arXiv:2602.04001v1 [math.AP] 3 Feb 2026

非等温情形下黏性声波传播拟线性模型的大数据全局解

Felix Meyer*帕德博恩大学，数学研究所，33098 帕德博恩，德国

Michael Winkler†帕德博恩大学，数学研究所，33098 帕德博恩，德国

摘要

本文研究了在温度依赖的弹性参数存在的情况下，声波传播过程中机械能转化为热的模型，其形式如下：

$$\begin{cases} u_{tt} = (\gamma(\Theta)u_{xt})_x + a(\gamma(\Theta)u_x)_x, \\ \Theta_t = D\Theta_{xx} + \gamma(\Theta)u_{xt}^2. \end{cases} \qquad (\star)$$

首先证明，当在开有界实区间 Ω 中结合无通量边界条件考虑该模型时，在假设 $\gamma \in C^2([0,\infty))$ 满足 $\gamma > 0$ 且 $\gamma' \geq 0$ 在 $[0,\infty)$ 上，以及

$$D \cdot (\gamma + D) \cdot \gamma'' + 2\gamma\gamma'^2 \leq 0 \qquad \text{on } [0,\infty),$$

对于所有正则性适当的初始数据，该问题都存在全局定义的经典解。这补充了近期文献中的发现：根据这些发现，只要 γ 在 $[0,\infty)$ 上为正且非递减，$(\star)$ 就可能存在在有限时间内爆破的解，其中 $\int_0^\infty \frac{d\xi}{\gamma(\xi)} < \infty$。

除此之外，研究还发现，若满足以下附加假设

$$a|\Omega|^2 \leq \frac{\pi^2\gamma(0)}{1+\sqrt{1+\frac{\gamma(0)}{D}}}$$

则所有这些解在大时间极限下都会趋近于某个空间均匀平衡态。

关键词：非线性热声学；大数据解；衰减**MSC 2020：**74F05（主要）；35B40、74A15、80A17（次要）

*felixmy@math.uni-paderborn.de

†michael.winkler@math.uni-paderborn.de

1 引言

本文研究了弹性固体中声波传播时机械能转化为热的简化模型，该模型由下式给出：

$$\begin{cases} u_{tt} = (\gamma(\Theta)u_{xt})_x + a(\gamma(\Theta)u_x)_x, \\ \Theta_t = D\Theta_{xx} + \gamma(\Theta)u_{xt}^2, \end{cases} \tag{1.1}$$

该方程是一个简化模型，用于描述弹性固体中的声波传播过程中机械能转化为热的现象。受压电陶瓷中相应材料行为实验结果的启发（[12]），在形式为 $u_{tt} = (a\gamma u_x)_x$ 的经典波动方程基础上，系统 (1.1) 讨论了弹性参数 $a\gamma$ 可能依赖于相应位置的温度$\Theta = \Theta(x, t)$ 的情形。根据 Kelvin-Voigt 型固体建模中的一项核心假设，(1.4) 还假定存在摩擦生热，且相应的黏度具有与上述类似的温度依赖性（[12], [13]）。

近期文献表明，关键因素 γ 的增长足够快时，可能导致 (1.1) 的某些解在有限时间内坍塌。在 [28], 中，具体而言，研究发现，若 $a > 0$ 且 $D > 0$，并且若 $\gamma \in C^2([0, \infty))$ 是一个非递减的正函数，满足

$$\int_0^\infty \frac{d\xi}{\gamma(\xi)} < \infty, \tag{1.2}$$

于是，对于相当大一类初始数据，在有界开区间 Ω 上，方程 (1.1) 取 u 狄利克雷型齐次边界条件和 Θ 诺伊曼型齐次边界条件时，存在经典解 (u, Θ)，其定义于 $\Omega \times (0, T)$，并且在某个 $T > 0$ 时刻发生爆破，具体而言

$$\limsup_{t \nearrow T} \|\Theta(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \infty. \tag{1.3}$$

事实上， [28] 中的结果实际上适用于比 (1.1) 更一般的模型类，直接调整其中的论证即可确认，在不同边界条件下也能得出类似结论，例如两个分量均满足诺伊曼型齐次边界条件；从这个意义上说，(1.1) 这类系统中出现 (1.3) 所示的有限时间温度热点形成现象，可以视为 (1.2) 中增长条件的一种相当稳健的结果。这与一维热弹性演化模型中众所周知的核心特性形成鲜明对比：在这些模型中，弹性参数为常数。事实上，针对这类情形的大量文献不仅给出了全局可解性（[23], [17], [15], [26], [9], [10], [25], [2]）的全面结果，还证明了解向均匀态的大时间稳定化（[23], [14], [3]）；这些结果适用于经典热弹性以及标准 Kelvin-Voigt 模型，而后者由于还考虑了热膨胀机制，比 (1.1) 复杂得多。对这些发现作适当弱化后，其中一些结论甚至可以推广到弹性系数为常数的高维系统（[24], [5], [20], [21], [6]）。

主要结果。 本文旨在考察，对参数的温度依赖性施加适当假设，在多大程度上能够排除奇性形成现象。事实上，对于 (1.1) 及其近似模型，迄今为止关于大时间可解性的认识似乎相当有限：对于

广义任意的 γ 以及任意大小的初始数据，可以在各种可解性概念下推导出局部存在性结果（[11], [8], [27]）；而在存在温度依赖函数γ时，迄今为止似乎只有在对 a 和初始数据均满足适当小性条件的情况下，才能构造出整体解（[11], [8]）。在 [19], 中，近期研究表明，只要给定正则性适当但可能较大的初始数据，对于给定的 $T>0$ ，便可确定一个关于导数 γ' 的小性假设，足以确保经典解的存在时间超过 T。然而，除 [28] 中关于满足 (1.2)、以超线性方式增长的函数 γ 所提出的限制外，文献并未就大初始数据所对应解的行为提供实质性信息。特别是，似乎甚至尚不清楚有界但非常数的 γ 是否会促成 (1.3) 所示的无界现象或其他类型的无界现象；对于这类非线性项，迄今为止似乎仅发现某些正则性可能较差的广义解能够整体存在（[7]）。

为了便于集中讨论这一问题，与此前若干研究不同，我们将在此聚焦于模型 (1.1)——这是一个涉及温度依赖参数的热黏弹性演化的表观最简模型，因此忽略热膨胀效应的任何影响。我们还将纳入具有物理意义的边界条件，进而研究以下初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = (\gamma(\Theta)u_{xt})_x + a(\gamma(\Theta)u_x)_x, & x\in\Omega,\ t>0,\\ \Theta_t = D\Theta_{xx} + \gamma(\Theta)u_{xt}^2, & x\in\Omega,\ t>0,\\ u_x = 0, \quad \Theta_x = 0, & x\in\partial\Omega,\ t>0,\\ u(x,0)=u_0(x), \quad u_t(x,0)=u_{0t}(x), \quad \Theta(x,0)=\Theta_0(x), & x\in\Omega, \end{cases} \tag{1.4}$$

在有界开区间 $\Omega\subset\mathbb{R}$ 上，其中参数 $a>0$ 和 $D>0$ 为常数，且给定初始数据 u_0， u_{0t} 和 Θ_0。

构造 (1.4) 的大数据解显然面临一个障碍：一般而言，非线性热源 $\gamma(\Theta)u_{xt}^2$ 的作用似乎无法仅凭热弹性动力学的基本能量演化性质得到充分控制；而这些性质在以往相关文献的存在性理论关键部分中一直是强有力的工具（[23],[2]）。为应对这一问题，我们力求通过追踪若干包含两个解分量乘性耦合的空间积分随时间的演化，捕捉 (1.4) 中相互作用的某些关键特征。具体而言，对我们的分析至关重要的量将是如下形式的泛函

$$y^{(B)}(t) := \int_\Omega \frac{1}{\gamma(\Theta)+D}\cdot\Big(u_{xt}+au_x\Big)^2 + B\int_\Omega u_x^2 \tag{1.5}$$

其中 $B>0$ 经过了适当选取。

事实上，我们与此相关的首个观察将在引理 2.2、引理 2.3 和引理 2.4 中详述：我们将利用一些足够小的参数 B ，以揭示相应泛函 $y^{(B)}$ 的某些类似能量的性质；只要光滑、正且非递减的函数 γ 除了不满足 (1.2) 外，还满足一个略微超出凹性范畴的结构假设（参见 (1.7)），这些性质便成立。以此为起点，采用适当的自举过程，作为我们的首个主要结果，我们将在第 2 节证明：事实上，在存在任何此类 γ 的情况下，问题 (1.4) 存在一个全局经典解：

定理 1.1 设 $\Omega \subset \mathbb{R}$ 为有界开区间，令 $a > 0$ 和 $D > 0$，并假设

$$\gamma \in C^2([0,\infty)) \quad is\ such\ that \quad \gamma > 0\ and\ \gamma' \geq 0\ on\ [0,\infty), \tag{1.6}$$

并且

$$D \cdot (\gamma + D) \cdot \gamma'' + 2\gamma\gamma'^2 \leq 0 \qquad on\ [0,\infty). \tag{1.7}$$

那么，只要

$$\begin{cases} u_0 \in W^{3,2}(\Omega)\ satisfies\ u_{0x} = 0\ on\ \partial\Omega, \\ u_{0t} \in W^{2,2}(\Omega)\ satisfies\ (u_{0t})_x = 0\ on\ \partial\Omega \qquad and \\ \Theta_0 \in W^{2,2}(\Omega)\ satisfies\ \Theta_0 \geq 0\ in\ \Omega\ and\ \Theta_{0x} = 0\ on\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.8}$$

