arXiv:2602.04014v1 [physics.comp-ph] 3 Feb 2026

在山顶，世界可以呈现玻尔兹曼式面貌：噪声双阱系统的采样动力学

AbirHasan, Nikhil Shukla

University of Virginia, Charlottesville, VA, USA,

晶体管作为数字计算基石的成功，促使人们开展类似探索，寻找一种用于新兴概率计算范式的对应硬件基本单元——概率比特（p-bit）。在此，我们揭示了双阱能量系统在势垒顶附近初始化时随机动力学中的一个基本 *ubiquity* 。借助以莫尔斯理论和奇点理论为基础的拓扑框架，我们利用这样一个结果：所有光滑的偶对称双阱势在鞍点附近都可约化为规范的四次标准形。在这一状态下，噪声、突触偏置与势能曲率之间的相互作用会产生拓扑稳健的短时演化，其特征为类双曲正切响应——由此实现类玻尔兹曼采样，且除有效温度标度外，采样结果在很大程度上不受势能具体形状的影响。针对多个代表性系统的解析推导和数值模拟均证实了这一行为。我们的研究为评估和设计一大类物理平台提供了统一基础，其中包括振荡器、双稳态锁存器和磁性器件；这些平台可作为 p比特，在用于随机采样和概率计算的 a *synchronous* 框架中运行。

一、引言

随机采样是众多应用的基础，从训练受限玻尔兹曼机（RBM）等基于能量的机器学习模型，到科学建模中的概率推理和金融领域的风险分析 [1, 2]。尽管随机采样的算法基础已得到广泛发展，其硬件实现直到最近才受到关注。这是因为随机采样从根本上依赖随机涨落，却缺乏一种类似于互补金属氧化物半导体（CMOS）之于确定性数字逻辑的天然物理载体。概率位的概念出现后，这一差距开始缩小；该概念最初通过低势垒磁性隧道结（MTJ）实现 [3]。磁性隧道结（MTJ）构成一种典型的双阱能量系统，在经过设计使势垒足够低时，会表现出热激活的状态跃迁，其发生概率遵循玻尔兹曼分布 [4]。

概率位可作为可调随机数生成器，其输出统计特性能够由输入信号连续偏置，从而为随机采样器提供天然的硬件构件。这一特性使概率位成为多种应用的物理基元——从求解组合优化问题（COP），到人工智能训练和实现可逆逻辑 [5, 6]。与此同时，人们也探索了多种硬件技术平台作为概率位的潜在实现方案，包括铁电体 [7], 相变氧化物（例如 VO_2 [8] , NbO_2 [9]）以及基于互补金属氧化物半导体的弛豫振荡器 [10]。

传统上，p比特以异步模式运行，系统会在两种稳定态之间随机切换，而每种状态的相对驻留时间决定输出概率。这些驻留时间由有效能垒高度控制，能垒高度可通过突触输入调节——其表现出通常与克拉默斯逃逸动力学一致的时间行为，

态 [11–13]。

最近，Ekanayake 等人 [14] 展示了一种基于振荡器在二次谐波注入（SHI） [14]下动态特性的替代工作模式。在此模式下，系统会被周期性驱动至能垒顶，随后发生的短时随机弛豫能够编码玻尔兹曼分布。此时，系统动态由噪声存在下的梯度流特性所支配，并受到鞍点附近势能局部曲率的调制。类似地，其他研究 [15, 16]也在自旋电子器件中利用了这种工作模式。与传统的异步操作不同，这种方法能够实现同步操作：全局定时信号决定系统何时被驱动至势垒顶，而当轨迹不可逆地落入某个势阱后，采样事件会在经过一小段增量时间后完成 Δt。

受这些观察结果的启发，我们考察这种行为在多大程度上可能具有普遍性；也就是说，任何初始化于势垒顶端的双势阱系统，究竟能在多大程度上近似实现类玻尔兹曼采样。许多硬件系统——包括磁隧道结、处于二次谐波注入（SHI）作用下的模拟振荡器，以及 CMOS 双稳态锁存器——都天然呈现出这类双势阱能量景观。证明这种行为具有普遍性，或许能够为利用这些及其他实现双势阱能量景观的物理系统作为概率位（p-bits），构建一种通用的计算载体，用于同步概率计算架构

II. 通过系统动力学实现玻尔兹曼采样

正如 Camsari等人 [6], 所确立的，要设计能够从某种分布中采样的概率位，一个基本要求是

玻尔兹曼分布是：输出状态按如下方式更新，

$$\sigma^+ = \mathrm{sgn}\big[\tanh(\beta h) - \eta\big], \tag{1}$$

其中， $\sigma^+ \in \{-1, +1\}$ 表示输出状态， h 表示输入场或突触偏置， β 表示有效逆温度，而 η 是一个在 $[-1, +1]$ 上均匀分布的随机变量，代表随机涨落。在该表达式中，$\tanh(\beta h)$刻画了系统与其局部场（h）对齐的确定性趋势，而噪声项则引入了概率性切换。

