021），1-26。1[3] Bezushchak O., 《关于无限维向量空间的克利福德代数》，《当代代数学》美国数学会, 《现代代数、群与代数：第14届乌克兰代数会议论文集》，**830**（2025）。1[4] O. Bezushchak，B. Oliynyk, 《Morita等价的含幺局部矩阵代数》，《代数离散数学》**29**（2）（2020），173-179。1[5] O. Bezushchak，B. Oliynyk, 《含幺局部矩阵代数与施泰尼茨数》，《代数及其应用杂志》**19**（9）（2020）。1[6] O.O. Bezushchak，V.I. Sushchansky, 《无限维向量空间的周期定义的线性变换群》，《乌克兰数学杂志》**67**（10）（2016），1457-1468。1[7] O. Bratteli，D. W. Robinson, 《算子代数与量子统计力学 II》，《物理学教材与专著》，柏林-海德堡-纽约，Springer-Verlag, （1981）。1[8]Yu. A. Drozd, V. V. Kirichenko, 《有限维代数》，Springer-Verlag，柏林-海德堡-纽约, （1994）。3[9] P. de la Harpe, 《希尔伯特空间的克利福德代数与旋量群》，《组合数学》**25**（3）（1972），245-261。1[10] I. N. Herstein, 《非交换环》，美国数学协会, 《Carus 数学专著》，1968。3

NIKITA ARSKYI: Faculty of Mechanics and Mathematics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, 60 Volodymyrska Street, Kyiv 01033, Ukraine电子邮箱: nikitaarskyi@knu.ua

OKSANA BEZUSHCHAK: Faculty of Mechanics and Mathematics, TarasShevchenko National University of Kyiv, 60 Volodymyrska Street, Kyiv 01033,Ukraine电子邮箱：bezushchak@knu.ua