问题 *(1.4)* 存在唯一的全局经典解 (u, Θ)，满足

$$\begin{cases} u \in \left(\bigcup_{\mu\in(0,1)} C^{1+\mu,\frac{1+\mu}{2}}(\overline{\Omega}\times[0,\infty))\right) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega}\times(0,\infty)) \qquad and \\ 0 \leq \Theta \in \left(\bigcup_{\mu\in(0,1)} C^{1+\mu,\frac{1+\mu}{2}}(\overline{\Omega}\times[0,\infty))\right) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega}\times(0,\infty)) \end{cases}$$

其满足

$$u_t \in \left(\bigcup_{\mu\in(0,1)} C^{1+\mu,\frac{1+\mu}{2}}(\overline{\Omega}\times[0,\infty))\right) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega}\times(0,\infty)).$$

尽管 (1.7) 将 γ 与其前两阶导数以相当复杂的方式联系起来，但仍然可以直接构造出一些具有启发性的例子（参见第 2 节末尾）：

注 1.2 *i)* 形如以下形式的单调稳定非线性项

$$\gamma(\xi) := A - Be^{-\alpha\xi}, \qquad \xi \geq 0, \tag{1.9}$$

可以看出，只要 $\alpha > 0$、$A > 0$ 和 $B \in (0、A)$，并且 $D \geq \frac{2A}{1+\sqrt{8}}$，就满足上述假设。

ii) 但某些无界的 γ 同样是允许的：也就是说，如果 $A > 0$ 和 $B > 0$，且 $D > 0$ 足够大并满足 $D \geq 2B$，那么定理 *1.1* 适用于

$$\gamma(\xi) := A + B\ln(\xi + 1), \qquad \xi \geq 0. \tag{1.10}$$

然而，式 (1.5) 中泛函在发掘式 (1.4) 的基本性质方面的潜力，似乎远远超出了定理 1.1 的表述。如果除上述条件外，数值 $a|\Omega|^2$ 还足够小，即，那么根据 Poincar´e 不等式——该不等式指出

$$\lambda_1 \int_\Omega \varphi^2 \leq \int_\Omega \varphi_x^2 \quad \text{for all } \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega), \quad \text{with} \quad \lambda_1 := \frac{\pi^2}{|\Omega|^2}, \tag{1.11}$$

对于某个比定理 1.1 所依据的选择更为微妙的中间选择 B，可以发现，由此在 (1.5) 中定义的量实际上起到了真正的递减能量泛函的作用（引理 3.1）。在第二轮逐步自我改进的论证过程中，恰当地利用这一点以及有关相应耗散率的一些定量信息，我们将在第 3 节看到，在这类情形下，上述找到的每个解实际上都会在大时间极限下趋于一个半平凡平衡态:

定理 1.3 设 $\Omega \subset \mathbb{R}$ 是一个有界开区间，设 $a > 0$ 和 $D > 0$，并假设 和 ***(1.7)*** 成立，其中 *(1.6)*

$$a|\Omega|^2 \leq \frac{\pi^2\gamma(0)}{1+\sqrt{1+\frac{\gamma(0)}{D}}}. \tag{1.12}$$

那么，只要 ***(1.8)*** 成立，就可以找到 $\Theta_\infty \geq 0$、$\beta > 0$ 和 $C > 0$，使得定理 ***1.1*** 中 ***(1.4)*** 的全局经典解 (u, Θ) 满足

$$\left\| u(\cdot,t) - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega (u_0 + tu_{0t}) \right\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq Ce^{-\beta t} \qquad for\ all\ t > 0 \tag{1.13}$$

and

$$\left\| u_t(\cdot,t) - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_{0t} \right\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq Ce^{-\beta t} \qquad for\ all\ t > 0 \tag{1.14}$$

以及

$$\|\Theta(\cdot,t) - \Theta_\infty\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq Ce^{-\beta t} \qquad for\ all\ t > 0. \tag{1.15}$$

2 全局可解性。定理 1.1 的证明

为保证至少在局部时间区间上存在经典解，我们陈述以下引理。通过简单地调整 [8] 中定理 1.1 的证明，即可得到该引理。

引理 2.1 设 $a > 0$ 和 $D > 0$，假设 γ 满足 ***(1.6)***，并且 ***(1.8)*** 成立。那么存在 $T_{max} \in (0, \infty]$，以及唯一确定的函数

$$\begin{cases} u \in \left(\bigcup_{\mu\in(0,1)} C^{1+\mu,\frac{1+\mu}{2}}(\overline{\Omega}\times[0,T_{max})) \right) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega}\times(0,T_{max})) & and \\ \Theta \in \left(\bigcup_{\mu\in(0,1)} C^{1+\mu,\frac{1+\mu}{2}}(\overline{\Omega}\times[0,T_{max})) \right) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega}\times(0,T_{max})) \end{cases} \tag{2.1}$$

它们满足

$$u_t \in \left(\bigcup_{\mu\in(0,1)} C^{1+\mu,\frac{1+\mu}{2}}(\overline{\Omega}\times[0,T_{max})) \right) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega}\times(0,T_{max})), \tag{2.2}$$

使得 $\Theta \geq 0$ 在 $\Omega \times (0, T_{max})$ 中，且 (u, Θ) 在 $\Omega \times (0, T_{max})$ 中以经典意义满足 ***(1.4)***，并且还满足

$$if\ T_{max} < \infty, \quad then \quad \limsup_{t\nearrow T_{max}} \left\{ \|u_t(\cdot,t)\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|\Theta(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \right\} = \infty. \tag{2.3}$$

在下文中，除非另有说明，我们均默认假设 $a > 0$ 和 $D > 0$，且 (1.8) 成立。每当 γ 以满足 (1.6) 的方式固定后，我们便令 T_{max}、u和Θ 取为引理 2.1 中所得的量；遵循相关问题分析中的经典先例（例如参见 [16]），我们定义

$$v := u_t + au, \tag{2.4}$$

注意，此时三元组 $(v,\ u,\ \Theta)$ 构成了下列方程的经典解

$$\begin{cases} v_t = (\gamma(\Theta)v_x)_x + av - a^2u, & x\in\Omega,\ t\in(0,T_{max}),\\ u_t = v - au, & x\in\Omega,\ t\in(0,T_{max}),\\ \Theta_t = D\Theta_{xx} + \gamma(\Theta)u_{xt}^2, & x\in\Omega,\ t\in(0,T_{max}),\\ v_x = 0, \quad u_x = 0, \quad \Theta_x = 0, & x\in\partial\Omega,\ t\in(0,T_{max}),\\ v(x,0) = v_0(x), \quad u(x,0) = u_0(x), \quad \Theta(x,0) = \Theta_0(x), & x\in\Omega, \end{cases} \tag{2.5}$$

根据 (1.4)。

我们分析的基石已可见于以下命题，该命题结合了 (2.5) 中的两个抛物型方程，并在很大程度上依赖于 (1.7)。

引理 2.2 假设 *(1.6)* 和 *(1.7)* 成立。那么只要 $\eta>0$,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{1}{\gamma(\Theta)+D}v_x^2 + \frac{2\gamma(0)}{\gamma(0)+D}\int_\Omega v_{xx}^2 \le (2+\eta)a\int_\Omega \frac{1}{\gamma(\Theta)+D}v_x^2 + \frac{a^3}{\eta D}\int_\Omega u_x^2 \tag{2.6}$$

对所有 $t\in(0,T_{max})$ 均成立。

Proof. 根据利用 (2.5) 进行的分部积分，对所有 $t\in(0,T_{max})$，我们有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{1}{\gamma(\Theta)+D}v_x^2 &= 2\int_\Omega \frac{1}{\gamma(\Theta)+D}v_xv_{xt} - \int_\Omega \frac{\gamma'(\Theta)}{(\gamma(\Theta)+D)^2}\Theta_t v_x^2\\ &= -2\int_\Omega \Big(\frac{1}{\gamma(\Theta)+D}v_x\Big)_x\cdot\big(\gamma(\Theta)v_x\big)_x\\ &\quad +2\int_\Omega \frac{1}{\gamma(\Theta)+D}v_x\cdot(av-a^2u)_x\\ &\quad -D\int_\Omega \frac{\gamma'(\Theta)}{(\gamma(\Theta)+D)^2}\Theta_{xx}v_x^2 - \int_\Omega \frac{\gamma'(\Theta)\gamma(\Theta)}{(\gamma(\Theta)+D)^2}u_{xt}^2v_x^2, \end{aligned} \tag{2.7}$$

展开后得到

$$\begin{aligned} &-2\int_\Omega \Big(\frac{1}{\gamma(\Theta)+D}v_x\Big)_x\cdot\big(\gamma(\Theta)v_x\big)_x\\ &\quad= -2\int_\Omega \Big(\frac{1}{\gamma(\Theta)+D}v_{xx} - \frac{\gamma'(\Theta)}{(\gamma(\Theta)+D)^2}\Theta_xv_x\Big)\cdot\big(\gamma(\Theta)v_{xx}+\gamma'(\Theta)\Theta_xv_x\big)\\ &\quad= -2\int_\Omega \frac{\gamma(\Theta)}{\gamma(\Theta)+D}v_{xx}^2 - 2\int_\Omega \frac{\gamma'(\Theta)}{\gamma(\Theta)+D}\Theta_xv_xv_{xx}\\ &\qquad +2\int_\Omega \frac{\gamma(\Theta)\gamma'(\Theta)}{(\gamma(\Theta)+D)^2}\Theta_xv_xv_{xx} + 2\int_\Omega \frac{\gamma'^2(\Theta)}{(\gamma(\Theta)+D)^2}\Theta_x^2v_x^2 \qquad \text{for all } t\in(0,T_{max}). \end{aligned} \tag{2.8}$$