如前所述，在物理系统中实现此类随机采样行为的一种方法，是将系统动力学设计为：

$$s(t) \cong \tanh(\beta h t) \quad \Longrightarrow \quad \dot{s} = \beta h (1 - s^2), \tag{2}$$

其中， s是代表系统可测量输出的外部可观测量。随后，在噪声作用下发生的短时（Δt）弛豫构成采样事件，并决定系统最终落入哪个势阱。

现在，我们来评估与能量景观直接相关的含噪梯度下降动力学如何促成此类行为。尽管s 是促成随机采样的外部可观测量，但它未必直接对应于参数化系统势能景观的内部状态变量（ϑ）。例如，在采用二次谐波注入（SHI）运行的振荡器中，内部状态对应于振荡器相位 ε，其参考方式使得 $\varepsilon = 0$ 与势垒顶部对齐。可测量的输出电压为 $v_0 = \cos\big(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\big) = -\sin(\varepsilon)$， 由此得到内部坐标与外部可观测输出之间的映射 $s = f(\vartheta) = -\sin(\varepsilon)$。关于振荡器系统的详细信息，已在我们先前的工作 [14]中阐述。

构建 $s = f(v)$映射：对于由 $\dot{\vartheta} = g(\vartheta) = -U'(\vartheta)$描述的梯度流动力学，其中 $U(\vartheta)$表示势能景观，到可观测量 s 的相应映射被设计为按$s = \tanh(\beta h t)$演化以实现玻尔兹曼采样，可表示为，

$$f(\vartheta) = \tanh\left(\beta h \int \frac{d\vartheta}{g(\vartheta)}\right) \tag{3}$$

从而将系统坐标 ϑ 与其有效随机状态变量 s联系起来。式(3)的详细推导见附录A。

映射选择对随机采样的影响：为评估映射 $f(\vartheta)$ 的影响，我们考虑存在随机涨落时的梯度流动力学，其可表示为：

$$d\vartheta = g(\vartheta)\, dt + \sqrt{2K_n}\, dW_t, \tag{4}$$

其中， K_n 表示噪声强度。将式（4）用可观测变量 $s = f(\vartheta)$ 表示，得到：

$$ds = f'(\vartheta) g(\vartheta)\, dt + f'(\vartheta)\sqrt{2K_n}\, dW_t. \tag{5}$$

在实际系统中，若映射 $f(\vartheta)$的选取使得势垒顶附近的有效漂移项 $f'(\vartheta)g(\vartheta)$近似式(2)的对称逻辑斯蒂形式，则 s 中的可观测动力学可以模拟玻尔兹曼采样。

然而， $f(\vartheta)$的具体形式决定了内部噪声如何投影到可观测域。由于有效噪声幅度按 $f'(\vartheta)$缩放，该映射直接影响采样过程的有效温度：

$$T_{\mathrm{eff}} \propto K_n \langle [f'(\vartheta)]^2 \rangle$$

对于给定的内在噪声强度 K_n。这一见解凸显了映射 $f(\vartheta)$ 作为一种潜在的设计自由度：通过调整内部状态变量与其可观测表示之间的转导，可以有效调节采样温度，而无需改变底层噪声源。

III. 说明性示例

A. 一阶与二次谐波注入下的谐振子

作为双阱能量系统的说明性示例，该系统具有定义明确的映射 $s = f(\vartheta)$，我们考虑一个同时受到一阶和二次谐波注入的谐振子。在旋转参考系中，这种振荡器的有效势可表示为

$$U_{\mathrm{osc}}(\varepsilon) = \gamma \sin(\varepsilon) + \tfrac{1}{2} K_s \cos(2\varepsilon), \tag{6}$$

其中， ε 表示振荡器相位，其参考点设定为势能极小值出现在 $\varepsilon = \pm\frac{\pi}{2}$ ，而能量最大值出现在 $\varepsilon = 0$。这里，第一项（$\gamma \sin\varepsilon$）表示一阶谐波注入的作用，它使振荡器相位产生偏置，偏置量与注入信号幅度 $\gamma\,(\equiv h)$ 成正比。第二项（$K_s\cos(2\varepsilon)$）对应二次谐波注入 （SHI），它建立对称双阱势并促进双稳态相位锁定。参数 $\gamma \in \mathbb{R}$ 充当有效突触输入： $\gamma > 0$ 对应同相注入，而 $\gamma < 0$ 表示反相注入。因此，振荡器相位 ε充当内部状态变量 （$\varepsilon \equiv \vartheta$）。

振子的相应梯度流动力学由 [14] 给出

$$\dot{\varepsilon} = -\gamma \cos(\varepsilon) + K_s \sin(2\varepsilon), \tag{7}$$

