arXiv:2602.04005v1 [math.AP] 3 Feb 2026

标准线性固体中热粘弹性演化的拟线性Moore-Gibson-Thompson型模型的局部强解

Leander Claes*帕德博恩大学¨电气工程与信息技术研究所¨33098 帕德博恩，德国

Michael Winkler†帕德博恩大学¨数学研究所¨33098 帕德博恩，德国

摘要

本稿件研究如下演化系统

$$\begin{cases} u_{ttt} + \alpha u_{tt} = \big(\gamma(\Theta)u_{xt}\big)_x + \big(\widehat{\gamma}(\Theta)u_x\big)_x, \\ \Theta_t = D\Theta_{xx} + \Gamma(\Theta)u_{xt}^2, \end{cases}$$

它作为标准线性固体型一维粘弹性介质中声波传播期间热生成的简化模型而出现。

在假设 $D > 0$ 和 $\alpha \geq 0$成立，且 γ，$\widehat{\gamma}$ 和 Γ 在 $[0, \infty$ 上满足 $\gamma > 0$，$\widehat{\gamma} > 0$ 和 $\Gamma \geq 0$ 并具有充分光滑性的条件下，对于正则性适当的初始数据，在强可解性的适当框架中，推导出相关诺伊曼问题的解的局部存在性与唯一性结论。

关键词： 非线性声学；Moore-Gibson-Thompson 方程；热黏弹性**MSC 2020：** 74H20（主要）；74F05、35L05（次要）

*claes@emt.uni-paderborn.de
†michael.winkler@math.uni-paderborn.de

1 引言

关于声波传播过程中热量生成模型的数学分析，在过去几十年里取得了长足进展。除了经典的热弹性 ([56], [49], [51]) 和热黏弹性 ([19], [53], [8], [52]) 系统已在 20 世纪 80 年代和 90 年代得到深入研究外，近年来，文献也探讨了这样一些模型：其描述相应力学部分的演化方程因包含某些依赖于解的退化，或因含有三阶时间导数，而不再具有经典波动方程的性质。前一种类型的典型例子包括 Westervelt 型二阶方程。由于存在二次非线性，即使在不存在与温度场耦合的情况下 ([31], [41], [25])，似乎也只有在初始数据足够小的情形下，才建立起了全面的解理论 ([46], [45], [59], [5])；类似的观察也适用于相关的 Kuznetsov 方程类 ([43], [20])。

Moore-Gibson-Thompson 型声学模型（[44], [57]）因包含三阶时间导数这一核心特征，仅此一点便带来了显著的挑战。因此，即使在线性模型层面，也会出现稳定性与不稳定性之间的两分现象；在原型模型中，

$$\tau u_{ttt} + \alpha u_{tt} = \widehat{\gamma}\Delta u_t + \gamma \Delta u, \tag{1.1}$$

对于常数正参数 τ，α，$\widehat{\gamma}$和 γ，当满足条件 $\alpha\widehat{\gamma} > \tau\gamma$时会出现大时间衰减，而当 $\alpha\widehat{\gamma} < \tau\gamma$([32], [39], [22], [12]时则会出现无限时间增长；相关柯西问题见 [14]和 [12]（ $\mathbb{R}^n$），涉及记忆项变体的研究则见 [37], [38], [21]和 [3] ）。

迄今为止，非线性 Moore-Gibson-Thompson 模型的分析似乎主要集中于半线性情形，其中包括各种类型的强迫项，这些强迫项依赖于解本身或其导数。一个典型代表是 Jordan-Moore-Gibson-Thompson 方程

$$\tau u_{ttt} + \alpha u_{tt} = \widehat{\gamma}\Delta u_t + \gamma \Delta u + k(u^2)_{tt}, \tag{1.2}$$

已知在适当小的初始数据下，该模型存在整体解：在耗散区域内的有界区域中 $\alpha\widehat{\gamma} > \tau\gamma$ ([33])，或将其作为全空间上的柯西问题处理时 ([50], [54])；另一方面，近期的一项结果表明，对于某些解，其 u范数会在有限时间内于 L^∞ 发生爆破 ([47])。关于涉及其他类型非线性项（部分依赖于解的梯度）的相关研究，例如， [34], 中关于小数据解整体存在性的研究，以及 [13], [15], [12], [42]和 [16], 中关于不存在性与爆破的研究。

一个含有温度相关项的 Moore-Gibson-Thompson 动力学拟线性系统。本文稿件聚焦于一类模型，这类模型可视为将 (1.1) 扩展到弹性参数可能依赖于一个外部变量的情形，而该变量本身也是一个额外的未知量。此类耦合已在 Westervelt-Pennes 系统的背景下得到研究：其中描述声压 u 的力学部分可通过令 $\tau = 0$ ，并将 γ 和 k 视为未知温度的函数而得到；该未知温度满足一个带有适当源项的热方程（[46], [45], [6], [5], [11]）；其他拟线性例子，

同样也只涉及最高二阶的时间导数，出现在对 Kelvin-Voigt 型固体材料中声波传播与温度场相互作用的建模中，且其弹性参数与温度相关（[17], [18], [26], [40], [61], [62]）。然而，迄今为止，将热动力学与涉及三阶时间导数的 Moore-Gibson-Thompson 型方程（如 (1.1)）耦合的模型研究似乎主要聚焦于线性系统（部分示例见[2], [23], [58] 和 [1] ）。近期出现了一个显然是唯一的例外，研究的是所谓的 Moore-Gibson-Thompson-Pennes 系统，其中允许 (1.2) 中的系数 $\widehat{\gamma}$、γ 和 k 随温度变量发生一定变化，而该变量的演化又由一个含有依赖于 u_t的源项的热方程所支配；文献 [7] 推导出了相应的结果，证明从适当小的初始数据出发，解具有局部存在性。

为描述我们具体的研究对象及其应用背景，考虑一种黏弹性性质由 Zener 型模型（[28]）描述的材料。机械应力 T 与应变 S 之间的关系可表示为

$$T + \tau_{\mathrm{rel}} T_t = c(\tau_{\mathrm{ret}} S_t + S), \tag{1.3}$$

其中，松弛时间常数和迟滞时间常数（τ_{rel} 和 τ_{ret}）以及刚度 c。代入一维运动方程，该方程根据下式通过密度 ρ 将机械应力与位移 u 联系起来

$$T_x = \rho u_{tt} \tag{1.4}$$

以及一维情形下机械应变的本构方程,

$$S = \rho u_x, \tag{1.5}$$

可得 Moore-Gibson-Thompson 方程

$$\tau_{\mathrm{rel}} u_{ttt} + u_{tt} = \left(\frac{\tau_{\mathrm{rel}} c}{\rho} u_{xt} \right)_x + \left(\frac{c}{\rho} u_x \right)_x \tag{1.6}$$

关于位移 u的方程。假设 c 取决于温度场 Θ，我们对微分方程 u采用如下参数化形式:

$$u_{ttt} + \alpha u_{tt} = (\gamma(\Theta) u_{xt})_x + (\widehat{\gamma}(\Theta) u_x)_x. \tag{1.7}$$

这意味着 $\gamma(\Theta) \propto \widehat{\gamma}(\Theta)$，不过，若要考虑温度相关黏弹性性质，则可以取消这一假设。

温度场的影响以扩散方程的形式加以考虑。由于此处的应用重点是声波传播等高频周期过程，因此可以忽略线性直接热弹性和逆热弹性的影响，因为它们的可逆性质不会在时间平均意义上导致机械能向热能的净转移。然而，More-Gibson-Thompson 方程（1.7）中的奇数阶导数所引起的机械损耗是不可逆的，因此会导致长期温度升高。为量化转化能量，对材料所做的功 P 表示为

$$P = T \cdot S_t \tag{1.8}$$

([9])。代入 Zener 型模型所提供的材料描述（方程 1.3），可得恒等式

$$P = cS \cdot S_t + \tau_{\mathrm{ret}} c S_t^2 - \tau_{\mathrm{rel}} S_t \cdot T_t. \tag{1.9}$$

该表达式中的第一项（cSS_t）是材料中储存的势机械能，容易证明，在谐波过程中其平均值为零。其余两项描述机械损耗，根据能量守恒，这些损耗会转化为热能。根据物理上合理的条件 $\tau_{\mathrm{rel}} < \tau_{\mathrm{ret}}$ ([9])，并假设弹性行为相较于机械损耗占主导地位，我们可以近似处理（1.9）中的 $T_t \approx cS_t$ ，从而得到机械损耗密度 Q 的单项表达式，它与热源密度相同

$$Q = (\tau_{\mathrm{ret}} - \tau_{\mathrm{rel}}) c S_t^2, \tag{1.10}$$

现在也可以用机械位移 u 来表示

$$Q = (\tau_{\mathrm{ret}} - \tau_{\mathrm{rel}}) c u_{xt}^2 \tag{1.11}$$

而无需分析积分微分方程。将热源密度代入温度场 Θ 的一维扩散方程，可得热方程

$$\Theta_t = D\Theta_{xx} + (\tau_{\mathrm{ret}} - \tau_{\mathrm{rel}}) c u_{xt}^2 \tag{1.12}$$

仅含局部热源；因此，再假设弹性性质依赖于温度，我们最终得到

$$\Theta_t = D\Theta_{xx} + \Gamma(\Theta) u_{xt}^2. \tag{1.13}$$

在（1.7）—（1.13）的基础上补充合理的初始条件和边界条件后，我们便得到如下问题

$$\begin{cases} u_{ttt} + \alpha u_{tt} = \big(\gamma(\Theta) u_{xt}\big)_x + \big(\widehat{\gamma}(\Theta) u_x\big)_x, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \Theta_t = D\Theta_{xx} + \Gamma(\Theta) u_{xt}^2, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u_x = 0, \quad \Theta_x = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_{0t}(x), \quad u_{tt}(x,0) = u_{0tt}(x), \quad \Theta(x,0) = \Theta_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.14}$$

在有界开区间 $\Omega \subset \mathbb{R}$ 上，其中 $D > 0$ 和 $\alpha \geq 0$ 是常参数， γ、 $\widehat{\gamma}$ 和Γ 是在 $[0, \infty$ 上给定的函数，而 u_0 、 u_{0t} 、 u_{0tt} 和 Θ_0 是位移变量 $u = u(x$ 、 $t)$ 、其导数 u_t 和 u_{tt} 以及温度场 $\Theta = \Theta(x$ 、 $t)$ 的给定初始分布。在物理系统中， u中的激励项可通过压电介质中的电场实现，因此本稿件中的研究适用于热压电现象的分析。

尤其是当函数 γ、$\widehat{\gamma}$ 和 Γ 可以反映弹性参数（[27]）实验观测到的温度依赖性，且在数学上极端地允许其无界时，我们并不预期 (1.14) 存在整体解；关于在相应的 Kelvin-Voigt 型简化版 (1.14) 中（其中忽略了三阶项 u_{ttt} ），由 $\Gamma = \gamma = \widehat{\gamma}$ 的适当快速增长引发有限时间爆破的严格判定，参见 [62]。

鉴于这一点，本文接下来的主要结果在这方面可谓基本达到了最优：它断言解的局部存在性与唯一性，并给出一个适当的延拓判据。在表述该结果时以及下文中，给定有界区间 $\Omega \subset \mathbb{R}$和 $p \in (1, \infty]$ 我们令 $W^{2,}{}_{N}^{p}(\Omega) := \{\varphi \in W^{2,p}(\Omega) \mid \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$ 于 $\partial\Omega\}$。

定理 1.1 设 $\Omega \subset \mathbb{R}$ 为有界开区间，设 $D > 0$ 和 $\alpha \geq 0$，并假设

$$\begin{cases} \gamma \in C^2([0,\infty)) \text{ is such that } \gamma > 0 \text{ on } [0,\infty), \\ \widehat{\gamma} \in C^2([0,\infty)) \text{ is such that } \widehat{\gamma} > 0 \text{ on } [0,\infty) \qquad \text{and} \\ \Gamma \in C^1([0,\infty)) \text{ is such that } \Gamma \geq 0 \text{ on } [0,\infty). \end{cases} \tag{1.15}$$

那么，只要

$$\begin{cases} u_0 \in W_N^{2,2}(\Omega), \\ u_{0t} \in W_N^{2,2}(\Omega), \\ u_{0tt} \in W^{1,2}(\Omega) \qquad \text{and} \\ \Theta_0 \in W_N^{2,\infty}(\Omega) \text{ is such that } \Theta_0 \geq 0 \text{ in } \Omega, \end{cases} \tag{1.16}$$

就存在 $T_{max} \in (0,\infty]$，并且存在唯一的一对函数 (u,Θ)

$$\begin{cases} u \in C^0([0,T_{max}); W_N^{2,2}(\Omega)) \qquad \text{and} \\ \Theta \in C^0([0,T_{max}); C^1(\overline{\Omega})) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0,T_{max})) \cap W^{1,\infty}_{loc}(\overline{\Omega} \times [0,T_{max})) \end{cases} \tag{1.17}$$

满足以下条件

$$u_t \in C^0([0,T_{max}); C^1(\overline{\Omega})) \cap L^\infty_{loc}([0,T_{max}); W_N^{2,2}(\Omega)) \tag{1.18}$$

and

$$u_{tt} \in C^0(\overline{\Omega} \times [0,T_{max})) \cap L^\infty_{loc}((0,T_{max}); W^{1,2}(\Omega)), \tag{1.19}$$

即 $\Theta \geq 0$ 属于 $\Omega \times (0,T_{max})$，且 (u,Θ) 在 $\Omega \times (0,T_{max})$ 中构成方程 ***(1.14)*** 的强解，其意义见下文定义 *2.1*；并且

$$\text{if } T_{max} < \infty, \quad \text{then} \quad \limsup_{t \nearrow T_{max}} \Big\{ \|u_t(\cdot,t)\|_{W^{2,2}(\Omega)} + \|u_{tt}(\cdot,t)\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|\Theta(\cdot,t)\|_{W^{2,\infty}(\Omega)} \Big\} = \infty. \tag{1.20}$$

备注。 ii) 与近期针对相关的 Moore-Gibson-Thompson-Pennes 系统得到的存在性结果相比， [7], 定理 1.1 并未对初始数据施加任何小性假设。

ii) 此处限定为一维情形，旨在研究标准线性固体中的热黏弹性演化；在 Zener 型建模的语境下，只有在位移可用标量变量描述的一维情形中，才会产生形式如 (1.7)-(1.13) 的真正双分量系统 $u_\circ$ 然而，从数学角度来看，我们在此指出，针对标量未知量 u和 Θ 的 (1.14) 的高维对应形式，也完全可以纳入随后发展的分析框架；所需修改的主要部分，是提高 (1.16) 中关于 u_0, u_{0t} 和 u_{0tt} 的正则性要求。

2 强解。唯一性

首先，让我们明确下文将要提及的解的概念 .

定义 **2 1** $D > 0$ $\alpha \geq 0$ $\gamma \in C^0[0,\infty$ $\widehat{\gamma} \in C^0[0,\infty$ $\gamma \in$. $C^0[0,\infty$ $u_0 \in W_N^{2,2}$ $u_{0t} \in W_N^{2,2}$ $u_{0tt} \in W^{1,2}$ $0 \leq \Theta_0 \in C^0$ — 设 与 ， 假设 ()、() 与 ()，并设 ,(Ω),(Ω)、,(Ω) 与 (Ω)。则给定 $T \in (0,\infty]$，我们将称一对 (u,Θ) 函数

$$\begin{cases} u \in C^0([0,T);C^1(\overline{\Omega})) \cap L^\infty_{loc}([0,T);W^{2,2}_N(\Omega)) & and \\ \Theta \in C^0(\overline{\Omega}\times[0,T)) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega}\times(0,T)) \cap W^{1,\infty}_{loc}(\overline{\Omega}\times[0,T)) \end{cases} \tag{2.1}$$

一个 强解 在 Ω $\times(0,T)$ 若

$$\begin{cases} u_t \in C^0([0,T);C^1(\overline{\Omega})) \cap L^\infty_{loc}([0,T);W^{2,2}_N(\Omega)) & and \\ u_{tt} \in C^0(\overline{\Omega}\times[0,T)) \cap L^\infty_{loc}([0,T);W^{1,2}(\Omega)), \end{cases} \tag{2.2}$$

若 $\Theta \geq 0$ 属于 Ω $\times(0,\ T)$，若

$$u(\cdot,0)=u_0, \quad u_t(\cdot,0)=u_{0t} \quad and \quad \Theta(\cdot,0)=\Theta_0 \qquad in\ \Omega, \tag{2.3}$$

if

$$-\int_0^T\int_\Omega u_{tt}\varphi_t - \int_\Omega u_{0tt}\varphi(\cdot,0) + \alpha\int_0^T\int_\Omega u_{tt}\varphi = -\int_0^T\int_\Omega \gamma(\Theta)u_{xt}\varphi_x - \int_0^T\int_\Omega \widehat{\gamma}(\Theta)u_x\varphi_x \tag{2.4}$$

对每个 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega^{-}\times[0,T))$，并且若在经典逐点意义下有 $\Theta_t = D\Theta_{xx}+\Gamma(\Theta)u_{xt}^2$ 属于Ω $\times(0,\ T)$ 且 $\Theta_x = 0$ 在 $\partial\Omega \times(0,\ T)$上。

备注。 i) 若在上述设定中，我们选择 $(\zeta_\eta)_{\eta\in(0,T)} \subset C_0^\infty([0,T))$，使得 $\zeta_\eta \equiv 1$在 $[0,\frac{\eta}{2}]$、 $\zeta_\eta' \leq 0$上，并且对所有 $\eta\in(0,T)$都有 supp $\zeta_\eta \subset [0,\eta]$，那么令 $\varphi(x,t) := \zeta_\eta(t)$，其中 $x\in\Omega$ $t\in[0,T)$ 和 $\eta\in(0,\overline{T})$，代入 (2.4) 可知，由于 $\sup_{t\in(0,\eta)}\|u_{tt}(\cdot,t) - u_{tt}(\cdot,0)\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0$ 当 $\eta \searrow 0$ 时，根据 (2.2)，除 (2.3) 外我们还有

$$u_{tt}(\cdot,0) = u_{0tt}.$$

ii) 若进一步假设 γ 和 $\widehat{\gamma}$ 不仅连续，而且属于 $C^1([0,\infty))$，那么对 Ω $\times(0,T)$ 上的每个强解 (u,Θ)，(2.4) 蕴含恒等式 $u_{ttt} + \alpha u_{tt} = \gamma(\Theta)u_{xxt} + \gamma'(\Theta)\Theta_x u_{xt} + \widehat{\gamma}(\Theta)u_{xx} + \widehat{\gamma}'(\Theta)\Theta_x u_x$ 在 $\Omega\times(0,T)$ 上的分布意义下成立。因此，(2.1) 和 (2.2) 中的正则性，尤其是 (2.2) 中对 Θ_x 有界性的要求，确保在这种情况下，

$$u_{ttt} \in L^\infty_{loc}([0,T);L^2(\Omega)).$$

在迈向定理 1.1 的第一步中，通过精心设计的测试方法，我们可以确保在任意固定的时间区间内，此类解至多存在一个。

引理 2.2 设 $D>0$ 和 $\alpha\geq 0$，并假设 *(1.15)* 和 *(1.16)* 成立。那么对于每个 $T>0$，在 Ω $\times(0,T)$ 中，按照定义 *2.1* 的意义，*(1.14)* 至多存在一个强解。