在此，再进行一次分部积分可得，对所有 $t\in(0,T_{max})$,

$$-2\int_\Omega \frac{\gamma'(\Theta)}{\gamma(\Theta)+D}\Theta_xv_xv_{xx} + 2\int_\Omega \frac{\gamma(\Theta)\gamma'(\Theta)}{(\gamma(\Theta)+D)^2}\Theta_xv_xv_{xx}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_\Omega \Big\{\frac{\gamma'(\Theta)}{\gamma(\Theta)+D} - \frac{\gamma(\Theta)\gamma'(\Theta)}{(\gamma(\Theta)+D)^2}\Big\}\cdot \Theta_x (v_x^2)_x \\
&= \int_\Omega \Big\{\frac{\gamma'(\Theta)}{\gamma(\Theta)+D} - \frac{\gamma(\Theta)\gamma'(\Theta)}{(\gamma(\Theta)+D)^2}\Big\}\cdot \Theta_{xx} v_x^2 + \int_\Omega \Big(\frac{\gamma'}{\gamma+D} - \frac{\gamma\gamma'}{(\gamma+D)^2}\Big)'(\Theta)\cdot \Theta_x^2 v_x^2,
\end{aligned}
$$

由此，(2.8) 表明

$$
\begin{aligned}
&-2\int_\Omega \Big(\frac{1}{\gamma(\Theta)+D} v_x\Big)_x \cdot \big(\gamma(\Theta)v_x\big)_x - D\int_\Omega \frac{\gamma'(\Theta)}{(\gamma(\Theta)+D)^2}\Theta_{xx} v_x^2 \\
&\quad = -2\int_\Omega \frac{\gamma(\Theta)}{\gamma(\Theta)+D} v_{xx}^2 \\
&\qquad +2\int_\Omega \Big\{ -D\frac{\gamma'(\Theta)}{(\gamma(\Theta)+D)^2} + \frac{\gamma'(\Theta)}{\gamma(\Theta)+D} - \frac{\gamma(\Theta)\gamma'(\Theta)}{(\gamma(\Theta)+D)^2}\Big\}\cdot \Theta_{xx} v_x^2 \\
&\qquad +\int_\Omega \Big\{2\frac{\gamma'^2(\Theta)}{(\gamma(\Theta)+D)^2} + \Big(\frac{\gamma'}{\gamma+D} - \frac{\gamma\gamma'}{(\gamma+D)^2}\Big)'(\Theta)\Big\}\cdot \Theta_x^2 v_x^2 \qquad \text{for all } t\in(0,T_{max}). \quad (2.9)
\end{aligned}
$$

由于

$$
\begin{aligned}
&-D\frac{\gamma'(\xi)}{(\gamma(\xi)+D)^2} + \frac{\gamma'(\xi)}{\gamma(\xi)+D} - \frac{\gamma(\xi)\gamma'(\xi)}{(\gamma(\xi)+D)^2} \\
&\quad = \frac{-D\gamma'(\xi)+\gamma'(\xi)(\gamma(\xi)+D)-\gamma(\xi)\gamma'(\xi)}{(\gamma(\xi)+D)^2} = 0 \qquad \text{for all } \xi>0,
\end{aligned}
$$

由于 (1.7) 保证

$$
\begin{aligned}
2\cdot\frac{\gamma'^2(\xi)}{(\gamma(\xi)+D)^2} + \Big(\frac{\gamma'}{\gamma+D} - \frac{\gamma\gamma'}{(\gamma+D)^2}\Big)'(\xi) &= 2\cdot\frac{\gamma'^2(\xi)}{(\gamma(\xi)+D)^2} + \Big(\frac{D\gamma'}{(\gamma+D)^2}\Big)'(\xi) \\
&= \frac{2(\gamma(\xi)+D)\gamma'^2(\xi)}{(\gamma(\xi)+D)^3} + \frac{D(\gamma(\xi)+D)\gamma''(\xi) - 2D\gamma'^2(\xi)}{(\gamma(\xi)+D)^3} \\
&= \frac{D(\gamma(\xi)+D)\gamma''(\xi) + 2\gamma(\xi)\gamma'^2(\xi)}{(\gamma(\xi)+D)^3} \\
&\le 0 \qquad \text{for all } \xi>0,
\end{aligned}
$$

并且由于

$$
-\int_\Omega \frac{\gamma'(\Theta)\gamma(\Theta)}{(\gamma(\Theta)+D)^2} u_{xt}^2 v_x^2 \le 0 \qquad \text{for all } t\in(0,T_{max})
$$

由于 γ' 和 γ的非负性，由 (2.7) 和 (2.9) 可推知

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{1}{\gamma(\Theta)+D} v_x^2 + 2\int_\Omega \frac{\gamma(\Theta)}{\gamma(\Theta)+D} v_{xx}^2 &\le 2\int_\Omega \frac{1}{\gamma(\Theta)+D} v_x\cdot(av - a^2 u)_x \\
&= 2a\int_\Omega \frac{1}{\gamma(\Theta)+D} v_x^2 - 2a^2\int_\Omega \frac{1}{\gamma(\Theta)+D} u_x v_x \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

对所有 $t \in (0, T_{max})$均成立。利用杨氏不等式可得

$$-2a^2 \int_\Omega \frac{1}{\gamma(\Theta)+D} u_x v_x \le \eta a \int_\Omega \frac{1}{\gamma(\Theta)+D} v_x^2 + \frac{a^3}{\eta} \int_\Omega \frac{1}{\gamma(\Theta)+D} u_x^2 \qquad \text{for all } t \in (0, T_{max}) \text{ and } \eta > 0,$$

并且只需估计 $\gamma\ \Theta^{1}\ ()+D \le \frac{1}{D}$ 以及 $\frac{\gamma}{(\Theta)\ \gamma(\Theta)+D} \ge \frac{\gamma}{\gamma\ 0(0)\ ()+D}$，由 (2.10) 可立即得到 (2.6)。□

(2.6) 中最右侧的项可通过直接使用 (2.5) 中的常微分方程加以控制：

引理 2.3 若 *(1.6)* 成立，且若 $\eta > 0$，则

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega u_x^2 + 2(1-\eta)a \int_\Omega u_x^2 \le \frac{1}{2\eta a} \int_\Omega v_x^2 \qquad \textit{for all } t \in (0, T_{max}). \tag{2.11}$$

Proof. 只需结合杨氏不等式使用 (2.5) 中的第二个方程，即可得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \int_\Omega u_x^2 = \int_\Omega u_x \cdot (v - au)_x = -a \int_\Omega u_x^2 + \int_\Omega u_x v_x \qquad \text{for all } t \in (0, T_{max}),$$

并且此处

$$\int_\Omega u_x v_x \le \eta a \int_\Omega u_x^2 + \frac{1}{4\eta a} \int_\Omega v_x^2$$

对所有 $t \in (0, T_{max})$ 均成立。 □

现在可将上述两个引理进一步发展，借助 Poincar´e 不等式 (1.11) 得到一个能量型不等式；此处的处理仍相当粗略，因为其中的最优常数在随后的论证中并不起本质作用。

引理 2.4 假设 *(1.6)* 与 *(1.7)*。则对每个 $T > 0$，存在 $C(T) > 0$，使得

$$\int_\Omega \frac{1}{\gamma(\Theta(\cdot,t))+D} v_x^2(\cdot,t) \le C(T) \qquad \textit{for all } t \in (0,T) \cap (0, T_{max}) \tag{2.12}$$

and

$$\int_\Omega u_x^2(\cdot,t) \le C(T) \qquad \textit{for all } t \in (0,T) \cap (0, T_{max}) \tag{2.13}$$

以及

$$\int_0^t \int_\Omega v_{xx}^2 \le C(T) \qquad \textit{for all } t \in (0,T) \cap (0, T_{max}). \tag{2.14}$$

Proof. 取 $\lambda_1 > 0$如 Poincar´e 不等式 (1.11) 中所取，我们固定 $B > 0$，使得当 $c_1 := {}^{2\gamma}{}_{(0)\ \gamma(0)+D}$ 时，有

$$B \le \frac{c_1 a \lambda_1}{2}, \tag{2.15}$$

并令

$$y(t) := \int_\Omega \frac{1}{\gamma(\Theta(\cdot,t))+D} v_x^2(\cdot,t) + B \int_\Omega u_x^2(\cdot,t), \qquad t \in [0, T_{max}). \tag{2.16}$$

然后，将 (2.6) 与 (2.11) 相结合表明

$$y'(t)+c_1\int_\Omega v_{xx}^2+Ba\int_\Omega u_x^2\le 3a\int_\Omega\frac{1}{\gamma(\Theta)+D}v_x^2+\frac{a^3}{D}\int_\Omega u_x^2+\frac{B}{a}\int_\Omega v_x^2\quad\text{for all } t\in(0,T_{max}),\tag{2.17}$$

其中由 (1.11) 和 (2.15),

$$\frac{B}{a}\int_\Omega v_x^2\le\frac{B}{a\lambda_1}\int_\Omega v_{xx}^2\le\frac{c_1}{2}\int_\Omega v_{xx}^2\qquad\text{for all } t\in(0,T_{max}).$$

此外，由于

$$3a\int_\Omega\frac{1}{\gamma(\Theta)+D}v_x^2+\frac{a^3}{D}\int_\Omega u_x^2\le\Big(3a+\frac{a^3}{BD}\Big)\cdot y(t)\qquad\text{for all } t\in(0,T_{max})$$

根据 (2.16)，由 (2.17) 可得

$$y'(t)+\frac{c_1}{2}\int_\Omega v_{xx}^2\le c_2y(t)\qquad\text{for all } t\in(0,T_{max})\tag{2.18}$$