为定义有效的可观测映射，我们设定

$$s_{\mathrm{osc}} = \cos\big(\tfrac{\pi}{2} + \varepsilon\big) = -\sin(\varepsilon), \tag{8}$$

将式（8）代入式（7），得到变换后的动力学

$$\dot{s}_{\rm osc} = (1 - s_{\rm osc}^2)(\gamma + 2K_s s_{\rm osc}), \tag{9}$$

其中，前因子（$1 - s_{\rm osc}^2$）确保可观测量域中的演化有界。

在弱二次谐波极限（$K_s \ll 1$）下（对应于较小的能垒），公式（9）可简化为：

$$\dot{s}_{\rm osc} \approx \gamma(1 - s_{\rm osc}^2) \quad \Longrightarrow \quad s_{\rm osc}(\Delta t) = \tanh(\gamma \Delta t), \tag{10}$$

这表明，在较短的弛豫时间间隔 Δt 内（见附录 B），振荡器的漂移动力学呈现出玻尔兹曼采样（公式（1））所需的规范 tanh(·) 依赖关系。

B. 磁隧道结（MTJ）

作为第二个示例，我们考虑一种典型的磁隧道结（MTJ），其能量景观同样呈现双阱形状。自由层的总磁能可表示为：[17]

$$U_{\rm MTJ}(\theta) = K_u V \sin^2(\theta) - \mu_0 M_s V H \cos(\theta), \tag{11}$$

其中，各参数定义如下：$U_{\rm MTJ}$ 表示自由层的总磁能；K_u 表示单轴各向异性常数；V 表示自由磁性层的体积；μ_0 表示真空磁导率；M_s 表示饱和磁化强度；H 表示沿易轴（z）方向施加的外部磁场；θ 表示磁化矢量与易轴之间的夹角。在公式（11）中，两个稳定极小值位于 $\theta = \{0, \pi\}$，分别对应平行和反平行的磁取向，而能垒最大值出现在 $\theta = \frac{\pi}{2}$。

为使坐标系与势垒顶部对齐，我们引入偏移量 $\vartheta_{\rm MTJ} = \frac{\pi}{2} + \theta$，将能量极大值移至 $\vartheta_{\rm MTJ} = 0$，将极小值移至 $\vartheta_{\rm MTJ} = \pm\frac{\pi}{2}$。在这一平移后的参考系中，内部状态变量表示为 $\vartheta_{\rm MTJ}$，而沿易轴的磁化分量（$\cos\theta \equiv -\sin\vartheta_{\rm MTJ}$）则作为可观测输出。

因此，变换后参考系中的势函数为：

$$\begin{aligned} U_{\rm MTJ}(\vartheta_{\rm MTJ}) &= K_u V \cos^2(\vartheta_{\rm MTJ}) + \mu_0 M_s V H \sin(\vartheta_{\rm MTJ}) \\ &\equiv a\cos^2(\vartheta_{\rm MTJ}) + b\sin(\vartheta_{\rm MTJ}), \end{aligned} \tag{12}$$

其中，为简洁起见，$a = K_u V$ 和 $b = \mu_0 M_s V H$。相应的梯度流动力学可表示为：

$$\dot{\vartheta}_{\rm MTJ} = -U'_{\rm MTJ}(\vartheta_{\rm MTJ}) = -b\cos(\vartheta_{\rm MTJ}) + a\sin(2\vartheta_{\rm MTJ}), \tag{13}$$

其形式与 SHI 下振荡器的方程（7）类似，其中 $a \equiv K_s$ 和 $b \equiv \gamma$。

为定义可观测量，我们采用前文用于振荡器的相同映射 $s_{\rm MTJ} = -\sin(\vartheta_{\rm MTJ})$，它与沿易轴的磁化投影直接对应。将此变换应用于式（13），得到：

$$\dot{s}_{\rm MTJ} = (1 - s_{\rm MTJ}^2)(b + 2a s_{\rm MTJ}), \tag{14}$$

这在数学上等价于振荡器的式（9）。在低能垒磁体中，各向异性项被有意设计得较小（$|a| \ll 1$）；因此，式（14）可化简为

$$\begin{aligned} &\dot{s}_{\rm MTJ} \approx b(1 - s_{\rm MTJ}^2) \\ &\Rightarrow \quad s_{\rm MTJ}(\Delta t) = \tanh(b\,\Delta t) = \tanh((\mu_0 M_s V H)\,\Delta t) \end{aligned} \tag{15}$$