∼Proof. 假设 $(u,\ \Theta)$ 和 $(\widetilde{u},\ \Theta)$ 是 $\Omega\ \times(0,\ T)$ 中 (1.14) 的两个强解。我们任取一个 $T_0 \in (0,\ T)$, 并令

$$d(x,t) := \begin{cases} u(x,t) - \widetilde{u}(x,t), & x \in \overline{\Omega},\ t \in [0, T_0), \\ 0, & x \in \overline{\Omega},\ t < 0, \end{cases} \tag{2.5}$$

以及

$$\delta(x,t) := \Theta(x,t) - \widetilde{\Theta}(x,t), \qquad x \in \overline{\Omega},\ t \in [0, T_0), \tag{2.6}$$

并注意到，根据定义 2.1，所有函数 $d,\ d_t,\ d_{tt}$ 和 δ 在各自的定义域上连续；显然可知，不仅对所有$x \in \Omega,\ \ d_{tt}(x,\ 0) = 0$ ，而且对所有 $x \in \Omega,\ \ \delta(x,\ 0) = 0$ 也成立。特别地，应用两次 (2.4) 可知，对每个 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \times [0, T_0))$,

$$\begin{aligned} -\int_0^{T_0}\int_\Omega d_{tt}\varphi_t + \alpha\int_0^{T_0}\int_\Omega d_{tt}\varphi \ &= \ -\int_0^{T_0}\int_\Omega \gamma(\Theta)u_{xt}\varphi_x + \int_0^{T_0}\int_\Omega \gamma(\widetilde{\Theta})\widetilde{u}_{xt}\varphi_x \\ &\quad -\int_0^{T_0}\int_\Omega \widehat{\gamma}(\Theta)u_x\varphi_x + \int_0^{T_0}\int_\Omega \widehat{\gamma}(\widetilde{\Theta})\widetilde{u}_x\varphi_x \\ &= \ -\int_0^{T_0}\int_\Omega \gamma(\Theta)d_{xt}\varphi_x - \int_0^{T_0}\int_\Omega [\gamma(\Theta) - \gamma(\widetilde{\Theta})]\widetilde{u}_{xt}\varphi_x \\ &\quad -\int_0^{T_0}\int_\Omega \widehat{\gamma}(\Theta)d_x\varphi_x - \int_0^{T_0}\int_\Omega [\widehat{\gamma}(\Theta) - \widehat{\gamma}(\widetilde{\Theta})]\widehat{u}_x\varphi_x. \end{aligned} \tag{2.7}$$

为恰当地利用这一点，我们任取 $t_0 \in (0,\ T_0)$，并对 $\eta \in (0,\ T_0 - t_0)$，令 $\zeta_\eta \in W^{1,\ \infty}(\mathbb{R})$ 定义为

$$\zeta_\eta(t) := \begin{cases} 1, & t \in (-\infty, t_0), \\ 1 - \frac{t-t_0}{\eta}, & t \in [t_0, t_0 + \eta], \\ 0, & t > t_0 + \eta. \end{cases}$$

随后，直接运用逼近论证可知，(2.7) 实际上可推广至适用于

$$\varphi(x,t) \equiv \varphi_{\eta,h}(x,t) := \zeta_\eta(t) \cdot \frac{1}{h}\int_{t-h}^{t} d_{tt}(x,s)ds, \qquad x \in \overline{\Omega},\ t \in [0, T_0), \tag{2.8}$$

对于任意这样的 η 及任意的 $h \in (0,\ 1)$，这是因为 $\varphi_{\eta,\ h} \equiv 0$ 属于 $\Omega\ \times(t_0 + \eta,\ T_0)\ \neq \emptyset$，且由 (2.2) 可知，$d_{xt}$ 和 d_x 属于 $L^\infty(\Omega\ \times(0,\ T_0)) \subset L^1(\Omega\ \times(0,\ T_0))$ 和 $d_{xtt} \in L^\infty((0,\ T_0); L^2(\Omega)) \subset L^1(\Omega\ \times(0,\ T_0))$，因此 $\varphi_x \in L^1(\Omega\ \times(0,\ T_0))$；此外，还因为

$$\varphi_t(x,t) = \zeta_\eta(t) \cdot \frac{d_{tt}(x,t) - d_{tt}(x,t-h)}{h} + \zeta_\eta'(t) \cdot \frac{1}{h}\int_{t-h}^{t} d_{tt}(x,s)ds \qquad \text{for all } x \in \Omega \text{ and } t \in (0, T_0) \tag{2.9}$$

因此，显然有 $\varphi_t \in L^1(\Omega\ \times(0,\ T_0))$。由于

$$\varphi_x(x,t) = \zeta_\eta(t) \cdot \frac{d_{xt}(x,t) - d_{xt}(x,t-h)}{h} \qquad \text{for all } x \in \Omega \text{ and } t \in (0, T_0),$$

因此，由（2.7）可得

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{h}\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta(t)d_{tt}^2(x,t)dxdt+\frac{1}{h}\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta(t)d_{tt}(x,t)d_{tt}(x,t-h)dxdt\\
&\quad -\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta'(t)d_{tt}(x,t)\cdot\left\{\frac{1}{h}\int_{t-h}^t d_{tt}(x,s)ds\right\}dxdt\\
&\quad +\alpha\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta(t)d_{tt}(x,t)\cdot\left\{\frac{1}{h}\int_{t-h}^t d_{tt}(x,s)ds\right\}dxdt\\
=\;& -\frac{1}{h}\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta(t)\gamma(\Theta(x,t))d_{xt}^2(x,t)dxdt+\frac{1}{h}\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta(t)\gamma(\Theta(x,t))d_{xt}(x,t)d_{xt}(x,t-h)dxdt\\
&\quad -\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta(t)\cdot[\gamma(\Theta(x,t))-\gamma(\widetilde{\Theta}(x,t))]\widetilde{u}_{xt}(x,t)dxdt\cdot\left\{\frac{1}{h}\int_{t-h}^t d_{xtt}(x,s)ds\right\}dxdt\\
&\quad -\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta(t)\widehat{\gamma}(\Theta(x,t))d_x(x,t)\cdot\left\{\frac{1}{h}\int_{t-h}^t d_{xtt}(x,s)ds\right\}dxdt\\
&\quad -\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta(t)\cdot[\widehat{\gamma}(\Theta(x,t))-\widehat{\gamma}(\widetilde{\Theta}(x,t))]\widetilde{u}_x(x,t)\cdot\left\{\frac{1}{h}\int_{t-h}^t d_{xtt}(x,s)ds\right\}dxdt
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

对所有 $\eta\in(0,\ T_0-t_0)$ 和 $h\in(0,\ 1)$ 均成立。这里，d_{tt} 的连续性确保

$$
\sup_{(x,t)\in\Omega\times(0,T_0)}\left|\frac{1}{h}\int_{t-h}^t d_{tt}(x,s)ds-d_{tt}(x,t)\right|\to 0\qquad \text{as } h\searrow 0,
$$

而鉴于包含关系 $d_{xtt}\in L^2(\Omega\times(-1,\ T_0))$，如（2.2）所示，斯捷克洛夫平均（[24]）的一个众所周知的逼近性质表明

$$
\int_0^{t_0+\eta}\int_\Omega\left|\frac{1}{h}\int_{t-h}^t d_{xtt}(x,s)ds-d_{xtt}(x,t)\right|^2dxdt\to 0\qquad \text{as } h\searrow 0.
$$

因此，在（2.10）中有

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta'(t)d_{tt}(x,t)\cdot\left\{\frac{1}{h}\int_{t-h}^t d_{tt}(x,s)ds\right\}dxdt+\alpha\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta(t)d_{tt}(x,t)\cdot\left\{\frac{1}{h}\int_{t-h}^t d_{tt}(x,s)ds\right\}dxdt\\
&\quad\to\; -\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta' d_{tt}^2+\alpha\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta d_{tt}^2\qquad \text{as } h\searrow 0
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta(t)\cdot[\gamma(\Theta(x,t))-\gamma(\widetilde{\Theta}(x,t))]\widetilde{u}_{xt}(x,t)dxdt\cdot\left\{\frac{1}{h}\int_{t-h}^t d_{xtt}(x,s)ds\right\}dxdt\\
&\qquad -\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta(t)\widehat{\gamma}(\Theta(x,t))d_x(x,t)\cdot\left\{\frac{1}{h}\int_{t-h}^t d_{xtt}(x,s)ds\right\}dxdt\\
&\qquad -\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta(t)\cdot[\widehat{\gamma}(\Theta(x,t))-\widehat{\gamma}(\widetilde{\Theta}(x,t))]\widetilde{u}_x(x,t)\cdot\left\{\frac{1}{h}\int_{t-h}^t d_{xtt}(x,s)ds\right\}dxdt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\to \quad & -\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta \cdot [\gamma(\Theta)-\gamma(\widetilde{\Theta})]\widetilde{u}_{xt} d_{xtt} - \int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta \widehat{\gamma}(\Theta) d_x d_{xtt} \\
& -\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta \cdot [\widehat{\gamma}(\Theta)-\widehat{\gamma}(\widetilde{\Theta})]\widetilde{u}_x d_{xtt} \qquad \text{as } h \searrow 0. \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

在处理（2.10）中的前两项时，对于 $x \in \Omega$、 $t \in (0,\ T_0)$ 和 $h \in (0,\ 1)$，我们改写为

$$
-\frac{1}{h} d_{tt}^2(x,t) + \frac{1}{h} d_{tt}(x,t) d_{tt}(x,t-h) = -\frac{1}{2h} d_{tt}^2(x,t) + \frac{1}{2h} d_{tt}^2(x,t-h) - \frac{1}{2h} \cdot \big\{ d_{tt}(x,t) - d_{tt}(x,t-h) \big\}^2
$$

通过代换可得

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{h}\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta(t) d_{tt}^2(x,t) dx dt + \frac{1}{h}\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta(t) d_{tt}(x,t) d_{tt}(x,t-h) dx dt \\
= \quad & -\frac{1}{2h}\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta(t) d_{tt}^2(x,t) dx dt + \frac{1}{2h}\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta(t) d_{tt}^2(x,t-h) dx dt \\
& -\frac{1}{2h}\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta(t) \cdot \big\{ d_{tt}(x,t) - d_{tt}(x,t-h) \big\}^2 dx dt \\
= \quad & -\frac{1}{2h}\int_{T_0-h}^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta(t) d_{tt}^2(x,t) dx dt + \frac{1}{2}\int_0^{T_0-h}\int_\Omega \frac{\zeta_\eta(t+h)-\zeta_\eta(t)}{h} d_{tt}^2(x,t) dx dt \\
& -\frac{1}{2h}\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta(t) \cdot \big\{ d_{tt}(x,t) - d_{tt}(x,t-h) \big\}^2 dx dt \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

对所有 $\eta \in (0, T_0 - t_0)$ 和 $h \in (0,1)$ 均成立。这里，再由 d_{tt} 的连续性可得，

$$
-\frac{1}{2h}\int_{T_0-h}^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta(t) d_{tt}^2(x,t) dx dt \to -\frac{1}{2}\int_\Omega \zeta_\eta(T_0) d_{tt}^2(x,T_0) dx = 0 \qquad \text{as } h \searrow 0 \qquad (2.14)
$$

and

$$
\frac{1}{2}\int_0^{T_0-h}\int_\Omega \frac{\zeta_\eta(t+h)-\zeta_\eta(t)}{h} d_{tt}^2(x,t) dx dt \to \frac{1}{2}\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta' d_{tt}^2 \qquad \text{as } h \searrow 0 \qquad (2.15)
$$

由于 $\frac{\zeta_{\eta(\cdot,+h)_h} - \zeta_\eta}{} \overset{\star}{\rightharpoonup} \zeta_\eta'$在 $L^\infty\ 0\ T_0 \qquad h \searrow 0$ $d_{ttt} \in ((,))$ 中成立。进一步，根据定义后面的备注，利用柯西-施瓦茨不等式可得 $L^\infty_{loc}\,[0,T\quad L^2$ $2\,1,$

$$
\begin{aligned}
& \left| -\frac{1}{2h}\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta(t) \cdot \big\{ d_{tt}(x,t) - d_{tt}(x,t-h) \big\}^2 dx dt \right| \\
= \quad & \frac{1}{2h}\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta(t) \cdot \left\{ \int_{t-h}^t d_{ttt}(x,s) ds \right\}^2 dx dt \\
\le \quad & \frac{1}{2}\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta(t) \cdot \left\{ d_{ttt}^2(x,s) ds \right\} dx dt \\
\le \quad & \frac{T_0 h}{2} \cdot \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,t_0+\eta)} \int_\Omega d_{ttt}^2(d,t) dx
\end{aligned}
$$

$$\to \quad 0 \qquad \text{as } h \searrow 0. \tag{2.16}$$

最后，杨氏不等式保证（2.10）右端满足

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{h}\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta(t)\gamma(\Theta(x,t))d_{xt}^2(x,t)dxdt + \frac{1}{h}\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta(t)\gamma(\Theta(x,t))d_{xt}(x,t)d_{xt}(x,t-h)dxdt \\
&\quad\le\quad -\frac{1}{2h}\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta(t)\gamma(\Theta(x,t))d_{xt}^2(x,t)dxdt + \frac{1}{2h}\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta(t)\gamma(\Theta(x,t))d_{xt}^2(x,t-h)dxdt \\
&\quad=\quad -\frac{1}{2h}\int_{T_0-h}^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta(t)\gamma(\Theta(x,t))d_{xt}^2(x,t)dxdt \\
&\qquad +\frac{1}{2}\int_0^{T_0-h}\int_\Omega \frac{\zeta_\eta(t+h)\gamma(\Theta(x,t+h)) - \zeta_\eta(t)\gamma(\Theta(x,t))}{h}\cdot d_{xt}^2(x,t)dxdt \\
&\quad\to\quad -\frac{1}{2}\int_\Omega \zeta_\eta(T_0)\gamma(\Theta(x,T_0))d_{xt}^2(x,T_0)dxdt + \frac{1}{2}\int_0^{T_0}\int_\Omega \partial_t\{\zeta_\eta\gamma(\Theta)\}\cdot d_{xt}^2 \\
&\quad=\quad \frac{1}{2}\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta'\gamma(\Theta)d_{xt}^2 + \frac{1}{2}\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta\gamma'(\Theta)\Theta_t d_{xt}^2 \qquad \text{as } h\searrow 0.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

综合 (2.13)–(2.16)、(2.11)、(2.17) 和 (2.12)，取极限 $h \searrow 0$，由 (2.10) 及我们的假设可推知，对于每个 $\eta \in (0,\ T_0 - t_0)$,

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta' d_{tt}^2 - \frac{1}{2}\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta'\gamma(\Theta)d_{xt}^2 \\
&\qquad\le\quad \frac{1}{2}\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta\gamma'(\Theta)\Theta_t d_{xt}^2 - \int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta\cdot[\gamma(\Theta)-\gamma(\widetilde{\Theta})]\widetilde{u}_{xt}d_{xtt} \\
&\qquad\quad -\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta\widehat{\gamma}(\Theta)d_x d_{xtt} - \int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta\cdot[\widehat{\gamma}(\Theta)-\widehat{\gamma}(\widetilde{\Theta})]\widetilde{u}_x d_{xtt},
\end{aligned} \tag{2.18}$$

这里我们再次利用了根据定义 2.1，d_{tt} 属于 $C^0(\Omega\times[0,T_0])$，且 $d_{xtt}\in L^2(\Omega\times(0,\ T_0))$。因此，对空间变量进行两次分部积分可得:

$$\begin{aligned}
\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta\cdot[\gamma(\Theta)-\gamma(\widetilde{\Theta})]\widetilde{u}_{xt}d_{xtt} \quad&=\quad \int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta\cdot[\gamma'(\Theta)\Theta_x - \gamma'(\widetilde{\Theta})\widetilde{\Theta}_x]\widetilde{u}_{xt}d_{xt} \\
&\quad + \int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta\cdot[\gamma(\Theta)-\gamma(\widetilde{\Theta})]\widetilde{u}_{xxt}d_{xt}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

并且，同样地,

$$\begin{aligned}
-\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta\cdot[\widehat{\gamma}(\Theta)-\widehat{\gamma}(\widetilde{\Theta})]\widetilde{u}_x d_{xtt} \quad&=\quad \int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta\cdot[\widehat{\gamma}'(\Theta)\Theta_x - \widehat{\gamma}'(\widetilde{\Theta})\widetilde{\Theta}_x]\widetilde{u}_x d_{xt} \\
&\quad + \int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta\cdot[\widehat{\gamma}(\Theta)-\widehat{\gamma}(\widetilde{\Theta})]\widetilde{u}_{xx}d_{xt},
\end{aligned} \tag{2.20}$$

此外，利用连续函数 $\zeta_\eta\widehat{\gamma}(\Theta)d_xd_{xt}$ 在 $t=0$ 时于 Ω 上为零，且对所有 $t\in(t_0+\eta,\ T_0)$ 均成立，我们可以对时间进行分部积分，从而得到

$$\begin{aligned}-\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta\widehat{\gamma}(\Theta)d_xd_{xt} &= \int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta\widehat{\gamma}(\Theta)d_{xt}^2+\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta\widehat{\gamma}'(\Theta)\Theta_t d_xd_{xt}\\ &\quad+\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta'\widehat{\gamma}(\Theta)d_xd_{xt}.\end{aligned}\tag{2.21}$$

为适当估计 (2.19)–(2.21) 中的右端项，我们利用以下事实：选择 $T_0<T$ in choosing$c_i=c_i(T_0)>0$, $i\in\{1,2,...,15\}$，使得根据定义 2.1，我们有

$$\|\widetilde{u}_{xt}\|_{L^\infty(\Omega)}\le c_1,\ \|\widetilde{u}_{xxt}\|_{L^\infty(\Omega)}\le c_2,\ \|\widetilde{u}_x\|_{L^\infty(\Omega)}\le c_3 \text{ and } \|\widetilde{u}_{xx}\|_{L^2(\Omega)}\le c_4 \quad \text{for a.e. } t\in(0,T_0)\tag{2.22}$$

以及

$$\|\Theta\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\widetilde{\Theta}\|_{L^\infty(\Omega)}\le c_5,\quad \|\Theta_x\|_{L^\infty(\Omega)}\le c_6,\quad \|\widetilde{\Theta}_x\|_{L^\infty(\Omega)}\le c_7 \quad\text{and}\quad \|\Theta_t\|_{L^\infty(\Omega)}\le c_8\tag{2.23}$$

