arXiv:2602.03997v1 [math.AP] 3 Feb 2026

温度依赖系数驱动的一维热黏弹性中的热点形成

Michael Winkler*帕德博恩大学，数学研究所，33098 帕德博恩，德国

摘要

本文研究一个双分量演化系统，该系统推广了开尔文–伏伊特材料在温度依赖黏度和弹性刚度作用下的一维热黏弹性动力学经典模型。在对这些因素的增长情况及初始数据作出适当假设后，发现温度变量的 L^∞ 范数会在有限时间内发生爆破。

关键词：非线性声学；热黏弹性；黏性波动方程；爆破**2020年数学学科分类：**74H35（主要）；35B44、74F05、35L05（次要）

*michael.winkler@math.uni-paderborn.de

1 引言

数学文献中对热黏弹性建模的演化方程进行了深入研究。对于可忽略弹性参数和黏度温度依赖性的典型应用框架，研究者已建立起范围广泛的适定性理论。关于一维情形的经典结果表明，在参数函数和初始数据取值范围较大的情况下，整体可解性成立（[39], [11], [12], [20], [48]）；而在多维情形中，研究者也成功地在若干具有物理意义的特殊情形下，克服了与向量值位移复杂相互作用相关的障碍（[41], [29], [6], [40], [17], [42], [33], [32]）。在一些一维问题中，甚至已证明，趋向均匀状态的稳定化式长时间松弛足以全面刻画解的行为（[39]；另请参见 [4], [3]和 [8]，其中讨论了相关无黏性系统的相应进展）。

正如近期发现的那样，热黏弹性动力学的核心决定因素很可能会对温度表现出一定程度、但不可忽略的依赖性；事实上，实验观察表明，在某些压电陶瓷材料中，弹性刚度参数和黏度都可能随温度升高而增大（[16]；另见 [9], [19]）。为简单起见，我们忽略诸如应变等其他依赖性，并进一步假设迟滞时间参数 τ 保持恒定；在标准 Kelvin-Voigt 模型中，该参数用于量化机械损耗。对变量进行适当归一化后，我们由此考虑以下演化系统

$$\begin{cases} u_{tt} = \big(\gamma(\Theta)u_{xt}\big)_x + a\big(\gamma(\Theta)u_x\big)_x - \big(f(\Theta)\big)_x, \\ \Theta_t = \Theta_{xx} + \gamma(\Theta)u_{xt}^2 - f(\Theta)u_{xt}, \end{cases} \tag{1.1}$$

对于未知位移 $u = u(x,\ t)$ 和温度 $\Theta = \Theta(x,\ t)$，其中 $f(\Theta)$ 表示热膨胀，因此按惯例显式依赖于 Θ；此外，材料黏度 $\gamma(\Theta)$ 和弹性刚度 $a\gamma(\Theta)$ 现在也依赖于 Θ，而 $a = \frac{1}{\tau}$ 为常数（例如，参见 [9]）。

关于这类偏离经典设定的影响（其中 $\gamma \equiv const.$），目前的认识似乎仍处于相当早期的阶段，而且似乎仅限于以下结果：在存在相当任意的因素和初始数据（[15], [10], [49]）时的局部时间适定性；在小性条件下（其中包括对 γ' 和 f' 的条件），可解至任意但固定的有限时间范围（[28]）；以及在小参数 a、小导数 f' 和小初始数据（[15], [9]）的情况下，解的整体存在性和有界性。事实上，这或许反映了经典的一维热黏弹性方法较难应用；这些方法的关键依赖于黏度为常数（[39], [52], [43], [25], [20], [44], [22]），只有少数例外允许黏度对应变 u_x 存在适当温和的依赖关系（[48], [24]）。当 γ 非常数时，方程 (1.1) 似乎也与其对应模型有显著差异；后者至少假设弹性参数为一个固定数值 b。事实上，虽然对于后一个系统，可以通过适当利用一项由守恒律表示的整体结构性质来推导存在性结果

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega u_t^2 + \frac{b}{2}\int_\Omega u_x^2 + \int_\Omega \Theta\right\} = 0,$$

从形式上看，无论 $\gamma = \gamma(\Theta)$ ([50], [51]) 具有何种特定行为，该结论实际上都成立；但转而考察 (1.1) 时，似乎不存在任何类似的性质。

主要结果。 本文旨在指出，(1.1) 中缺乏有利结构所带来的影响可能不仅仅具有方法论意义，并揭示黏度和弹性刚度的温度依赖性实际上可能促成热点形成，即在有限时间内自发出现奇异温度分布。本文将在初边值问题的框架下对此展开研究

$$\begin{cases} u_{tt} = \nabla \cdot (\gamma(\Theta)\nabla u_t) + a\nabla \cdot (\gamma(\Theta)\nabla u) + \nabla \cdot f(\Theta), & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \Theta_t = D\Delta\Theta + \gamma(\Theta)|\nabla u_t|^2 + f(\Theta) \cdot \nabla u_t, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_{0t}(x), \quad \Theta(x,0) = \Theta_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

此处考虑实值未知量 u 和 Θ，以及光滑边界的 n 维区域 Ω。对于 $n = 1$，这与我们最初描述 (1.1) 的目标立即一致；而纳入任意的 $n \geq 1$——这不会使我们的分析变得复杂——或许表明所讨论的现象在某种程度上独立于空间维数。

为了建立一个适当的框架，使解具有足够的光滑性，我们首先陈述以下关于局部经典可解性和可延拓性的基本结果。该结果可通过几乎逐字照搬 [10] 中针对 (1.2) 的相关推导加以证明；该方程组的两个解分量均满足无通量边界条件：

命题 1.1 设 $n \geq 1$ 和 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为具有光滑边界的有界区域，设 $a > 0$ 和$D > 0$，并假设

$$\begin{cases} \gamma \in C^2([0,\infty)) \text{ is such that } \gamma > 0 \text{ on } [0,\infty), \text{ and that} \\ f \in C^2([0,\infty);\mathbb{R}^n) \text{ satisfies } f(0) = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

那么，只要

$$\begin{cases} u_0 \in C^2(\overline{\Omega}) \text{ is such that } u = 0 \text{ on } \partial\Omega, \\ u_{0t} \in \bigcup_{\beta\in(0,1)} C^{1+\beta}(\overline{\Omega}) \text{ is such that } u_{0t} = 0 \text{ on } \partial\Omega, \qquad \text{and} \\ \Theta_0 \in \bigcup_{\beta\in(0,1)} C^{1+\beta}(\overline{\Omega}) \text{ satisfies } \Theta_0 \geq 0 \text{ in } \Omega \text{ and } \frac{\partial \Theta_0}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.4}$$

就可以找到 $T_{max} \in (0、\ \infty]$，以及

$$\begin{cases} u \in C^{1,0}(\overline{\Omega} \times [0,T_{max})) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0,T_{max})) \qquad \text{and} \\ \Theta \in C^{1,0}(\overline{\Omega} \times [0,T_{max})) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0,T_{max})) \qquad \text{with} \\ u_t \in C^{1,0}(\overline{\Omega} \times [0,T_{max})) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0,T_{max})) \end{cases} \tag{1.5}$$

使得 $\Theta \geq 0$ 属于 $\Omega \times (0,T_{max})$，并且 (u,Θ) 构成方程 *(1.2)* 在 $\Omega \times (0,T_{max})$中的经典解，且

$$\begin{aligned} &\text{if } T_{max} < \infty, \quad \text{then} \\ &\qquad \limsup_{t \nearrow T_{max}} \Big\{ \|u_t(\cdot,t)\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|\Theta(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \Big\} = \infty \quad \text{for all } p \geq 2 \text{ such that } p > n. \end{aligned} \tag{1.6}$$

更精细的可延拓性判据：有限时间爆破时奇异性的必要性 Θ 。 我们现在的首要具体目标，是确保方程 (1.2) 中任何有限时间奇异性形成都必然伴随一种具有直接物理意义的现象：事实上，可以对 (1.6) 加以改进，使修订后的版本断言温度变量本身相对于范数 L^∞ 已经无界，从而表明此类事件中必然会出现真正的热点形成。这与热弹性一维及高维模型中关于 C^2-爆破的经典结果 ([35], [13], [21]) 不同，这或许是仅仅由于黏性的存在所致。事实上，通过在第 2.1 节的 Moser 迭代框架中，首先在零阶层面进行变分论证，并在第 2.2 节进一步于一阶层面开展论证，充分利用相应的耗散效应，我们可以将 (1.6) 加强如下。

命题 1.2 假设 $n \geq 1$ 且$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是具有光滑边界的有界区域，$a > 0$ 和 $D > 0$，并且 *(1.3)* 和 *(1.4)* 成立。那么，在命题 *1.1* 中得到的量 T_{max}、u 和 Θ 实际上满足：

$$if\, T_{max} < \infty, \quad then \quad \limsup_{t \nearrow T_{max}} \|\Theta(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \infty. \tag{1.7}$$

超线性增长情形下有限时间爆破的发生 γ。 在第 3 节中，我们的分析核心将致力于在主要针对关键要素 γ 的适当假设下检测爆破。围绕如下形式的不等式展开论证时，

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \psi(\Theta) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 \leq C, \quad t \in (0,T), \qquad \psi(\xi) = -\int^\xi \frac{d\sigma}{\gamma(\sigma)}, \quad \xi > 0, \tag{1.8}$$

其中 $C > 0$ 取决于 f，γ 和 $T > 0$，且这种依赖方式适当可控（引理 3.1），需要克服的关键挑战之一是，从下方适当地控制第二个方程 (1.2) 中符号有利但可能振荡的项 $|\nabla u_t|^2$ 。基于如下简单观察：

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^2 \leq 2\int_\Omega |\nabla u(\cdot,t)|^2 + 2t\int_0^t \int_\Omega |\nabla u_t|^2 \tag{1.9}$$

（引理 3.2），这将通过充分利用（1.2）中黏性与弹性参数之间的特殊联系来实现；具体而言，这种联系将使我们能够推导出一个上界

$$\int_0^T \int_\Omega |\nabla u_t + a\nabla u|^2$$

通过适当的测试方法（引理 3.3）。由此得到的 $\int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^2$ 关于 $\int_0^T \int_\Omega |\nabla u_t|^2$ 的上界，在足够短的时间区间内可与 (1.9) 结合使用，从而确实证实：就爆破的发生而言，(1.2) 的热演化子系统与相应的常微分方程具有本质相同的特征

$$\theta_t = c\gamma(\theta) \tag{1.10}$$

其中 $c > 0$。

适当地追踪所得到的不等式中各项之间的依赖关系，尤其是它们对初始数据所有分量的依赖，将揭示关于 (1.2) 中促使爆发的配置的两个不同结论。事实上，我们在这一方向上的第一个主要结果将表明：对于任意一个使得 (1.10) 的正解发生爆发的非递减函数 γ，以及大类 f 中的情形，足够强的初始应变会促使热点在有限时间内出现。我们强调，以下相关结果除了 (1.4) 中的基本假设外，不依赖于对 Θ_0 的任何假设；并且我们指出，若例如满足以下条件，则 (1.11)、(1.12) 和 (1.13) 对 γ 和 f 的要求尤其容易得到满足，

$$\gamma(\xi) = \gamma_\star \cdot (\xi + 1)^\mu \quad \text{and} \quad f(\xi) = \xi f_\star \qquad \text{for all } \xi \geq 0$$

取某个

$$\mu \geq 2$$

以及某个 $\gamma_\star > 0$ 和 $f_\star \in \mathbb{R}^n$:

定理 1.3 设 $n \geq 1$ 和 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是具有光滑边界的有界区域，设 $a > 0$，假设 *(1.3)* 成立，并进一步假定

$$\gamma'(\xi) \geq 0 \qquad \textit{for all } \xi > 0 \tag{1.11}$$

and

$$\int_0^\infty \frac{d\xi}{\gamma(\xi)} < \infty, \tag{1.12}$$

并且存在 $\Lambda > 0$ 使得

$$\frac{|f|^2(\xi)}{\gamma(\xi)} \leq \Lambda \qquad \textit{for all } \xi \geq 0. \tag{1.13}$$