与振荡器情形类似，在短暂的弛豫时间间隔 Δt 内，磁隧道结动力学中从势垒顶部附近开始的漂移分量呈现出标准的 tanh(·) 依赖关系，从而实现玻尔兹曼采样。

IV. 推广至光滑偶双阱势

在确立了双阱系统的两种物理实现——谐波注入下的振荡器和磁隧道结——之后，我们现在考察玻尔兹曼式采样动力学如何在更广泛的一类光滑偶双阱势中涌现。这类势能的特征是在 $\pm x^\star$ 处有两个（且仅有两个）对称分布的能量极小值，并在 $x = 0$ 处有一个非退化极大值。尽管有无穷多种解析形式可以生成此类能量景观，表 I 总结了其中具有代表性的例子。

A. 标准双阱能量系统

我们首先从莫尔斯理论和奇点理论 [18–21]的视角分析光滑偶双阱势这一类势能。根据莫尔斯理论，任何具有非退化临界点（$U'(0) = 0,\ U''(0) \neq 0$）的光滑函数 $U(x)$，都可以通过光滑坐标变换 $x \mapsto \vartheta(x)$ 在局部变换为纯二次型，

$$U(\vartheta) = U(0) - \tfrac{1}{2}\lambda\,\vartheta^2,$$

其中 $\lambda = -U''(0)$。正的 λ 对应于局部极大值（与所提出的方法相关），而负的 λ 对应于局部极小值。

我们现在考虑一个光滑的偶势能（$U(x) = U(-x)$），它在原点处具有非退化极大值

表 I：光滑双阱势的标准形式。

形式	势函数 $U(\vartheta)$	双阱条件
偶多项式	$U(\vartheta) = \sum_{k=2}^{n} a_{2k}\vartheta^{2k} - b\vartheta^2$ 模拟中使用的参数 $a_2 = -0.5; a_4 = 0.5; a_6 = 0.05$	$a > 0; b > 0$ 充分条件 （见附录 C）
双高斯阱 （中心位于 $\pm\vartheta_0$）	$U(\vartheta) = -A\left[e^{-\frac{(\vartheta-\vartheta_0)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(\vartheta+\vartheta_0)^2}{2\sigma^2}}\right]$ 模拟中使用的参数 $A = 1;\ \sigma = 0.25;\ \vartheta_0 = 0.5$	$A > 0;\ \frac{\vartheta_0}{\sigma} > 1,$
指数尾部	$U(\vartheta) = A(\text{双曲余弦}(\beta\vartheta) - 1) - b\,\vartheta^2$ 模拟中使用的参数 $A = 1; \beta = 1;\ b = 2.6$	$b > \frac{1}{2}A\beta^2$ 0 附近的负二次项， $\lvert\vartheta\rvert \to \infty$ 处的指数增长。

（$U'(0) = 0,\ U''(0) < 0$）。关于$x = 0$ 的泰勒展开具有如下形式

$$U(x) = U(0) + \frac{U''(0)}{2!}x^2 + \frac{U^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \mathcal{O}(x^6) \equiv U(0) - \frac{r\,r_0}{2}x^2 + \frac{b_0}{4}x^4 + \mathcal{O}(x^6), \tag{16}$$

其中，$r\,r_0 > 0$ 确保原点处为局部极大值。忽略高阶的 $\mathcal{O}(x^6)$项后，条件$b_0 > 0$ 保证 $U(x)$从下方有界，并形成对称双势阱。引入重新缩放的变量 $\vartheta = \sqrt{\frac{b_0}{r_0}}\,x$ 和 $\alpha = \frac{r_0^2}{b_0}$，势能便呈现突变理论中 A_3 （叉形）奇点的典型四次形式：

$$U(\vartheta) = \alpha\left(\frac{\vartheta^4}{4} - \frac{r\,\vartheta^2}{2}\right). \tag{17}$$

这里，$r > 0$ 量化势垒处的曲率：当$r = 0$时，唯一的临界点变为退化点；而当 $r > 0$时，势能分岔为两个对称极小值，对应于稳定的双势阱构型。此外，如附录 C 所示，即使系统还包含高阶偶次幂项 ϑ^{2k} $(k \geq 3)$，只要其系数非负且至少有一个严格为正，系统仍恰好保留两个极小值。

引入弱外场 $h \in \mathbb{R}$会使能量景观倾斜，从而产生不对称性：

$$U(\vartheta) = \frac{\alpha}{4}\vartheta^4 - \frac{\alpha r}{2}\vartheta^2 - h\,\vartheta. \tag{18}$$

外部偏置 h打破了内禀 $\mathbb{Z}_2$ 对称性（$U(\vartheta) \neq U(-\vartheta)$），使一个势阱相对于另一个势阱降低。

相应的梯度流动力学可表示为：

$$\dot{\vartheta} = -U'(\vartheta) = h + \alpha r\vartheta - \alpha\vartheta^3. \tag{19}$$