对所有 $t\in(0,\ T_0)$，且

$$c_9\le\gamma(\xi)\le c_{10} \quad\text{and}\quad \widehat{\gamma}(\xi)\le c_{11} \qquad \text{for all } \xi\in[0,c_5]\tag{2.24}$$

以及

$$|\gamma'(\xi)|\le c_{12},\quad |\gamma''(\xi)|\le c_{13},\quad |\widehat{\gamma}'(\xi)|\le c_{14}\quad\text{and}\quad |\widehat{\gamma}''(\xi)|\le c_{15} \qquad \text{for all } \xi\in[0,c_5].\tag{2.25}$$

此外，我们注意到，中值定理结合 (2.23) 和 (2.25) 可得

$$\left|\gamma(\Theta)-\gamma(\widetilde{\Theta})\right|\le c_{12}|\Theta-\widetilde{\Theta}|=c_{12}|\delta| \qquad \text{in } \Omega\times(0,T_0)$$

and

$$\left|\widehat{\gamma}(\Theta)-\widehat{\gamma}(\widetilde{\Theta})\right|\le c_{14}|\delta| \qquad \text{in } \Omega\times(0,T_0),$$

并且

$$\begin{aligned}\left|\gamma'(\Theta)\Theta_x-\gamma'(\widetilde{\Theta})\widetilde{\Theta}_x\right| &\le \left|\gamma'(\Theta)-\gamma'(\widetilde{\Theta})\right|\cdot|\Theta_x|+\left|\gamma'(\widetilde{\Theta})\right|\cdot|\Theta_x-\widetilde{\Theta}_x|\\ &\le c_{13}c_6|\delta|+c_{12}|\delta_x| \qquad \text{in } \Omega\times(0,T_0)\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\left|\widehat{\gamma}'(\Theta)\Theta_x-\widehat{\gamma}'(\widetilde{\Theta})\widetilde{\Theta}_x\right| &\le \left|\widehat{\gamma}'(\Theta)-\widehat{\gamma}'(\widetilde{\Theta})\right|\cdot|\Theta_x|+\left|\widehat{\gamma}'(\widetilde{\Theta})\right|\cdot|\Theta_x-\widetilde{\Theta}_x|\\ &\le c_{15}c_6|\delta|+c_{14}|\delta_x| \qquad \text{in } \Omega\times(0,T_0).\end{aligned}$$

由 (2.19)、(2.20)、(2.22) 以及 supp $\zeta_\eta\subset[0,t_0+\eta]\subset[0,T_0]$ 对所有 $\eta\in(0,T_0-t_0)$ 成立这一事实，我们相应地借助 H¨older 不等式与 Young 不等式得到,

$$\left|-\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta\cdot[\gamma(\Theta)-\gamma(\widetilde{\Theta})]\widetilde{u}_{xt}d_{xtt}\right| \le \int_0^{t_0+\eta}\int_\Omega|\gamma'(\Theta)\Theta_x-\gamma'(\widetilde{\Theta})\widetilde{\Theta}_x|\cdot|\widetilde{u}_{xt}|\cdot|d_{xt}|$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^{t_0+\eta}\int_\Omega |\gamma(\Theta)-\gamma(\widetilde{\Theta})|\cdot|\widetilde{u}_{xxt}|\cdot|d_{xt}| \\
\le\ & c_{13}c_6c_1\int_0^{t_0+\eta}\int_\Omega |\delta|\cdot|d_{xt}| + c_{12}c_1\int_0^{t_0+\eta}\int_\Omega |\delta_x|\cdot|d_{xt}| \\
&+c_{12}\int_0^{t_0+\eta}\|\delta(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\|\widetilde{u}_{xxt}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|d_{xt}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}dt \\
\le\ & 2\int_0^{t_0+\eta}\int_\Omega d_{xt}^2 + \frac{c_{13}^2c_6^2c_1^2}{4}\int_0^{t_0+\eta}\int_\Omega \delta^2 + \frac{c_{12}^2c_1^2}{4}\int_0^{t_0+\eta}\int_\Omega d_x^2 \\
&+c_{12}c_2\int_0^{t_0+\eta}\|\delta(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\|d_{xt}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}dt \\
\le\ & 3\int_0^{t_0+\eta}\int_\Omega d_{xt}^2 + \frac{c_{13}^2c_6^2c_1^2}{4}\int_0^{t_0+\eta}\int_\Omega \delta^2 + \frac{c_{12}^2c_1^2}{4}\int_0^{t_0+\eta}\int_\Omega d_x^2 \\
&+\frac{c_{12}^2c_2^2}{4}\int_0^{t_0+\eta}\|\delta(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2dt, \qquad (2.26)
\end{aligned}
$$

并且类似地,

$$
\begin{aligned}
\left|-\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta\cdot[\widehat{\gamma}(\Theta)-\widehat{\gamma}(\widetilde{\Theta})]\widetilde{u}_x d_{xtt}\right| \ \le\ & c_{15}c_6c_3\int_0^{t_0+\eta}\int_\Omega |\delta|\cdot|d_{xt}| + c_{14}c_3\int_0^{t_0+\eta}\int_\Omega |\delta_x|\cdot|d_{xt}| \\
&+c_{14}\int_0^{t_0+\eta}\|\delta(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\|\widetilde{u}_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|d_{xt}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}dt \\
\le\ & 3\int_0^{t_0+\eta}\int_\Omega d_{xt}^2 + \frac{c_{15}^2c_6^2c_3^2}{4}\int_0^{t_0+\eta}\int_\Omega \delta^2 \\
&+\frac{c_{14}^2c_3^2}{4}\int_0^{t_0+\eta}\int_\Omega \delta_x^2 + \frac{c_{14}^2c_4^2}{4}\int_0^{t_0+\eta}\|\delta(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2dt, \qquad (2.27)
\end{aligned}
$$

而杨氏不等式结合 (2.24) 和 (2.23) 可推出

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta\widehat{\gamma}(\Theta)d_xd_{xtt} - \int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta'\widehat{\gamma}(\Theta)d_xd_{xt} \\
&\qquad\le\ c_{11}\int_0^{t_0+\eta}\int_\Omega d_{xt}^2 + c_{14}c_8\int_0^{t_0+\eta}\int_\Omega |d_x|\cdot|d_{xt}| \\
&\qquad\le\ (c_{11}+1)\int_0^{t_0+\eta}\int_\Omega d_{xt}^2 + \frac{c_{14}^2c_8^2}{4}\int_0^{t_0+\eta}\int_\Omega d_x^2. \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

取 $c_{16}>0$ 使得根据嵌入的连续性 $W^{1,\,2}(\Omega)\hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, 我们有

$$
\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \le c_{16}\int_\Omega \varphi_x^2 + c_{16}\int_\Omega \varphi^2 \qquad \text{for all } \varphi\in W^{1,2}(\Omega),
$$

由 (2.26)–(2.28) 可推得 (2.18) 蕴含不等式

$$
-\frac{1}{2}\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta' d_{tt}^2 - \frac{1}{2}\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta'\gamma(\Theta)d_{xt}^2 - \int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta'\widehat{\gamma}(\Theta)d_xd_{xt}
$$

$$\leq \quad c_{17}\int_0^{t_0+\eta}\int_\Omega d_{xt}^2 + c_{17}\int_0^{t_0+\eta}\int_\Omega d_x^2 + c_{17}\int_0^{t_0+\eta}\int_\Omega \delta_x^2 + c_{17}\int_0^{t_0+\eta}\int_\Omega \delta^2 \tag{2.29}$$

with

$$c_{17} := \max\Big\{c_{11}+7\,,\ \frac{c_{13}^2c_6^2c_1^2}{4}+\frac{c_{12}^2c_2^2c_{16}}{4}+\frac{c_{15}^2c_6^2c_3^2}{4}+\frac{c_{14}^2c_4^2c_{16}}{4}\,,\ \frac{c_{12}^2c_1^2}{4}+\frac{c_{12}^2c_2^2c_{16}}{4}+\frac{c_{14}^2c_3^2}{4}+\frac{c_{14}^2c_4^2c_{16}}{4}\Big\}.$$

现在，由 d_{tt}, Θ, d_{xt} 和 d_x 的连续性，根据我们对 $(\zeta_\eta)_{\eta\in(0,T_0-t_0)}$ 的定义，可得 (2.29) 左端

$$-\frac{1}{2}\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta' d_{tt}^2 = \frac{1}{2\eta}\int_{t_0}^{t_0+\eta}\int_\Omega d_{tt}^2 \to \frac{1}{2}\int_\Omega d_{tt}^2(\cdot,t_0) \qquad \text{as } \eta\searrow 0,$$

并且，同样地，由 $\eta\searrow 0$ 可得

$$-\frac{1}{2}\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta'\gamma(\Theta)d_{xt}^2 \to \frac{1}{2}\int_\Omega \gamma\big(\Theta(\cdot,t_0)\big)d_{xt}^2(\cdot,t_0)$$

and

$$-\int_0^{T_0}\int_\Omega \zeta_\eta'\widehat{\gamma}(\Theta)d_x d_{xt} \to \int_\Omega \widehat{\gamma}\big(\Theta(\cdot,t_0)\big)d_x(\cdot,t_0)d_{xt}(\cdot,t_0),$$

因此，由（2.29）可知，令 $\eta\searrow 0$ 后有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_\Omega d_{tt}^2(\cdot,t_0)+\frac{1}{2}\int_\Omega \gamma\big(\Theta(\cdot,t_0)\big)d_{xt}^2(\cdot,t_0)+\int_\Omega \widehat{\gamma}\big(\Theta(\cdot,t_0)\big)d_x(\cdot,t_0)d_{xt}(\cdot,t_0)\\ &\qquad\leq \quad c_{17}\int_0^{t_0}\int_\Omega d_{xt}^2 + c_{17}\int_0^{t_0}\int_\Omega d_x^2 + c_{17}\int_0^{t_0}\int_\Omega \delta_x^2 + c_{17}\int_0^{t_0}\int_\Omega \delta^2\end{aligned} \tag{2.30}$$

对所有 $t_0\in(0,\ T_0)$。这里，右端的积分可通过以下简单观察充分补偿：根据 d_x 和 d_{xt}的连续性，$(0,\ T_0)\ni t\mapsto \int_\Omega d_x^2$ 是连续可微的，且

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega d_x^2 = \int_\Omega d_x d_{xt} \leq \int_\Omega d_{xt}^2 + \frac{1}{4}\int_\Omega d_x^2 \qquad \text{for all } t\in(0,T_0), \tag{2.31}$$

并且，由于

$$\begin{aligned}\delta_t &= D\delta_{xx}+\Gamma(\Theta)u_{xt}^2-\Gamma(\widetilde{\Theta})\widetilde{u}_{xt}^2\\ &= D\delta_{xx}+[\Gamma(\Theta)-\Gamma(\widetilde{\Theta})]\widetilde{u}_{xt}^2+\Gamma(\Theta)(u_{xt}+\widetilde{u}_{xt})d_{xt}\end{aligned}$$

在 $\Omega\times(0,\ T_0)$ 中以经典意义成立，因此有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \delta^2 + D\int_\Omega \delta_x^2 = \int_\Omega [\Gamma(\Theta)-\Gamma(\widetilde{\Theta})]\widetilde{u}_{xt}^2\cdot\delta + \int_\Omega \Gamma(\Theta)(u_{xt}+\widetilde{u}_{xt})\cdot d_{xt}\delta \qquad \text{for all } t\in(0,T_0). \tag{2.32}$$

此外，除了 (2.22)-(2.25) 中的选择外，若令 $c_{18}>0,\ c_{19}>0$ 和 $c_{20}>0$ 满足

$$\|u_{xt}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\leq c_{18} \qquad \text{as well as} \qquad |\Gamma(\xi)|\leq c_{19} \quad \text{and} \quad |\Gamma'(\xi)|\leq c_{20} \quad \text{for all } \xi\in[0,c_5],$$

那么结合 (2.32)、(2.22) 和 (2.23)，由杨氏不等式可知，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \delta^2 + D\int_\Omega \delta_x^2 &\le c_{20}c_1^2\int_\Omega \delta^2 + c_{19}(c_{18}+c_1)\int_\Omega |d_{xt}|\cdot|\delta| \\ &\le \int_\Omega d_{xt}^2 + c_{21}\int_\Omega \delta^2 \qquad \text{for all } t\in(0,T_0)\end{aligned}$$

其中 $c_{21} := c_{20}c_1^2 + \frac{c_{19}^2\,(c_{18}+c_1)}{4}^2$。对该式和（2.31）关于时间积分后，我们由此推得

$$y(t) := \frac{1}{2}\int_\Omega d_{tt}^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega \gamma(\Theta)d_{xt}^2 + \int_\Omega \widehat{\gamma}(\Theta)d_x d_{xt} + \frac{B_1}{2}\int_\Omega d_x^2 + \frac{B_2}{2}\int_\Omega \delta^2, \qquad t\in[0,T_0],$$

with

$$B_1 := \frac{4c_{11}^2}{c_9} \qquad \text{and} \qquad B_2 := \frac{c_{17}}{D}, \tag{2.33}$$

满足

$$\begin{aligned}y(t_0) + B_2 D\int_0^{t_0}\int_\Omega \delta_x^2 \;\le\; & c_{17}\int_0^{t_0}\int_\Omega d_{xt}^2 + c_{17}\int_0^{t_0}\int_\Omega d_x^2 + c_{17}\int_0^{t_0}\int_\Omega \delta_x^2 + c_{17}\int_0^{t_0}\int_\Omega \delta^2 \\ & + B_1\int_0^{t_0}\int_\Omega d_{xt}^2 + \frac{B_1}{4}\int_0^{t_0}\int_\Omega d_x^2 + B_2\int_0^{t_0}\int_\Omega d_{xt}^2 + B_2c_{21}\int_0^{t_0}\int_\Omega \delta^2\end{aligned}$$

对所有 $t\in(0,\ T_0)$ 均成立，因此，根据（2.33）中的第二个定义，

$$y(t_0) \le c_{22}\int_0^{t_0}\int_\Omega d_{xt}^2 + c_{22}\int_0^{t_0}\int_\Omega d_x^2 + c_{22}\int_0^{t_0}\int_\Omega \delta^2 \qquad \text{for all } t\in(0,T_0) \tag{2.34}$$

其中 $c_{22} := \max\{c_{17}+B_1+B_2\,,\, c_{17}+B_2c_{21}\}$。另一方面，由（2.33）中的首次选取，结合杨氏不等式和（2.24），可知

$$\begin{aligned}y(t) &\ge \frac{1}{2}\int_\Omega d_{tt}^2 + \frac{c_9}{2}\int_\Omega d_{xt}^2 - c_{11}\int_\Omega |d_x|\cdot|d_{xt}| + \frac{B_1}{2}\int_\Omega d_x^2 + \frac{B_2}{2}\int_\Omega \delta^2 \\ &\ge \frac{1}{2}\int_\Omega d_{tt}^2 + \frac{c_9}{4}\int_\Omega d_{xt}^2 - \frac{c_{11}^2}{c_9}\int_\Omega d_x^2 + \frac{B_1}{2}\int_\Omega d_x^2 + \frac{B_2}{2}\int_\Omega \delta^2 \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega d_{tt}^2 + \frac{c_9}{4}\int_\Omega d_{xt}^2 + \frac{B_1}{4}\int_\Omega d_x^2 + \frac{B_2}{2}\int_\Omega \delta^2 \qquad \text{for all } t\in(0,T_0),\end{aligned} \tag{2.35}$$

由（2.34）我们特别得到

$$y(t_0) \le c_{23}\int_0^{t_0} y(t)dt \qquad \text{for all } t\in(0,T_0),$$

其中 $c_{23} := c_{22}\cdot\max\{\frac{4}{c_9}, \frac{4}{B_1}, \frac{2}{B_2}\}$。由 y 在 $[0,T_0]$ 上的连续性和非负性（后者尤其由 (2.35) 推出），通过 Gr¨onwall 引理可知，对于所有 $t_0\in(0,T_0)$，$y(t_0) = 0$；进而再次利用 (2.35)，可得 $d_{tt}\equiv 0$ 和 $\delta\equiv 0$ 在 $\Omega\times(0,T_0)$ 中成立。根据定义 2.1，对所有 $x\in\Omega$，$d(x,\ 0) = d_t(x,\ 0) = 0$；又由于 $T_0\in(0,T)$ 是任意的，这就意味着，确实有 $u-\widetilde{u}\equiv 0$ 和 $\Theta-\widetilde{\Theta}\equiv 0$ 在 $\Omega\times(0,T)$ 中成立。□

3 对于初始数据的存在性与延拓性 $\int_\Omega u_0 = \int_\Omega u_{0t} = \int_\Omega u_{0tt} = 0$

接下来讨论关于解的存在性的论断。为在一个简单且本质上等同于定理 1.1 所涵盖情形的设定下进行讨论，本节始终假设有界开区间 Ω 固定，$D > 0$ 和 $\alpha \geq 0$，γ，$\widehat{\gamma}$ 和 Γ 满足 (1.15)，且初始数据 u_0，u_{0t}，u_{0tt} 和 Θ_0 除满足 (1.16) 外，还满足

$$\int_\Omega u_0 = \int_\Omega u_{0t} = \int_\Omega u_{0tt} = 0. \tag{3.1}$$

3.1 近似问题及其局部可解性

为了对 (1.14) 进行适当的近似，利用标准平滑方法，我们可以选定族 $(\gamma_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,1)} \subset C^\infty([0,\infty))$、$(\widehat{\gamma}_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,1)} \subset C^\infty([0,\infty))$ 和 $(\Gamma_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,1)} \subset C^\infty([0,\infty))$，以及 $(u_{0\varepsilon})_{\varepsilon\in(0,1)} \subset C^\infty(\Omega)$、$(v_{0\varepsilon})_{\varepsilon\in(0,1)} \subset C^\infty(\Omega)$、$(w_{0\varepsilon})_{\varepsilon\in(0,1)} \subset C^\infty(\Omega)$、$(\Theta_{0\varepsilon})_{\varepsilon\in(0,1)} \subset C^\infty(\Omega)$，使得

$$\gamma_\varepsilon > 0, \quad \widehat{\gamma}_\varepsilon > 0 \quad \text{and} \quad \Gamma_\varepsilon \geq 0 \quad \text{on } [0,\infty) \qquad \text{for all } \varepsilon \in (0,1) \tag{3.2}$$

and

$$\gamma_\varepsilon \to \gamma \text{ in } C^2_{loc}([0,\infty)), \quad \widehat{\gamma}_\varepsilon \to \widehat{\gamma} \text{ in } C^2_{loc}([0,\infty)) \quad \text{and} \quad \Gamma_\varepsilon \to \Gamma \text{ in } C^1_{loc}([0,\infty)) \qquad \text{as } \varepsilon \searrow 0, \tag{3.3}$$

其中 $u_{0\varepsilon x}$、$v_{0\varepsilon x}$、$w_{0\varepsilon x}$ 和 $\Theta_{0\varepsilon x}$ 在 Ω 中具有紧支集，且

$$\int_\Omega u_{0\varepsilon} = \int_\Omega v_{0\varepsilon} = \int_\Omega w_{0\varepsilon} = 0 \tag{3.4}$$