那么对于所有 $T > 0$，存在 $C = C(a, \gamma, f, T) > 0$，使得只要 $D > 0$ 且 *(1.4)* 成立，并满足

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^2 \geq C \int_\Omega u_0^2 + C \int_\Omega u_{0t}^2 + C, \tag{1.14}$$

(1.2) 的相应解会在 T 时刻之前或恰好于该时刻爆破：在命题 *1.1* 中，我们于是有$T_{max} \leq T$ 并且

$$\limsup_{t \nearrow T_{max}} \|\Theta(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \infty. \tag{1.15}$$

然而，另一方面，只要初始时刻整个区域内的温度足够高，任意小的初始分布 u_0 和 u_{0t} 也可能导致爆破：

定理 1.4 设 $n \geq 1$ 与 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为一个边界光滑的有界区域，并假设 $a > 0$，且 γ 与 f 对某个 $\Lambda > 0$满足 *(1.3)*、*(1.11)*、*(1.12)* 和 *(1.13)*。则对任意给定的 $T > 0$、$\eta > 0$和 $M > 0$，可以找到 $C(a, \gamma, f, T, \eta, M) > 0$，其具有如下性质：若 $D > 0$，且若 *(1.4)* 在

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^2 \geq \eta \tag{1.16}$$

and

$$\int_\Omega u_0^2 + \int_\Omega u_{0t}^2 \le M, \tag{1.17}$$

则假设

$$\Theta_0(x) \ge C(a,\gamma,f,T,\eta,M) \qquad for\ all\ x \in \Omega \tag{1.18}$$

这保证了命题 *1.1* 中方程 *(1.2)* 的解满足 $T_{max} \le T$，且 *(1.15)* 成立。

注记。i) 我们的论证实际上将表明，只要 $T > 0$，当 $a > 0$ 且 $D > 0$，当 γ 且 f 满足 (1.3)、(1.11) 和 (1.12)，且 (u_0，u_{0t}，Θ_0) 符合 (1.4) 并满足以下条件时，便会在时间$T > 0$ 之前或恰于该时刻发生爆破：

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^2 > \Big\{\frac{4}{a^2T} + 2T\Big\} \cdot \int_\Omega \psi(\Theta_0) + \frac{4e^{2aT}}{a^2T} \cdot \Big\{\gamma\Big(\inf_{x\in\Omega}\Theta_0(x)\Big)\Big\}^{-1} \cdot \Big\{\frac{3a^2}{2}\int_\Omega u_0^2 + \int_\Omega u_{0t}^2\Big\},$$

其中 $\psi(\xi) := \int_\xi^\infty \frac{d\sigma}{\gamma(\sigma)}$，$\xi \ge 0$（参见下文引理 3.5）。

ii) 通过上述设计，我们针对 (1.2) 中爆破检测所采用的方法，可视为一种混合推理，将抛物型爆破分析中的若干要素与针对 (1.2) 中黏性波动方程特定结构调整的论证结合起来。这一方法试图充分考虑到这样一种情况：经典非存在性证明通常显式或隐式地依赖于真正的、无下界的能量，而 (1.2) 显然无法采用这类证明。超线性受迫波动方程中已有大量爆破解现象的发现（[26], [18], [2]），以及针对固体或流体材料的各种黏弹性模型中的相关发现（[23], [27], [7], [31], [45], [46]），均体现了这一点。

2 Θ 的作用 在可能的奇异性附近。命题 1.2 的证明

2.1 u 与 u_t的局部时间 L^∞ 界

为简化本节及下一节的表述，我们指出，令 $v := u_t + au$ 可将(1.2)转化为三分量系统

$$\begin{cases} v_t = \nabla\cdot(\gamma(\Theta)\nabla v) + av - a^2u + \nabla\cdot f(\Theta), & x\in\Omega,\ t>0,\\ u_t = v - au, & x\in\Omega,\ t>0,\\ \Theta_t = D\Delta\Theta + \gamma(\Theta)|\nabla v - a\nabla u|^2 + f(\Theta)\cdot(\nabla v - a\nabla u), & x\in\Omega,\ t>0,\\ v = 0, \quad u = 0, \quad \frac{\partial\Theta}{\partial\nu} = 0, & x\in\partial\Omega,\ t>0,\\ v(x,0) = v_0(x) := u_{0t}(x) + au_0(x), \quad u(x,0) = u_0(x), \quad \Theta(x,0) = \Theta_0(x), & x\in\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

而我们的首要目标在于证明：若(1.2)的某个解违反了(1.7)，则在相应变换后的变量中，v 与 u 均属于 $L^\infty(\Omega\times(0,T_{max}))$。借助一个H¨older界以及由此蕴含的一致连续性（引理 2.5），上述包含关系中的前者将在我们证明命题 1.2 所依据的Ehrling型插值论证过程中发挥关键作用（见引理 2.7）。

为了通过利用 (2.1) 中第一个方程的抛物性进行 Moser型迭代来获得此类 L^∞ 界，在给定 $a > 0$ 的情况下，我们固定任意一个足够大的 $\kappa > 0$，使得

$$A := a + \kappa \qquad \text{satisfies} \qquad A \ge 2a \quad \text{and} \quad A \ge 2, \tag{2.2}$$

并假设 (1.3) 和 (1.4) 成立，我们令 T_{max} 和 $(v,\ u,\ \Theta)$ 如上，并设

$$w(x,t) := e^{-\kappa t}v(x,t) \quad \text{and} \quad z(x,t) := e^{-\kappa t}u(x,t), \qquad x \in \overline{\Omega},\ t \in [0, T_{max}), \tag{2.3}$$

注意到因此，由 (2.1) 可得,

$$\begin{cases} w_t = \nabla \cdot (\gamma(\Theta)\nabla w) - (A-2a)w - a^2 z + e^{-\kappa t}\nabla \cdot f(\Theta), & x \in \Omega,\ t \in (0, T_{max}), \\ z_t = w - Az, & x \in \Omega,\ t \in (0, T_{max}), \\ w = 0, & x \in \partial\Omega,\ t \in (0, T_{max}), \\ w(x,0) = u_{0t}(x) + au_0(x), \quad z(x,0) = z_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.4}$$

以下观察构成了我们递归论证的基础：利用 (2.2) 在 (2.4) 中产生足够强的零阶耗散，从而为 $t \mapsto \int_\Omega w^p + \int_\Omega z^p$ 的演化带来一些有利的吸收性贡献，其中 $p \geq 2$ 为偶数:

引理 2.1 设 $a > 0$ 和 $D > 0$，假设 *(1.3)* 和 *(1.4)* 成立，并且满足 $T_{max} < \infty$，但

$$\limsup_{t \nearrow T_{max}} \|\Theta(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty. \tag{2.5}$$

则存在 $C > 0$，使得对于任意偶整数 $p \geq 2$，*(2.3)* 中的函数满足

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left\{1 + \int_\Omega w^p + \int_\Omega z^p\right\} + \frac{1}{C}\cdot\left\{1 + \int_\Omega w^p + \int_\Omega z^p\right\} + \frac{1}{C}\int_\Omega |\nabla w^{\frac{p}{2}}|^2 \\ &\qquad \leq \ Cp^2 \int_\Omega w^p + Cp^2 \qquad \textit{for all } t \in (0, T_{max}). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Proof. 若 $T_{max} < \infty$，但 (2.5) 成立，那么由 γ 和 f 的连续性以及 γ 的正性，可知存在 $c_1 > 0$ 和 $c_2 > 0$，使得

$$\gamma(\Theta) \geq c_1 \quad \text{and} \quad |f(\Theta)| \leq c_2 \qquad \text{in } \Omega \times (0, T_{max}), \tag{2.7}$$

对于偶数整数 $p \geq 2$，我们可以对 (2.4) 中的第一个方程进行分部积分，并由 (2.7) 得到,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_\Omega w^p &= p\int_\Omega w^{p-1}\nabla\cdot\big(\gamma(\Theta)\nabla w\big) - (A-2a)p\int_\Omega w^p - a^2 p\int_\Omega w^{p-1}z + pe^{-\kappa t}\int_\Omega w^{p-1}\nabla\cdot f \\ &= -p(p-1)\int_\Omega \gamma(\Theta)w^{p-2}|\nabla w|^2 - (A-2a)p\int_\Omega w^p - a^2 p\int_\Omega w^{p-1}z \\ &\quad -p(p-1)e^{-\kappa t}\int_\Omega w^{p-2}\nabla w\cdot f + pe^{-\kappa t}\int_{\partial\Omega} w^{p-1} f\cdot\nu \\ &\leq -c_1 p(p-1)\int_\Omega w^{p-2}|\nabla w|^2 - a^2 p\int_\Omega w^{p-1}z \\ &\quad +c_2 p(p-1)\int_\Omega w^{p-2}|\nabla w| + c_2 p\int_{\partial\Omega}|w^{p-1}| \qquad \text{for all } t \in (0, T_{max}), \end{aligned} \tag{2.8}$$

因为 $A-2a\geq 0$ 由 (2.2) 可知。这里，杨氏不等式表明

$$\begin{aligned} c_2p(p-1)\int_\Omega w^{p-2}|\nabla w| &\leq \frac{c_1p(p-1)}{2}\int_\Omega w^{p-2}|\nabla w|^2+\frac{c_2^2p(p-1)}{2c_1}\int_\Omega w^{p-2} \\ &\leq \frac{c_1p(p-1)}{2}\int_\Omega w^{p-2}|\nabla w|^2+c_3p^2\int_\Omega w^p+c_3p^2 \qquad \text{for all } t\in(0,T_{max}) \end{aligned}$$

其中 $c_3:=\frac{c_2^2}{2c_1}(1+|\Omega|)$。此外，再次利用杨氏不等式，并由于由不等式 $A\geq 2$ 和 $p\geq 2$ 得到的粗略估计 $\binom{4}{A}^{\frac{1}{p-1}}\leq 2$ 与 $a^{\frac{2p}{p-1}}\leq a^4$，

$$\begin{aligned} -a^2p\int_\Omega w^{p-1}z &= -\int_\Omega\Big\{\frac{Ap}{4}z^p\Big\}^{\frac{1}{p}}\cdot\Big(\frac{4}{Ap}\Big\}^{\frac{1}{p}}a^2pw^{p-1} \\ &\leq \frac{Ap}{4}\int_\Omega z^p+\Big(\frac{4}{A}\Big)^{\frac{1}{p-1}}a^{\frac{2p}{p-1}}p\int_\Omega w^p \\ &\leq \frac{Ap}{4}\int_\Omega z^p+c_4p\int_\Omega w^p \qquad \text{for all } t\in(0,T_{max}) \end{aligned}$$

其中 $c_4:=2a^4$，由 (2.8) 我们推得

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega w^p+\frac{c_1p(p-1)}{2}\int_\Omega w^{p-2}|\nabla w|^2\leq (c_3+c_4)p^2\int_\Omega w^p+\frac{Ap}{4}\int_\Omega z^p+c_3p^2 \qquad \text{for all } t\in(0,T_{max}), \tag{2.9}$$

因为 $p\leq p^2$。除此之外，利用 (2.4) 中的第二个方程以及杨氏不等式，我们得到，由于由 (2.2) 可知 $A\geq 2$，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_\Omega z^p &= p\int_\Omega wz^{p-1}-Ap\int_\Omega z^p \\ &= \int_\Omega\Big\{\frac{Ap}{2}z^p\Big\}^{\frac{p-1}{p}}\cdot\Big(\frac{2}{Ap}\Big)^{\frac{p-1}{p}}pw-Ap\int_\Omega z^p \\ &\leq \Big(\frac{2}{A}\Big)^{p-1}\int_\Omega w^p-\frac{Ap}{2}\int_\Omega z^p \\ &\leq p^2\int_\Omega w^p-\frac{Ap}{2}\int_\Omega z^p \qquad \text{for all } t\in(0,T_{max}), \end{aligned}$$