这里需要指出，虽然此处仅保留了 h中的线性耦合，但它通常代表外部驱动的最低阶项；也可能出现更高阶的奇次贡献，以刻画微弱的非线性偏置效应。

A_3 正规形的重要性在于其普适性：通过适当选择参数 α 和 r，许多呈现双势阱能量景观的物理系统都可以在局部近似为这种形式。可以引入高阶修正来描述器件特定非线性；然而，只要这些修正足够小，不会改变鞍点的非退化性质，就不会改变势能景观的基本拓扑结构。具体而言，势垒峰值附近的局部动力学结构——随机跃迁由此发生，玻尔兹曼采样也由此启动——在不同实现中保持拓扑等价。因此，势垒附近的短时采样动力学基本不受微观器件物理的影响，这凸显了 A_3 正规形作为对称双稳态系统统一框架的作用。

B. 使用 A_3 标准形式进行玻尔兹曼采样

为了评估 A_3 正规形势能（式 (18)）是否能够支持玻尔兹曼采样动力学，我们应用式 (3) 的标准映射，

得到:

$$f(\vartheta) \;=\; \tanh\!\left(\beta h \int^{\vartheta} \frac{d\psi}{g(\psi)}\right), \tag{20}$$

其中，对于 A_3 正规形，

$$g(\vartheta) = h + \alpha r\,\vartheta - \alpha\vartheta^3 \tag{21}$$

在势垒顶部 $\vartheta \sim 0$， $g(\vartheta)$可近似为 $g(\vartheta) = h + \alpha r\,\vartheta$。在这些条件下，有效映射可计算为，

$$\begin{aligned} f(\vartheta) &= \tanh\left(\beta h \int_0^{\vartheta} \frac{d\psi}{h + \alpha r \psi}\right) \\ &= \tanh\left(\frac{\beta h}{\alpha r} \ln\!\left(1 + \frac{\alpha r\,\vartheta}{h}\right)\right) \end{aligned} \tag{22}$$

对于 $\vartheta \to 0$ ($h \neq 0$)，式(22)可近似为，

$$\begin{aligned} s \;&=\; f(\vartheta) \;\approx\; \tanh(\beta\vartheta) \\ \Rightarrow \quad f'(\vartheta) &= \beta\,\mathrm{sech}^2(\beta\vartheta) \;=\; \beta(1 - s^2) \end{aligned} \tag{23}$$

有趣的是，式（23）中的映射具有如下性质

$$\mathrm{sgn}[s] = \mathrm{sgn}[\vartheta], \tag{24}$$

其中， ϑ 的符号标识系统最终稳定于哪个势阱（或状态）。这表明，对于A_3 正规形，内部状态变量本身（或其线性缩放版本）在势垒区域附近近似服从玻尔兹曼分布。这种近似的保真度取决于高阶非线性的大小，以及器件偏离理想正规形的程度；这些因素会影响有效噪声特性。重要的是，由于广泛的一类双势阱物理系统在势垒最大值附近可用 A_3 正规形进行局部近似，因此也可以预期，它们的内部状态变量能够支持近似的玻尔兹曼采样，前提是系统能够被驱动到足够接近势垒顶的位置。这表明，在适当的初始化和噪声条件下，双稳态CMOS锁存器和Duffing型非线性振荡器等经典实现可用于近似玻尔兹曼采样。

此外，我们还探讨 A_3 正规形如何与注入锁定下振荡器的具体例子相联系；在该例子中，于$K_s \to 0$的极限情形下得到了一个定义明确、几乎与偏置无关的映射。从

$$\dot{\vartheta} = -\gamma\cos\vartheta + K_s\sin(2\vartheta),$$

we expand about $\vartheta = 0$ which yields,

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= \underbrace{\left(2K_s\,\vartheta - \frac{4}{3}K_s\,\vartheta^3 + \frac{4}{15}K_s\,\vartheta^5 - \frac{8}{315}K_s\,\vartheta^7 + \cdots\right)}_{\text{from } K_s\sin(2\vartheta)} + \underbrace{\left(-\gamma + \frac{\gamma}{2}\,\vartheta^2 - \frac{\gamma}{24}\,\vartheta^4 + \frac{\gamma}{720}\,\vartheta^6 - \cdots\right)}_{\text{from } -\gamma\cos\vartheta} \\ &= \underbrace{\left(-\gamma + 2K_s\vartheta - \tfrac{4}{3}K_s\vartheta^3\right)}_{\text{canonical } A_3 \text{ normal form}} + \underbrace{\left(\tfrac{4}{15}K_s\vartheta^5 - \tfrac{8}{315}K_s\vartheta^7 + \cdots\right)}_{\text{higher-order coupling terms}} + \underbrace{\left(\tfrac{\gamma}{2}\vartheta^2 - \tfrac{\gamma}{24}\vartheta^4 + \tfrac{\gamma}{720}\vartheta^6 - \cdots\right)}_{\text{nonlinear bias contributions}}. \end{aligned} \tag{25}$$