并且对于所有 $\varepsilon \in (0,1)$，$\Theta_{0\varepsilon} \geq 0$ 均属于 Ω；当 $\varepsilon \searrow 0$ 时，我们有

$$\begin{cases} u_{0\varepsilon} \to u_0 & \text{in } W^{2,2}(\Omega), \\ v_{0\varepsilon} \to u_{0t} & \text{in } W^{2,2}(\Omega), \\ w_{0\varepsilon} \to u_{0tt} & \text{in } W^{1,2}(\Omega) \qquad \text{and} \\ \Theta_{0\varepsilon} \overset{\star}{\rightharpoonup} \Theta_0 & \text{in } W^{2,\infty}(\Omega) \end{cases} \tag{3.5}$$

以及

$$\sqrt{\varepsilon} u_{0\varepsilon xxx} \to 0 \quad \text{in } L^2(\Omega). \tag{3.6}$$

对于每个 $\varepsilon \in (0,1)$，(1.14) 的正则化形式为

$$\begin{cases} w_{\varepsilon t} = \varepsilon w_{\varepsilon xx} + \big(\gamma_\varepsilon(\Theta_\varepsilon) v_{\varepsilon x}\big)_x + \big(\widehat{\gamma}_\varepsilon(\Theta_\varepsilon) u_{\varepsilon x}\big)_x - \alpha w_\varepsilon, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ v_{\varepsilon t} = \varepsilon v_{\varepsilon xx} + w_\varepsilon, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u_{\varepsilon t} = \varepsilon u_{\varepsilon xx} + v_\varepsilon, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \Theta_{\varepsilon t} = D\Theta_{\varepsilon xx} + \Gamma_\varepsilon(\Theta_\varepsilon) v_{\varepsilon x}^2, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ w_{\varepsilon x} = v_{\varepsilon x} = u_{\varepsilon x} = \Theta_{\varepsilon x} = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ w_\varepsilon(x,0) = w_{0\varepsilon}(x),\ v_\varepsilon(x,0) = v_{0\varepsilon}(x),\ u_\varepsilon(x,0) = u_{0\varepsilon}(x),\ \Theta_\varepsilon(x,0) = \Theta_{0\varepsilon}(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.7}$$

随后便可运用交叉扩散型抛物系统局部存在性与可延拓性的标准论证，从而得到以下基本结论。

引理 3.1 设 $\varepsilon \in (0,1)$。则存在 $T_{max,\varepsilon} \in (0,\infty]$ 且

$$\begin{cases} w_\varepsilon \in C^{2,1}(\overline{\Omega}\times[0,T_{max,\varepsilon}))\cap C^\infty(\overline{\Omega}\times(0,T_{max,\varepsilon})), \\ v_\varepsilon \in C^{2,1}(\overline{\Omega}\times[0,T_{max,\varepsilon}))\cap C^\infty(\overline{\Omega}\times(0,T_{max,\varepsilon})), \\ u_\varepsilon \in C^{2,1}(\overline{\Omega}\times[0,T_{max,\varepsilon}))\cap C^\infty(\overline{\Omega}\times(0,T_{max,\varepsilon})) \qquad and \\ \Theta_\varepsilon \in C^{2,1}(\overline{\Omega}\times[0,T_{max,\varepsilon}))\cap C^\infty(\overline{\Omega}\times(0,T_{max,\varepsilon})) \end{cases} \tag{3.8}$$

使得 $\Theta_\varepsilon \geq 0$ 属于$\Omega \times (0,T_{max,\varepsilon})$，且$(w_\varepsilon, v_\varepsilon, u_\varepsilon, \Theta_\varepsilon)$ 在$\Omega \times (0,T_{max,\varepsilon})$中经典地满足 *(3.7)*，并且

若 $T_{max,\varepsilon} < \infty$，则

$$\limsup_{t\nearrow T_{max,\varepsilon}} \Big\{ \|w_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v_\varepsilon(\cdot,t)\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|u_\varepsilon(\cdot,t)\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|\Theta_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \Big\} = \infty. \tag{3.9}$$

此外，

$$\int_\Omega w_\varepsilon(\cdot,t) = \int_\Omega v_\varepsilon(\cdot,t) = \int_\Omega u_\varepsilon(\cdot,t) = 0 \qquad for\ all\ t \in (0,T_{max,\varepsilon}). \tag{3.10}$$

Proof. 固定 $\varepsilon \in (0,1)$，并首先任取 $\gamma_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ $\widetilde{\gamma}_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ 和 $\Gamma_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$，使得$\gamma_0|_{[0,\infty)} = \gamma_\varepsilon$，$\widetilde{\gamma}_0|_{[0,\infty)} = \widehat{\gamma}_\varepsilon$ 且 $\Gamma_0|_{[0,\infty)} = \Gamma_\varepsilon$。接下来，根据已知的 Neumann热半群 $(e^{t\Delta})_{t\geq 0}$ 在 Ω ([60]) 上的平滑性质，我们可以找到正常数 c_1, c_2 和 c_3，使得对于每个 $t \in (0,1)$，

$$\|e^{\varepsilon t\Delta}\varphi\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq c_1 t^{-\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \qquad \text{for all } \varphi \in C^0(\overline{\Omega}) \tag{3.11}$$

and

$$\|e^{dt\Delta}\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_2 t^{-\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{L^1(\Omega)} \qquad \text{for all } \varphi \in L^1(\Omega), \tag{3.12}$$

并且

$$\|e^{\varepsilon t\Delta}\partial_x\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_3 t^{-\frac{3}{4}} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \qquad \text{for all } \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{3.13}$$

这意味着 $e^{\varepsilon t\Delta}\partial_x$ 可以延拓为定义在整个 $L^2(\Omega)$ 上的连续线性算子，其范数根据 (3.13) 受到控制。在本证明中以及下文中，为明确起见，我们取 $W^{1,\,2}(\Omega)$ 中的范数为$\|\varphi\|_{W^{1,\,2}(\Omega)} := \big\{\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varphi_x\|^2_{L^2(\Omega)}\big\}^{\frac{1}{2}}$对于 $\varphi \in W^{1,\,2}(\Omega)$，并注意到此时，两种基本的测试过程和一个比较论证表明，对于任意 $t > 0$，

$$\|e^{t\Delta}\varphi\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq \|\varphi\|_{W^{1,2}(\Omega)} \qquad \text{for all } \varphi \in W^{1,2}(\Omega) \tag{3.14}$$

and

$$\|e^{t\Delta}\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \qquad \text{for all } \varphi \in C^0(\overline{\Omega}). \tag{3.15}$$

给定 $\varepsilon \in (0,1)$，现在令 $X_0 := C^0(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega) \times C^0(\Omega)$ 配备由下式定义的范数

$$\big\|(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)\big\|_{X_0} := \max\Big\{\|\varphi_1\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\varphi_2\|_{W^{1,2}(\Omega)}, \|\varphi_3\|_{W^{1,2}(\Omega)}, \|\varphi_4\|_{L^\infty(\Omega)}\Big\}$$

对于 $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4) \in X_0$，并简记

$$R := \big\|(w_{0\varepsilon}, v_{0\varepsilon}, u_{0\varepsilon}, \Theta_{0\varepsilon})\big\|_{X_0} + 1 \tag{3.16}$$

我们固定足够小的 $T_0 = T_0(R) \in (0,1)$，使其满足

$$4c_3 \cdot \big\{\|\gamma_0\|_{L^\infty([-R,R])} + \|\widetilde{\gamma}_0\|_{L^\infty([-R,R])}\big\} \cdot RT_0^{\frac{1}{4}} + \alpha RT \le 1 \tag{3.17}$$

and

$$2c_1 RT_0^{\frac{1}{2}} \le 1 \tag{3.18}$$

and

$$RT_0 \le 1 \tag{3.19}$$

以及

$$2c_2\|\Gamma_0\|_{L^\infty([-R,R])} R^2 T_0^{\frac{1}{2}} \le 1. \tag{3.20}$$

然后，对于 $T \in (0, T_0]$，在巴拿赫空间 $X := C^0([0,T]; X_0)$ 中，其范数由 $\|\varphi\|_X := \sup_{t\in[0,T]} \|\varphi(\cdot,t)\|_{X_0}$（对 $\varphi \in X$）给出，我们考虑闭集 $S := \{\varphi \in X \mid \|\varphi\|_X \le R\}$，并通过定义引入映射 $\Phi = (\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,\Phi_4) : S \to X$

$$\big[\Phi_1(w,v,u,\Theta)\big](\cdot,t) := e^{\varepsilon t\Delta} w_{0\varepsilon} + \int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta}\partial_x\big\{\gamma_0(\Theta)v_x + \widetilde{\gamma}_0(\Theta)u_x\big\}ds - \alpha\int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta} w ds$$

and

$$\big[\Phi_2(w,v,u,\Theta)\big](\cdot,t) := e^{\varepsilon t\Delta} v_{0\varepsilon} + \int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta} w ds$$

and

$$\big[\Phi_3(w,v,u,\Theta)\big](\cdot,t) := e^{\varepsilon t\Delta} v_{0\varepsilon} + \int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta} v ds$$

以及

$$\big[\Phi_4(w,v,u,\Theta)\big](\cdot,t) := e^{Dt\Delta}\Theta_{0\varepsilon} + \int_0^t e^{D(t-s)\Delta}\big\{\Gamma_0(\Theta)v_x^2\big\}ds$$

对于 $(w,v,u,\Theta) \in S$ 和 $t \in [0,T]$。然后由 (3.15)、(3.13) 和 (3.17),

$$\begin{aligned}
&\big\|\big[\Phi_1(w,v,u,\Theta)\big](\cdot,t)\big\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&\quad\le \|w_{0\varepsilon}\|_{L^\infty(\Omega)} + c_3\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} \cdot \big\{\|\gamma_0(\Theta)v_x\|_{L^2(\Omega)} + \|\widetilde{\gamma}_0(\Theta)u_x\|_{L^2(\Omega)}\big\}ds + \alpha\int_0^t \|w\|_{L^\infty(\Omega)}ds \\
&\quad\le \|w_{0\varepsilon}\|_{L^\infty(\Omega)} + c_3 \cdot \big\{\|\gamma_0\|_{L^\infty([-R,R])} + \|\widetilde{\gamma}_0\|_{L^\infty([-R,R])}\big\} \cdot R\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}}ds + \alpha RT \\
&\quad\le \|w_{0\varepsilon}\|_{L^\infty(\Omega)} + 4c_3 \cdot \big\{\|\gamma_0\|_{L^\infty([-R,R])} + \|\widetilde{\gamma}_0\|_{L^\infty([-R,R])}\big\} \cdot RT^{\frac{1}{4}} + \alpha RT \\
&\quad\le R \qquad \text{for all } t \in [0,T],
\end{aligned}$$

因为 $T \le T_0 \le 1$，并且根据（3.16），$\|w_{0\varepsilon}\|_{L^\infty(\Omega)} \le R-1$。类似地，（3.11）和（3.14）结合（3.18）、（3.19）及（3.16）可确保

$$\begin{aligned}\big\|\big[\Phi_2(w,v,u,\Theta)\big](\cdot,t)\big\|_{W^{1,2}(\Omega)} &\le \|v_{0\varepsilon}\|_{L^\infty(\Omega)} + c_1\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|w\|_{L^\infty(\Omega)}ds\\ &\le \|v_{0\varepsilon}\|_{L^\infty(\Omega)} + c_1R\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}ds\\ &\le \|v_{0\varepsilon}\|_{L^\infty(\Omega)} + 2c_1RT^{\frac{1}{2}}\\ &\le R \qquad \text{for all } t\in[0,T],\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}\big\|\big[\Phi_3(w,v,u,\Theta)\big](\cdot,t)\big\|_{W^{1,2}(\Omega)} &\le \|u_{0\varepsilon}\|_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}ds\\ &\le \|u_{0\varepsilon}\|_{L^\infty(\Omega)} + RT\\ &\le R \qquad \text{for all } t\in[0,T],\end{aligned}$$

而 (3.15) 和 (3.12) 与 (3.20) 及 (3.16) 结合起来可推出

$$\begin{aligned}\big\|\big[\Phi_4(w,v,u,\Theta)\big](\cdot,t)\big\|_{L^\infty(\Omega)} &\le \|\Theta_{0\varepsilon}\|_{L^\infty(\Omega)} + c_2\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|\Gamma_0(\Theta)v_x^2\|_{L^1(\Omega)}ds\\ &\le \|\Theta_{0\varepsilon}\|_{L^\infty(\Omega)} + c_2\|\Gamma_0\|_{L^\infty([-R,R])}R^2\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}ds\\ &\le \|\Theta_{0\varepsilon}\|_{L^\infty(\Omega)} + 2c_2\|\Gamma_0\|_{L^\infty([-R,R])}R^2T^{\frac{1}{2}}\\ &\le R \qquad \text{for all } t\in[0,T].\end{aligned}$$

因此，对于每个 $T\in(0,T_0]$，Φ 将 S 映射到自身。稍作修改上述推理可知，若我们适当选取足够小的 $T=T(R)\in(0,T_0]$，则 Φ 还会在 S上成为压缩映射。现在固定任意一个这样的 T，由巴拿赫不动点定理可得 $(w_\varepsilon,v_\varepsilon,u_\varepsilon,\Theta_\varepsilon)\in S$，使得$\Phi(w_\varepsilon,v_\varepsilon,u_\varepsilon,\Theta_\varepsilon)=(w_\varepsilon,v_\varepsilon,u_\varepsilon,\Theta_\varepsilon)$。抛物型方程理论中的标准论证（[36]）表明，这些函数都属于 $C^{2,1}(\Omega\times[0,T])\cap C^\infty(\Omega\times(0,T])$，并且问题

$$\begin{cases} w_{\varepsilon t} = \varepsilon w_{\varepsilon xx} + \big(\gamma_0(\Theta_\varepsilon)v_{\varepsilon x}\big)_x + \big(\widehat{\gamma}_0(\Theta_\varepsilon)u_{\varepsilon x}\big)_x - \alpha w_\varepsilon, & x\in\Omega,\ t\in(0,T),\\ v_{\varepsilon t} = \varepsilon v_{\varepsilon xx} + w_\varepsilon, & x\in\Omega,\ t\in(0,T),\\ u_{\varepsilon t} = \varepsilon u_{\varepsilon xx} + v_\varepsilon, & x\in\Omega,\ t\in(0,T),\\ \Theta_{\varepsilon t} = D\Theta_{\varepsilon xx} + \Gamma_0(\Theta_\varepsilon)v_{\varepsilon x}^2, & x\in\Omega,\ t\in(0,T),\\ w_{\varepsilon x} = v_{\varepsilon x} = u_{\varepsilon x} = \Theta_{\varepsilon x} = 0, & x\in\partial\Omega,\ t\in(0,T),\\ w_\varepsilon(x,0) = w_{0\varepsilon}(x),\ v_\varepsilon(x,0) = v_{0\varepsilon}(x),\ u_\varepsilon(x,0) = u_{0\varepsilon}(x),\ \Theta_\varepsilon(x,0) = \Theta_{0\varepsilon}(x), & x\in\Omega, \end{cases}$$

在经典意义下有解。但由于 $\Gamma_0(0)=\Gamma_\varepsilon(0)\ge 0$ 且 $\Theta_{0\varepsilon}\ge 0$ 属于 Ω，比较原理保证 $\Theta_\varepsilon\ge 0$ 在 Ω 中成立 $\times(0,T)$，因此实际上有 $\gamma_0(\Theta_\varepsilon)\equiv\gamma_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)$ $\widehat{\gamma}_0(\Theta_\varepsilon)\equiv\widehat{\gamma}_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)$，且 $\Gamma_0(\Theta_\varepsilon)\equiv\Gamma_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)$ 在 $\Omega\times(0,T)$ 中成立。因此，$(w_\varepsilon,v_\varepsilon,u_\varepsilon,\Theta_\varepsilon)$ 实际上构成 $\Omega\times(0,T)$ 上方程 (3.7) 的一个经典解。因此，由于我们对 T 的选择仅通过以下量依赖于初始数据

$\|w_{0\varepsilon}\|_{L^\infty(\Omega)}$ $\|v_{0\varepsilon}\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ $\|u_{0\varepsilon}\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ 以及 $\|\Theta_{0\varepsilon}\|_{L^\infty(\Omega)}$，标准的延拓论证使我们能够将这个四元组延拓为 $\Omega \times (0, T_{max,\varepsilon})$ 上方程 (3.7) 的一个经典解，并且该解满足 (3.8)，其中某个 $T_{max,\varepsilon} \in (0, \infty]$ 满足 (3.9)。最后，对方程 (3.7) 使用 (3.4) 进行积分，即可得到 (3.10) 中的守恒性质。□

3.2 对 Θ_ε 和 $\Theta_{\varepsilon t}$ 预设 L^∞ 界的推论

现在，我们构造解的核心部分将基于对如下形式观察的严格对应：对于适当选取的 $M > 0$，可以找到 $B(M) > 0$ 和 $C(M) > 0$，使得泛函

$$y(t) := \frac{1}{2}\int_\Omega u_{xtt}^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega \gamma(\Theta) u_{xxt}^2 + \int_\Omega \widehat{\gamma}(\Theta) u_{xx} u_{xxt} + \frac{B(M)}{2}\int_\Omega u_{xx}^2 \tag{3.21}$$

满足

$$y'(t) \le C(M) y^2(t) + C(M) y(t) \tag{3.22}$$

只要

$$\|\Theta\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\Theta_t\|_{L^\infty(\Omega)} \le M. \tag{3.23}$$

作为对此问题进行考察的起点，我们记录如下观察，并指出，其中出现的常数 M 可能取决于上文所选逼近 Γ_ε，$v_{0\varepsilon}$ 和 $\Theta_{0\varepsilon}$ 的具体选择，但这不会影响我们后续的分析。

引理 3.2 存在 $M > 0$，使得记

$$\Theta_{0\varepsilon t} := D\Theta_{0\varepsilon xx} + \Gamma_\varepsilon(\Theta_{0\varepsilon}) v_{0\varepsilon x}^2, \qquad \varepsilon \in (0,1), \tag{3.24}$$

我们有

$$\|\Theta_{0\varepsilon}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\Theta_{0\varepsilon t}\|_{L^\infty(\Omega)} \le \frac{M}{8} \qquad \textit{for all } \varepsilon \in (0,1). \tag{3.25}$$

Proof. 这是（3.3）和（3.5）的直接推论。 □

让我们先确定一些常数，以此开启论证过程；这些常数将在下文多处发挥重要作用。

引理 3.3 存在 $\varepsilon_\star \in (0、1)$ 以及 $k_i > 0$、$i \in \{1, ..., 10\}$，使得若 $\varepsilon \in (0、\varepsilon_\star)$ 和 $T \in (0、T_{max,\varepsilon})$ 满足：令 M 如引理 *3.2* 中所示，则我们有

$$\|\Theta_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\Theta_{\varepsilon t}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le M \qquad \textit{for all } t \in (0,T), \tag{3.26}$$

then

$$k_1 \le \gamma_\varepsilon(\Theta_\varepsilon) \le k_2 \quad \textit{and} \quad k_3 \le \widehat{\gamma}_\varepsilon(\Theta_\varepsilon) \le k_4 \quad \textit{and} \quad \Gamma_\varepsilon(\Theta_\varepsilon) \le k_5 \qquad \textit{in } \Omega \times (0,T) \tag{3.27}$$