从而由 (2.9) 可得

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\Big\{1+\int_\Omega w^p+\int_\Omega z^p\Big\}+\frac{Ap}{4}\cdot\Big\{1+\int_\Omega w^p+\int_\Omega z^p\Big\}+\frac{c_1p(p-1)}{2}\int_\Omega w^{p-2}|\nabla w|^2 \\ &\quad\leq (c_3+c_4)p^2\int_\Omega w^p+p^2w^p+\frac{Ap}{4}\int_\Omega w^p+c_3p^2+\frac{Ap}{4} \\ &\quad\leq \Big(c_3+c_4+1+\frac{A}{4}\Big)p^2\int_\Omega w^p+\Big(c_3+\frac{A}{4}\Big)p^2+c_2p\int_{\partial\Omega}|w^{p-1}| \qquad \text{for all } t\in(0,T_{max}). \end{aligned} \tag{2.10}$$

这里，根据已知的边界迹嵌入估计（[1]），可以对边界积分进行估计，据此我们可以找到 $c_5>0$，使得

$$\int_{\partial\Omega}|\rho|\leq c_5\int_\Omega|\nabla\rho|+c_5\int_\Omega|\rho| \qquad \text{for all } \rho\in C^1(\overline{\Omega}).$$

因此，根据柯西-施瓦茨不等式和杨氏不等式，我们有

$$\begin{aligned} c_2p\int_{\partial\Omega}|w^{p-1}| &= c_2p\|w^{p-1}\|_{L^1(\partial\Omega)} \\ &\le c_2p\cdot\left\{(p-1)c_5\int_\Omega w^{p-2}|\nabla w|+c_5\int_\Omega|w|^{p-1}\right\} \\ &\le c_2c_5p(p-1)\cdot\left\{\int_\Omega w^{p-2}|\nabla w|^2m\right\}^{\frac12}\cdot\left\{\int_\Omega w^{p-2}\right\}^{\frac12}+c_2c_5p\int_\Omega|w|^{p-1} \\ &\le \frac{c_1p(p-1)}{4}\int_\Omega w^{p-2}|\nabla w|^2+\frac{c_2^2c_5^2p(p-1)}{c_1}\int_\Omega w^{p-2}+c_2c_5p\int_\Omega|w|^{p-1} \\ &\le \frac{c_1p(p-1)}{4}\int_\Omega w^{p-2}|\nabla w|^2+\left\{\frac{c_2^2c_5^2}{c_1}+c_2c_5\right\}\cdot p^2\cdot\int_\Omega w^p+c_2c_5p^2|\Omega| \end{aligned}$$

对所有 $t\in(0,\ T_{max})$，同样是因为 $p\le p^2$。注意到

$$\frac{c_1p(p-1)}{4}\int_\Omega w^{p-2}|\nabla w|^2=\frac{c_1(p-1)}{p}\int_\Omega\left|\nabla w^{\frac p2}\right|^2\ge\frac{c_1}{2}\int_\Omega\left|\nabla w^{\frac p2}\right|^2\qquad\text{for all } t\in(0,T_{max}),$$

由 (2.10) 可得 (2.6)。 □

首先将其具体化到 $p=2$ 的情形，由此为我们的迭代奠定基础：

引理 2.2 若 $a>0$、$D>0$ 和 *(1.3)* 以及 *(1.4)* 均成立，且 $T_{max}<\infty$，但 *(2.5)* 得到满足，则存在 $C>0$，使得对于 *(2.3)* 中的 w 和 z，有

$$\int_\Omega w^2(\cdot,t)+\int_\Omega z^2(\cdot,t)\le C\qquad \textit{for all } t\in(0,T_{max}). \tag{2.11}$$

Proof. 略去其中符号有利的若干项后，由 (2.6) 特别可得$c_1>0$，使得

$$\frac{d}{dt}\left\{1+\int_\Omega w^2+\int_\Omega z^2\right\}\le c_1\int_\Omega w^2+c_1\le c_1\cdot\left\{1+\int_\Omega w^2+\int_\Omega z^2\right\}\qquad\text{for all } t\in(0,T_{max}).$$

由于假设 T_{max} 有限，根据格朗沃尔引理可得 (2.11)。 □

接下来，用莫泽方法将引理 2.1 应用于指数增长的 p，我们便可完成本节的主要步骤：

引理 2.3 设 $a>0$、$D>0$ 以及 *(1.3)* 和 *(1.4)* 均成立，并假设 $T_{max}<\infty$，但 *(2.5)* 成立。那么可以找到 $C>0$，使得 *(2.3)* 中定义的函数具有如下性质：

$$\|w(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}+\|z(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\le C\qquad \textit{for all } t\in(0,T_{max}). \tag{2.12}$$

PROOF. 为了估计这些表达式

$$N_k := \sup_{t\in(0,T_{max})} \left\{1+\int_\Omega w^{p_k}(\cdot,t)+\int_\Omega z^{p_k}(\cdot,t)\right\}, \qquad k\in\mathbb{N}=\{0,1,2,...\}, \tag{2.13}$$

其中 $p_k := 2^{k+1}$, $k\in\mathbb{N}$，我们首先注意到，根据引理 2.2， N_0 是有限的；并根据 Gagliardo-Nirenberg 不等式，我们选取 $c_1>0$ 使得

$$\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \le c_1\|\nabla\varphi\|^{\frac{2n}{n+2}}_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|^{\frac{4}{n+2}}_{L^1(\Omega)} \qquad \text{for all } \varphi\in C^1(\overline{\Omega}) \text{ such that } \varphi=0 \text{ on } \partial\Omega. \tag{2.14}$$

接下来，我们运用引理 2.1，找到 $c_2>0$ 和 $c_3>0$，使得对于任意选取的 $k\ge 1$，令 y_k 为

$$y_k(t) := 1+\int_\Omega w^{p_k}(\cdot,t)+\int_\Omega z^{p_k}(\cdot,t), \qquad t\in[0,T_{max}),$$

满足

$$y_k'(t)+c_2y_k(t)+c_2\int_\Omega \left|\nabla w^{\frac{p_k}{2}}\right|^2 \le c_3p_k^2\int_\Omega w^{p_k}+c_3p_k^2 \qquad \text{for all } t\in(0,T_{max}), \tag{2.15}$$

其中，由 (2.14)、(2.13) 和杨氏不等式，

$$\begin{aligned} c_3p_k^2\int_\Omega w^{p_k} &\le c_1c_3p_k^2\|\nabla w^{\frac{p_k}{2}}\|^{\frac{2n}{n+2}}_{L^2(\Omega)}\|w^{\frac{p_k}{2}}\|^{\frac{4}{n+2}}_{L^1(\Omega)} \\ &\le c_1c_3p_k^2N_{k-1}^{\frac{4}{n+1}}\|\nabla w^{\frac{p_k}{2}}\|^{\frac{2n}{n+2}}_{L^2(\Omega)} \\ &= \left\{c_2\int_\Omega\left|\nabla w^{\frac{p_k}{2}}\right|^2\right\}^{\frac{n}{n+2}}\cdot c_1c_2^{-\frac{n}{n+2}}c_3p_k^2N_{k-1}^{\frac{4}{n+2}} \\ &\le c_2\int_\Omega\left|\nabla w^{\frac{p_k}{2}}\right|^2+c_4p_k^{n+2}N_{k-1}^2 \qquad \text{for all } t\in(0,T_{max}) \end{aligned}$$

其中 $c_4 := (c_1c_2^{-\frac{n}{n+2}}c_3)^{\frac{n+2}{2}}$。由于对每个 $k\ge 1$都有 $N_{k-1}\ge 1$，由 (2.15) 可得，若令 $c_5:=c_3+c_4$，则

$$y_k'(t)+c_2y_k(t)\le c_5p_k^{n+2}N_{k-1}^2 \qquad \text{for all } t\in(0,T_{max}) \text{ and } k\ge 1,$$

因此，通过常微分方程比较，

$$y_k(t)\le \max\left\{y_k(0),\frac{c_5}{c_2}p_k^{n+2}N_{k-1}^2\right\} \qquad \text{for all } t\in(0,T_{max}) \text{ and } k\ge 1.$$

通过归纳论证，按照 (2.13)，这首先保证 $N_k<\infty$ 对所有 $k\ge 1$也成立，其次还保证：

$$N_k\le \max\left\{c_6^{2^k},c_7^kN_{k-1}^2\right\} \qquad \text{for all } k\ge 1 \tag{2.16}$$

其中 $c_6 := (|\Omega|+1)\cdot\left(1+\|u_{0t}+au_0\|_{L^\infty(\Omega)}+\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}\right)$ 以及 $c_7 := (1+\frac{c_5}{c_2})\cdot 2^{n+2}$，因为根据（2.4），

$$y_k(0) = 1+\int_\Omega(u_{0t}+au_0)^{p_k}+\int_\Omega u_0^{p_k}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 1+|\Omega|\cdot\|u_{0t}+au_0\|^{p_k}_{L^\infty(\Omega)}+|\Omega|\cdot\|u_0\|^{p_k}_{L^\infty(\Omega)}\\
&\leq \big(|\Omega|+1\big)^{2^k}\cdot\Big\{1+\|u_{0t}+au_0\|^{2^k}_{L^\infty(\Omega)}+\|u_0\|^{2^k}_{L^\infty(\Omega)}\Big\}\\
&\leq c_6^{2^k}\qquad \text{for all } k\geq 1
\end{aligned}
$$

and

$$
\frac{c_5}{c_2}p_k^{n+2}\leq\Big(1+\frac{c_5}{c_2}\Big)^k\cdot 2^{(n+2)k}\leq c_7^k\qquad\text{for all } k\geq 1.
$$

根据 [14, 引理 2.1], 中记载的初等递推结果，然而，（2.16）意味着

$$
N_k^{\frac{1}{2^k}}\leq c_7^2\cdot\max\big\{c_6\,,\,N_0\big\}\qquad\text{for all } k\geq 1,
$$

由此可立即得到（2.12）。 □

在有限时间区间内，要对 (v,u) 得出相应的结论，只需控制一个指数增长、因而有界的因子：

引理 2.4 设 $a>0$ 和 $D>0$，假设（*1.3*）和（*1.4*）成立，并且 $T_{max}<\infty$，但（*2.5*）成立。则存在 $C>0$，使得

$$
\|v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}+\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\leq C\qquad \textit{for all } t\in(0,T_{max}). \tag{2.17}
$$

Proof. 根据（2.3），这直接由引理 2.3 得出。 □

现在，再次利用（2.1）中第一个方程的抛物型特征，我们可以运用标准正则性理论，将由此得到的 L^∞ 界转化为 v的 H¨older 估计。

引理 2.5 设 $a>0$ 和 $D>0$，假设（*1.3*）和（*1.4*）成立，且 $T_{max}<\infty$ 以及（*2.5*）成立。则存在 $\alpha\in(0,1)$ 和 $C>0$，使得

$$
\|v(\cdot,t)\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}\leq C\qquad \textit{for all } t\in(0,T_{max}). \tag{2.18}
$$

Proof. 我们记 $B_1(x,t):=\gamma\big(\Theta(x,t)\big)$, $B_2(x,t):=f(\Theta(x,t))$ 以及 $B_3(x,t):=av(x,t)-a^2u(x,t)$，其中 $(x,t)\in\Omega\times(0,T_{max})$，然后可以根据以下内容重新表述 (2.1) 中的第一个方程

$$
v_t=\nabla\cdot\big(B_1(x,t)\nabla v\big)+\nabla\cdot B_2(x,t)+B_3(x,t),\qquad x\in\Omega,\ t\in(0,T_{max}).
$$