方程(25)表明，振荡器动力学也包含典范 A_3 正规形，并辅以两类高阶修正：(i) 由非线性相位响应$\sin(2\vartheta)$产生的奇阶项；以及(ii) 源自外部驱动 $-\gamma\cos\vartheta$的非线性依赖的偶阶项。有趣的是，这些额外贡献使得有效映射$f(\vartheta)$在较小势垒高度下几乎与偏置参数 γ 无关。

V. 仿真结果

为验证上述分析，我们首先仿真了标准 A_3正规形以及在二次谐波注入（SHI）作用下运行的振荡器的随机采样行为。在这两种情况下，系统动力学均由含加性噪声的梯度流方程支配，

$$d\mu = -\,U'(\mu)\,dt + \sqrt{2K_n}\,dW_t,$$

其中， μ 表示内部状态变量， $U(\mu)$表示势能景观， K_n 表示噪声强度，而 W_t 是标准维纳过程。每个系统均模拟 $K_n = \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4\}$，并

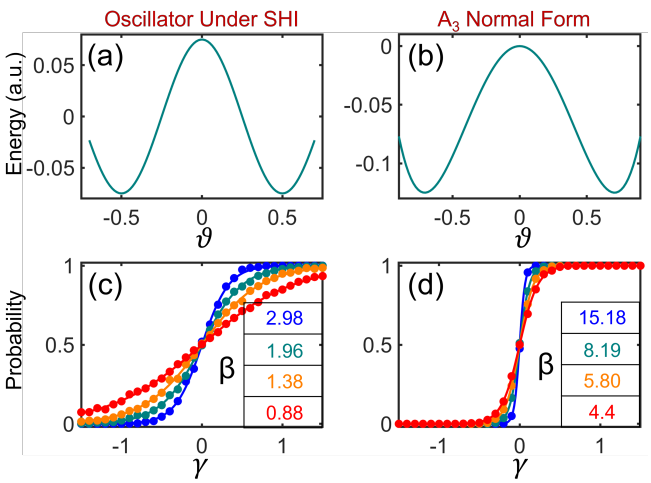

图 1：**双阱能量系统示意图：**（a）受 SHI 作用的振荡器和（b） A_3 正规形的能量随内部状态变量的变化。测得的概率分布（p）随突触输入的变化：（c）受 SHI 作用的振荡器；（d）A3 标准形。模拟在以下噪声条件下进行：$K_n = 0.1$ （蓝色）； $K_n = 0.2$（青色）； $K_n = 0.3$ （橙色）； $K_n = 0.4$ （红色）。插图显示了提取的逆温度 β。

使用欧拉–丸山方法对轨迹进行数值积分。

如上所述，随机采样受益于较低的能垒；然而，一旦做出“决策”，要可靠地保持和读出采样状态，就需要足够高的能垒。为协调这两项相互竞争的要求，我们采用随时间变化的能垒调制方案：每次随机采样事件开始时，能垒较浅，随后逐渐升高。在低能垒阶段，系统能够探索两个势阱，并依据其底层随机动力学进行采样。随后随着能垒升高，极小值加深，选定状态得以稳定，从而能够可靠地保持和读出采样结果。在 A_3 正规形（式（17））中，通过随时间增大参数 r 来实现能垒调制；而在 SHI 振荡器中，则通过逐渐增强 SHI 强度 K_s实现类似效果。

图 1 展示了双阱势，以及在不同噪声强度下获得的稳态概率分布（符号）。实线表示对玻尔兹曼分布的拟合， $p = \frac{1+\tanh(\beta h)}{2}$ 。在两个系统中，使用 2000 次试验计算得到的模拟概率分布均与玻尔兹曼形式高度吻合（$R^2 > 0.99$），证实它们忠实地再现了预期的随机行为。然而，在相同噪声强度（K_n）下为每个器件提取的有效逆温度有所不同，反映了各系统的内禀曲率和非线性对其有效采样温度的影响（如前文所述）。

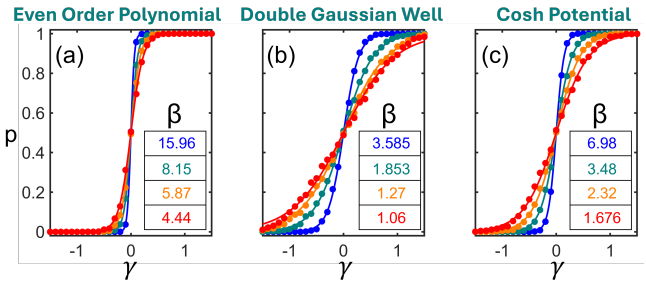

图 2：**其他双阱能量系统：**测得的概率分布（p）随突触输入的变化，针对不同势函数：(a) 偶数阶多项式 (b) 双高斯势 (c) 双曲余弦势。具体势函数已在正文中定义。模拟在以下噪声条件下进行：$K_n = 0.1$ （蓝色）； $K_n = 0.2$ （青色）； $K_n = 0.3$ （橙色）； $K_n = 0.4$ （红色）。插图显示提取出的逆温度 β。