以及

$$|\gamma_\varepsilon'(\Theta_\varepsilon)| \le k_6,\ |\widehat{\gamma}_\varepsilon'(\Theta_\varepsilon)| \le k_7,\ |\gamma_\varepsilon''(\Theta_\varepsilon)| \le k_8,\ |\widehat{\gamma}_\varepsilon''(\Theta_\varepsilon)| \le k_9 \textit{ and } |\Gamma_\varepsilon'(\Theta_\varepsilon)| \le k_{10} \qquad \textit{in } \Omega \times (0,T). \tag{3.28}$$

PROOF. 这直接源自（3.3）中的收敛性质，以及 γ和 $\widehat{\gamma}$ 在 $[0,\infty)$ 上的正性。□

随后 在 (3.27) 之后，下面的引理 3.8 中还会用到另一项选取 :

引理 3.4 设 M 和 $\varepsilon_\star$ 如引理 *3.2* 和引理 *3.3* 中所述。那么存在 $k_{11}>0$，使得如果 $\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_\star)$ 和 $t\in(0,\ T_{max,\varepsilon})$ 满足 *(3.26)*，则

$$\|\Theta_{\varepsilon xx}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\Theta_{\varepsilon x}(\cdot,t)\|^2_{L^\infty(\Omega)}\le k_{11}\|v_{\varepsilon x}(\cdot,t)\|^2_{L^\infty(\Omega)}+k_{11}\qquad \textit{for all } t\in(0,T). \tag{3.29}$$

PROOF. 由 (3.26) 和 (3.28) 可知，根据 (3.7) 中的第四个方程，

$$|\Theta_{\varepsilon xx}|=\Big|\frac{\Theta_{\varepsilon t}-\Gamma_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)v^2_{\varepsilon x}}{D}\Big|\le\frac{M}{D}+\frac{k_5}{D}v^2_{\varepsilon x}\qquad \text{in } \Omega\times(0,T),$$

而 Gagliardo-Nirenberg 插值给出 $c_1>0$，满足

$$\|\varphi_x\|^2_{L^\infty(\Omega)}\le c_1\|\varphi_{xx}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\qquad \text{for all } \varphi\in C^2(\overline{\Omega}).$$

因此，若令 $k_{11}:=(1+c_1M)\cdot\max\left\{\frac{M}{D},\frac{k_5}{D}\right\}$，则得到 (3.29)。□

现在，通过直接计算，可以描述（3.21）中泛函的一个近似变体里主要部分的演化。

引理 3.5 设 $\varepsilon\in(0,1)$。则

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big\{&\frac12\int_\Omega w^2_{\varepsilon x}+\frac12\int_\Omega\gamma_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)v^2_{\varepsilon xx}+\int_\Omega\widehat{\gamma}_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)u_{\varepsilon xx}v_{\varepsilon xx}+\varepsilon\int_\Omega\widehat{\gamma}_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)u^2_{\varepsilon xxx}\Big\}\\
&+\alpha\int_\Omega w^2_{\varepsilon x}+\varepsilon\int_\Omega w^2_{\varepsilon xx}+\varepsilon\int_\Omega\gamma_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)v^2_{\varepsilon xxx}+2\varepsilon^2\int_\Omega\widehat{\gamma}_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)u^2_{\varepsilon xxxx}\\
=\ &\int_\Omega\widehat{\gamma}_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)v^2_{\varepsilon xx}+\frac12\int_\Omega\gamma'_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon t}v^2_{\varepsilon xx}+\int_\Omega\widehat{\gamma}'_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon t}u_{\varepsilon xx}v_{\varepsilon xx}\\
&+\int_\Omega\gamma'_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon x}v_{\varepsilon xx}w_{\varepsilon x}+\int_\Omega\widehat{\gamma}'_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon x}u_{\varepsilon xx}w_{\varepsilon x}+\int_\Omega\gamma'_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon xx}v_{\varepsilon x}w_{\varepsilon x}\\
&+\int_\Omega\widehat{\gamma}'_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon xx}u_{\varepsilon x}w_{\varepsilon x}+\int_\Omega\gamma''_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)\Theta^2_{\varepsilon x}v_{\varepsilon x}w_{\varepsilon x}+\int_\Omega\widehat{\gamma}''_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)\Theta^2_{\varepsilon x}u_{\varepsilon x}w_{\varepsilon x}\\
&+\varepsilon\int_\Omega\widehat{\gamma}'_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon t}u^2_{\varepsilon xxx}-\varepsilon\int_\Omega\gamma'_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon x}v_{\varepsilon xx}v_{\varepsilon xxx}\\
&-\varepsilon\int_\Omega\widehat{\gamma}'_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon x}u_{\varepsilon xx}v_{\varepsilon xxx}-\varepsilon\int_\Omega\widehat{\gamma}'_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon x}u_{\varepsilon xxx}v_{\varepsilon xx}\\
&-2\varepsilon^2\int_\Omega\widehat{\gamma}'_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon x}u_{\varepsilon xxx}u_{\varepsilon xxxx}\qquad \textit{for all } t\in(0,T_{max,\varepsilon}).
\end{aligned}\tag{3.30}$$

PROOF. 用 $-w_{\varepsilon xx}$ 对 (3.7) 中的第一个方程进行检验可得，对于所有 $t\in(0,\ T_{max,\ \varepsilon})$,

$$\frac12\frac{d}{dt}\int_\Omega w^2_{\varepsilon x}+\alpha\int_\Omega w^2_{\varepsilon x}+\varepsilon\int_\Omega w^2_{\varepsilon xx}\ =\ -\int_\Omega\gamma_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)v_{\varepsilon xx}w_{\varepsilon xx}-\int_\Omega\gamma'_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon x}v_{\varepsilon x}w_{\varepsilon xx}$$

$$-\int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)u_{\varepsilon xx}w_{\varepsilon xx}-\int_\Omega \widehat{\gamma}'_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon x}u_{\varepsilon x}w_{\varepsilon xx}, \quad (3.31)$$

其中，由于 $v_{\varepsilon xxt}=\varepsilon v_{\varepsilon xxxx}+w_{\varepsilon xx}$,

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \gamma_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)v_{\varepsilon xx}w_{\varepsilon xx} &= -\int_\Omega \gamma_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)v_{\varepsilon xx}\cdot(v_{\varepsilon xxt}-\varepsilon v_{\varepsilon xxxx})\\ &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \gamma_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)v^2_{\varepsilon xx}+\frac{1}{2}\int_\Omega \gamma'_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon t}v^2_{\varepsilon xx}\\ &\quad -\varepsilon\int_\Omega \gamma_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)v^2_{\varepsilon xxx}-\varepsilon\int_\Omega \gamma'_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon x}v_{\varepsilon xx}v_{\varepsilon xxx} \quad (3.32)\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)u_{\varepsilon xx}w_{\varepsilon xx} &= -\int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)u_{\varepsilon xx}\cdot(v_{\varepsilon xxt}-\varepsilon v_{\varepsilon xxxx})\\ &= -\frac{d}{dt}\int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)u_{\varepsilon xx}v_{\varepsilon xx}+\int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)u_{\varepsilon xxt}v_{\varepsilon xx}+\int_\Omega \widehat{\gamma}'_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon t}u_{\varepsilon xx}v_{\varepsilon xx}\\ &\quad -\varepsilon\int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)u_{\varepsilon xxx}v_{\varepsilon xxx}-\varepsilon\int_\Omega \widehat{\gamma}'_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon x}u_{\varepsilon xx}u_{\varepsilon xxx} \quad (3.33)\end{aligned}$$

对所有 $t\in(0,\ T_{max,\ \varepsilon})$，因为 (3.7) 中的边界条件特别意味着 $v_{\varepsilon xxx}=0$ 在$\partial\Omega\times(0,\ T_{max,\ \varepsilon})$ 上成立。由 (3.7) 中的第三个方程，我们同样发现，对所有 $t\in(0,\ T_{max,\ \varepsilon})$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)u_{\varepsilon xxt}v_{\varepsilon xx} &= \int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)\cdot(\varepsilon u_{\varepsilon xxxx}+v_{\varepsilon xx})\cdot v_{\varepsilon xx}\\ &= -\varepsilon\int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)u_{\varepsilon xxx}v_{\varepsilon xxx}-\varepsilon\int_\Omega \widehat{\gamma}'_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon x}u_{\varepsilon xxx}v_{\varepsilon xx}+\int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)v^2_{\varepsilon xx},\end{aligned}$$

并且，由于还有 $u_{\varepsilon xxx}=0$ 在 $\partial\Omega\times(0,\ T_{max,\ \varepsilon})$ 上成立,

$$\begin{aligned}-2\varepsilon\int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)u_{\varepsilon xxx}v_{\varepsilon xxx} &= -2\varepsilon\int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)u_{\varepsilon xxx}\cdot(u_{\varepsilon xxxt}-\varepsilon u_{\varepsilon xxxxx})\\ &= -\varepsilon\frac{d}{dt}\int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)u^2_{\varepsilon xxx}+\varepsilon\int_\Omega \widehat{\gamma}'_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon t}u^2_{\varepsilon xxx}\\ &\quad -2\varepsilon^2\int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)u^2_{\varepsilon xxxx}-2\varepsilon^2\int_\Omega \widehat{\gamma}'_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon x}u_{\varepsilon xxx}u_{\varepsilon xxxx}\end{aligned}$$

对所有 $t\in(0,\ T_{max,\ \varepsilon})$，由 (3.33) 可知

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)u_{\varepsilon xx}w_{\varepsilon xx} &= -\frac{d}{dt}\int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)u_{\varepsilon xx}v_{\varepsilon xx}-\varepsilon\frac{d}{dt}\int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)u^2_{\varepsilon xxx}\\ &\quad +\int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)v^2_{\varepsilon xx}+\int_\Omega \widehat{\gamma}'_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon t}u_{\varepsilon xx}v_{\varepsilon xx}\\ &\quad -\varepsilon\int_\Omega \widehat{\gamma}'_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon x}u_{\varepsilon xx}u_{\varepsilon xxx}-\varepsilon\int_\Omega \widehat{\gamma}'_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon x}u_{\varepsilon xx}v_{\varepsilon xx}\end{aligned}$$

$$+\varepsilon\int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon'(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon t}u_{\varepsilon xxx}^2$$
$$-2\varepsilon^2\int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)u_{\varepsilon xxxx}^2 - 2\varepsilon^2\int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon'(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon x}u_{\varepsilon xxx}u_{\varepsilon xxxx} \tag{3.34}$$

对所有 $t \in (0,\ T_{max,\ \varepsilon})$。此外，根据下式进行两次进一步的分部积分，可以降低 (3.31) 右侧第二项和最后一项中作用于 w_ε 的微分阶数

$$-\int_\Omega \gamma_\varepsilon'(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon x}v_{\varepsilon x}w_{\varepsilon xx} = \int_\Omega \gamma_\varepsilon'(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon x}v_{\varepsilon xx}w_{\varepsilon x} + \int_\Omega \gamma_\varepsilon'(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon xx}v_{\varepsilon x}w_{\varepsilon x} + \int_\Omega \gamma_\varepsilon''(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon x}^2v_{\varepsilon x}w_{\varepsilon x}$$

and

$$\int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon'(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon x}u_{\varepsilon x}w_{\varepsilon xx} = \int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon'(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon x}u_{\varepsilon xx}w_{\varepsilon x} + \int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon'(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon xx}u_{\varepsilon x}w_{\varepsilon x} + \int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon''(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon x}^2u_{\varepsilon x}w_{\varepsilon x}$$

对所有 $t \in (0,\ T_{max,\ \varepsilon})$ 均成立。结合 (3.34)、(3.32) 和 (3.31)，即可得出 (3.30)。 □

这 些信息将与以下初等演化性质结合使用。

引理 3.6 设 $\varepsilon \in (0,\ 1)$。则

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_{\varepsilon xx}^2 + \varepsilon\int_\Omega u_{\varepsilon xxx}^2 \le \frac{1}{2}\int_\Omega u_{\varepsilon xx}^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega v_{\varepsilon xx}^2 \qquad \textit{for all } t \in (0, T_{max,\varepsilon}). \tag{3.35}$$

Proof. 这可直接由 (3.7) 中的第三个方程得到；为验证以下结论，可使用杨氏不等式：

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_{\varepsilon xx}^2 + \varepsilon\int_\Omega u_{\varepsilon xxx}^2 = \int_\Omega u_{\varepsilon xx}v_{\varepsilon xx} \le \frac{1}{2}\int_\Omega u_{\varepsilon xx}^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega v_{\varepsilon xx}^2$$

对所有 $t \in (0,\ T_{max,\ \varepsilon})$ 均成立。 □

现在，我们可以精确定义泛函 (3.21) 的一个近似对应项，并在 (3.26) 成立时为其推导一些基本的双侧界。

引理 3.7 存在 $k_{12} > 0$，使得若满足 $\varepsilon_\star$，且令 $(k_i)^{i\in\{1,\dots,10\}}$ 如引理 *3.3* 中所示

$$B := \frac{4k_4^2}{k_1} \tag{3.36}$$

and

$$y_\varepsilon(t) := \frac{1}{2}\int_\Omega w_{\varepsilon x}^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega \gamma_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)v_{\varepsilon xx}^2 + \int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)u_{\varepsilon xx}v_{\varepsilon xx} + \frac{B}{2}\int_\Omega u_{\varepsilon xx}^2 + \varepsilon\int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)u_{\varepsilon xxx}^2 \tag{3.37}$$

对于 $t \in (0, T_{max,\varepsilon})$ 和 $\varepsilon \in (0,\ 1)$，那么只要 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\star)$ 和 $T \in (0, T_{max,\varepsilon})$ 满足条件 *(3.26)*，其中 M 取自引理 *3.2*，即可得到

$$k_{12}y_\varepsilon(t) \ge \int_\Omega w_{\varepsilon x}^2 + \int_\Omega v_{\varepsilon xx}^2 + \int_\Omega u_{\varepsilon xx}^2 + \varepsilon\int_\Omega u_{\varepsilon xxx}^2 \qquad \textit{for all } t \in (0, T). \tag{3.38}$$

PROOF. 利用 (3.27) 中的下界估计可知

$$y_\varepsilon(t) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega w_{\varepsilon x}^2 + \frac{k_1}{2}\int_\Omega v_{\varepsilon xx}^2 + \int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)u_{\varepsilon xx}v_{\varepsilon xx} + \frac{B}{2}\int_\Omega u_{\varepsilon xx}^2 \qquad \text{for all } t \in (0,T),$$

而这里，一个 co mbination of 杨氏不等式与 (3.27) 中最右侧的界相结合，表明

$$\left|\int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)u_{\varepsilon xx}v_{\varepsilon xx}\right| \leq \frac{k_1}{4}\int_\Omega v_{\varepsilon xx}^2 + \frac{k_4^2}{k_1}\int_\Omega u_{\varepsilon xx}^2 \qquad \text{for all } t \in (0,T).$$

由于 (3.36) 意味着 $\frac{k_4^2}{k_1} = \frac{B}{4}$，若令 $k_{12} := \max\left\{2, \frac{4}{k_1}, \frac{4}{B}, \frac{1}{k_3}\right\}$，便可立即得到 (3.38)。 □

引理 3.5 与引理 3.6 相结合，表明这些泛函确实具有类似于 (3.22) 中所述的演化性质：

引理 3.8 取自引理 *3.2* 和引理 *3.3* 的 M 和 $\varepsilon_\star$，可以找到具有如下性质的 $k_{13} > 0$：若 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\star)$ 和 $T \in (0, T_{max,\varepsilon})$ 满足 *(3.26)*，则 *(3.37)* 中的函数满足

$$y_\varepsilon'(t) + k_1\varepsilon\int_\Omega v_{\varepsilon xxx}^2 \leq k_{13}y_\varepsilon^2(t) + k_{13}y_\varepsilon(t) \qquad \textit{for all } t \in (0,T). \tag{3.39}$$

PROOF. 在 (3.30) 的右端，我们应用引理 3.3 时依赖假设 (3.26)，并结合柯西-施瓦茨不等式，得到

$$\int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)v_{\varepsilon xx}^2 \leq k_4\int_\Omega v_{\varepsilon xx}^2 \leq k_4k_{12}y_\varepsilon(t) \tag{3.40}$$

and

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \gamma_\varepsilon'(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon t}v_{\varepsilon xx}^2 \leq \frac{k_6M}{2}\int_\Omega v_{\varepsilon xx}^2 \leq \frac{k_6k_{12}M}{2}y_\varepsilon(t) \tag{3.41}$$

and

$$\int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon'(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon t}u_{\varepsilon xx}v_{\varepsilon xx} \leq k_7M\int_\Omega |u_{\varepsilon xx}|\cdot|v_{\varepsilon xx}| \leq k_7M\|u_{\varepsilon xx}\|_{L^2(\Omega)}\|v_{\varepsilon xx}\|_{L^2(\Omega)} \leq k_7k_{12}My_\varepsilon(t) \tag{3.42}$$

以及

$$\varepsilon\int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon'(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon t}u_{\varepsilon xxx}^2 \leq k_7M\varepsilon\int_\Omega u_{\varepsilon xxx}^2 \leq k_7k_{12}My_\varepsilon(t) \tag{3.43}$$

对所有 $t \in (0,T)$。接下来取 $c_1 > 0$，根据索伯列夫不等式，我们有

$$\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_1\|\varphi_x\|_{L^2(\Omega)} \qquad \text{for all } \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega), \tag{3.44}$$

并注意到，由此特别可由引理 3.4 得出

$$\begin{aligned}\|\Theta_{\varepsilon xx}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\Theta_{\varepsilon x}\|_{L^\infty(\Omega)}^2 &\leq k_{11}c_1^2\int_\Omega v_{\varepsilon xx}^2 + k_{11} \\ &\leq c_1y_\varepsilon(t) + c_2 \qquad \text{for all } t \in (0,T)\end{aligned} \tag{3.45}$$

其中 $c_2 := \max\{k_{12}k_{11}c_1^2, k_{11}\}$。因此，反复应用引理 3.3，并结合柯西-施瓦茨不等式、(3.44) 和 (3.45)，可得

$$\begin{aligned}\int_\Omega \gamma_\varepsilon'(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon x}v_{\varepsilon xx}w_{\varepsilon x} &\le k_6\cdot(c_2y_\varepsilon(t)+c_2)^{\frac12}\|v_{\varepsilon xx}\|_{L^2(\Omega)}\|w_{\varepsilon x}\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le k_6k_{12}c_2^{\frac12}(y_\varepsilon(t)+1)^{\frac12}y_\varepsilon(t)\qquad \text{for all } t\in(0,T),\end{aligned}\tag{3.46}$$