其中 $c_2:=3a+\frac{a^3}{BD}$。由 Gr¨onwall 不等式，这意味着

$$y(t)\le c_3:=y(0)e^{c_2T}\qquad\text{for all } t\in[0,T)\cap[0,T_{max}),$$

随后对 (2.18) 积分，得到不等式

$$\frac{c_1}{2}\int_0^t\int_\Omega v_{xx}^2\le y(0)+c_2\int_0^t y(s)ds\le c_3+c_2c_3T\qquad\text{for all } t\in[0,T)\cap[0,T_{max}),$$

因此，回想 y 的定义即可完成证明。 □

一个简单的嵌入性质将 (2.14) 中所含的耗散信息发展为关于一阶量的估计:

引理 2.5 假设 *(1.6)* 与 *(1.7)* 成立。则对所有 $T>0$，存在 $C(T)>0$使得

$$\int_0^t\|v_x(\cdot,s)\|_{L^\infty(\Omega)}^2ds\le C(T)\qquad\textit{for all } t\in(0,T)\cap(0,T_{max}).\tag{2.19}$$

Proof. 由于 b y 嵌入 $W^{1,2}(\Omega)\hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ 的连续性，我们可以找到 $c_1>0$ 使得

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\le c_1\|\varphi_x\|_{L^2(\Omega)}\qquad\text{for all } \varphi\in W_0^{1,2}(\Omega),$$

由此可得

$$\int_0^t\|v_x(\cdot,s)\|_{L^\infty(\Omega)}^2ds\le c_1^2\int_0^t\int_\Omega v_{xx}^2\qquad\text{for all } t\in(0,T_{max}),$$

从而 (2.19) 由 (2.13) 得出。 □

这是我从而确保在整个有限时间区间内真正的 L^∞ 有界性 u_x：

引理 2.6 假设 *(1.6)* 和 *(1.7)* 成立，对于每个 $T>0$，我们可以确定 $C(T)>0$，使得

$$|u_x(x,t)| \le C(T) \qquad \text{for all } x\in\Omega \text{ and } t\in(0,T)\cap(0,T_{max}). \tag{2.20}$$

Proof. 根据 (2.5)，我们可以按照以下方式表示 u_x

$$u_x(x,t) = e^{-at}u_{0x}(x) + \int_0^t e^{-a(t-s)}v_x(x,s)ds$$

对于 $x\in\Omega$ 和 $t\in(0,T_{max})$。利用柯西-施瓦茨不等式，并借助 a 的非负性，我们因此可以估计

$$\begin{aligned}
\|u_x(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} &\le e^{-at}\|u_{0x}\|_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^t e^{-a(t-s)}\|v_x(\cdot,s)\|_{L^\infty(\Omega)}ds \\
&\le \|u_{0x}\|_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^t \|v_x(\cdot,s)\|_{L^\infty(\Omega)}ds \\
&\le \|u_{0x}\|_{L^\infty(\Omega)} + \left\{\int_0^t \|v_x(\cdot,s)\|^2_{L^\infty(\Omega)}ds\right\}^{\frac12}\cdot t^{\frac12} \qquad \text{for all } t\in(0,T_{max}),
\end{aligned}$$

由此，(2.20) 可由引理 2.5 推出。 □

由于引理 2.5 和引理 2.6 的结合能够适当地控制 (2.5) 中的热源，因此可以应用比较论证，从而也为温度变量推导出逐点上界。

引理 2. **7** 假设 *(1.6)* 和 *(1.7)* 成立。那么对所有 $T>0$，存在 $C(T)>0$，使得

$$\Theta(x,t) \le C(T) \qquad \text{for all } x\in\Omega \text{ and } t\in(0,T)\cap(0,T_{max}). \tag{2.21}$$

Proof. 由 (2.5) 中的第三个方程，结合 (2.4) 和杨氏不等式可得，

$$\begin{aligned}
\Theta_t &= D\Theta_{xx} + \gamma(\Theta)(v_x - au_x)^2 \\
&\le D\Theta_{xx} + \gamma(\Theta)\cdot(2v_x^2 + 2a^2u_x^2) \qquad \text{in } \Omega\times(0,T_{max}),
\end{aligned}$$

因此，记

$$h(t) := 2\|v_x(\cdot,t)\|^2_{L^\infty(\Omega)} + 2a^2\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^\infty(\Omega)}, \qquad t\in(0,T_{max}),$$

我们得到

$$\Theta_t \le D\Theta_{xx} + h(t)\gamma(\Theta) \qquad \text{in } \Omega\times(0,T_{max}), \tag{2.22}$$

其中注意到，由引理 2.5 和引理 2.6 可知，对每个 $T>0$，都存在 $c_1(T)>0$ 满足

$$\int_0^t h(s)ds \le c_1(T) \qquad \text{for all } t\in(0,T)\cap(0,T_{max}). \tag{2.23}$$

现在利用 $\gamma>0$ 在 $[0,\infty)$ 上这一点可知，令 $\xi_\star := \|\Theta_0\|_{L^\infty(\Omega)}$ 且 $\phi(\xi) := \int_{\xi_\star}^{\xi} \frac{d\sigma}{\gamma(\sigma)}$，$\xi\ge\xi_\star$，我们得到一个严格递增函数 ϕ，它将 $[\xi_\star,\infty)$ 映射到 $[0,\infty)$ 上，因为 (1.7) 特别保证了 $\gamma''\le 0$ 在 $[0,\infty)$ 上成立，这意味着对所有 $\xi\ge 0$，$\gamma(\xi)\le\gamma(0)+\gamma'(0)\xi$，因此

$$\int_0^\infty \frac{d\xi}{\gamma(\xi)} = \infty.$$

由于 (2.23)，且 $t \in (0,\ T_{max})$ 在此处是任意的，令

$$z(t) := \phi^{-1}\bigg(\int_0^t h(s)ds\bigg), \qquad t \in [0, T_{max}),$$

因此，我们得到一个良定义的元素 z，它属于 $C^1([0, T_{max}))$，并满足对所有$t \in [0, T_{max})$ 均有 $\phi'(z(t))z'(t) = h(t)$，从而构成初值问题的一个解

$$\begin{cases} z'(t) = h(t)\gamma(z(t)), & t \in (0, T_{max}), \\ z(0) = \xi_\star. \end{cases}$$

因此，$\Theta(x,\overline{t}) := z(t), (x,t) \in \Omega \times [\overline{0}, T_{max})$ 定义了一个函数 $\Theta \in C^{2,1}(\overline{\Omega} \times [0, \overline{T_{max}}))$，它在 $\Omega \times (0, T_{max})$ 中满足 $\Theta_t = D\Theta_{xx} + h(t)\gamma(\Theta)$，且对所有$_x \in \Omega$ 有 $\Theta(x,0) = \xi_\star \geq \Theta(x,0)$。由 (2.22) 及比较原理，我们由此推得 $\Theta \leq \Theta$ 在 $\Omega \times (0, T_{max})$ 中成立，并可按预期得出结论。□

有了这些信息，我们现在可以回到 (2.12)，从而在有界区间内得到 v_x 的一个与时间无关的 L^2 界：

推论 2.8 若 *(1.6)* 和 *(1.7)* 成立，则对任意给定的 $T > 0$，都可以找到 $C(T) > 0$，使得

$$\int_\Omega v_x^2(\cdot, t) \leq C(T) \qquad \textit{for all } t \in (0, T) \cap (0, T_{max}). \tag{2.24}$$

Proof. 根据引理 2.7，对于任意的 $T > 0$，我们可以选取 $c_1(T) > 0$，使得 $\Theta \leq c_1(T)$ 在 $\Omega \times ((0, T) \cap (0, T_{max}))$ 中成立。由 γ' 的非负性可知，

$$\frac{1}{\gamma(\Theta) + D} \geq \frac{1}{\gamma(c_1(T)) + D} \qquad \text{in } \Omega \times (0, T) \cap (0, T_{max})),$$

因此，(2.24) 可由 (2.12) 推出。 □

鉴于引理 2.1，我们关于全局可解性的主要结果至此已得证：

Proof 定理 1.1。若引理 2.1 中的量 T_{max} 有限，则引理 2.4 和推论 2.8 将给出 $c_1 > 0$ 和 $c_2 > 0$，使得

$$\int_\Omega u_x^2 \leq c_1 \quad \text{and} \quad \int_\Omega v_x^2 \leq c_2 \qquad \text{for all } t \in (0, T_{max}), \tag{2.25}$$

而引理 2.7 将给出满足 $c_3 > 0$ 的

$$\|\Theta\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_3 \qquad \text{for all } t \in (0, T_{max}). \tag{2.26}$$

再次利用 (2.4) 和杨氏不等式，由 (2.25) 我们可以推断出 t

$$\int_\Omega u_{xt}^2 \leq 2\int_\Omega v_x^2 + 2a^2 \int_\Omega u_x^2 \leq 2c_2 + 2a^2 c_1 \qquad \text{for all } t \in (0, T_{max}),$$

这与（2.26）结合将与（2.3）矛盾。 □

最后，我们简要验证一下，在定理 1.1 中对 γ 所作的假设确实由引言中讨论的简单结构函数满足：

Proof 注 1.2。i) 对于 $\gamma(\xi) := A - Be^{-\alpha\xi}$, $\xi \geq 0$, 其中 $\alpha > 0$、 $A > 0$ 以及 $B \in (0, A)$ 使得 $D \geq \frac{2A}{1+\sqrt{8}}$，我们直接由 $A - B < \gamma(\xi) < A$ 对 $\xi \geq 0$ 推断出 (1.6) 成立。此外，我们可以定义

$$f(\xi) := D \cdot (\gamma(\xi) + D) \cdot \gamma''(\xi) + 2\gamma(\xi)\gamma'(\xi)^2, \qquad \text{for } \xi \geq 0$$