进一步扩展这一分析，图 2 展示了表 I 汇总的其他光滑双阱势所对应的结果。尽管解析形式各异，所有情形都产生了符合玻尔兹曼定律的平衡分布。这一发现进一步印证了采样机制的普遍性。

VI. 结论

本研究揭示了一种普遍机制：对于双稳态双阱能量系统，当其初始状态位于势垒顶附近时，该机制支配着随机采样。通过采用以莫尔斯理论为基础的拓扑视角，我们利用了这样一个事实：在非退化鞍点附近，任何光滑的偶数阶双阱势都可在局部化为四次（A_3）正规形。在这一局部普适区域内，梯度流、热噪声与突触偏置的共同作用会产生一种特征性的短时弛豫，其响应呈 $\tanh(\cdot)$ 形。这种响应保留了玻尔兹曼采样的函数结构，尽管有效温度标度可能取决于曲率和噪声强度等器件特定参数。因此，势垒顶附近涌现的类玻尔兹曼行为并非器件相关的偶然现象，而是双稳态能量景观局部拓扑所导致的普遍结果。

这些见解促使我们提出并论证一种替代采样范式——同步采样——它与传统的异步p比特运行形成对比。在异步方案中，玻尔兹曼统计源于概率位在势阱之间连续随机切换时驻留时间的分布，而驻留时间取决于能垒高度与热噪声强度之比

。相比之下，在同步采样中，每个概率位都会被周期性地驱动至势垒顶，并在偏置和噪声的作用下弛豫一段短暂且受控的时间。这种时钟控制的运行方式产生离散采样事件，其统计特性由相同的普适短时动力学决定，同时能够在大型阵列中实现确定性的时序、并行性和架构同步。

从应用角度来看，该框架为评估和比较多种物理实现提供了统一的理论基础，包括 CMOS 双稳态锁存器、经谐波注入的振荡器以及磁性隧道结，并将它们视为概率计算基元。通过将采样机制的普适性与器件物理的微观细节解耦，我们的结果架起了器件级动力学与算法级功能之间的桥梁，并为基于同步操作、由噪声驱动且可扩展的概率计算架构提供了有理论依据的发展路径。

致谢

本研究得到了美国国家科学基金会的资助，项目编号为 # 2433871。

数据可用性：支持本研究结论的数据可在合理请求后向通讯作者获取。

附录A：构造映射 $s = f(\vartheta)$

对于由 $\dot{\vartheta} = g(\vartheta)$ 给出的梯度流动力学，相应的映射到 s——其中 $s = \tanh(\beta h t)$——可按如下方式确定：

$$\dot{s} = f'(\vartheta).\dot{\vartheta} \tag{A1}$$

根据关系： $\dot{s} = \beta h(1 - s^2)$,

$$\begin{aligned} & \beta h\left(1 - s^2\right) = f'(\vartheta).g(\vartheta) \\ \Rightarrow \quad & \beta h\left(1 - f(\vartheta)^2\right) = f'(\vartheta).g(\vartheta) \\ \Rightarrow \quad & \beta h \int \frac{d\vartheta}{g(\vartheta)} = \int \frac{df(v)}{1 - f(\vartheta)^2} \\ \Rightarrow \quad & f(\vartheta) = \tanh\left(\beta h \int \frac{d\vartheta}{g(\vartheta)}\right) + C \end{aligned} \tag{A2}$$

$C = 0$ 若 $s = 0$ 当 $\vartheta = 0$ 这是映射有效的条件。

附录 B：逻辑斯蒂漂移模型的平均首次通过时间

我们假设 Δt 为平均首次通过时间（MFPT），并推导出该一维随机过程到达对称吸收阈值$\pm z_{\mathrm{th}}$ 的平均首次通过时间的闭式积分表达式

$$dz = b(z)\,d\tau + \sqrt{2K_n}\,dW_\tau, \qquad b(z) = \beta\,h\,(1 - z^2), \tag{B1}$$

令 τ 表示从区间（$-z_{\mathrm{th}}$， z_{th}）首次离开的时间：

$$\tau = \inf\{\, t > 0 \,:\, z(t) \notin (-z_{\mathrm{th}}, z_{\mathrm{th}})\,\}. \tag{B2}$$

从 z 出发的平均首次通过时间为

$$u(z) := \mathbb{E}_z[\tau]. \tag{B3}$$

根据标准的后向柯尔莫哥洛夫/福克-普朗克理论， $u(z)$ 满足线性常微分方程

$$b(z)\,u'(z) + K_n\,u''(z) = -1, \qquad z \in (-z_{\mathrm{th}}, z_{\mathrm{th}}), \tag{B4}$$