同样地

$$\begin{aligned}\int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon'(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon x}u_{\varepsilon xx}w_{\varepsilon x} &\le k_7\cdot(c_2y_\varepsilon(t)+c_2)^{\frac12}\|u_{\varepsilon xx}\|_{L^2(\Omega)}\|w_{\varepsilon x}\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le k_7k_{12}c_2^{\frac12}(y_\varepsilon(t)+1)^{\frac12}y_\varepsilon(t)\qquad \text{for all } t\in(0,T),\end{aligned}\tag{3.47}$$

that

$$\begin{aligned}\int_\Omega \gamma_\varepsilon'(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon xx}v_{\varepsilon x}w_{\varepsilon x} &\le k_6\cdot(c_2y_\varepsilon(t)+c_2)\|v_{\varepsilon x}\|_{L^2(\Omega)}\|w_{\varepsilon x}\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le k_6\cdot(c_2y_\varepsilon(t)+c_2)\cdot c_1\|v_{\varepsilon xx}\|_{L^2(\Omega)}\|w_{\varepsilon x}\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le k_6k_{12}c_1c_2y_\varepsilon^2(t)+k_6c_1c_2y_\varepsilon(t)\qquad \text{for all } t\in(0,T)\end{aligned}\tag{3.48}$$

and

$$\int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon'(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon xx}u_{\varepsilon x}w_{\varepsilon x}\le k_7k_{12}c_1c_2y_\varepsilon^2(t)+k_7k_{12}c_1c_2y_\varepsilon(t)\qquad \text{for all } t\in(0,T),\tag{3.49}$$

并且

$$\begin{aligned}\int_\Omega \gamma_\varepsilon''(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon x}^2v_{\varepsilon x}w_{\varepsilon x} &\le k_8\cdot(c_2y_\varepsilon(t)+c_2)\|v_{\varepsilon x}\|_{L^2(\Omega)}\|w_{\varepsilon x}\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le k_8k_{12}c_1c_2y_\varepsilon^2(t)+k_8k_{12}c_1c_2y_\varepsilon(t)\qquad \text{for all } t\in(0,T)\end{aligned}\tag{3.50}$$

以及

$$\int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon''(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon x}^2u_{\varepsilon x}w_{\varepsilon x}\le k_9k_{12}c_1c_2y_\varepsilon^2(t)+k_9k_{12}c_1c_2y_\varepsilon(t)\qquad \text{for all } t\in(0,T)\tag{3.51}$$

and

$$\begin{aligned}-\varepsilon\int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon'(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon x}u_{\varepsilon xxx}v_{\varepsilon xx} &\le k_7\varepsilon\cdot(c_2y_\varepsilon(t)+c_2)^{\frac12}\|u_{\varepsilon xxx}\|_{L^2(\Omega)}\|v_{\varepsilon xx}\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le k_7\varepsilon\cdot(c_2y_\varepsilon(t)+c_2)^{\frac12}\cdot\Big(\frac{k_{12}y_\varepsilon(t)}{\varepsilon}\Big)^{\frac12}\cdot\big(k_{12}y_\varepsilon(t)\big)^{\frac12}\\ &\le k_7k_{12}c_2^{\frac12}\cdot(y_\varepsilon(t)+1)^{\frac12}y_\varepsilon(t)\qquad \text{for all } t\in(0,T),\end{aligned}\tag{3.52}$$

因为 $\varepsilon<1$。除此之外，利用杨氏不等式，我们可以借助式（3.30）中与耗散相关的项来估计

$$-\varepsilon\int_\Omega \gamma_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)v_{\varepsilon xxx}^2-\varepsilon\int_\Omega \gamma_\varepsilon'(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon x}v_{\varepsilon xx}v_{\varepsilon xxx}-\varepsilon\int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon'(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon x}u_{\varepsilon xx}v_{\varepsilon xxx}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq -k_1\varepsilon\int_\Omega v_{\varepsilon xxx}^2 + k_6\varepsilon\cdot(c_2y_\varepsilon(t)+c_2)^{\frac12}\int_\Omega |v_{\varepsilon xx}|\cdot|v_{\varepsilon xxx}| + k_7\varepsilon\cdot(c_2y_\varepsilon(t)+c_2)^{\frac12}\int_\Omega |u_{\varepsilon xx}|\cdot|v_{\varepsilon xxx}|\\
&\leq -k_1\varepsilon\int_\Omega v_{\varepsilon xxx}^2 + \frac{k_1\varepsilon}{2}\int_\Omega v_{\varepsilon xxx}^2 + \frac{k_6^2\varepsilon(c_2y_\varepsilon(t)+c_2)}{k_1}\int_\Omega v_{\varepsilon xx}^2\\
&\quad + \frac{k_1\varepsilon}{2}\int_\Omega v_{\varepsilon xxx}^2 + \frac{k_7^2\varepsilon(c_2y_\varepsilon(t)+c_2)}{k_1}\int_\Omega u_{\varepsilon xx}^2\\
&\leq \frac{(k_6^2+k_7^2)k_{12}c_2}{k_1}y_\varepsilon^2(t) + \frac{(k_6^2+k_7^2)k_{12}c_2}{k_1}y_\varepsilon(t) \qquad \text{for all } t\in(0,T)
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&-2\varepsilon^2\int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)u_{\varepsilon xxxx}^2 - 2\varepsilon^2\int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon'(\Theta_\varepsilon)\Theta_{\varepsilon x}u_{\varepsilon xxx}u_{\varepsilon xxxx}\\
&\qquad\leq -2k_3\varepsilon^2\int_\Omega u_{\varepsilon xxxx}^2 + 2k_7\varepsilon^2(c_2y_\varepsilon(t)+c_2)^{\frac12}\int_\Omega |u_{\varepsilon xxx}|\cdot|u_{\varepsilon xxxx}|\\
&\qquad\leq \frac{k_7^2\varepsilon^2(c_2y_\varepsilon(t)+c_2)}{2k_3}\int_\Omega u_{\varepsilon xxx}^2\\
&\qquad\leq \frac{k_7^2k_{12}c_2}{2k_3}y_\varepsilon^2(t) + \frac{k_7^2k_{12}c_2}{2k_3}y_\varepsilon(t) \qquad \text{for all } t\in(0,T),
\end{aligned}
\tag{3.54}
$$

同样是因为 $\varepsilon<1$。最后，由于式（3.35）的右端有

$$
\frac12\int_\Omega u_{\varepsilon xx}^2 + \frac12\int_\Omega v_{\varepsilon xx}^2 \leq \frac{k_{12}}{2}y_\varepsilon(t) \qquad \text{for all } t\in(0,T),
$$

综合 (3.40)-(3.43) 和 (3.46)-(3.54)，由 (3.37)、(3.30)、(3.35) 和引理 3.3 可得

$$
y_\varepsilon'(t) + k_1\varepsilon\int_\Omega v_{\varepsilon xxx}^2 \leq c_3y_\varepsilon^2(t) + c_4(y_\varepsilon(t)+1)^{\frac12}y_\varepsilon(t) + c_5y_\varepsilon(t) \qquad \text{for all } t\in(0,T) \tag{3.55}
$$

其中 $c_3 := (k_6+k_7+k_8+k_9)k_{12}c_1c_2 + \frac{(k_6^2+k_7^2)k_{12}c_2}{k_1} + \frac{k_7^2k_{12}c_2}{2k_3}$，$c_4 := (k_6+2k_7)k_{12}c_2^{\frac12}$ 以及 $c_5 := k_4k_{12} + \frac{k_6k_{12}M}{2} + 2k_7k_{12}M + (k_6+k_7+k_8+k_9)k_{12}c_1c_2 + \frac{(k_6^2+k_7^2)k_{12}c_2}{k_1} + \frac{k_7^2k_{12}c_2}{2k_3} + \frac{k_{12}}{2}$。由于杨氏不等式保证

$$
c_4(y_\varepsilon(t)+1)^{\frac12}y_\varepsilon(t) \leq \frac{c_4}{2}(y_\varepsilon(t)+2)y_\varepsilon(t) \qquad \text{for all } t\in(0,T),
$$

由 (3.55)，通过显然地选取 k_{13}，可得 (3.39)。 □

上述性质还将由以下关于初始时刻的简单观察加以补充。

引理 3.9 设 $\varepsilon_\star$ 和 $(y_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_\star)}$ 如引理 *3.3* 和 *(3.37)* 中所述。则存在 $\varepsilon_{\star\star}\in(0,\varepsilon_\star)$，$y_0>0$ 和 $k_{14}>0$，使得

$$
y_\varepsilon(0) \leq y_0 \qquad \textit{for all } \varepsilon\in(0,\varepsilon_{\star\star}) \tag{3.56}
$$

and

$$
\int_\Omega v_{0\varepsilon x}^2 \leq k_{14} \qquad \textit{for all } \varepsilon\in(0,\varepsilon_{\star\star}). \tag{3.57}
$$

PROOF. 这两个性质显然都是 (3.5) 和 (3.6) 的直接推论。 □

事实上，由此我们可以从引理 3.8 得出以下结论，但须以 (3.26) 成立为条件。

引理 3.10 设 M 和 $\varepsilon_{\star\star}$ 如引理 *3.2* 和引理 *3.9* 中所述。则存在 $k_{15} > 0$ 和 $T_0 > 0$，使得只要 $\varepsilon \in (0,\ \varepsilon_{\star\star})$ 以及 $T \in (0,\ T_{max,\ \varepsilon})$ 满足 *(3.26)*，就有

$$\int_\Omega w_{\varepsilon x}^2(\cdot,t) \le k_{15} \qquad \textit{for all } t \in (0,T) \cap (0,T_0) \tag{3.58}$$

and

$$\int_\Omega v_{\varepsilon xx}^2(\cdot,t) \le k_{15} \qquad \textit{for all } t \in (0,T) \cap (0,T_0) \tag{3.59}$$

and

$$\int_\Omega u_{\varepsilon xx}^2(\cdot,t) \le k_{15} \qquad \textit{for all } t \in (0,T) \cap (0,T_0) \tag{3.60}$$

以及

$$\varepsilon \int_0^t \int_\Omega v_{\varepsilon xxx}^2 \le k_{15} \qquad \textit{for all } t \in (0,T) \cap (0,T_0). \tag{3.61}$$

PROOF. 取自引理 3.7 的 B 和 k_{12}，以及引理 3.9 给出的 y_0 和 k_{14}，令

$$N := 2(y_0 + 1) \tag{3.62}$$

并定义

$$T_0 := \frac{1}{k_{13}N^2 + k_{13}N}, \tag{3.63}$$

其中 k_{13} 如引理 3.8 中所述。假设 (3.26) 对某个 $\varepsilon \in (0,\ \varepsilon_{\star\star})$ 和 $T \in (0,\ T_{max,\ \varepsilon})$ 成立，则根据 (3.37) 中函数 y_ε 的连续性，并由 (3.56) 和 (3.62) 可推得，

$$T_1 := \sup\Big\{ T' \in (0, T_{max,\varepsilon}) \ \Big|\ y_\varepsilon(t) \le N \text{ for all } t \in (0,T') \Big\}$$

在 $T_1 \in (0,\ T_{max,\ \varepsilon}] \subset (0,\ \infty]$ 上定义良好，并且我们实际上断言，

$$T_1 \ge \min\big\{T\,,\, T_0\big\}. \tag{3.64}$$

为此，我们首先注意到，与 (3.26) 一致，根据引理 3.8，我们知道

$$\begin{aligned} y_\varepsilon'(t) + k_1\varepsilon \int_\Omega v_{\varepsilon xxx}^2 &\le k_{13}y_\varepsilon^2(t) + k_{13}y_\varepsilon(t) \\ &\le k_{13}N^2 + k_{13}N \qquad \text{for all } t \in (0,T)\cap(0,T_1), \end{aligned} \tag{3.65}$$

因此，假设反证地有

$$T_1 < T \qquad \text{and} \qquad T_1 < T_0, \tag{3.66}$$

根据 (3.63)，我们尤其可以从 (3.65) 推断出

$$y_\varepsilon(t) \le y_\varepsilon(0) + (k_{13}N^2 + k_{13}N)\cdot t$$

$$\begin{aligned} &\leq y_\varepsilon(0) + (k_{13}N^2 + k_{13}N)\cdot T_0 \\ &\leq y_0 + 1. \end{aligned}$$

然而，鉴于 (3.62)，这意味着

$$y_\varepsilon(t) \leq \frac{N}{2} \qquad \text{for all } t \in (0, T_1),$$

这再次由 y_ε的连续性可知，与 (3.66) 不相容，从而得出 (3.64)。因此可知，对于所有 $t \in [0, T_1)$，$y_\varepsilon(t) \leq N$，于是由此对 (3.65) 积分可得

$$\begin{aligned} k_1\varepsilon \int_0^t \int_\Omega v_{\varepsilon xxx}^2 &\leq y_\varepsilon(0) + (k_{13}N^2 + k_{13}N)\cdot t \\ &\leq N + (k_{13}N^2 + k_{13}N)\cdot T_0 \qquad \text{for all } t \in (0,T)\cap(0,T_0), \end{aligned}$$

若 k_{15} 选取得足够大，则 (3.58)-(3.61) 中的所有估计均已得到验证。 □

现在，在一个适当的自映射型框架中，利用 Neumann热半群的正则化性质，可以通过 (3.58)、(3.59) 和 (3.61) 中的估计，确保 (3.26) 中的假设在一个长度适当小但与 ε无关的时间区间内始终成立：

引理 3.11 设 M、$\varepsilon_\star$ 和 T_0 如引理 *3.2*、引理 *3.9* 和引理 *3.10* 所给出。则可找到 $T_\star \in (0, T_0)$ 使得

$$\|\Theta_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\Theta_{\varepsilon t}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M \qquad \textit{for all } t \in (0,T_\star)\cap(0,T_{max,\varepsilon}) \textit{ and } \varepsilon \in (0,\varepsilon_{\star\star}). \tag{3.67}$$

Proof. 根据 Neumann热半群的标准光滑化性质（$(e^{t\Delta})_{t\geq 0}$ 在 Ω（[60]）上，我们可以固定 $c_1 > 0$ 和 $c_2 > 0$，使得只要 $\varphi \in C^0$（Ω），

$$\|e^{tD\Delta}\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_1 t^{-\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{L^1(\Omega)} \qquad \text{for all } t \in (0,T_0) \tag{3.68}$$

and

$$\|e^{tD\Delta}\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_2 t^{-\frac{1}{4}} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \qquad \text{for all } t \in (0,T_0), \tag{3.69}$$

并且根据嵌入的连续性 $W^{1,\,2}$（Ω）$\hookrightarrow L^\infty$（Ω），我们可以选取满足条件的某个 $c_3 > 0$

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_3 \|\varphi_x\|_{L^2(\Omega)} \qquad \text{for all } \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{3.70}$$

取引理 3.3 和引理 3.10 中得到的 k_5、k_{10} 和 k_{15}，然后令 $T_\star \in (0, T_0)$ 足够小，使得

$$2c_1 c_3^2 k_5 k_{15} |\Omega| T_\star^{\frac{1}{2}} \leq \frac{M}{8} \tag{3.71}$$

and

$$4\sqrt{2} c_2 c_3^2 k_5 k_{15}^2 \cdot (1+T_0) T_\star^{\frac{1}{4}} + c_3^2 k_{10} k_{15} T_\star \leq \frac{M}{8}, \tag{3.72}$$

对于固定的 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{\star\star})$，我们设

$$T_\varepsilon := \sup\Big\{T' \in (0, T_{max,\varepsilon}) \ \Big| \ \|\Theta_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\Theta_{\varepsilon t}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le M \text{ for all } t \in (0,T')\Big\}, \tag{3.73}$$

注意到，根据引理 3.2 以及 Θ_ε 和$\Theta_{\varepsilon t}$ 在 $\Omega \times [0, T_{max,\varepsilon}$中的连续性， $T_\varepsilon \in (0, T_{max,\ \varepsilon}]$ 是定义良好且为正的。现在，若有

$$T_\varepsilon < T_\star, \tag{3.74}$$

那么，由 (3.71) 可知 $T_\varepsilon \le T_0$ ，结合 (3.73)，我们可以应用引理 3.10 得到

$$\int_\Omega w_{\varepsilon x}^2 \le k_{15}, \quad \int_\Omega v_{\varepsilon xx}^2 \le k_{15} \quad \text{and} \quad \varepsilon \int_0^t \int_\Omega v_{\varepsilon xxx}^2 \le k_{15} \qquad \text{for all } t \in (0, T_\varepsilon), \tag{3.75}$$

由 (3.70) 可知，这尤其意味着

$$\|v_{\varepsilon x}\|_{L^\infty(\Omega)} \le c_3\sqrt{k_{15}} \qquad \text{for all } t \in (0, T_\varepsilon). \tag{3.76}$$

对于函数

$$h_{1,\varepsilon} := \Gamma_\varepsilon(\Theta_\varepsilon) v_{\varepsilon x}^2, \quad h_{2,\varepsilon} := 2\Gamma_\varepsilon(\Theta_\varepsilon) v_{\varepsilon x} v_{\varepsilon xt} \quad \text{and} \quad h_{3,\varepsilon} := \Gamma_\varepsilon'(\Theta_\varepsilon) v_{\varepsilon x}^2, \tag{3.77}$$

因此，根据引理 3.3 和 (3.73)，我们可得

$$\|h_{1,\varepsilon}\|_{L^1(\Omega)} \le k_5 \int_\Omega v_{\varepsilon x}^2 \le c_3^2 k_5 k_{15} |\Omega| \qquad \text{for all } t \in (0, T_\varepsilon) \tag{3.78}$$

and

$$\|h_{3,\varepsilon}\|_{L^\infty(\Omega)} \le k_{10} \|v_{\varepsilon x}\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \le c_3^2 k_{10} k_{15} \qquad \text{for all } t \in (0, T_\varepsilon), \tag{3.79}$$

并且，再次由 (3.7) 可知,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|h_{2,\varepsilon}(\cdot,s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds &\le 2k_5 \int_0^t \|v_{\varepsilon x}(\cdot,s)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|v_{\varepsilon xt}(\cdot,s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
&= 2k_5 \int_0^t \|v_{\varepsilon x}(\cdot,s)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|\varepsilon v_{\varepsilon xxx}(\cdot,s) + w_{\varepsilon x}(\cdot,s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
&\le 4k_5 \int_0^t \|v_{\varepsilon x}(\cdot,s)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \cdot \big\{\varepsilon^2 \|v_{\varepsilon xxx}(\cdot,s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w_{\varepsilon x}(\cdot,s)\|_{L^2(\Omega)}^2\big\} ds \\
&\le 4k_5 \cdot c_3^2 k_{15} \cdot (\varepsilon k_{15} + k_{15} T_0) \\
&\le 4c_3^2 k_5 k_{15}^2 \cdot (1 + T_0) \qquad \text{for all } t \in (0, T_\varepsilon),
\end{aligned} \tag{3.80}$$