这里，同样得益于 γ 和 f 在 $[0,\infty$ 上的连续性，以及 γ 在 $[0,\infty$ 上的正性，(2.5) 确保存在 $c_1>0$、$c_2>0$ 和 $c_3>0$，使得 $c_1\leq B_1(x,t)\leq c_2$ 且 $|B_2(x,t)|\leq c_3$ 对所有 $(x,t)\in\Omega\times(0,T_{max})$ 都成立；又由于引理 2.4 保证了 B_3 在 $\Omega\times(0,T_{max})$ 中的有界性，抛物型 H¨older 正则性 ([34]) 的一个标准结果给出 $\alpha\in(0,1)$，使得 $v\in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\Omega\times[0,T_{max}])$。这作为一个特殊结论蕴含了 (2.18)。□

2.2 第一阶测试方法：一种改进的延拓判据

根据 (1.6)，验证命题 1.2 现在归结为确保：如果 T_{max} 有限且 Θ 有界，那么 ∇v 和 ∇u 都应属于 $L^\infty((0,T_{max});L^p(\Omega;\mathbb{R}^n))$，其中存在某个 $p\geq 2$ 使得 $p>n$。为此，我们将跟踪如下泛函

$$\int_\Omega |\nabla v|^p+\int_\Omega |\nabla u|^{p+2}+\int_\Omega |\nabla\Theta|^p \tag{2.19}$$

对于此类 p，事实证明，其演化过程中的相应非线性影响可通过两种独立的插值论证加以控制。关于 Θ，这两种论证在低阶端仅使用预设的 L^∞界，而引理 2.5 所提供的关于 v 的稍高正则性信息，则有助于建立某种 Ehrling型性质，这一性质将在我们推导命题 1.2 时发挥重要作用。

具体而言，第一个插值不等式本质上属于标准的 Gagliardo-Nirenberg型；值得注意的是，它涉及一个与区域性质无关的显式常数。

引理 2.6 若 $\varphi\in C^2(\Omega)$ 在 $\overline{\partial\Omega}$上满足 $\varphi=0$，则

$$\int_\Omega |\nabla\varphi|^{p+2}\leq (p+\sqrt{n})^2\|\varphi\|^2_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega |\nabla\varphi|^{p-2}|D^2\varphi|^2. \tag{2.20}$$

Proof. 由于$|\Delta\varphi|\leq\sqrt{n}|D^2\overline{\varphi}|$，分部积分并利用柯西-施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla\varphi|^{p+2} &= -\int_\Omega \varphi\cdot\Big\{p|\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi\cdot(D^2\varphi\cdot\nabla\varphi)+|\nabla\varphi|^p\Delta\varphi\Big\}\\ &\leq (p+\sqrt{n})\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega |\nabla\varphi|^p|D^2\varphi|\\ &\leq (p+\sqrt{n})\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\cdot\Big\{\int_\Omega |\nabla\varphi|^{p+2}\Big\}^{\frac12}\cdot\Big\{\int_\Omega |\nabla\varphi|^{p-2}|D^2\varphi|^2\Big\}^{\frac12},\end{aligned}$$

由此可得 (2.20)。 □

第二个不等式与上述不等式的主要区别在于，右侧二阶表达式带有一个任意小的因子；关于证明，可参见 [47, 引理 10.1]:

引理 2.7 设 $\omega:(0,\infty)\to(0,\infty)$ 为非减的。则对任意给定的 $p\geq 2$ 与 $\eta>0$，可以找到 $C(p,\eta)>0$，使其具有如下性质：对每个 $\varphi\in C^2(\Omega)$，若 $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}=0$ 在 $\overline{\partial\Omega}$ 上成立，且

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|<\delta \qquad whenever\ x,y\in\overline{\Omega}\ are\ such\ that\ |x-y|<\omega(\delta),$$

不等式

$$\int_\Omega |\nabla\varphi|^{p+2}\leq\eta\int_\Omega |\nabla\varphi|^{p-2}|D^2\varphi|^2+C(p,\eta)\|\varphi\|^{p+2}_{L^\infty(\Omega)}$$

成立。

接下来的准备工作将用于控制影响（2.19）中泛函演化的边界积分。为此，第一个辅助陈述回顾了两个已知的单侧点态估计，这些估计针对满足齐次狄利克雷或诺伊曼边界条件的函数之梯度的边界导数。证明见 [5, 引理 3.4] 和[30,引理 4.2]。

引理 2.8 存在 $C > 0$，使得若 $\varphi \in C^2(\Omega)$ 满足 $\varphi = \overline{0}$ 于 $\partial\Omega$，

$$\frac{\partial|\nabla\varphi|^2}{\partial\nu} \le 2\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\Delta\varphi + C\Big|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\Big|^2 \qquad on\ \partial\Omega,$$

并且每当 $\varphi \in C^2(\Omega)$ 满足 $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0$ 于 $\partial\Omega$时，我们有

$$\frac{\partial|\nabla\varphi|^2}{\partial\nu} \le C\Big|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\Big|^2 \qquad on\ \partial\Omega.$$

第二个预备结果记录了边界迹嵌入的连续性所蕴含的一个推论。

引理 2.9 设 $p \ge 2$。则存在 $C(p) > 0$，使得对每个 $\varphi \in C^2(\Omega)$，

$$\int_{\partial\Omega}|\nabla\varphi|^{p+1} \le C(p)\cdot\Big\{\int_\Omega|\nabla\varphi|^{p-2}|D^2\varphi|^2 + \int_\Omega|\nabla\varphi|^p\Big\}^{\frac12}\cdot\Big\{\int_\Omega|\nabla\varphi|^{p+2}\Big\}^{\frac12}. \tag{2.21}$$

Proof. 再次利用从 $W^{1,1}(\Omega)$ 到 $L^1(\partial\Omega)$ ([1]) 的边界迹嵌入连续性，我们固定 $c_1 > 0$ 使得

$$\int_{\partial\Omega}|\rho| \le c_1\int_\Omega|\nabla\rho| + c_1\int_\Omega|\rho| \qquad \text{for all } \rho \in C^1(\overline{\Omega}),$$

将其应用于 $\rho := |\nabla\varphi|^{p+1}$，其中 $p \ge 2$ 且 $\varphi \in C^2(\Omega)$，可得

$$\int_{\partial\Omega}|\nabla\varphi|^{p+1} \le \frac{p+1}{2}c_1\int_\Omega|\nabla\varphi|^{p-1}\big|\nabla|\nabla\varphi|^2\big| + c_1\int_\Omega|\nabla\varphi|^{p+1} \le (p+1)c_1\int_\Omega|\nabla\varphi|^p|D^2\varphi| + c_1\int_\Omega|\nabla\varphi|^{p+1}.$$

由于

$$\int_\Omega|\nabla\varphi|^p|D^2\varphi| \le \Big\{\int_\Omega|\nabla\varphi|^{p-2}|D^2\varphi|^2\Big\}^{\frac12}\cdot\Big\{\int_\Omega|\nabla\varphi|^{p+2}\Big\}^{\frac12}$$

and

$$\int_\Omega|\nabla\varphi|^{p+1} \le \Big\{\int_\Omega|\nabla\varphi|^p\Big\}^{\frac12}\cdot\Big\{\int_\Omega|\nabla\varphi|^{p+2}\Big\}^{\frac12}$$

由杨氏不等式，这蕴含（2.21）。 □

现在，我们可以考察（2.19）中的泛函，从而排除（1.2）中涉及有界温度的任何有限时间爆破：

PROOF 命题 1.2。反设命题 1.1 中有 $T_{max} < \infty$，但

$$\Theta \le c_1 \qquad \text{in } \Omega \times (0, T_{max}) \tag{2.22}$$

在某些 $c_1 > 0$ 条件下。然后， γ、 γ'、 f 和 f' 在 $[0,\infty)$ 上的连续性以及 γ 的正性确保了 $c_i > 0$, $i \in \{2,3,4,5,6\}$ 的存在，使得

$$c_2 \le \gamma(\Theta) \le c_3, \quad |\gamma'(\Theta)| \le c_4, \quad |f(\Theta)| \le c_5 \quad \text{and} \quad |f'(\Theta)| \le c_6 \qquad \text{在 } \Omega \times (0, T_{max}), \tag{2.23}$$

而引理 2.5 得出 $\alpha_1 \in (0, 1)$ 和满足条件的 $c_7 > 0$

$$\|v(\cdot,t)\|_{C^{\alpha_1}(\overline{\Omega})} \le c_7 \qquad \text{for all } t \in (0, T_{max}). \tag{2.24}$$

为充分利用这一点，我们任取 $p > n$ ，并利用 (2.1) 中的第一个方程，通过直接计算验证

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla v|^p &= \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v \cdot \Big\{\gamma(\Theta)\nabla\Delta v + \gamma'(\Theta)\Delta v \nabla\Theta\Big\} \\
&\quad - \int_\Omega \Big\{|\nabla v|^{p-2}\Delta v + \nabla|\nabla v|^{p-2}\cdot\nabla v\Big\}\cdot\gamma'(\Theta)\nabla\Theta\cdot\nabla v \\
&\quad + a\int_\Omega |\nabla v|^p - a^2\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v\cdot\nabla u \\
&\quad - \int_\Omega \Big\{|\nabla v|^{p-2}\Delta v + \nabla|\nabla v|^{p-2}\cdot\nabla v\Big\} f'(\Theta)\cdot\nabla\Theta \\
&= -\int_\Omega \gamma(\Theta)|\nabla v|^{p-2}|D^2 v|^2 - \frac{4(p-2)}{p^2}\int_\Omega \gamma(\Theta)\Big|\nabla|\nabla v|^{\frac{p}{2}}\Big|^2 \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_\Omega \gamma'(\Theta)|\nabla v|^{p-2}\nabla\Theta\cdot\nabla|\nabla v|^2 - \int_\Omega \gamma'(\Theta)(\nabla\Theta\cdot\nabla v)\nabla v\cdot\nabla|\nabla v|^{p-2} \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\gamma(\Theta)|\nabla v|^{p-2}\frac{\partial|\nabla v|^2}{\partial\nu} \\
&\quad + a\int_\Omega |\nabla v|^p - a^2\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v\cdot\nabla u \\
&\quad - \int_\Omega \Big\{|\nabla v|^{p-2}\Delta v + \nabla|\nabla v|^{p-2}\cdot\nabla v\Big\} f'(\Theta)\cdot\nabla\Theta \qquad \text{for all } t \in (0, T_{max}).
\end{aligned} \tag{2.25}$$

这里，由于 $v_t = 0$，因此 $\gamma(\Theta)\Delta v = -\gamma'(\Theta)\nabla v\cdot\nabla\Theta + f'(\Theta)\cdot\nabla\Theta$ 在 $\partial\Omega \times (0, T_{max})$ 上成立。利用引理 2.8 i)、(2.23) 以及杨氏不等式，我们可以找到 $c_8 > 0$ 和 $c_9 > 0$ ，使得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\gamma(\Theta)|\nabla v|^{p-2}\frac{\partial|\nabla v|^2}{\partial\nu} &\le \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\gamma(\Theta)|\nabla v|^{p-2}\cdot\Big\{2\frac{\partial v}{\partial\nu}\Delta v + c_8|\nabla v|^2\Big\} \\
&= -\int_{\partial\Omega}\gamma'(\Theta)|\nabla v|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial\nu}\nabla v\cdot\nabla\Theta + \int_{\partial\Omega}|\nabla v|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial\nu}f'(\Theta)\cdot\nabla\Theta \\
&\quad + \frac{c_8}{2}\int_{\partial\Omega}\gamma(\Theta)|\nabla v|^p \\
&\le c_9\int_{\partial\Omega}|\nabla\Theta|\cdot|\nabla v|^p + c_9\int_{\partial\Omega}|\nabla\Theta|\cdot|\nabla v|^{p-1} + c_9\int_{\partial\Omega}|\nabla v|^p
\end{aligned}$$

$$\leq \quad c_9 \int_{\partial\Omega} |\nabla\Theta| \cdot |\nabla v|^p + 2c_9 \int_{\partial\Omega} |\nabla v|^p + c_9 \int_{\partial\Omega} |\nabla\Theta|^p \tag{2.26}$$