并得出结论： f在 $[0, \infty)$ 上于点 $\xi_0 = \max\left\{-\frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{2A+D}{4B}\right), 0\right\}$ 处取得其最大值，在该点处，只要 $\frac{7}{4}D^2 + AD - A^2 \geq 0$ 成立， $f(\xi_0)$ 即为非正。由于这一点由我们的假设 $D \geq \frac{2A}{1+\sqrt{8}}$ 所保证，该函数 γ 实际上也满足 (1.7)。

ii) 对于 $\gamma(\xi) := A + B\ln(\xi + 1)$, $\xi \geq 0$, 且 $A > 0$ 和 $B > 0$ 满足 $D \geq 2B$，我们直接得到 (1.6) 成立，并通过计算

$$\begin{aligned} & D \cdot (\gamma(\xi) + D) \cdot \gamma''(\xi) + 2\gamma(\xi)\gamma'(\xi)^2 \\ &= D \cdot (A + D + B\ln(\xi + 1)) \cdot \frac{-B}{(\xi+1)^2} + 2(A + B\ln(\xi + 1)) \cdot \frac{B^2}{(\xi+1)^2} \\ &= \frac{B}{(\xi+1)^2}(2AB - AD - D^2) + \frac{B^2\ln(\xi+1)}{(\xi+1)^2}(2B - D) \qquad \text{for } \xi \geq 0, \end{aligned}$$

我们得出结论：关于 B 的假设保证了 γ 满足 (1.7)。 □

3 大时间行为。定理 1.3 的证明

我们首先描述 (1.4) 中的大时间行为。注意到，在定理 1.3 的假设下，结合引理 2.2 和引理 2.3（其处理方式比引理 2.4 稍微精细一些），甚至可以揭示其中所讨论量的一些时间衰减：

引理 3.1 假设 *(1.6)* 和 *(1.7)* 成立，且满足 *(1.12)*。那么存在 $C > 0$ 和 $\beta > 0$ ，使得

$$\int_\Omega u_x^2(\cdot, t) \leq Ce^{-\beta t} \qquad \textit{for all } t > 0 \tag{3.1}$$

and

$$\int_\Omega \frac{1}{\gamma(\Theta(\cdot, t)) + D} v_x^2(\cdot, t) \leq Ce^{-\beta t} \qquad \textit{for all } t > 0, \tag{3.2}$$

此外，我们还有

$$\int_0^\infty \int_\Omega v_{xx}^2 < \infty. \tag{3.3}$$

Proof. 取 λ_1 如 (1.11) 所示，可知 (1.12) 等价于不等式 ty

$$\frac{2\gamma(0)}{\gamma(0) + D} \cdot \frac{\lambda_1}{a} > \frac{2}{\sqrt{D(\gamma(0) + D)}} + \frac{2}{\gamma(0) + D}. \tag{3.4}$$

此外，记 $\eta_1 := \sqrt{\gamma_{(0)}{}_D^{+D}}$和 $\eta_2 := \frac{1}{2}$，经过直接推导可得

$$\begin{aligned}\inf_{\eta_1'>0,\eta_2'\in(0,1)}\Big\{\frac{2+\eta_1'}{\gamma(0)+D}+\frac{1}{4\eta_1'\eta_2'(1-\eta_2')D}\Big\} &= \frac{2+\eta_1}{\gamma(0)+D}+\frac{1}{4\eta_1\eta_2(1-\eta_2)D}\\ &= \frac{2+\sqrt{\frac{\gamma(0)+D}{D}}}{\gamma(0)+D}+\frac{1}{\sqrt{\frac{\gamma(0)+D}{D}}\cdot D}\\ &= \frac{2}{\sqrt{D(\gamma(0)+D)}}+\frac{2}{\gamma(0)+D},\end{aligned}$$

因此，由 (3.4) 可得

$$\frac{2\gamma(0)}{\gamma(0)+D}\cdot\frac{\lambda_1}{a}-\frac{2+\eta_1}{\gamma(0)+D}>\frac{1}{4\eta_1\eta_2(1-\eta_2)D}.$$

因此，我们可以选取满足以下条件的 $B>0$

$$\frac{2\gamma(0)}{\gamma(0)+D}\cdot\frac{\lambda_1}{a}-\frac{2+\eta_1}{\gamma(0)+D}>\frac{B}{2\eta_2a^2}>\frac{1}{4\eta_1\eta_2(1-\eta_2)D},$$

这意味着该数

$$c_1 := 2(1-\eta_2)aB-\frac{a^3}{\eta_1 D} \tag{3.5}$$

为正，并且我们还可以选取 $\delta\in(0,1)$，使得

$$c_2 := (1-\delta)\cdot\frac{2\gamma(0)\lambda_1}{\gamma(0)+D}-\frac{(2+\eta_1)a}{\gamma(0)+D}-\frac{B}{2\eta_2 a} \tag{3.6}$$

为正。　　作出这些选择后，结合引理 2.2 和引理 2.3 可知

$$y(t) := \int_\Omega\frac{1}{\gamma(\Theta(\cdot,t))+D}v_x^2(\cdot,t)+B\int_\Omega u_x^2(\cdot,t),\qquad t\geq 0,$$

具有如下性质:

$$\begin{aligned}&y'(t)+\frac{2\gamma(0)}{\gamma(0)+D}\int_\Omega v_{xx}^2+2(1-\eta_2)aB\int_\Omega u_x^2\\ &\quad\leq\ (2+\eta_1)a\int_\Omega\frac{1}{\gamma(\Theta)+D}v_x^2+\frac{a^3}{\eta_1 D}\int_\Omega u_x^2+\frac{B}{2\eta_2 a}\int_\Omega v_x^2\qquad\text{for all } t>0,\end{aligned}$$

其中由（1.11）中的 Poincar´e 不等式可知,

$$\frac{2\gamma(0)}{\gamma(0)+D}\int_\Omega v_{xx}^2\geq\delta\cdot\frac{2\gamma(0)}{\gamma(0)+D}\int_\Omega v_{xx}^2+(1-\delta)\cdot\frac{2\gamma(0)}{\gamma(0)+D}\cdot\lambda_1\int_\Omega v_x^2\qquad\text{for all } t>0,$$

因为 $\delta<1$。由于

$$\int_\Omega\frac{1}{\gamma(\Theta)+D}v_x^2\leq\frac{1}{\gamma(0)+D}\int_\Omega v_x^2\qquad\text{for all } t>0 \tag{3.7}$$

根据 γ 的单调性，结合 (3.5) 和 (3.6)，我们因此可以看出

$$y'(t)+\delta\cdot\frac{2\gamma(0)}{\gamma(0)+D}\int_\Omega v_{xx}^2+c_1\int_\Omega u_x^2+c_2\int_\Omega v_x^2\le 0\qquad\text{for all } t>0,$$

由此，再次利用 (3.7)，我们推得

$$y'(t)+c_3y(t)+\delta\cdot\frac{2\gamma(0)}{\gamma(0)+D}\int_\Omega v_{xx}^2\le 0\qquad\text{for all } t>0 \tag{3.8}$$

其中 $c_3:=\min\{\frac{c_1}{B}$, $(\gamma(0)+D)c_2\}$。常微分方程比较论证表明，因此

$$y(t)\le y(0)e^{-c_3t}\qquad\text{for all } t>0,$$

而对 (3.8) 作简单积分，还可得到不等式

$$\delta\cdot\frac{2\gamma(0)}{\gamma(0)+D}\int_0^t\int_\Omega v_{xx}^2\le y(0)$$

对所有 $t>0$ 均成立。 □

通过插值，(3.1) 和 (3.3) 可推出 u_x 也相对于 $L^\infty(\Omega)$ 中的范数呈指数衰减。

引理 3.2 假设 *(1.6)* 和 *(1.7)* 成立，且 *(1.12)* 成立。那么存在 $C>0$ 和 $\beta>0$，使得

$$\|u_x(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\le Ce^{-\beta t}\qquad \textit{for all } t>0. \tag{3.9}$$

Proof. 利用 (2.5) 中的第二个方程和柯西-施瓦茨不等式进行粗略估计，可得

$$\begin{aligned}\|u_{xx}\|_{L^2(\Omega)} &= \left\|e^{-at}u_{0xx}+\int_0^t e^{-a(t-s)}v_{xx}(\cdot,s)ds\right\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le \|u_{0xx}\|_{L^2(\Omega)}+\int_0^t\|v_{xx}(\cdot,s)\|_{L^2(\Omega)}ds\\ &\le \|u_{0xx}\|_{L^2(\Omega)}+\left\{\int_0^t\int_\Omega v_{xx}^2\right\}^{\frac12}\cdot t^{\frac12}\qquad\text{for all } t>0,\end{aligned}$$

因此，依据 (3.3)，我们可以选取 $c_1>0$ 使得

$$\|u_{xx}\|_{L^2(\Omega)}\le c_1\cdot(1+t^{\frac12})\qquad\text{for all } t>0.$$

另一方面，由于 (3.1) 给出了满足以下条件的 $c_2>0$ 和 $\beta_1>0$

$$\|u_x\|_{L^2(\Omega)}\le c_2e^{-\beta_1 t}\qquad\text{for all } t>0,$$

并且由于 Gagliardo-Nirenberg不等式给出了 $c_3>0$，使得

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\le c_3\|\varphi_x\|_{L^2(\Omega)}^{\frac12}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^{\frac12}\qquad\text{for all } \varphi\in W_0^{1,2}(\Omega),$$

这意味着

$$\|u_x\|_{L^\infty(\Omega)} \le c_3 \cdot (c_2 e^{-\beta_1 t})^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ c_1 \cdot (1 + t^{\frac{1}{2}}) \right\}^{\frac{1}{2}} \qquad \text{for all } t > 0,$$

从而可得 (3.9)，其中任取固定的 $\beta \in (0, \frac{\beta_1}{2})$，且 $C := \sqrt{c_1 c_2 c_3} \cdot \sup_{t>0} \left\{ \sqrt{1 + t^{\frac{1}{2}}} e^{-(\frac{\beta_1}{2} - \beta)t} \right\}$ 显然有限。□

在引理 3.4 中，将结合前述结论与以下结果。

引理 3.3 若 *(1.6)*、*(1.7)* 和 *(1.12)* 成立，则

$$\int_0^\infty \|v_x(\cdot, t)\|^2_{L^\infty(\Omega)} dt < \infty. \tag{3.10}$$

Proof. 利用 (3.3) 以及嵌入 $W^{1,2}{}_0(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ 的连续性即可得到这一点，论证方式与引理 2.5 中的相当类似。□

I事实上，现在可以如下控制温度分布的增长： s.