因为 $\varepsilon \le 1$。

为恰当地利用这一点，我们依靠与 (3.7) 中第四个子问题相关的杜哈梅尔表示来验证：根据最大值原理， $e^{t\Delta}$ 在 $L^\infty(\Omega)$ 上非扩张，因此引理 3.2 以及 (3.77) 和 (3.71) 推出

$$\|\Theta_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \left\| e^{dT\Delta}\Theta_{0\varepsilon} + \int_0^t e^{D(t-s)\Delta} h_{1,\varepsilon}(\cdot,s) ds \right\|_{L^\infty(\Omega)}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|\Theta_{0\varepsilon}\|_{L^\infty(\Omega)} + c_1 \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|h_{1,\varepsilon}(\cdot,s)\|_{L^1(\Omega)} ds \\
&\leq \frac{M}{8} + c_1 c_3^2 k_5 k_{15} |\Omega| \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} ds \\
&\leq \frac{M}{8} + 2c_1 c_3^2 k_5 k_{15} |\Omega| t^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{M}{4} \qquad \text{for all } t \in (0, T_\varepsilon). \qquad (3.81)
\end{aligned}
$$

类似地，根据 (3.7) 和 (3.77)， $\Theta_{\varepsilon tt} = D(\Theta_{\varepsilon t})_{xx} + h_{2,\ \varepsilon} + h_{3,\ \varepsilon}\Theta_{\varepsilon t}$ 在 $\Omega\times(0,\ T_{max,\ \varepsilon})$ 中成立，且 $(\Theta_{\varepsilon t})_x = 0$ 在 $\partial\Omega\times(0,\ T_{max,\ \varepsilon})$ 上成立；运用 (3.68) 以及柯西-施瓦茨不等式、引理 3.2、(3.68)、(3.67)、(3.73) 和 (3.72)，我们得到

$$
\begin{aligned}
\|\Theta_{\varepsilon t}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} &= \left\| e^{Dt\Delta}\Theta_{0\varepsilon t} + \int_0^t e^{D(t-s)\Delta} h_{2,\varepsilon}(\cdot,s) ds + \int_0^t e^{D(t-s)\Delta} \big\{ h_{3,\varepsilon}(\cdot,s)\Theta_{\varepsilon t}(\cdot,s) \big\} ds \right\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&\leq \|\Theta_{0\varepsilon t}\|_{L^\infty(\Omega)} + c_2 \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{4}} \|h_{2,\varepsilon}(\cdot,s)\|_{L^2(\Omega)} ds \\
&\quad + \int_0^t \|h_{3,\varepsilon}(\cdot,s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\Theta_{\varepsilon t}(\cdot,s)\|_{L^\infty(\Omega)} ds \\
&\leq \|\Theta_{0\varepsilon t}\|_{L^\infty(\Omega)} + c_2 \cdot \left\{ \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} ds \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \int_0^t \|h_{2,\varepsilon}(\cdot,s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \int_0^t \|h_{3,\varepsilon}(\cdot,s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\Theta_{\varepsilon t}(\cdot,s)\|_{L^\infty(\Omega)} ds \\
&\leq \frac{M}{8} + 4\sqrt{2} c_2 c_3^2 k_5 k_{15}^2 \cdot (1+T_0) \cdot t^{\frac{1}{4}} + c_3^2 k_{10} k_{15} M t \\
&\leq \frac{M}{4} \qquad \text{for all } t \in (0, T_\varepsilon).
\end{aligned}
$$

结合起来　　与 (3.81) 一起，这表明我们的假设将导致如下结论：　　t

$$
\|\Theta_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\Theta_{\varepsilon t}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{M}{2} \qquad \text{for all } t \in (0, T_\varepsilon),
$$

而根据 Θ_ε 和 $\Theta_{\varepsilon t}$ 的连续性，这显然又与 (3.74) 不相容。因此，我们必有 $T_\varepsilon \geq T_\star$，由此 (3.67) 直接由 (3.73) 中的定义得出。□

因此，我们的近似解至少存在到上述指定的时刻，并满足由引理 3.10 和引理 3.11 得出的估计自然蕴含的估计：

推论 3.12 设 $\varepsilon_{\star\star}$ 和 $T_\star$ 如引理 *3.9* 和引理 *3.11* 中所述。　　n

$$
T_{max,\varepsilon} \geq T_\star \qquad \textit{for all } \varepsilon \in (0, \varepsilon_{\star\star}), \qquad (3.82)
$$

并且存在 $C > 0$ 使得

$$
\|w_\varepsilon(\cdot,t)\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C \qquad \textit{for all } t \in (0, T_\star) \textit{ and } \varepsilon \in (0, \varepsilon_{\star\star}), \qquad (3.83)
$$

that

$$\|v_\varepsilon(\cdot,t)\|_{W^{2,2}(\Omega)} \le C \qquad \textit{for all } t \in (0,T_\star) \textit{ and } \varepsilon \in (0,\varepsilon_{\star\star}), \tag{3.84}$$

that

$$\|u_\varepsilon(\cdot,t)\|_{W^{2,2}(\Omega)} \le C \qquad \textit{for all } t \in (0,T_\star) \textit{ and } \varepsilon \in (0,\varepsilon_{\star\star}), \tag{3.85}$$

that

$$\|\Theta_{\varepsilon t}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le C \qquad \textit{for all } t \in (0,T_\star) \textit{ and } \varepsilon \in (0,\varepsilon_{\star\star}), \tag{3.86}$$

并且

$$\|\Theta_\varepsilon(\cdot,t)\|_{W^{2,\infty}(\Omega)} \le C \qquad \textit{for all } t \in (0,T_\star) \textit{ and } \varepsilon \in (0,\varepsilon_{\star\star}). \tag{3.87}$$

Proof. 由于嵌入的连续性 $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$，所有所述性质均可由引理 3.11 结合引理 3.10、(3.10) 与 (3.9) 立即得出。□

除此之外，我们再记录时间导数的一些正则性。

引理 3.13 存在 $C>0$，使得当 $\varepsilon_{\star\star}$ 与 $T_\star$ 如引理 *3.9* 和引理 *3.11* 中所取时，

$$\|w_{\varepsilon t}(\cdot,t)\|_{(W^{1,2}(\Omega))^\star} \le C \qquad \textit{for all } t \in (0,T_\star) \textit{ and } \varepsilon \in (0,\varepsilon_{\star\star}), \tag{3.88}$$

that

$$\|v_{\varepsilon t}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \le C \qquad \textit{for all } t \in (0,T_\star) \textit{ and } \varepsilon \in (0,\varepsilon_{\star\star}), \tag{3.89}$$

并且

$$\|u_{\varepsilon t}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \le C \qquad \textit{for all } t \in (0,T_\star) \textit{ and } \varepsilon \in (0,\varepsilon_{\star\star}). \tag{3.90}$$

Proof. 对于满足 $\|\psi\|_{L^2(\Omega)} + \|\psi_x\|_{L^2(\Omega)} \le 1$ 的 $\psi \in C^\infty(\Omega)$，由 (3.7) 并借助柯西-施瓦茨不等式可得，

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega w_{\varepsilon t}\psi\right| &= \left|-\alpha\int_\Omega w_\varepsilon\psi - \varepsilon\int_\Omega w_{\varepsilon x}\psi_x - \int_\Omega \gamma_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)v_{\varepsilon x}\psi_x - \int_\Omega \widehat{\gamma}_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)u_{\varepsilon x}\psi_x\right| \\ &\le \alpha\|w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \varepsilon\|w_{\varepsilon x}\|_{L^2(\Omega)} + \|\gamma_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)\|_{L^\infty(\Omega)}\|v_{\varepsilon x}\|_{L^2(\Omega)} + \|\widehat{\gamma}_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)\|_{L^\infty(\Omega)}\|u_{\varepsilon x}\|_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

对所有 $t \in (0, T_{max,\varepsilon})$ 与 $\varepsilon \in (0,1)$ 成立，从而由推论 3.12 与引理 3.3 可得 (3.88)。(3.89) 与 (3.90) 均为推论 3.12 的直接推论，因为对所有 $t \in (0, T_{max,\varepsilon})$ 与 $\varepsilon \in (0,1)$，

$$\|v_{\varepsilon t}\|_{L^2(\Omega)} \le \varepsilon\|v_{\varepsilon xx}\|_{L^2(\Omega)} + \|w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \le \|v_{\varepsilon xx}\|_{L^2(\Omega)} + \|w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}$$

and

$$\|u_{\varepsilon t}\|_{L^2(\Omega)} \le \varepsilon\|u_{\varepsilon xx}\|_{L^2(\Omega)} + \|v_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \le \|u_{\varepsilon xx}\|_{L^2(\Omega)} + \|v_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}$$

由 (3.7) 得。 □

基于推论 3.12 与引理 3.13 中汇集的估计，一个直接的抽取过程现在确实给出 (1.14) 的一个强解，它作为 (3.7) 的解的极限，其定义直至引理 3.11 中的时刻 $T_\star$：

引理 3.14 若 $\varepsilon_{\star\star}$ 与 $T_\star$ 如引理 *3.9* 和引理 *3.11* 中所求得，则可以找到 $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset (0, \varepsilon_{\star\star})$ 以及函数

$$\begin{cases} u \in C^0([0,T_\star]; W_N^{2,2}(\Omega)) \qquad and \\ \Theta \in C^0([0,T_\star]; C^1(\overline{\Omega})) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega}\times(0,T_\star)) \cap W^{1,\infty}(\Omega\times(0,T_\star)) \end{cases} \tag{3.91}$$

with

$$u_t \in C^0([0,T_\star]; C^1(\overline{\Omega})) \cap L^\infty((0,T_\star); W_N^{2,2}(\Omega)) \tag{3.92}$$

and

$$u_{tt} \in C^0(\overline{\Omega}\times[0,T_\star]) \cap L^\infty((0T_\star); W^{1,2}(\Omega)) \tag{3.93}$$

使得 $\Theta \geq 0$ 属于 $\Omega \times (0,T_\star)$，且 $\varepsilon_j \searrow 0$ 当 $j \to \infty$ 时，以及

$$u_\varepsilon \to u \qquad in\ C^0([0,T_\star]; C^1(\overline{\Omega})), \tag{3.94}$$

$$v_\varepsilon \to u_t \qquad in\ C^0([0,T_\star]; C^1(\overline{\Omega})), \tag{3.95}$$

$$w_\varepsilon \to u_{tt} \qquad in\ C^0(\overline{\Omega}\times[0,T_\star]), \tag{3.96}$$

$$\Theta_\varepsilon \to \Theta \qquad in\ C^0([0,T_\star]; C^1(\overline{\Omega})), \tag{3.97}$$

$$\Theta_{\varepsilon t} \overset{\star}{\rightharpoonup} \Theta_t \qquad in\ L^\infty(\Omega\times(0,T_\star)) \qquad and \tag{3.98}$$

$$\Theta_{\varepsilon xx} \overset{\star}{\rightharpoonup} \Theta_{xx} \qquad in\ L^\infty(\Omega\times(0,T_\star)) \tag{3.99}$$

当 $\varepsilon = \varepsilon_j \searrow 0$时，并且 (u,Θ) 按照定义 *2.1* 中规定的意义，在 $\Omega \times (0,T_\star)$ 上构成方程 ***(1.14)*** 的强解。

Proof. 推论 3.12 和引理 3.13 断言

$$(u_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_{\star\star})} \text{ and } (v_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_{\star\star})} \text{ are bounded in } C^0([0,T_\star]; W_N^{2,2}(\Omega)),$$

that

$$(w_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_{\star\star})} \text{ is bounded in } C^0([0,T_\star]; W^{1,2}(\Omega))$$

and

$$(\Theta_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_{\star\star})} \text{ is bounded in } C^0([0,T_\star]; W_N^{2,\infty}(\Omega)),$$

that

$$(u_{\varepsilon t})_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_{\star\star})} \text{ and } (v_{\varepsilon t})_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_{\star\star})} \text{ are bounded in } L^\infty((0,T_\star); L^2(\Omega)),$$

that

$$(w_{\varepsilon t})_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_{\star\star})} \text{ is bounded in } L^\infty\big((0,T_\star); (W^{1,2}(\Omega))^\star\big),$$

并且

$$(\Theta_{\varepsilon t})_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_{\star\star})} \text{ is bounded in } L^\infty(\Omega\times(0,T_\star)).$$

由嵌入 $W^{2,2}_N(\Omega) \hookrightarrow C^1(\Omega)$与 $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\Omega)$的紧性，对Aubin-利翁引理（[55]）的四次应用从而给出（ε_j）$_{j\in\mathbb{N}} \subset (0, \varepsilon_{\star\star})$以及函数

$$\begin{cases} u \in C^0([0,T_\star]; C^1(\overline{\Omega})) \cap L^\infty((0,T_\star); W^{2,2}_N(\Omega)), \\ v \in C^0([0,T_\star]; C^1(\overline{\Omega})) \cap L^\infty((0,T_\star); W^{2,2}_N(\Omega)), \\ w \in C^0(\overline{\Omega} \times [0,T_\star]) \cap L^\infty((0,T_\star); W^{1,2}(\Omega)) \qquad \text{and} \\ \Theta \in C^0([0,T_\star]; C^1(\overline{\Omega})) \cap L^\infty((0,T_\star); W^{2,\infty}_N(\Omega)) \end{cases} \tag{3.100}$$

使得 $\varepsilon_j \searrow 0$ 当 $j \to \infty$时， $\Theta_t \in L^\infty(\Omega \times (0, T_\star))$，并且当 $\varepsilon = \varepsilon_j \searrow 0$ 时，我们有

$$u_\varepsilon \to u \text{ and } v_\varepsilon \to v \qquad \text{in } C^0([0,T_\star]; C^1(\overline{\Omega})), \tag{3.101}$$

$$u_\varepsilon \overset{\star}{\rightharpoonup} u \text{ and } v_\varepsilon \overset{\star}{\rightharpoonup} v \qquad \text{in } L^\infty((0,T_\star); W^{2,2}(\Omega)), , \tag{3.102}$$

$$w_\varepsilon \to w \qquad \text{in } C^0(\overline{\Omega} \times [0,T_\star]) \qquad \text{and} \tag{3.103}$$

$$w_\varepsilon \overset{\star}{\rightharpoonup} w \qquad \text{in } L^\infty((0,T_\star); W^{1,2}(\Omega)) \tag{3.104}$$

以及 (3.97)-(3.99)。由于 (3.102) 和 (3.104) 与 (3.7) 一起推出

$$u_{\varepsilon t} = \varepsilon u_{\varepsilon xx} + v_\varepsilon \overset{\star}{\rightharpoonup} v \quad \text{and} \quad v_{\varepsilon t} = \varepsilon v_{\varepsilon xx} + w_\varepsilon \overset{\star}{\rightharpoonup} w \qquad \text{in } L^\infty((0,T_\star); L^2(\Omega))$$

当 $\varepsilon = \varepsilon_j \searrow 0$时，可知事实上 $u_t = v$ 和 $v_t = w$，因此，不仅 (3.92)-(3.93) 及由此得到的 (3.91)，而且 (3.94)-(3.96) 也都可由 (3.100)、(3.101) 和 (3.103) 推出。

Θ 的非负性由 Θ_ε 在 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{\star\star})$ 上的非负性通过 (3.97) 直接继承得到；此外，利用 (3.94)-(3.97)，可以直接推出性质 $u(\cdot, 0) = u_0$和 $u_t(\cdot, 0) = u_{0t}$，以及 (2.4)。由于 (3.95) 和 (3.97) 保证对每个 $\varphi \in C^\infty_0(\Omega \times [0,T_\star))$，在恒等式中

$$-\int_0^{T_\star}\int_\Omega \Theta_\varepsilon \varphi_t - \int_\Omega \Theta_{0\varepsilon}\varphi(\cdot,0) = -D\int_0^{T_\star}\int_\Omega \Theta_{\varepsilon x}\varphi_x + \int_0^{T_\star}\int_\Omega \Gamma_\varepsilon(\Theta_\varepsilon) v^2_{\varepsilon x}, \qquad \varepsilon \in (0,1),$$

我们可以令 $\varepsilon = \varepsilon_j \searrow 0$ 来验证

$$-\int_0^{T_\star}\int_\Omega \Theta \varphi_t - \int_\Omega \Theta_0\varphi(\cdot,0) = -D\int_0^{T_\star}\int_\Omega \Theta_x\varphi_x + \int_0^{T_\star}\int_\Omega \Gamma(\Theta) u^2_{xt},$$

我们进而得到该问题

$$\begin{cases} \Theta_t = D\Theta_{xx} + h(x,t), & x \in \Omega,\ t \in (0,T_\star), \\ \Theta_x = 0, & x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T_\star), \\ \Theta(x,0) = \Theta_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.105}$$

在 [36], 中，例如以标准弱意义求解；我们声称 $h := \Gamma(\Theta) u^2_{xt}$ 满足

$$h \in C^{\vartheta, \frac{\vartheta}{2}}(\overline{\Omega} \times [0,T_\star]) \tag{3.106}$$

其中某个 $\vartheta \in (0, 1)$。事实上，由 (3.100) 和恒等式 $v = u_t$ 可直接得到 $h \in C^0([0,T_\star]; C^0(\Omega)) \cap L^\infty((0, T_\star); W^{1,2}(\Omega))$；固定任意的 $\vartheta_1 \in (0, \frac{1}{2})$ 后，我们很容易借助插值论证推得：由于 $W^{1,2}(\Omega)$ 紧嵌入 $C^{\vartheta_1}(\Omega)$，因此可得

$$h \in C^0([0,T_\star]; C^{\vartheta_1}(\overline{\Omega})). \tag{3.107}$$

除此之外，基于我们在分布意义下有 $h_t = \Gamma'(\Theta)\Theta_t u_{xt}^2 + 2\Gamma(\Theta) u_{xt} u_{xtt}$ 这一事实，将 (3.91) 和 (3.92) 与 (3.93) 结合可知 $h_t \in L^\infty((0,t_\star); L^2(\Omega))$，因此存在某个 $c_1 > 0$，

$$\|h(\cdot,t) - h(\cdot,s)\|_{L^2(\Omega)} \le c_1 |t-s| \qquad \text{for all } t \in [0,T_\star] \text{ and } s \in [0,T_\star]. \tag{3.108}$$

取 $c_2 > 0$，使得根据 Gagliardo-Nirenberg不等式，我们有

$$\|\varphi\|_{C^0(\overline{\Omega})} \le c_2 \|\varphi\|_{W^{1,2}(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \qquad \text{for all } \varphi \in W^{1,2}(\Omega),$$

由此可估计

$$\|h(\cdot,t) - h(\cdot,s)\|_{C^0(\overline{\Omega})} \le c_2 \cdot \Big\{2\|h\|_{L^\infty((0,T_\star);W^{1,2}(\Omega))}\Big\}^{\frac{1}{2}} \cdot \Big\{c_1|t-s|\Big\}^{\frac{1}{2}} \qquad \text{for all } t \in [0,T_\star] \text{ and } s \in [0,T_\star],$$