对所有 $t \in (0,\ T_{max})$ 均成立。再由 (2.23) 和杨氏不等式，我们还可以找到 $c_i > 0$、$i \in \{10, ..., 15\}$，使得

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\int_\Omega \gamma'(\Theta)|\nabla v|^{p-2}\nabla\Theta\cdot\nabla|\nabla v|^2 &= -\int_\Omega \gamma'(\Theta)|\nabla v|^{p-2}\nabla\Theta\cdot(D^2v\cdot\nabla v) \\ &\leq c_{10}\int_\Omega |\nabla\Theta|\cdot|\nabla v|^{p-1}|D^2v| \\ &\leq \frac{c_2}{4}\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}|D^2v|^2 + c_{11}\int_\Omega |\nabla\Theta|^2|\nabla v|^p, \end{aligned} \tag{2.27}$$

并且，同样地，

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \gamma'(\Theta)(\nabla\Theta\cdot\nabla v)\nabla v\cdot\nabla|\nabla v|^{p-2} &\leq c_{12}\int_\Omega |\nabla\Theta|\cdot|\nabla v|^{p-1}|D^2v| \\ &\leq \frac{c_2}{4}\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}|D^2v|^2 + c_{13}\int_\Omega |\nabla\Theta|^2|\nabla v|^p \end{aligned} \tag{2.28}$$

以及

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \Big\{|\nabla v|^{p-2}\Delta v + \nabla|\nabla v|^{p-2}\cdot\nabla v\Big\} f'(\Theta)\cdot\nabla\Theta & \\ \leq c_{14}\int_\Omega |\nabla\Theta|\cdot|\nabla v|^{p-2}|D^2v| & \\ \leq \frac{c_2}{4}\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}|D^2v|^2 + c_{15}\int_\Omega |\nabla\Theta|^2|\nabla v|^{p-2} & \\ \leq \frac{c_2}{4}\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}|D^2v|^2 + c_{15}\int_\Omega |\nabla\Theta|^p + c_{15}\int_\Omega |\nabla v|^p & \end{aligned} \tag{2.29}$$

对所有 $t \in (0,\ T_{max})$ 均成立。此外，再次由杨氏不等式可得，

$$-a^2\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v\cdot\nabla u \leq a^2\int_\Omega |\nabla v|^p + a^2\int_\Omega |\nabla u|^p \qquad \text{for all } t\in(0,T_{max}),$$

将 (2.26)、(2.27)、(2.28) 和 (2.29) 代入 (2.25) 后，我们得到 $c_{16} > 0$ 使得对所有 $t \in (0,\ T_{max})$，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla v|^p + \frac{pc_2}{4}\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}|D^2v|^2 &\leq c_{12}\int_\Omega |\nabla\Theta|^2|\nabla v|^p + c_{16}\int_{\partial\Omega}|\nabla\Theta|\cdot|\nabla v|^p \\ &\quad + c_{16}\int_\Omega |\nabla v|^p + c_{16}\int_\Omega |\nabla u|^p + c_{16}\int_\Omega |\nabla\Theta|^p \\ &\quad + c_{16}\int_{\partial\Omega}|\nabla v|^p + c_{16}\int_{\partial\Omega}|\nabla\Theta|^p. \end{aligned} \tag{2.30}$$

在这里，右侧至关重要的前两项可以借助 (2.1) 中第三个方程的扩散作用加以补偿：对上述测试方法稍作变体，即可

得出：由引理 2.8 ii) 和 (2.23) 可知，存在 $c_i > 0$、 $i \in \{17, 18, 19\}$，使得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\Theta|^p &= \int_\Omega |\nabla\Theta|^{p-2}\nabla\Theta\cdot\nabla\Big\{D\Delta\Theta+\gamma(\Theta)|\nabla v-a\nabla u|^2+f(\Theta)\cdot(\nabla v-a\nabla u)\Big\}\\
&= -\frac{D}{2}\int_\Omega \nabla|\nabla\Theta|^{p-2}\cdot\nabla|\nabla\Theta|^2+\frac{D}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla\Theta|^{p-2}\frac{\partial|\nabla\Theta|^2}{\partial\nu}-D\int_\Omega|\nabla\Theta|^{p-2}|D^2\Theta|^2\\
&\quad -\int_\Omega\gamma(\Theta)\cdot\Big\{|\nabla\Theta|^{p-2}\Delta\Theta+\nabla|\nabla\Theta|^{p-2}\cdot\nabla\Theta\Big\}|\nabla v-a\nabla u|^2\\
&\quad -\int_\Omega\gamma(\Theta)\cdot\Big\{|\nabla\Theta|^{p-2}\Delta\Theta+\nabla|\nabla\Theta|^{p-2}\cdot\nabla\Theta\Big\}f(\Theta)\cdot(\nabla v-a\nabla u)\\
&\le -\frac{D}{2}\int_\Omega|\nabla\Theta|^{p-2}|D^2\Theta|^2+c_{17}\int_{\partial\Omega}|\nabla\Theta|^p\\
&\quad +c_{17}\int_\Omega|\nabla\Theta|^{p-2}|D^2\Theta|\cdot\big\{|\nabla v|^2+|\nabla u|^2\big\}+c_{17}\int_\Omega|\nabla\Theta|^{p-2}|D^2\Theta|\cdot\big\{|\nabla v|+|\nabla u|\big\}\\
&\le -\frac{D}{4}\int_\Omega|\nabla\Theta|^{p-2}|D^2\Theta|^2+c_{17}\int_{\partial\Omega}|\nabla\Theta|^p\\
&\quad +c_{18}\int_\Omega|\nabla\Theta|^{p-2}|\nabla v|^4+c_{18}\int_\Omega|\nabla\Theta|^{p-2}|\nabla u|^4\\
&\quad +c_{18}\int_\Omega|\nabla\Theta|^{p-2}|\nabla v|^2+c_{18}\int_\Omega|\nabla\Theta|^{p-2}|\nabla u|^2\\
&\le -\frac{D}{4}\int_\Omega|\nabla\Theta|^{p-2}|D^2\Theta|^2+c_{18}\int_\Omega|\nabla\Theta|^{p-2}|\nabla v|^4+c_{18}\int_\Omega|\nabla\Theta|^{p-2}|\nabla u|^4\\
&\quad +c_{19}\int_\Omega|\nabla v|^p+c_{19}\int_\Omega|\nabla u|^p+c_{19}\int_\Omega|\nabla\Theta|^p+c_{17}\int_{\partial\Omega}|\nabla\Theta|^p \qquad (2.31)
\end{aligned}$$

对于所有 $t \in (0, T_{max})$。除此之外，由（2.1）中的第二个方程可知，根据杨氏不等式，

$$\frac{1}{p+2}\frac{d}{dt}\int_\Omega|\nabla u|^{p+2}=\int_\Omega|\nabla u|^p\nabla u\cdot\nabla(v-au)\le\int_\Omega|\nabla u|^p\nabla u\cdot\nabla v\le\int_\Omega|\nabla u|^{p+2}+\int_\Omega|\nabla v|^{p+2}$$

对于所有 $t \in (0, T_{max})$，因此，再次利用杨氏不等式估计 $\int_\Omega |\nabla u|^p \le \int_\Omega |\nabla u|^{p+2} + |\Omega|$（对 $t \in (0, T_{max})$），由（2.30）和（2.31）可推知，存在 $c_{20} > 0$ 和 $c_{21} > 0$ 使得

$$y(t) := 1+\int_\Omega|\nabla v(\cdot,t)|^p+\int_\Omega|\nabla u(\cdot,t)|^{p+2}+\int_\Omega|\nabla\Theta(\cdot,t)|^p, \qquad t\in[0,T_{max}),$$

满足

$$\begin{aligned}
&y'(t)+c_{20}\int_\Omega|\nabla v|^{p-2}|D^2v|^2+c_{20}\int_\Omega|\nabla\Theta|^{p-2}|D^2\Theta|^2\\
&\quad\le c_{21}y(t)+c_{21}\int_\Omega|\nabla\Theta|^2|\nabla v|^p+c_{21}\int_\Omega|\nabla\Theta|^{p-2}|\nabla v|^4+c_{21}\int_\Omega|\nabla\Theta|^{p-2}|\nabla u|^4\\
&\qquad +c_{21}\int_{\partial\Omega}|\nabla\Theta|\cdot|\nabla v|^p+c_{21}\int_{\partial\Omega}|\nabla v|^p+c_{21}\int_{\partial\Omega}|\nabla\Theta|^p \qquad (2.32)
\end{aligned}$$

对所有 $t \in (0, T_{max})$ 均成立。现在，我们再次利用引理 2.6、引理 2.9 以及式 (2.22)，选取 $c_{22} > 0$和 $c_{23} > 0$ ，使得

$$\int_\Omega |\nabla\Theta|^{p+2} \le c_{22} \int_\Omega |\nabla\Theta|^{p-2} |D^2\Theta|^2 + c_{22} \qquad \text{for all } t \in (0, T_{max}), \tag{2.33}$$

并且

$$\int_{\partial\Omega} |\nabla\varphi|^{p+1} \le c_{23} \cdot \left\{ \int_\Omega |\nabla\varphi|^{p-2} |D^2\varphi|^2 + \int_\Omega |\nabla\varphi|^p \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \int_\Omega |\nabla\varphi|^{p+2} \right\}^{\frac{1}{2}} \qquad \text{for all } \varphi \in C^2(\overline{\Omega}), \tag{2.34}$$

然后　　并使用杨氏不等式四到六次，求得满足条件的 $c_{24} > 0$ 和 $c_{25} > 0$

$$\begin{aligned} & c_{21} \int_\Omega |\nabla\Theta|^2 |\nabla v|^p + c_{21} \int_\Omega |\nabla\Theta|^{p-2} |\nabla v|^4 + c_{21} \int_\Omega |\nabla\Theta|^{p-2} |\nabla u|^4 \\ & \qquad \le \frac{c_{20}}{2c_{22}} \int_\Omega |\nabla\Theta|^{p+2} + c_{24} \int_\Omega |\nabla v|^{p+2} + c_{24} \int_\Omega |\nabla u|^{p+2} \qquad \text{for all } t \in (0, T_{max}) \end{aligned} \tag{2.35}$$

and

$$\begin{aligned} & c_{21} \int_{\partial\Omega} |\nabla\Theta| \cdot |\nabla v|^p + c_{21} \int_{\partial\Omega} |\nabla v|^p + c_{21} \int_{\partial\Omega} |\nabla\Theta|^p \\ & \qquad \le \frac{c_{20}}{2\sqrt{c_{22}} c_{23}} \int_{\partial\Omega} |\nabla\Theta|^{p+1} + c_{25} \int_{\partial\Omega} |\nabla v|^{p+1} + c_{25} \qquad \text{for all } t \in (0, T_{max}). \end{aligned} \tag{2.36}$$

这里，(2.33)表明，在(2.35)右端有

$$\frac{c_{20}}{2c_{22}} \int_\Omega |\nabla\Theta|^{p+2} \le \frac{c_{20}}{2} \int_\Omega |\nabla\Theta|^{p-2} |D^2\Theta|^2 + \frac{c_{20}}{2} \qquad \text{for all } t \in (0, T_{max}), \tag{2.37}$$

而将(2.34)与杨氏不等式及(2.33)结合起来，可按如下方式估计(2.36)右端的第一项

$$\begin{aligned} \frac{c_{20}}{2\sqrt{c_{22}} c_{23}} \int_{\partial\Omega} |\nabla\Theta|^{p+1} &\le \frac{c_{20}}{2\sqrt{c_{22}}} \cdot \left\{ \int_\Omega |\nabla\Theta|^{p-2} |D^2\Theta|^2 + \int_\Omega |\nabla\Theta|^p \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \int_\Omega |\nabla\Theta|^{p+2} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\le \frac{c_{20}}{4} \int_\Omega |\nabla\Theta|^{p-2} |D^2\Theta|^2 + \frac{c_{20}}{4} \int_\Omega |\nabla\Theta|^p + \frac{c_{20}}{4c_{22}} \int_\Omega |\nabla\Theta|^{p+2} \\ &\le \frac{c_{20}}{2} \int_\Omega |\nabla\Theta|^{p-2} |D^2\Theta|^2 + \frac{c_{20}}{4} \int_\Omega |\nabla\Theta|^p + \frac{c_{20}}{4} \end{aligned} \tag{2.38}$$