引理 3.4 假设 *(1.6)*、*(1.7)* 和 *(1.12)* 成立，则可找到 $C > 0$ 使得 t

$$\Theta(x, t) \le C \qquad \textit{for all } x \in \Omega \textit{ and } t > 0. \tag{3.11}$$

Proof. 由于引理 3.3 与引理 3.2 的结合显然表明

$$\int_0^\infty \left(\|v_x(\cdot, t)\|^2_{L^\infty(\Omega)} + \|u_x(\cdot, t)\|^2_{L^\infty(\Omega)} \right) dt < \infty,$$

我们可以通过 几乎逐字重复引理 2 中详述的比较论证，推导出 (3.11)。 7. □

有了这些信息，我们现在可以有效控制 (3.2) 中出现的温度相关权函数，从而也使 v_x 具有如下意义下真正的指数衰减性质。

推论 3.5 如果 *(1.6)*、*(1.7)* 和 *(1.12)* 成立，那么对于某些 $C > 0$ 和 $\beta > 0$，我们有

$$\int_\Omega v_x^2(\cdot, t) \le C e^{-\beta t} \qquad \textit{for all } t > 0.$$

Proof. 我们只需注意到，引理 3.4 所断言的 Θ 的有界性确保了根据 (1.6)，$\inf_{(x,t) \in \Omega \times (0,\infty)} \gamma \Theta x^{\frac{1}{t}}$ $((,))+D$ 为正。因此，该结论直接由 (3.2) 得出。□

由于抛物光滑化，由引理 3.4、引理 3.3 和引理 3.1 特别蕴含的有界性，意味着 Θ 具有某种与时间无关的 H¨older 正则性。

引理 3.6 若 *(1.6)*、*(1.7)* 和 *(1.12)* 成立，则存在 $\alpha \in (0,1)$ 和 $C > 0$，使得

$$\|\Theta\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\overline{\Omega} \times [t_0, t_0+1])} \le C \qquad \textit{for all } t_0 > 1. \tag{3.12}$$

PROOF. 由引理 3.4 可知， Θ 以及由此得到的 $\gamma(\Theta)$ 在 $\Omega \times (0, \infty)$ 中有界。由引理 3.3、引理 3.1 和 (2.4) 可知，存在 $c_1 > 0$ 满足

$$\int_{t_0-1}^{t_0+1} \left\|\gamma(\Theta(\cdot,t))u_{xt}^2(\cdot,t)\right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 dt + \int_{t_0-1}^{t_0+1} \left\|\Theta(\cdot,t)\right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 dt \le c_1 \qquad \text{for all } t_0 > 1. \tag{3.13}$$

利用标量抛物方程 H¨older 正则性的一项已知结果（[22, 定理 1.3 和注 1.4]），于是我们可以选取 $\alpha \in (0, 1)$ 和 $c_2 > 0$，使得每当 $t_0 > 1, h \in C^0(\Omega \times [t_0 - 1, t_0 + 1])$ 和 $w \in C^{2,1}(\Omega \times [t_0 - 1, t_0 + 1])$ 满足

$$\begin{cases} w_t = Dw_{xx} + h(x,t), & x \in \Omega,\ t \in (t_0-1, t_0+1), \\ w_x = 0, & x \in \partial\Omega,\ t \in (t_0-1, t_0+1), \\ w(x, t_0-1) = 0, & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.14}$$

在经典意义下有解，且

$$\int_{t_0-1}^{t_0+1} \|h(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 dt \le 10c_1, \tag{3.15}$$

我们有

$$\|w\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{\Omega}\times[t_0-1,t_0+1])} \le c_2. \tag{3.16}$$

为恰当地利用这一点，给定 $t_0 > 1$，我们固定 $\zeta \in C^\infty([t_0 - 1, t_0 + 1])$，使得 $\zeta(t_0 - 1) = 0, \zeta \equiv 1$ 在 $[t_0, t_0 + 1]$, $0 \le \zeta \le 1$ 和 $|\zeta'| \le 2$ 上成立，并令 $w(x,t) := \zeta(t)\Theta(x,t)$，以及 $h(x,t) := \zeta(t)\gamma(\Theta(x,t))u_{xt}^2(x,t) + \zeta'(t)\Theta(x,t)$，其中 $(x,t) \in \Omega \times [t_0 - 1, t_0 + 1]$。于是，由引理 2.1 和 (1.4) 可知， h 和 w 具有上述正则性，并且 (3.14) 在经典意义下有解，而 (3.13) 与杨氏不等式保证

$$\begin{aligned} \int_{t_0-1}^{t_0+1} \|h(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 dt &\le 2\int_{t_0-1}^{t_0+1} \left\|\zeta(t)\gamma(\Theta(\cdot,t))u_{xt}^2(\cdot,t)\right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 dt + 2\int_{t_0-1}^{t_0+1} \left\|\zeta'(t)\Theta(\cdot,t)\right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 dt \\ &\le 2c_1 + 8c_1 = 10c_1. \end{aligned}$$

因此，(3.15) 也成立，由此推出的结论 (3.16) 尤其蕴含了带有 $C := c_2$ 的 (3.12)，因为 $\zeta \equiv 1$ 在 $[t_0, t_0 + 1]$ 上。□

为了类似地推导出 (2.5) 的解的第一分量 v 也满足 H¨older 估计，我们先记录与 (1.4) 相关的两个质量泛函的一条基本演化性质。

引理 3.7 若 *(1.6)* 成立，则

$$\int_\Omega u_t(\cdot,t) = \int_\Omega u_{0t} \quad \textit{and} \quad \int_\Omega u(\cdot,t) = \int_\Omega u_0 + t\int_\Omega u_{0t} \qquad \textit{for all } t \in (0, T_{max}). \tag{3.17}$$

PROOF. 这两个恒等式立即由以下事实得出：根据 (1.4)，我们有 $\frac{d^2}{dt^2}\int_\Omega u = 0$对所有 $t \in (0, T_{max})$ 都成立。□

将分量 u 和 v 与某些空间平坦函数作简单的线性组合后，(2.5) 中的第一个方程确实可以用一种相当不依赖于时间的方式，应用标准的抛物型 H¨older 正则性理论：

引理 3.8 假设满足 *(1.6)*、*(1.7)* 和 *(1.12)*。那么存在 $\alpha \in (0,1)$ 和$C > 0$ ，使得

$$\|v_x\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{\Omega}\times[t_0,t_0+1])} \le C \qquad \textit{for all } t_0 > 2. \tag{3.18}$$

Proof. 我们令

$$\widehat{u}(x,t) := u(x,t) - \frac{1}{|\Omega|}\cdot\left\{\int_\Omega u_0 + t\int_\Omega u_{0t}\right\}$$

以及

$$\widehat{v}(x,t) := v(x,t) - \frac{1}{|\Omega|}\cdot\left\{a\int_\Omega u_0 + (1+at)\int_\Omega u_{0t}\right\}$$

对于 $x \in \Omega$ 和 $t > 0$。然后，利用 (3.17)，我们很容易确认

$$\int_\Omega \widehat{u} = \int_\Omega \widehat{v} = 0 \qquad \text{for all } t > 0, \tag{3.19}$$

并且根据 (2.5),

$$\widehat{v}_t = \big(A(x,t)\widehat{v}_x\big)_x + h(x,t), \qquad x \in \Omega,\ t > 0, \tag{3.20}$$

其中 $A(x,t) := \gamma(\Theta(x,t))$ 且 $h(x,t) := a\widehat{v}(x,t) - a^2\widehat{u}(x,t), (x,t) \in \Omega \times (0,\infty)$。这里，引理 3.4、引理 3.6 和 (1.6) 给出了正数常数 c_1, c_2, c_3 和 α_1 ，使得

$$c_1 \le A \le c_2 \quad \text{in } \Omega\times(0,\infty) \qquad \text{and} \qquad \|A(\cdot,t)\|_{C^{\alpha_1}(\overline{\Omega})} \le c_3 \quad \text{for all } t > 1, \tag{3.21}$$

而引理 3.1 与推论 3.5 相结合表明，得益于 (3.19) 以及嵌入 $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ 的连续性，我们可以找到 $c_4 > 0$ ，使得

$$|h(x,t)| \le c_4 \qquad \text{for all } x \in \Omega \text{ and } t > 0. \tag{3.22}$$

基于时间局部化的论证，其风格与引理 3.6 中的论证颇为相似，现在使我们能够应用关于抛物型梯度正则性的一个标准结果（[18, 定理 1.1]），从而由 (3.20)、(3.21) 和 (3.22) 推出，(3.18) 确实对某个适当小的 $\alpha \in (0,1)$ 以及某个充分大的 $C > 0$ 成立。□