这意味着，除 (3.107) 外，我们还知道 $h \in C^{\frac{1}{2}}([0,T_\star]; C^0(\Omega))$。因此，由某个充分小的 $\vartheta \in (0,1)$ 可知 (3.106) 确实成立，我们可以回到 (3.105)，并运用抛物正则性理论中的标准论证 ([48], [36])，从而得出 Θ 实际上属于 $C^{2,1}(\Omega \times (0,T_\star))$，并构成 (1.14) 中相应子问题的经典解。□

4 结论

最后，将引理 2.2 和引理 3.14 结合起来，并辅以直接的延拓论证，再简单推广到仅满足 (1.16)、但不必额外满足 (3.1) 的任意初始数据，即可得到我们的主要结果。

Proof 定理 1.1。唯一性结论已由引理 2.2 证明。为验证有关存在性与可延拓性的陈述，我们首先考虑满足 (3.1) 的情形，也就是说，数值

$$y_0 := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0, \qquad y_1 := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_{0t} \qquad \text{and} \qquad y_2 := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_{0tt} \tag{4.1}$$

满足 $y_0 = y_1 = y_2 = 0$。此时，我们可以利用引理 3.14，并根据上述唯一性性质，得到

$$T_{max} := \sup\Big\{T > 0 \;\Big|\; \text{There exists a strong solution of (1.14) in } \Omega \times (0,T)\Big\}$$

是 $(0,\infty]$ 中一个定义良好的元素，并且具有如下性质：在整个 $\Omega \times (0,T_{max})$ 中，方程 (1.14) 存在唯一一个强解 (u,Θ)。
现在，如果该解不满足 (1.20)，那么 $T_{max} < \infty$ 以及

$$\|u_t\|_{W^{2,2}(\Omega)} + \|u_{tt}\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|\Theta\|_{W^{2,\infty}(\Omega)} \le c_1 \qquad \text{for all } t \in (t_0, T_{max}) \tag{4.2}$$

其中某个 $c_1 > 0$ 以及某个 $t_0 \in (0, T_{max})$，这尤其意味着

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\|_{W^{2,2}(\Omega)} &= \left\| u(\cdot,t_0) + \int_{t_0}^{t} u_t(\cdot,s)ds \right\|_{W^{2,2}(\Omega)} \\ &\le \|u(\cdot,t_0)\|_{W^{2,2}(\Omega)} + \int_{t_0}^{T_{max}} \|u_t(\cdot,s)\|_{W^{2,2}(\Omega)} ds \\ &\le \|u(\cdot,t_0)\|_{W^{2,2}(\Omega)} + (T_{max} - t_0)\cdot c_1 \qquad \text{for all } t \in (t_0, T_{max}). \end{aligned} \tag{4.3}$$

根据 (4.2) 和 (4.3)，我们相应地可以选定 $(t_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset (t_0, T_{max})$，以及 $\widetilde{u}_0 \in W^{2, N^2}(\Omega)$，$\widetilde{u}_{0t} \in W^{2, N^2}(\Omega)$，$\widetilde{u}_{0tt} \in W^{1,2}(\Omega)$ 和 $\widetilde{\Theta}_0 \in W^{2, N^\infty}(\Omega; [0,\infty))$，使得当 $j \to \infty$ 时，$t_j \nearrow T_{max}$，

$$u(\cdot,t_j) \rightharpoonup \widetilde{u}_0 \quad \text{and} \quad u_t(\cdot,t_j) \rightharpoonup \widetilde{u}_{0t} \quad \text{in } W^{2,2}(\Omega) \qquad \text{as } j \to \infty,$$

that

$$u_{tt}(\cdot,t_j) \rightharpoonup \widetilde{u}_{0tt} \quad \text{in } W^{1,2}(\Omega) \qquad \text{as } j \to \infty,$$

并且

$$\Theta(\cdot,t_j) \overset{\star}{\rightharpoonup} \widetilde{\Theta}_0 \quad \text{in } W^{2,\infty}(\Omega) \qquad \text{as } j \to \infty.$$

再次应用引理 3.14，此时将 $(u_0, u_{0t}, u_{0tt}, \Theta_0)$ 和 t 替换为 $(\widetilde{u}_0, \widetilde{u}_{0t}, \widetilde{u}_{0tt}, \Theta_0)$ 和 $t - T_{max}$，可得 $T > T_{max}$，以及 $\Omega \times (T_{max}, T)$ 中相应的强解 $(\widetilde{u}, \Theta)$，满足 $(\widetilde{u}, \widetilde{u}_t, \widetilde{u}_{tt}, \Theta)|_{t=T_{max}} = (\widetilde{u}_0, \widetilde{u}_{0t}, \widetilde{u}_{0tt}, \Theta_0)$。显然可以验证，此时

$$(\widehat{u}, \widehat{\Theta})(x,t) := \begin{cases} (u,\Theta)(x,t) & \text{if } x \in \overline{\Omega} \text{ and } t \in [0, T_{max}), \\ (\widetilde{u}, \widetilde{\Theta})(x,t) & \text{if } x \in \overline{\Omega} \text{ and } t \in [T_{max}, T), \end{cases}$$

将定义 $\Omega \times (0, T)$ 中方程 (1.14) 的强解，这将与 T_{max} 的极大性相矛盾。

至此，我们完成了 (3.1) 成立情形下的证明，剩下的是 (4.1) 中的量为任意实数的一般情形。于是，函数 $\widetilde{u}_0 := u_0 - y_0$, $\widetilde{u}_{0t} := u_{0t} - y_1$和 $\widetilde{u}_{0tt} := u_{0tt} - y_2$ 满足 $\int_\Omega \widetilde{u}_0 = \int_\Omega \widetilde{u}_{0t} = \int_\Omega \widetilde{u}_{0tt} = 0$，因此将上述论证中的$(u_0, u_{0t}, u_{0tt})$替换为 $(\widetilde{u}_0, \widetilde{u}_{0t}, \widetilde{u}_{0tt})$后重复该论证，我们得到 $T_{max} \in (0,\infty]$ 以及 (1.14) 在 $\Omega \times (0, T_{max})$ 中的一个强解 $(\widetilde{u}, \Theta)$，该解满足：若 $T_{max} < \infty$，则 $\limsup_{t \nearrow T_{max}} \{\|\widetilde{u}_t(\cdot,t)\|_{W^{2,2}(\Omega)} + \|\widetilde{u}_{tt}(\cdot,t)\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|\widetilde{\Theta}(\cdot,t)\|_{W^{2,\infty}(\Omega)}\} = \infty$。令 $y \in C^\infty([0,\infty))$ 表示在 $(0,\infty)$ 中满足 $y'''(t) + \alpha y''(t) = 0$ 的解，其中 $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$, $y''(0) = y_2$。最后，令 $u(x,t) = \widetilde{u}(x,t) + y(t)$ 和 $\Theta(x,t) = \widetilde{\Theta}(x,t)$，并定义 $\widetilde{\Theta}(\cdot,t) := \widetilde{\Theta}(\cdot,t)$ 以及 $\Theta(x,t)$（对于 $(x,t) \in \Omega \times [0, T_{max})$，因此我们得到一对函数 (u, Θ)。由于 $u_x = \widetilde{u}_x$ 和 $u_{xt} = \widetilde{u}_{xt}$，不难看出它们构成 $\Omega \times (0, T_{max})$ 中方程 (1.14) 的强解，不仅满足 (1.17)–(1.19)，而且还满足 (1.20)。□

致谢。 作者感谢德国研究联合会（项目编号 444955436）的支持。此外，他们声明不存在利益冲突。

数据可用性声明。 数据共享不适用于本文，因为在本研究中未生成或分析任何数据集。

作者贡献声明。 两位作者对本稿件的构思、执行和撰写贡献相同。

参考文献

[1] Adachi E., Quintanilla, R., Ueda, Y.: 全空间中具有*II*型热传导的*Zener*型黏弹性板的衰减结构。《数学分析与应用通讯》*4, 296-306 (2025)*[2] Alves, M.S., Buriol, C., Ferreira, M.V., Munoz Rivera, J.E., Sepúlveda, M., Vera,O.: 具有热效应的标准线性固体模型所描述振动的渐近行为。《数学分析与应用杂志》*399, 472-479 (2013)*[3] Alves, M. O.; Caixeta, A. H.; Jorge Silva, M. A.; Rodrigues, J. H.: 历史框架下具有记忆效应的 *Moore-Gibson-Thompson* 方程：一种半群方法。*Z. Angew. Math. Phys. 69, 106 (2018)*[4] Amann, H.: 非齐次线性与拟线性椭圆和抛物边值问题。载于：《函数空间、微分算子与非线性分析》（*Friedrichroda，1992*），*Teubner-Texte Math.* 第*133*卷，*Teubner*，斯图加特，*9-126*（*1993*）[5] Benabbas, I., Said-Houari, B.: 非线性热声学的*Westervelt-Pennes-Cattaneo*模型：局部适定性及弛豫时间趋于零时的奇异极限。《*SIAM*数学分析杂志》*56, 2968-3003 (2024)*[6] Benabbas, I., Said-Houari, B.: *Westervelt*-双曲型*Pennes*系统的整体存在性与渐近行为。*Z. Angew. Math. Phys. 76, 129 (2025)*[7] Benabbas, Im, Said-Houari, B.: 非线性超声加热耦合 *Jordan-Moore-Gibson-Thompson-Pennes*模型的局部适定性。*arXiv:2401.01709*[8] Blanchard, D., Guibé, O.: 热黏弹性非线性系统解的存在性。*Adv. Differential Equations 5, 1221-1252 (2000)*[9] Boley, B., Weiner, J.: 热应力理论。*Dover*土木与机械工程。*Dover Publications, 2012*年[10] Bongarti, M., Charoenphon, S., Lasiecka, I.: 非线性声学中产生的 *Jordan-Moore-Gibson-Thompson* 方程的弛豫时间趋零动力学。《演化方程杂志》*21, 3553-3584 (2021)*[11] Careaga, J., Nikolić, V., Said-Houari, B.: 基于*Westervelt*方程的建模：超声增强药物递送。《非线性科学杂志》*35, 61 (2025)*[12] Chen, W., Ikehata, R.: 耗散情形下 *Moore-Gibson-Thompson* 方程的柯西问题。微分方程杂志*292, 176-219 (2021)*[13] Chen, W., Liu, Y., Palmieri, A., Qin, X.: 黏性耗散对具有第二声的非线性声波方程的影响。预印本, *arXiv:2211.00944*[14] Chen, W., Ma, M., Qin, X.: L^pL^q 耗散与保守*Moore-Gibson-Thompson* 方程的估计。《数学物理杂志》*66, 071515 (2025)*

[15] Chen, W., Palmieri, A. 保守情形下半线性 *Moore-Gibson-Thompson* 方程整体解的不存在性。离散与连续动力系统 *40, 5513-5540 (2020)*[16] Chen, W., Palmieri, A. 保守情形下具有导数型非线性的半线性 *Moore-Gibson-Thompson* 方程的爆破解。*Evol. Equ. Control Theory 10, 673-687 (2021)*[17] Claes, L., Lankeit, J., Winkler, M.: 压电材料中声波热生成模型：整体大数据解。数学模型与应用科学方法 *35, 2465-2512 (2025)*[18] Claes, L., Winkler, M.: 通过 $W^{1,p}$ 能量分析描述拟线性双曲—抛物系统的光滑小数据解。预印本[19] Dafermos, C.M.: 一维热黏弹性方程组初边值问题的全局光滑解。《*SIAM*数学分析杂志》*13, 397-408 (1982)*[20] Dekkers, A., Rozanova-Pierrat, A.: *Kuznetsov* 方程的柯西问题。离散与连续动力系统 *39, 277-307 (2019)*[21] Dell'Oro, F., Lasiecka, I., Pata, V.: 临界情形下带记忆项的 *Moore-Gibson-Thompson* 方程。微分方程杂志 *261, 4188-4222 (2016)*[22] Dell'Oro, F., Pata, V.: 关于 *Moore-Gibson-Thompson* 方程及其与线性黏弹性的关系。应用数学与优化 *76, 641-655 (2017)*[23] Dell'oro, F., Pata, V.: 关于具有 *Gurtin-Pipkin* 型热效应的 *Moore-Gibson-Thompson* 方程。离散连续动力系统系列 *S 16, 3459-3472 (2023)*[24] DiBenedetto, E.: 退化抛物方程。*Springer-Verlag*，纽约，*1993*年[25] Dörfler, W., Gerner, H., Schnaubelt, R.: 拟线性波动方程的局部适定性。*Appl. Anal. 95, 2110-2123 (2016)*[26] Fricke, T.: 涉及一般温度依赖性的黏性波动方程的局部与整体可解性。*Acta Appl. Math.*，即将出版[27] Friesen, O., Claes, L., Scheidemann, C., Feldmann, N., Hemsel, T., Henning, B.:利用环形试样估算温度依赖的压电材料参数。载于：*2023*年国际超声学大会，中国北京，第 *2022* 卷，*012125*。*IOP Publishing*，*2024*年[28] Gutierrez-Lemini, D.: 工程黏弹性。*Springer US*，波士顿，*2014*年[29] Horstmann, D., Winkler, M.: 趋化系统中的有界性与爆破。*J. Differen-tial Equations 215, 52-107 (2005)*[30] Jiang, S.: 一维非线性热黏弹性初边值问题的整体大解。应用数学季刊 *51, 731-744 (1993)*

[31] Kaltenbacher, B., Lasiecka, I.: *Westervelt* 方程整体存在性与指数衰减率。离散连续动力系统系列 *S 2, 503-523 (2009)*[32] Kaltenbacher, B., Lasiecka, I., Marchand, R.: 高强度超声中产生的 *Moore-Gibson-Thompson* 方程的适定性与指数衰减率。控制论与控制论 *40, 971-988 (2011)*[33] Kaltenbacher, B., Lasiecka, I., Pospieszalska, M. K.: 高强度超声中产生的非线性 *Jordan-Moore-Gibson-Thompson* 方程的适定性与能量指数衰减。数学模型与应用科学方法 *22, 1250035 (2012)*[34] Kaltenbacher, B., Nikolić, V.: *Jordan-Moore-Gibson-Thompson* 方程：具有二次梯度非线性的适定性及弛豫时间趋于零时的奇异极限。数学模型与应用科学方法 *29, 2523-2556 (2019)*[35] Kaltenbacher, B., Nikolić, V.: 拟线性波动方程的抛物型近似及其在非线性声学中的应用。《*SIAM*数学分析杂志》*54, 1593-1622 (2022)*[36] Ladyzenskaja, O. A., Solonnikov, V. A., Ural'ceva, N. N.: 抛物型线性与拟线性方程。美国数学会译丛，第 *23* 卷，罗德岛州普罗维登斯，*1968*年[37] Lasiecka, I., Wang, X.: 带记忆项的 *Moore-Gibson-Thompson* 方程，第二部分：能量的一般衰减。微分方程杂志 *259, 7610-7635 (2015)*[38] Lasiecka, I., Wang, X.: 带记忆项的 *Moore-Gibson-Thompson* 方程，第一部分：能量的指数衰减。应用数学与物理杂志 *67, 1-23 (2016)*[39] Marchand, R., McDevitt, T., Triggiani, R.: 高强度超声中产生的三阶 *Moore-Gibson-Thompson* 偏微分方程的抽象半群方法：结构分解、谱分析与指数稳定性。数学方法与应用科学 *35, 1896-1929 (2012)*[40] Meyer, F.: 参数对温度呈弱依赖的热黏弹性演化问题的大时间存在性。预印本[41] Meyer, S., Wilke, M.: *Westervelt* 方程解的最优正则性与长时间行为。应用数学与优化 *64, 257-271 (2011)*[42] Ming, S., Yang, H., Fan, X., Yao, J.: 半线性 *Moore-Gibson-Thompson* 方程解的爆破与寿命估计。非线性分析：现实世界应用 *62, 103360 (2021)*[43] Mizohata, K., Ukai, S.: 非线性声波方程小振幅解的整体存在性。京都大学数学杂志 *33, 505-522 (1993)*[44] Moore, F.K., Gibson, W.E.: 具有弛豫效应的气体中微弱扰动的传播。航空航天科学杂志 *27, 117-127 (1960)*[45] Nikolić, V., Said-Houari, B.: 非线性超声加热耦合 *Westervelt-Pennes* 模型的局部适定性。非线性 *35, 5749-5780 (2022)*

[46] Nikolić, V., Said-Houari, B.: 非线性热声学中的 *Westervelt-Pennes* 模型：整体可解性与渐近行为。微分方程杂志 *336, 628-653 (2022*年*)*[47] Nikolić, V., Winkler, M.: L^∞ *Jordan-Moore-Gibson-Thompson* 方程中的爆破。非线性分析 *247, 113600 (2024)*[48] Porzio, M.M., Vespri, V.: 若干双重非线性退化抛物方程局部解的 *Hölder* 估计。微分方程杂志 *103, 146-178 (1993*年*)*[49] Racke, R.: 关于非线性三维热弹性中的柯西问题。数学杂志 *203, 649-682 (1990)*[50] Racke, R., Said-Houari, B.: 三维 *Jordan-Moore-Gibson-Thompson* 方程柯西问题的整体适定性。当代数学通讯 *23, 2050069 (2021*年*)*[51] Racke, R., Shibata, Y.: 一维非线性热弹性中的全局光滑解与渐近稳定性。理性力学与分析档案 *116, 1-34 (1991)*[52] Racke, R., Zheng, S.: 非线性热黏弹性中的整体存在性与渐近行为。微分方程杂志 *134, 46-67 (1997)*[53] Roubiček, T.: 小应变下具有 L^1-数据的热黏弹性。应用数学季刊 *67, 47-71 (2009*年*)*[54] Said-Houari, B.: 具有任意大的高阶 *Sobolev* 范数的 *Jordan-Moore-Gibson-Thompson* 方程柯西问题的整体适定性。离散与连续动力系统 *42, 4615-4635 (2022*年*)*[55] Simon, J.: 空间 $L^p(0,T;B)$ 中的紧集。纯粹与应用数学年刊 *146, 65-96 (1096)*[56] Slemrod, M: 一维非线性热弹性中经典光滑解的整体存在性、唯一性与渐近稳定性。理性力学与分析档案 *76, 97-133 (1981)*[57] Thompson, P.A.: 可压缩流体动力学。麦格劳-希尔，纽约 *(1972)*[58] Wang, D., Liu, W., Racke, R.: 具有热传导的线性 *JMGT* 黏弹性板柯西问题的衰减性质。《数学分析与应用杂志》*525, 127232 (2023)*[59] Wilke, M.: L_p-L_q-理论：拟线性非等温 *Westervelt* 方程。应用数学与优化 *88, 13 (2023)*[60] Winkler, M.: 高维 *Keller-Segel* 模型中的聚集与全局扩散行为。微分方程杂志 *248, 2889-2905 (2010)*[61] Winkler, M.: 具有温度依赖参数、推广一维热黏弹性的演化系统中的粗糙数据。应用数学与优化 *91, 44 (2025)*[62] Winkler, M.: 温度相关系数驱动的一维热黏弹性热点形成。预印本