对所有 $t \in (0, T_{max})$ 都成立。此外，将 (2.34) 应用于 (2.1) 中的第一个解分量，再结合杨氏不等式，可确认 (2.36) 右侧还满足

$$\begin{aligned} c_{25} \int_{\partial\Omega} |\nabla v|^{p+1} &\le c_{23} c_{25} \cdot \left\{ \int_\Omega |\nabla v|^{p-2} |D^2 v|^2 + \int_\Omega |\nabla v|^p \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \int_\Omega |\nabla v|^{p+2} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\le \frac{c_{20}}{2} \int_\Omega |\nabla v|^{p-2} |D^2 v|^2 + \frac{c_{20}}{2} \int_\Omega |\nabla v|^p + \frac{c_{23}^2 c_{25}^2}{2c_{20}} \int_\Omega |\nabla v|^{p+2} \qquad \text{for all } t \in (0, T_{max}). \end{aligned}$$

结合 (2.35)-(2.38)，可知 (2.32) 蕴含存在满足以下条件的 $c_{26} > 0$

$$y'(t) + \frac{c_{20}}{2}\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}|D^2 v|^2 \le c_{26}y(t) + c_{26}\int_\Omega |\nabla v|^{p+2} + c_{26} \qquad \text{for all } t \in (0, T_{max}),$$

并且，为了适当地控制此处最后一个积分，我们在应用引理 2.7 和引理 2.4 时，利用 (2.24) 所蕴含的等度连续性性质来选择 $c_{27} > 0$，使得

$$c_{27}\int_\Omega |\nabla v|^{p+2} \le \frac{c_{20}}{2}\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}|D^2 v|^2 + c_{27} \qquad \text{for all } t \in (0, T_{max}).$$

因此,

$$y'(t) \le c_{26}y(t) + c_{26} + c_{27} \le (2c_{26} + c_{27})y(t) \qquad \text{for all } t \in (0, T_{max}),$$

从而，格隆沃尔不等式保证

壁不等式保证 y 在 $(0, T_{max})$ 上有界，尤其意味着

$$\sup_{t\in(0,T_{max})} \|\nabla v(\cdot,t) - a\nabla u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} < \infty.$$

结合引理 2.4 和 (2.22)，并注意到恒等式 $v - au = u_t$ 以及不等式 $p > n$，这与 (1.6) 矛盾，从而证明了该命题。□

3 超线性 γ存在时的爆破

3.1 关于存在至 $t = T$ 的必要条件：(u_0, u_{0t}, Θ_0)

现在通过以下不等式的严格版本，建立了我们进行爆破检测所需的一个构成性步骤。该不等式曾在 (1.8) 附近提出；在假设除 (1.3) 外，(1.11)、(1.12) 和 (1.13) 也成立的条件下，该版本可用：

引理 3.1 设 $a > 0$ 和 $D > 0$，假设 γ 和 f 满足 *(1.3)*、*(1.11)*、*(1.12)* 和 *(1.13)*，且满足 *(1.4)*。则

$$\int_0^T\int_\Omega |\nabla u_t|^2 \le 2\int_\Omega \psi(\Theta_0) + \frac{\Lambda|\Omega|T}{\gamma_0(T)} \qquad \textit{for all } T \in (0, T_{max}), \tag{3.1}$$

其中

$$\psi(\xi) := \int_\xi^\infty \frac{d\sigma}{\gamma(\sigma)}, \qquad \xi \ge 0 \tag{3.2}$$

and

$$\gamma_0(T) := \gamma\Big(\inf_{(x,t)\in\Omega\times(0,T)} \Theta(x,t)\Big), \qquad T \in (0, T_{max}). \tag{3.3}$$

Proof. 利用 $\psi' = -\frac{1}{\gamma}$，由 (2.1) 中的第三个方程可推得

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \psi(\Theta) \;=\; -\int_\Omega \frac{1}{\gamma(\Theta)}\Theta_t$$

$$= \quad -D\int_\Omega \frac{1}{\gamma(\Theta)}\Delta\Theta - \int_\Omega |\nabla u_t|^2 - \int_\Omega \frac{1}{\gamma(\Theta)} f(\Theta)\cdot\nabla u_t \qquad \text{for all } t\in(0,T_{max}),$$

其中，由于 $\gamma' \geq 0$,

$$-D\int_\Omega \frac{1}{\gamma(\Theta)}\Delta\Theta = -D\int_\Omega \frac{\gamma'(\Theta)}{\gamma^2(\Theta)}|\nabla\Theta|^2 \leq 0 \qquad \text{for all } t\in(0,T_{max}),$$

并且，由杨氏不等式和 (1.13),

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \frac{1}{\gamma(\Theta)} f(\Theta)\cdot\nabla u_t &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{|f|^2(\Theta)}{\gamma^2(\Theta)} \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 + \frac{\Lambda}{2}\int_\Omega \frac{1}{\gamma(\Theta)} \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 + \frac{\Lambda|\Omega|}{2\gamma_0(T)} \qquad \text{for all } t\in(0,T) \text{ and } T\in(0,T_{max}), \end{aligned}$$

由 (3.3)，对所有 $T\in(0,\ T_{max})$，在 $\Omega\times(0,\ T)$ 中有 $\gamma(\Theta)\geq\gamma_0(T)$，且 γ 再次满足单调性。因此,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \psi(\Theta) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 \leq \frac{\Lambda|\Omega|}{2\gamma_0(T)} \qquad \text{for all } t\in(0,T) \text{ and } T\in(0,T_{max}),$$

对其积分后可知，确实有,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega |\nabla u_t|^2 &\leq \int_\Omega \psi(\Theta_0) - \int_\Omega \psi\big(\Theta(\cdot,T)\big) + \frac{\Lambda|\Omega|T}{2\gamma_0(T)} \\ &\leq \int_\Omega \psi(\Theta_0) + \frac{\Lambda|\Omega|T}{2\gamma_0(T)} \qquad \text{for all } t\in(0,T) \text{ and } T\in(0,T_{max}), \end{aligned}$$

因为 ψ 非负。 □

右侧 (3.1) 中的表达式与积分 $\int_\Omega |\nabla u|^2$ 之间的关系很容易建立:

引理 3.2 令 $a>0$ 和 $D>0$，并假设 *(1.3)*、*(1.11)*、*(1.12)*、*(1.13)* 和 *(1.4)* 成立。则

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^2 \leq 2\int_\Omega |\nabla u(\cdot,t)|^2 + 2t\int_0^t\int_\Omega |\nabla u_t|^2 \qquad \textit{for all } t\in(0,T_{max}). \tag{3.4}$$

Proof. 我们将 ∇u表示为

$$\nabla u(x,t) = \nabla u_0(x) + \int_0^t \nabla u_t(x,s)ds \qquad \text{for } (x,t)\in\Omega\times(0,T_{max})$$

由柯西-施瓦茨不等式可知

$$\Big|\nabla u(x,t) - \nabla u_0(x)\Big|^2 = \left|\int_0^t \nabla u_t(x,s)ds\right|^2 \leq t\int_0^t |\nabla u_t(x,s)|^2 ds \qquad \text{for all } x\in\Omega \text{ and } t\in(0,T_{max}).$$

因此，

$$\int_\Omega |\nabla u(\cdot,t)-\nabla u_0|^2 \le t\int_0^t\int_\Omega |\nabla u_t|^2 \qquad \text{for all } t\in(0,T_{max}),$$

因此，注意到根据杨氏不等式，便得到 (3.4)：

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_0|^2 &= \int_\Omega \Big|\nabla u(\cdot,t)-\big(\nabla u(\cdot,t)-\nabla u_0\big)\Big|^2\\ &\le 2\int_\Omega |\nabla u(\cdot,t)|^2+2\int_\Omega |\nabla u(\cdot,t)-\nabla u_0|^2\end{aligned}$$

对所有 $t\in(0,T_{max})$ 均成立。 □

然而，将第一个方程 (2.1) 乘以 v 后，∇u_t 与 ∇u 之差可用某个常数表达式估计：

引理 3.3 设 $a>0$ 和 $D>0$，并假设 *(1.3)*、*(1.11)*、*(1.12)*、*(1.13)* 和 *(1.4)* 成立。则

$$\int_0^T\int_\Omega |\nabla u_t+a\nabla u|^2 \le \frac{3a^2e^{2aT}}{\gamma_0(T)}\cdot\int_\Omega u_0^2+\frac{2e^{2aT}}{\gamma_0(T)}\cdot\int_\Omega u_{0t}^2+\frac{\Lambda|\Omega|e^{2aT}}{2a\gamma_0(T)}+\frac{\Lambda|\Omega|T}{\gamma_0(T)} \qquad \textit{for all } T\in(0,T_{max}), \tag{3.5}$$

其中 $(\gamma_0(T))_{T\in(0,T_{max})}$ 与 *(3.3)* 中的定义相同。

Proof. 将第一个方程 (2.1) 乘以 v，分部积分，并结合杨氏不等式和 (1.13)，可得

$$\begin{aligned}\frac12\frac{d}{dt}\int_\Omega v^2+\int_\Omega\gamma(\Theta)|\nabla v|^2 &= a\int_\Omega v^2-a^2\int_\Omega uv-\int_\Omega f(\Theta)\cdot\nabla v\\ &\le a\int_\Omega v^2-a^2\int_\Omega uv+\frac12\int_\Omega\gamma(\Theta)|\nabla v|^2+\frac12\int_\Omega\frac{|f|^2(\Theta)}{\gamma(\Theta)}\\ &\le a\int_\Omega v^2-a^2\int_\Omega uv+\frac12\int_\Omega\gamma(\Theta)|\nabla v|^2+\frac{\Lambda|\Omega|}{2} \qquad \text{for all } t\in(0,T_{max}),\end{aligned}$$

将 (2.1) 中的第二个方程与 u 进行测试，可得

$$\frac12\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2=\int_\Omega uv-a\int_\Omega u^2 \qquad \text{for all } t\in(0,T_{max}).$$

通过对这些不等式作线性组合，我们得到，由于 $a\ge0$,

$$y(t):=\frac12\int_\Omega v^2+\frac{a^2}{2}\int_\Omega u^2, \qquad t\in[0,T_{max}),$$

满足

$$\begin{aligned}y'(t)+\frac12\int_\Omega\gamma(\Theta)|\nabla v|^2 &\le a\int_\Omega v^2-a^3\int_\Omega u^2+\frac{\Lambda|\Omega|}{2}\le a\int_\Omega v^2+\frac{\Lambda|\Omega|}{2}\\ &\le 2ay(t)+\frac{\Lambda|\Omega|}{2} \qquad \text{for all } t\in(0,T_{max}).\end{aligned} \tag{3.6}$$

特别地， $y' \le 2ay + \frac{\Lambda|\Omega|}{2}$ 在 $(0, T_{max})$ 上，因此

$$\begin{aligned} y(t) &\le y(0)e^{2at} + \frac{\Lambda|\Omega|}{2}\int_0^t e^{2a(t-s)}ds \\ &= y(0)e^{2at} + \frac{\Lambda|\Omega|}{4a}\big(e^{2at}-1\big) \\ &\le \Big(y(0) + \frac{\Lambda|\Omega|}{4a}\Big)e^{2at} \qquad \text{for all } t \in (0, T_{max}), \end{aligned}$$