为了在引理 3.8 与推论 3.5 的估计之间准备一个合适的插值，同时也为下文引理 3.13 中处理温度变量的类似论证做准备，我们给出一个 Gagliardo–Nirenberg 型不等式的简短证明；除所涉常数的显式信息外，该不等式本质上是众所周知的：

引理 3.9 设 $\alpha \in (0,1)$ 且 $p \in [1,\infty)$。则对每个 $\varphi \in C^\alpha(\Omega)$,

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \le \frac{p\alpha+1}{(p\alpha)^{\frac{p\alpha}{p\alpha+1}}}\cdot[\varphi]_{\alpha;\overline{\Omega}}^{\frac{1}{p\alpha+1}}\cdot\|\varphi\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p\alpha}{p\alpha+1}} + \frac{p\alpha+1}{p\alpha|\Omega|^{\frac{1}{p}}}\cdot\|\varphi\|_{L^p(\Omega)}, \tag{3.23}$$

其中我们已令

$$[\psi]_{\alpha;\overline{\Omega}} := \sup_{\substack{x\in\overline{\Omega},y\in\overline{\Omega}\\ x\neq y}} \frac{|\psi(x)-\psi(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

对于 $\psi \in C^\alpha(\overline{\Omega})$。

PROOF. 我们令

$$d := (p\alpha)^{-\frac{p}{p\alpha+1}}, \tag{3.24}$$

并且对于 $\varphi \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$，我们进一步简记 $I := \|\varphi\|_{L^p(\Omega)}$ 和 $H := [\varphi]_{\alpha;\Omega}$，注意到 $H \neq 0$，因此我们可以设 $\delta := \min\{d \cdot (\frac{I}{H})^{\kappa}, |\Omega|\}$，其中 $\kappa := \frac{p}{p\alpha+1}$。于是，由于 $\delta \leq |\Omega|$，对于每个固定的 $x \in \Omega$，我们可以找到一个子区间 $\Omega_0 = \Omega_0(x) \subset \Omega$，使得 $|\Omega_0| = \delta$ 且 $x \in \overline{\Omega_0}$。又由于 φ 的连续性，我们还可以选取 $x_0 = x_0(x) \in \Omega_0$，满足

$$I^p \geq \int_{\Omega_0} |\varphi(y)|^p dy = \delta |\varphi(x_0)|^p,$$

使得 $|\varphi(x_0)| \leq \delta^{-\frac{1}{p}} I$。由于 $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq |x - x_0|^{\alpha} \cdot H \leq \delta^{\alpha} H$，并且 $x_0 \in \Omega_0$，因此我们得到

$$|\varphi(x)| \leq |\varphi(x_0)| + |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \delta^{-\frac{1}{p}} I + \delta^{\alpha} H, \tag{3.25}$$

这在 $|\Omega| \geq d \cdot (\frac{I}{H})^{\kappa}$ 的情况下意味着

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &\leq d^{-\frac{1}{p}} \cdot \Big(\frac{I}{H}\Big)^{-\frac{\kappa}{p}} I + d^{\alpha} \cdot \Big(\frac{I}{H}\Big)^{\alpha\kappa} H \\ &= (d^{-\frac{1}{p}} + d^{\alpha}) H^{\frac{1}{p\alpha+1}} I^{\frac{p\alpha}{p\alpha+1}}, \end{aligned} \tag{3.26}$$

因为根据 κ 的选择，$\frac{\kappa}{p} = 1 - \alpha\kappa = \frac{1}{p\alpha+1}$ 和 $1 - \frac{\kappa}{p} = \alpha\kappa = \frac{p\alpha}{p\alpha+1}$。由 (3.24) 可知，$d^{-\frac{1}{p}} + d^{\alpha} = (p\alpha)^{\frac{1}{p\alpha+1}} + (p\alpha)^{-\frac{p\alpha}{p\alpha+1}} = (p\alpha)^{-\frac{p\alpha}{p\alpha+1}}(p\alpha+1)$，因此在这种情况下，我们由 (3.26) 得到 (3.23)。反之，若 $|\Omega| < d \cdot (\frac{I}{H})^{\kappa}$，从而 $\delta = |\Omega|$，则 $H < d^{\frac{1}{\kappa}} |\Omega|^{-\frac{1}{\kappa}} I$，因此 (3.25) 保证

$$|\varphi(x)| \leq \Big\{ |\Omega|^{-\frac{1}{p}} + |\Omega|^{\alpha} \cdot d^{\frac{1}{\kappa}} |\Omega|^{-\frac{1}{\kappa}} \Big\} \cdot I,$$

并由此在任何此类情况下也推出 (3.23)，因为 $\alpha - \frac{1}{\kappa} = -\frac{1}{p}$ 和 $1 + d^{\frac{1}{\kappa}} = 1 + (p\alpha)^{-1} = \frac{p\alpha+1}{p\alpha}$。□

注。通过初等极小化可知，(3.24) 中的数 d 满足

$$d^{-\frac{1}{p}} + d^{\alpha} = \min_{\xi>0} \big(\xi^{-\frac{1}{p}} + \xi^{\alpha}\big).$$

The因此，(3.23) 是从 (3.25) 所能得到的最佳结论。
事实上，由此我们可以改进推论 3.5 中关于拓扑部分的衰减结论。

引理 3.10 假设 *(1.6)*、*(1.7)* 以及 *(1.12)* 成立。那么存在 $\beta > 0$ 和 $C > 0$，使得

$$\|v_x(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq Ce^{-\beta t} \qquad \textit{for all } t > 2. \tag{3.27}$$

PROOF. 我们首先应用引理 3.8，选取 $\alpha > 0$ 和 $c_1 > 0$，使得

$$\|v_x(\cdot,t)\|_{C^{\alpha}(\overline{\Omega})} \leq c_1 \qquad \text{for all } t > 2, \tag{3.28}$$

而推论 3.5 给出了满足以下条件的 $\beta_1 > 0$ 和 $c_2 > 0$

$$\|v_x(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \le c_2 e^{-\beta_1 t} \qquad \text{for all } t > 0. \tag{3.29}$$

随后，我们依靠引理 3.9 以如下方式选取 $c_3 > 0$ in:

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \le c_3 \|\varphi\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}^{\frac{1}{2\alpha+1}} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}} + c_3 \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \qquad \text{for all } \varphi \in C^\alpha(\overline{\Omega}),$$

由此可从 (3.28) 和 (3.29) 得出

$$\|v_x\|_{L^\infty(\Omega)} \le c_3 \cdot c_1^{\frac{1}{2\alpha+1}} \cdot \left(c_2 e^{-\beta_1 t}\right)^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}} + c_3 c_2 e^{-\beta_1 t} \qquad \text{for all } t > 2,$$

这意味着 (3.27) 成立，其中 $C := c_1^{\frac{1}{2\alpha+1}} c_2^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}} c_3 + c_2 c_3$ 和 $\beta := \frac{2\alpha\beta_1}{2\alpha+1}$。 □

结合引理 3.4 和引理 3.2，尤其可知 (2.5) 中的热源最终有界，因此可以再次应用标准抛物型理论，推导出 Θ_x 也满足 H¨older 估计。

引理 3.11 若满足 *(1.6)*、*(1.7)* 和 *(1.12)*，则存在 $\alpha > 0$ 和 $C > 0$，使得

$$\|\Theta_x\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{\Omega}\times[t_0,t_0+1])} \le C \qquad \textit{for all } t_0 > 3. \tag{3.30}$$

Proof. (1.4) 中的第二个方程可改写为

$$\Theta_t = D\Theta_{xx} + h(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \tag{3.31}$$

其中，引理 3.4、引理 3.10 和引理 3.2 尤其确保 $h(x,\ t) := \gamma(\Theta(x,\ t))(v_x(x,\ t) - au_x(x,\ t))^2, (x,\ t) \in \Omega \times (0,\ \infty)$ 定义了一个函数 $h \in L^\infty(\Omega \times (2,\ \infty))$。再次采用与引理 3.6 中类似的适当截断过程，我们便可通过再应用一次在 [18,定理 1.1]中建立的梯度 H¨older 估计，由 (3.31) 推出 (3.30)。□

此外，关于较粗拓扑的一些衰减信息也可以补充这一有界性:

引理 3.12 设 *(1.6)*、*(1.7)* 和 *(1.12)* 成立。那么，对于某些 $\beta > 0$ 和 $C > 0$，有

$$\int_\Omega \Theta_x^2(\cdot,t) \le Ce^{-\beta t} \qquad \textit{for all } t > 3. \tag{3.32}$$

对 (1.4) 中的第二个方程直接进行测试可知，由于 (2.4) 和杨氏不等式,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \Theta_x^2 + D\int_\Omega \Theta_{xx}^2 &= -\int_\Omega \gamma(\Theta)(v_x - au_x)^2\Theta_{xx} \\
&\le \frac{D}{2}\int_\Omega \Theta_{xx}^2 + \frac{1}{2D}\int_\Omega \gamma^2(\Theta)(v_x - au_x)^4 \\
&\le \frac{D}{2}\int_\Omega \Theta_{xx}^2 + \frac{4}{D}\int_\Omega \gamma^2(\Theta)v_x^4 + \frac{4a^4}{D}\int_\Omega \gamma^2(\Theta)u_x^4 \qquad \text{for all } t > 0.
\end{aligned}$$

再次利用引理 3.4 和 (1.6) 可知， $\gamma(\Theta)$ 在 $\Omega \times (0, \infty)$ 中有界，因此我们推得存在 $c_1 > 0$ 使得

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \Theta_x^2 + D\int_\Omega \Theta_{xx}^2 \le c_1\int_\Omega v_x^4 + c_1\int_\Omega u_x^4 \qquad \text{for all } t > 0,$$

其中根据庞加莱不等式 (1.11),

$$D\int_\Omega \Theta_{xx}^2 \ge D\lambda_1\int_\Omega \Theta_x^2 \qquad \text{for all } t > 0,$$

并且当 处，引理 3.2 结合引理 3.10 得到 $\beta_1 \in (0, D\lambda_1)$ 和 $c_2 > 0$ 使得 t

$$c_1\int_\Omega v_x^4 + c_1\int_\Omega u_x^4 \le c_2 e^{-\beta_1 t} \qquad \text{for all } t > 3.$$

因此,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \Theta_x^2 + D\lambda_1\int_\Omega \Theta_x^2 \le c_2 e^{-\beta_1 t} \qquad \text{for all } t > 3,$$

从而

$$\int_\Omega \Theta_x^2(\cdot,t) \le e^{-\lambda_1(t-3)}\int_\Omega \Theta_x^2(\cdot,3) + c_2\int_3^t e^{-D\lambda_1(t-s)}e^{-\beta_1 s}ds \qquad \text{for all } t > 3.$$

估计

$$\begin{aligned}\int_3^t e^{-D\lambda_1(t-s)}e^{-\beta_1 s}ds &= e^{-D\lambda_1 t}\int_3^t e^{(D\lambda_1-\beta_1)s}ds \\ &= \frac{1}{D\lambda_1-\beta_1}\big(e^{-\beta_1 t} - e^{-3\beta_1}e^{-D\lambda_1(t-3)}\big) \\ &\le \frac{1}{D\lambda_1-\beta_1}e^{-\beta_1 t} \qquad \text{for all } t > 3,\end{aligned}$$

由此，令 $\beta := \beta_1$，并适当取足够大的 $C > 0$，即可得到 (3.32)。 □

类似于引理 3.10 中的插值，进而得到以下结果。

引理 3.13 假设 *(1.6)*、*(1.7)* 和 *(1.12)* 成立。则存在 $\beta > 0$ 和 $C > 0$，使得

$$\|\Theta_x(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le Ce^{-\beta t} \qquad \textit{for all } t > 3. \tag{3.33}$$

Proof. 根据引理 3.9 中陈述的 Gagliardo-Nirenberg不等式，这可由引理 3.11 中的有界性结果与引理 3.12 中得到的衰减估计之间的插值推出，推理方式与引理 3.10 中的论证相当类似。□

由于 $0 \le t \mapsto \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \Theta(\cdot,t)$ 单调趋近于一个有限极限，引理 3.13 表明 Θ 会以指数速度稳定到这个空间齐次极限。

引理 3.14 若 *(1.6)*、*(1.7)* 和 *(1.12)* 成立，则存在 $\Theta_\infty \geq 0$、 $\beta > 0$ 和 $C > 0$，使得

$$\left| \int_\Omega \Theta(\cdot, t) - \Theta_\infty \right| \leq Ce^{-\beta t} \qquad \textit{for all } t > 0. \tag{3.34}$$

Proof. 由 (1.4) 和 (2.4) 可知

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \Theta = \int_\Omega \gamma(\Theta)(v_x - au_x)^2 \qquad \text{for all } t > 0,$$

由此再次利用引理 3.4、引理 3.2 和引理 3.10，我们推知存在 $\beta > 0$ 和$c_1 > 0$ 使得

$$0 \leq \frac{d}{dt} \int_\Omega \Theta \leq c_1 e^{-\beta t} \qquad \text{for all } t > 2. \tag{3.35}$$

因此，对某个 $\Theta_\infty \geq 0$ 我们有

$$\int_\Omega \Theta(\cdot, t) \nearrow \Theta_\infty \qquad \text{as } t \to \infty,$$

其中再次由 (3.35),

$$\Theta_\infty - \int_\Omega \Theta(\cdot, t) = \int_t^\infty \frac{d}{dt} \int_\Omega \Theta(\cdot, s) ds \leq c_1 \int_t^\infty e^{-\beta s} ds = \frac{c_1}{\beta} e^{-\beta t} \qquad \text{for all } t > 2.$$

由于 $\Theta \in \Omega \times [0, 2]$ 显然有界，这已经得出了所述结论。 □

剩下只需简单汇总：

Proof 定理 1.3。虽然 (1.13) 和 (1.14) 可直接由引理 3.2、引理 3.10 及 (3.17) 得出，但 (1.15) 中的结论是引理 3.13 与引理 3.14 相结合的结果。 □

声明

经费资助。 作者感谢德国研究联合会（项目编号 444955436）的支持。

利益冲突　　声明。 作者声明他们不存在利益冲突 .

并且他们没有需要披露的相关财务利益或非财务利益 .

数据可用性声明。 本文不适用数据共享，因为本研究未生成或分析任何数据集。

参考文献

[1] Amann, H.: 非齐次线性与拟线性椭圆型和抛物型边值问题。 载于：《函数空间、微分算子与非线性分析》（弗里德里希罗达，1992年），Teubner数学文集第133卷，Teubner，斯图加特，第9-126页（1993年）

[2] Bies, P.M., Cieślak, T.: 具有正温度的一维热弹性问题的全时间正则唯一解。*SIAM*数学分析杂志*55*，*7024-7038*（*2023*年）[3] Bies, P.; Cieślak, T.: 受热弦的时间渐近性。数学年刊*391*，*5941-5964*（*2025*年）[4] Bies, P.M., Cieślak, T., Fuest, M., Lankeit, J., Muha, B., Trifunovic, S.: 多维热弹性中正则解的存在性、唯一性与长时间渐近行为。预印本，*arxiv2507.20794v2*[5] Blanchard, D., Guibé, O.: 热黏弹性中一个非线性系统的解的存在性。高等微分方程*5*，*1221-1252*（*2000*年）[6] Cieślak, T., Muha, B., Trifunović, S.A.: 非线性三维热弹性中的全局弱解。变分学与偏微分方程*63*，*26*（*2024*年）[7] Claes, L., Lankeit, J., Winkler, M.: 压电材料中声波产热的模型：全局大数据解。数学模型与应用科学方法*35*，*2465-2512*（*2025*年）[8] Claes, L., Winkler, M.: 通过 $W^{1,p}$ 能量分析描述拟线性双曲-抛物系统的光滑小数据解。预印本[9] Dafermos, C.M.: 一维热黏弹性方程初边值问题的全局光滑解。*SIAM*数学分析杂志*13*，*397-408*（*1982*年）[10] Dafermos, C.M., Hsiao, L.: 一维非线性热黏弹性中的全局光滑热机械过程。非线性分析*6*，*435-454*（*1982*年）[11] Fricke, T.: 涉及一般温度依赖性粘性波动方程的局部与全局可解性。应用数学学报，待刊[12] Friesen, O., Claes, L., Scheidemann, C., Feldmann, N., Hemsel, T., Henning, B.: 利用环形试样估计温度依赖的压电材料参数。载于：*2023*年国际超声学大会，北京，中国，第*2022*卷，*012125*。*IOP*出版社，*2024*年[13] Gubinyi, Z., Batur, C., Sayir, A., Dynys, F.: 高温下*PZT*压电陶瓷的电学性质。电陶瓷学杂志*20*，*95-105*（*2007*年）[14] Hsiao, L., Luo, T.: 一维非线性热黏弹性方程解的大时间行为。应用数学季刊*56*，*201-219*（*1998*年）[15] Jiang, S.: 一维非线性热黏弹性初边值问题的全局大解。应用数学季刊*51*，*731-744*（*1993*年）[16] Kaltenbacher, B., Lasiecka, I., Pospieszalska, M. K.: 高强度超声中出现的非线性*Jordan-Moore-Gibson-Thompson*方程的适定性与能量指数衰减。数学模型与应用科学方法*22*，*1250035*（*2012*年）[17] Kim, J.U.: 初始数据属于 BV 和 L^1时一维热黏弹性方程解的整体存在性。比萨高等师范学校年刊，科学类*10*，*357-429*（*1983*年）[18] Lieberman, G.M.: $H^{\ddot{}}$一致抛物型方程在余法向边界条件下解的梯度的霍尔德连续性。纯粹与应用数学年刊*148*，*77-99*（*1987*年）[19] Meyer, F.: 具有温度弱依赖参数的热黏弹性演化问题的大时间存在性。预印本[20] Mielke, A., Roubíček, T.: 大应变下*Kelvin-Voigt*流变中的热黏弹性。理性力学与分析档案*238*，*1-45*（*2020*年）

[21] Owczarek, S., Wielgos, K.: 关于具有非线性阻尼力和 L^1温度数据的热黏弹性模型。《数学方法与应用科学》*46*，*9966-9999*（*2023*）[22] Porzio, M.M., Vespri, V.: 某些双重非线性退化抛物方程局部解的 *Hölder* 估计。《微分方程杂志》*103*，*146-178*（*1993*年）[23] Racke, R., Zheng, S.: 非线性热黏弹性中的整体存在性和渐近行为。《微分方程杂志》*134*，*46-67*（*1997*）[24] Roubiček, T.: 小应变下具有 L^1数据的热黏弹性。《*Quart.Appl.Math.*》*67*，*47-71*（*2009*）[25] Slemrod, M: 一维非线性热弹性中经典光滑解的整体存在性、唯一性和渐近稳定性。《理性力学与分析文献》*76*，*97-133*（*1981*）[26] Watson, S.J.: 一维非线性热粘弹性初边值问题的整体唯一可解性。《*Arch. Ration. Mech. Anal.*》*153*，*1-37*（*2000*）
[27] Winkler, M.: 具有温度依赖参数的、推广一维热粘弹性演化系统中的粗糙数据。《应用数学与优化》*91*，*44*（*2025*）[28] Winkler, M.: 温度依赖系数驱动的一维热粘弹性热点形成。预印本