于是对 (3.6) 积分可知，由于 y 非负，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \gamma(\Theta)|\nabla v|^2 &\le y(0) + 2a\int_0^T y(t)dt + \frac{\Lambda|\Omega|T}{2} \\ &\le y(0) + \Big(2ay(0) + \frac{\Lambda|\Omega|}{2}\Big)\int_0^T e^{2at}dt + \frac{\Lambda|\Omega|T}{2} \\ &= y(0) + \Big(2ay(0) + \frac{\Lambda|\Omega|}{2}\Big)\cdot\frac{1}{2a}\big(e^{2at}-1\big) + \frac{\Lambda|\Omega|T}{2} \\ &\le \Big(y(0) + \frac{\Lambda|\Omega|}{4a}\Big)e^{2at} + \frac{\Lambda|\Omega|T}{2} \qquad \text{for all } t \in (0, T_{max}). \end{aligned} \tag{3.7}$$

由于杨氏不等式保证

$$y(0) = \frac{1}{2}\int_\Omega (u_{0t} + au_0)^2 + \frac{a^2}{2}\int_\Omega u_0^2 \le \int_\Omega u_{0t}^2 + \frac{3a^2}{2}\int_\Omega u_0^2$$

利用 γ 的单调性来估计

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \gamma(\Theta)|\nabla v|^2 \ge \frac{\gamma_0(T)}{2}\int_0^T\int_\Omega |\nabla v|^2 = \frac{\gamma_0(T)}{2}\int_0^T\int_\Omega |\nabla u_t + a\nabla u|^2 \qquad \text{for } T \in (0, T_{max})$$

可将 (3.7) 化为 (3.5)。 □

结合引理 3.1，可立即得到 $\int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2$ 的一个上界：

引理 3.4 若 $a > 0$ 和 $D > 0$，且 *(1.3)*、*(1.11)*、*(1.12)*、*(1.13)* 和 *(1.4)* 成立，则令 ψ 和$(\gamma_0(T))_{T\in(0,T_{max})}$ 如 *(3.2)* 和 *(3.3)* 中所定义，

$$\int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2 \le \frac{4}{a^2}\int_\Omega \psi(\Theta_0) + \frac{6e^{2aT}}{\gamma_0(T)}\cdot\int_\Omega u_0^2 + \frac{4e^{2aT}}{a^2\gamma_0(T)}\cdot\int_\Omega u_{0t}^2 + \frac{\Lambda|\Omega|e^{2aT}}{a^3\gamma_0(T)} + \frac{4\Lambda|\Omega|T}{a^2\gamma_0(T)} \tag{3.8}$$

对所有 $T \in (0, T_{max})$。

Proof. 由于杨氏不等式蕴含，对所有 $T \in (0, T_{max})$，我们有

$$\int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2 = \frac{1}{a^2}\int_0^T\int_\Omega \Big|\nabla u_t - (\nabla u_t + a\nabla u)\Big|^2 \le \frac{2}{a^2}\int_0^T\int_\Omega |\nabla u_t|^2 + \frac{2}{a^2}\int_0^T\int_\Omega |\nabla u_t + a\nabla u|^2,$$

这是结合 (3.1) 后由引理 3.3 直接得到的结论。 □

为进一步推进这一工作，我们现在对引理 3.2 中的不等式积分，并再次明确运用引理 3.1。由此得到以下结论：给定$T > 0$时，它可视为一个关于初始数据的必要条件，以保证解能够存在至时刻 T。

引理 3.5 设 $a>0$ 和 $D>0$，并假设 *(1.3)*、*(1.11)*、*(1.12)*、*(1.13)* 和 *(1.4)* 均成立，且设 ψ 和 $(\gamma_0(T))_{T\in(0,T_{max})}$ 如 *(3.2)* 和 *(3.3)* 所示。那么对所有 $T\in(0,T_{max})$，

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_0|^2 \quad &\leq \quad \Big\{\frac{8}{a^2T}+4T\Big\}\cdot\int_\Omega \psi(\Theta_0)+\frac{12e^{2aT}}{T\gamma_0(T)}\cdot\int_\Omega u_0^2+\frac{8e^{2aT}}{a^2T\gamma_0(T)}\cdot\int_\Omega u_{0t}^2\\ &\quad +\frac{2\Lambda|\Omega|e^{2aT}}{a^3T\gamma_0(T)}+\frac{8\Lambda|\Omega|}{a^2\gamma_0(T)}+\frac{2\Lambda|\Omega|T^2}{\gamma_0(T)}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Proof. 对于固定的 $T\in(0,T_{max})$，由 (3.4) 可得

$$\frac{1}{T}\int_\Omega |\nabla u_0|^2\leq\frac{2}{T}\int_\Omega |\nabla u(\cdot,t)|^2+2\int_0^T\int_\Omega |\nabla u_t|^2 \qquad \text{for all } t\in(0,T),$$

将其在 $(0,T)$ 上积分可得

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^2\leq\frac{2}{T}\int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2+2T\int_0^T\int_\Omega |\nabla u_t|^2.$$

由于引理 3.4 与引理 3.1 一起表明

$$\begin{aligned}&\frac{2}{T}\int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2+2T\int_0^T\int_\Omega |\nabla u_t|^2\\ &\quad\leq\quad \frac{2}{T}\cdot\Big\{\frac{4}{a^2}\int_\Omega\psi(\Theta_0)+\frac{6e^{2aT}}{\gamma_0(T)}\cdot\int_\Omega u_0^2+\frac{4e^{2aT}}{a^2\gamma_0(T)}\cdot\int_\Omega u_{0t}^2+\frac{\Lambda|\Omega|e^{2aT}}{a^3\gamma_0(T)}+\frac{4\Lambda|\Omega|T}{a^2\gamma_0(T)}\Big\}\\ &\qquad +2T\cdot\Big\{2\int_\Omega\psi(\Theta_0)+\frac{\Lambda|\Omega|T}{\gamma_0(T)}\Big\},\end{aligned}$$

重新整理后即可得到 (3.9)。 □

3.2 结论：定理 1.3 和定理 1.4 的证明

现在只需确保：若 (1.14) 对某个足够大的 C 成立，则 (3.9) 必然被违反。这样便可得到此前陈述的关于 (1.2) 中有限时间爆破的第一个主要结果：

Proof 定理 1.3。给定 $a>0$ 以及满足条件 (1.3)、(1.11)、(1.12) 和 (1.13) 的函数 γ 和 f，其中存在某个 $\Lambda>0$，我们取自 (3.2) 的 ψ；对于固定的 $T>0$，任取足够大的 $C=C(a,\ \gamma,\ f,\ T)$ 使其满足

$$C>\frac{12e^{2aT}}{T\gamma(0)} \tag{3.10}$$

and

$$C>\frac{8e^{2aT}}{a^2T\gamma(0)} \tag{3.11}$$

以及

$$C>\Big\{\frac{8}{a^2T}+4T\Big\}\cdot|\Omega|\psi(0)+\frac{2\Lambda|\Omega|e^{2aT}}{a^3T\gamma(0)}+\frac{8\Lambda|\Omega|}{a^2\gamma(0)}+\frac{2\Lambda|\Omega|T^2}{\gamma(0)}. \tag{3.12}$$

接下来，假设 $D > 0$，且 (1.4) 和 (1.14) 成立。首先注意到，由于 γ 的单调性，(3.3) 中定义的数满足 $\gamma_0(T) \geq \gamma(0)$。此外，我们注意到，由于 (3.2) 中的函数 ψ 满足对所有 $\xi \geq 0$ 都有 $\psi(\xi) \leq \psi(0)$，因此我们可以估计

$$\int_\Omega \psi(\Theta_0) \leq |\Omega|\psi(0).$$

因此，由 (3.10)-(3.12) 可得

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u_0|^2 &> \frac{12e^{2aT}}{T\gamma(0)}\int_\Omega u_0^2 + \frac{8e^{2aT}}{a^2T\gamma(0)}\int_\Omega u_{0t}^2 \\
&\quad + \Big\{\frac{8}{a^2T} + 4T\Big\}\cdot|\Omega|\psi(0) + \frac{2\Lambda|\Omega|e^{2aT}}{a^3T\gamma(0)} + \frac{8\Lambda|\Omega|}{a^2\gamma(0)} + \frac{2\Lambda|\Omega|T^2}{\gamma(0)} \\
&\geq \frac{12e^{2aT}}{T\gamma_0(T)}\int_\Omega u_0^2 + \frac{8e^{2aT}}{a^2T\gamma_0(T)}\int_\Omega u_{0t}^2 \\
&\quad + \Big\{\frac{8}{a^2T} + 4T\Big\}\cdot\int_\Omega \psi(\Theta_0) + \frac{2\Lambda|\Omega|e^{2aT}}{a^3T\gamma_0(T)} + \frac{8\Lambda|\Omega|}{a^2\gamma_0(T)} + \frac{2\Lambda|\Omega|T^2}{\gamma_0(T)}. \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

因此，我们确实必须有 $T_{max} \leq T$，否则便可利用引理 3.5 得出 (3.13) 不成立。

□

为了说明定理 1.4 的假设也会在给定时间 $T > 0$ 内导致爆破，只要 (1.18) 中的数C 充分大，我们简要记录一个简单比较论证的结果；在此过程中，我们再次明确利用热源 $\gamma(\Theta)|\nabla u_t|^2$的非负性:

引理 3.6 若 $a > 0$ 且 $D > 0$，并且 *(1.3)*、*(1.11)*、*(1.12)*、*(1.13)* 和 *(1.4)* 成立，则

$$\Theta(x,t) \geq \inf_\Omega \Theta_0 - \frac{\Lambda t}{4} \qquad \textit{for all } x \in \Omega \textit{ and } t \in (0, T_{max}). \qquad (3.14)$$

Proof. 由 (1.2) 和杨氏不等式可知，结合 (1.13)，

$$\begin{aligned}
\Theta_t &= D\Delta\Theta + \gamma(\Theta)|\nabla u_t|^2 + f(\Theta)\cdot\nabla u_t \\
&\geq D\Delta\Theta - \frac{|f|^2(\Theta)}{4\gamma(\Theta)} \\
&\geq D\Delta\Theta - \frac{\Lambda}{4} \qquad \text{in } \Omega\times(0,T_{max}).
\end{aligned}$$

另一方面，对于

$$\underline{\Theta}(x,t) := \Theta_\star - \frac{\Lambda t}{4}, \qquad x \in \overline{\Omega},\ t \geq 0,$$

当 $\Theta_\star := \inf_\Omega \Theta_0$ 时，我们有

$$\underline{\Theta}_t - D\Delta\underline{\Theta} + \frac{\Lambda}{4} = -\frac{\Lambda}{4} + \frac{\Lambda}{4} = 0 \qquad \text{in } \Omega\times(0,\infty),$$

因此，由于对于所有 $x \in \Omega$，都有 $\Theta(x, 0) = \Theta_\star \le \Theta(x, 0)$，并且显然在 $\partial\Omega$ 上 $\frac{\partial\Theta}{\partial\nu} = 0\,(0, \infty)$，比较原理断言，在 $\Omega \times (0, T_{max})$ 中有 $\Theta \ge \Theta$，这等价于（3.14）。□

事实上，前一引理连同 γ 的单调性表明，在 C 充分大的条件下假设(1.18)，不仅能保证积分 $\int_\Omega \psi(\Theta_0)$ 很小，也能保证出现在(3.9)所有后续求和项中的因子 $\gamma_0^{-1}(T)$ 很小。因此，我们关于由大的初始温度分布驱动的爆破的结果同样是引理 3.5的推论:

Proof 定理 1.4。我们注意到，(1.12)表明，对于如(3.2)中的 ψ，当$\xi \to \infty$时有 $\psi(\xi) \to 0$；再结合(1.11)，这意味着当 $\xi \to \infty$时必然有 $\gamma(\xi) \to +\infty$。因此，给定 $\eta > 0$和 $M > 0$，我们可以选取充分大的 $C = C(a, \gamma, f, T, \eta, M) > 0$，使得除不等式

$$C \ge \frac{\Lambda T}{2}, \tag{3.15}$$

之外，我们还有

$$c_1 \cdot |\Omega|\psi(C) \le \frac{\eta}{4} \tag{3.16}$$

and

$$\frac{c_2 M}{\gamma(\frac{C}{2})} + \frac{c_3 M}{\gamma(\frac{C}{2})} + \frac{c_4}{\gamma(\frac{C}{2})} \le \frac{\eta}{4}, \tag{3.17}$$

其中我们设

$$c_1 \equiv c_1(a, T) := \frac{8}{a^2 T} + 4T \tag{3.18}$$

and

$$c_2 \equiv c_2(a, T) := \frac{12 e^{2aT}}{T} \tag{3.19}$$

and

$$c_3 \equiv c_3(a, T) := \frac{8 e^{2aT}}{a^2 T} \tag{3.20}$$

以及

$$c_4 \equiv c_4(a, \gamma, f, T) := \frac{2\Lambda|\Omega| e^{2aT}}{a^3} + \frac{8\Lambda|\Omega|}{a^2} + 2\Lambda|\Omega|T^2. \tag{3.21}$$

现在，若 $D > 0$，且 (u_0, u_{0t}, Θ_0) 满足 (1.4)、(1.16)、(1.17) 和 (1.18)，并假设相应的解具有如下性质： $T_{max} > T$，我们便可结合引理 3.6、(1.18) 和 (3.15) 来估计

$$\Theta(x, t) \ge C - \frac{\Lambda T}{4} \ge \frac{C}{2} \qquad \text{for all } x \in \Omega \text{ and } t \in (0, T),$$

根据 γ 的单调性，这意味着 (3.3) 中的量满足

$$\gamma_0(T) \ge \gamma\Big(\frac{C}{2}\Big). \tag{3.22}$$

此外，正如 (1.18) 所确保的，根据 ψ 显而易见的单调性，

$$\int_\Omega \psi(\Theta_0) \le |\Omega|\psi(C),$$

因此，结合 (3.18)-(3.21) 应用引理 3.5 可知，由于 (1.17),

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_0|^2 &\leq c_1 \int_\Omega \psi(\Theta_0) + \frac{c_2}{\gamma_0(T)} \int_\Omega u_0^2 + \frac{c_3}{\gamma_0(T)} \cdot \int_\Omega u_{0t}^2 + \frac{c_4}{\gamma_0(T)} \\ &\leq c_1|\Omega|\psi(C) + \frac{c_2 M}{\gamma(\frac{C}{2})} + \frac{c_3 M}{\gamma(\frac{C}{2})} + \frac{c_4}{\gamma(\frac{C}{2})}.\end{aligned}$$

但结合 (3.16) 和 (3.17)，这将意味着

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^2 \leq \frac{\eta}{4} + \frac{\eta}{4} < \eta,$$

这与我们在 (1.16) 中的假设相矛盾。因此，我们关于 $T_{max} \geq T$ 的假设必定不成立，从而该结论可由命题 1.1 推出。□

致谢。 作者感谢德国研究联合会的支持（项目编号 444955436）。

利益冲突声明。 作者声明不存在任何利益冲突。

数据可用性声明。 本文不适用数据共享，因为本研究未生成或分析任何数据集。

参考文献

[1] Alt, H.W.: 线性泛函分析：面向应用的导论。施普林格，柏林，*2012*[2] Alves, C., Cavalcanti, M.M.: 关于具有指数源项的二维波动方程解的存在性、一致衰减率及爆破。*Calc. Var. Partial Differ. Equ. 34, 377-411 (2009)*[3] Bies, P.; Cieślak, T.: 一维热弹性方程具有正温度的全时间正则唯一解。*SIAM J. Math. Anal. 55, 7024-7038 (2023)*[4] Bies, P.; Cieślak, T.: 受热弦的时间渐近行为。*Math. Ann. 391, 5941-5964 (2025)*[5] Black, T., Winkler, M.: 边界上给定信号浓度的趋化-纳维-斯托克斯系统的全局弱解与吸收集。*Math. Models Appl. Sci. 32, 137-173 (2022)*[6] Blanchard, D., Guibé, O.: 热黏弹性非线性系统解的存在性。*Adv. Differential Equations 5, 1221-1252 (2000)*[7] Boudjeriou, T.: 一类含分数阶 p-拉普拉斯算子及对数非线性的波动方程的全局适定性与有限时间爆破。*Math. Nachr. 296, 938-956 (2023)*[8] Cieślak, T., Muha, B, Trifunović, S.A.: 三维非线性热弹性力学中的全局弱解。*Calc. Var. Partial Differential Equations 63, 26 (2024)*[9] Claes, L., Lankeit, J., Winkler, M.: 压电材料中声波生热模型：全局大数据解。*Math. Models Methods Appl. Sci.*，即将刊出[10] Claes, L., Winkler, M.: 通过 $W^{1,p}$ 能量分析刻画拟线性双曲-抛物型系统的小数据光滑解。预印本

[11] Dafermos, C.M.: 一维热黏弹性方程初边值问题的全局光滑解。*SIAM J. Math. Anal. 13, 397-408 (1982)*[12] Dafermos, C.M., Hsiao, L.: 一维非线性热黏弹性中的全局光滑热机械过程。*Nonlinear Anal. 6, 435-454 (1982)*[13] Dafermos, C.M., Hsiao, L.: 非线性热弹性方程解中奇异性的形成。*Quart. Appl. Math. 44, 463-474 (1986)*[14] Ding, M., Winkler, M.: 涉及快速衰减扩散系数的*Keller–Segel*系统的小密度解。*NoDEA Nonlin. Differential Eq. Appl. 28, 47 (2021)*[15] Fricke, T.: 涉及一般温度依赖性的黏性波动方程的局部与整体可解性。预印本[16] Friesen, O., Claes, L., Scheidemann, C., Feldmann, N., Hemsel, T., Henning, B.: 利用环形试样估算温度相关压电材料参数。载于：*2023*年国际超声学大会，中国北京，第*2022*卷，*012125*。*IOP Publishing*，*2024*[17] Gawinecki, J.A., Zajaczkowski, W.M.: 二维热黏弹性的全局正则解。纯粹与应用分析通讯 *15, 1009-1028 (2016)*[18] Gazzola, F., Squassina, M.: 阻尼半线性波动方程的全局解与有限时间爆破。*Ann. Inst. Henri Poincar´e, Anal. Non Lin´eaire 23, 185-207 (2006)*
[19] Gubinyi, Z., Batur, C., Sayir, A., Dynys, F.: 高温下*PZT*压电陶瓷的电学性质。*J. Electroceram. 20, 95-105 (2007)*[20] Guo, B., Zhu, P.: 类固体材料中具有固定边界条件的非线性热黏弹性系统光滑解的整体存在性。*Commun. Math. Phys. 203, 365-383 (1999)*[21] Hrusa, W.J., Messaoudi, S.A.: 关于一维非线性热弹性中的奇异性形成。理性力学与分析档案 *111, 135-151 (1990)*[22] Hsiao, L., Luo, T.: 一维非线性热黏弹性方程解的大时间行为。应用数学季刊 *56, 201-219 (1998)*[23] Hu, X., Wang, D.: 可压缩黏弹性的奇异性形成。*Acta Math. Sci., Ser. B, Engl. Ed. 32, 109-128 (2012)*[24] Jiang, S.: 一维非线性热黏弹性初边值问题的全局大解。应用数学季刊 *51, 731-744 (1993)*[25] Kim, J.U.: 初始数据属于 BV 和 L^1时一维热黏弹性方程解的整体存在性。*Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 10, 357-429 (1983)*[26] Levine, H.A.: 形如 $Pu_{tt} = -Au + \mathcal{F}(u)$的非线性波动方程的全局解不存在性与不稳定性。*Trans. Am. Math. Soc. 192, 1-21 (1974)*[27] Messaoudi, S.: 非线性黏弹性波动方程的爆破与整体存在性。*Math. Nachr. 260, 58-66 (2003)*
[28] Meyer, F.: 温度相关参数温和变化的热黏弹性演化问题的大时间存在性。预印本[29] Mielke, A., Roubiček, T.: 大应变下*Kelvin–Voigt*流变学中的热黏弹性。理性力学与分析档案 *238, 1-45 (2020)*
[30] Mizoguchi, N., Souplet, Ph.: 抛物型*Keller–Segel*系统爆破点的非退化性。*Ann. Inst. H. Poincar´e, Anal. Non Lin´eaire 31, 851-875 (2014)*

[31] Nhan, L.C., Nguyen, Y.V., Truong, L.X.: 具有黏弹性阻尼和非线性源项的经典热弹性系统的最优衰减率与解的爆破。应用数学与物理学杂志 *75, 175 (2024)*[32] Owczarek, S., Wielgos, K.: 具有非线性阻尼力和 L^1温度数据的热黏弹性模型。数学方法与应用科学 *46, 9966-9999 (2023)*[33] Pawlow, I., Zajaczkowski, W.M.: 具有非线性温度依赖比热的三维热黏弹性全局正则解。纯粹与应用分析通讯 *16, 1331-1371 (2017)*[34] Porzio, M.M., Vespri, V.: 某些双重非线性退化抛物方程局部解的*Hölder*估计。微分方程杂志 *103, 146-178 (1993)*[35] Racke, R.: 非线性三维热弹性中的爆破。数学方法与应用科学 *12, 267-273 (1990)*[36] Racke, R.: 关于非线性三维热弹性中的柯西问题。*Math. Z. 203, 649-682 (1990)*[37] Racke, R., Shibata, Y.: 一维非线性热弹性中的全局光滑解与渐近稳定性。理性力学与分析档案 *116, 1-34 (1991)*[38] Racke, R., Shibata, Y., Zheng, S.: 一维非线性热弹性中的整体可解性与指数稳定性。应用数学季刊 *51, 751-763 (1993)*[39] Racke, R., Zheng, S.: 非线性热黏弹性中的整体存在性与渐近行为。微分方程杂志 *134, 46-67 (1997)*[40] Rossi, R., Roubiček, T.: 混合模式下发生脱层的黏合接触：热力学与分析。界面与自由边界 *15, 1-137 (2013)*[41] Roubiček, T.: 具有 L^1数据的小应变热黏弹性。应用数学季刊 *67, 47-71 (2009)*[42] Roubiček, T.: 非线性耦合热黏弹性。非线性微分方程及其应用 *20, 1243-1275 (2013)*[43] Shibata, Y.: 非线性热黏弹性方程小解的全时间存在性。数学方法与应用科学 *18, 871-895 (1995)*[44] Shen, W., Zheng, S., Zhu, P.: 具有固定边界条件的非线性热黏弹性系统弱解的整体存在性与渐近行为。应用数学季刊 *57, 93-116 (1999)*[45] Song, H.: 黏弹性波动方程任意正初始能量解的爆破。非线性分析：现实世界应用 *26, 306-314 (2015)*[46] Sun, F., Liu, L., Wu, Y.: 任意能量水平下带初始数据的非线性黏弹性波动方程解的爆破。应用分析 *98, 2308-2327 (2019)*[47] Tao, Y., Winkler, M.: 具有单一物种交叉扩散的种群模型中的有界性与稳定化。伦敦数学会会刊 *119, 1598-1632 (2019)*[48] Watson, S.J.: 一维非线性热黏弹性初边值问题的唯一整体可解性。理性力学与分析档案 *153, 1-37 (2000)*[49] Winkler, M.: 温度依赖参数下推广一维热黏弹性的演化系统中的粗糙数据。应用数学与优化 *91, 44 (2025)*[50] Winkler, M.: 涉及温度依赖黏度的一维热黏弹性大数据解。应用数学与物理学杂志，即将出版[51] Winkler, M.: 涉及温度依赖黏度的一维热黏弹性演化问题的大数据正则解。预印本[52] Zheng, S., Shen, W.: 一维非线性热黏弹性方程柯西问题的全局光滑解。偏微分方程杂志 *2, 26-38 (1989)*