并满足吸收边界条件

$$u(-z_{\mathrm{th}}) = u(z_{\mathrm{th}}) = 0. \tag{B5}$$

对于 $z_{\mathrm{th}} \ll 1$，漂移近乎恒定 $b(z) \approx kh$。

此时，平均首次通过时间可简化为经典的带漂移布朗运动结果

$$\Delta t \sim \mathbb{E}[\tau] \approx \frac{z_{\mathrm{th}}}{kh}\,\tanh\!\Big(\frac{kh\,z_{\mathrm{th}}}{2K_n}\Big) \tag{B6}$$

如果 $\frac{1}{2}kh\,z_{\mathrm{th}} \ll K_n$，平均首次通过时间呈扩散行为：

$$\Delta t \sim \mathbb{E}[\tau] \approx \frac{z_{\mathrm{th}}^2}{2K_n} \tag{B7}$$

可以观察到，在此区间内（当 $h \ll 1$ 非常小时），Δt与突触输入 h无关。如果 $\frac{1}{2}kh\,z_{\mathrm{th}} \gg K_n$，那么

$$\Delta t \sim \mathbb{E}[\tau] \approx \frac{z_{\mathrm{th}}}{kh} \tag{B8}$$

附录 C：产生双阱能量景观的偶多项式

考虑以下偶多项式势能：

$$U(x) = \sum_{k=2}^{n} a_{2k} x^{2k} - b\,x^2, \qquad a_{2k} > 0,\ b > 0. \tag{C1}$$

一阶导数为，

$$U'(x) = \sum_{k=2}^{n} (2k) a_{2k} x^{2k-1} - 2b\,x = x\,Q(x^2), \tag{C2}$$

其中,

$$Q(y) = \sum_{k=2}^{n} (2k) a_{2k} y^{k-1} - 2b, \qquad y = x^2 \geq 0. \tag{C3}$$

由于 $U(x)$ 是偶函数（只含偶次幂），因此有$U(-x) = U(x)$，所以 U'是奇函数： $U'(-x) = -U'(x)$。因此，临界点关于原点成对对称，只需分析 $x \geq 0$；区间 $(-\infty, 0]$ 上的行为可由对称性得出。此外，写作$U'(x) = x\,Q(x^2)$ 可知，辅助变量 $y = x^2$非负，因此只需在 $[0, \infty)$ 上考察 Q 。

注意,

$$Q(0) = -2b < 0, \qquad \lim_{y \to \infty} Q(y) = +\infty.$$

and

$$Q'(y) = \sum_{k=3}^{n} (2k)(k-1) a_{2k} y^{k-2} > 0 \quad \text{for all } y > 0,$$

由于 $a_{2k} > 0$。因此， $Q(y)$ 在$[0, \infty)$ 上严格递增，故恰有一个正根$y^* > 0$。

由 $U'(x) = xQ(x^2)$ 可得，驻点为:

$$x = 0, \qquad x = \pm\sqrt{y^*}.$$

因此， U 总共有三个临界点。

再次求导,

$$U''(x) = Q(x^2) + 2x^2 Q'(x^2). \tag{C4}$$

在 $x = 0$,

$$U''(0) = Q(0) = -2b < 0,$$

因此 $x = 0$ 是严格的局部极大值 （势垒顶）。在 $x = \pm\sqrt{y^*}$, 利用 $Q(y^*) = 0$,

$$U''(\pm\sqrt{y^*}) = 2y^* Q'(y^*) > 0,$$

因此二者都是严格的局部极小值。

此外，由于 $|x| \to \infty$， $U(x) \sim a_{2n} x^{2n} \to \infty$ ，这意味着 $\pm y^*$ 是全局极小值。

因此，上述形式的偶多项式构成了经典的双阱能量景观。

参考文献

[1] A. Lye、A. Cicirello 和 E. Patelli。《贝叶斯推断问题的随机采样方法综述》。载于 *Proceedings of the 29th European Safety and Reliability Conference (ESREL 2019)* 1866 1873 2019 ，–（）。[2] G. A. Pavliotis。 *Stochastic Processes and Applications*。应用数学丛书，第 60 卷（Springer，2014 年）。[3] K. Y. Camsari、S. Salahuddin 和 S. Datta。利用嵌入式磁隧道结实现概率位。 *IEEE Electron Device Letters* **38** 12 1767 1770 2017 （），–（）。[4] R. Faria、K. Y. Camsari 和 S. Datta。用于自旋逻辑的低势垒纳米磁体作为概率位。 *IEEE Magnetics Letters* **8** 1 5 2017 ，–（）。[5] S. Chowdhury、A. Grimaldi、N. A. Aadit、S. Niazi、M. Mohseni、S. Kanai、H. Ohno、S. Fukami、L. Theogarajan、G. Finocchio, *et al.* 基于概率位的概率计算全栈视角：器件、架构与算法。 *IEEE Journal on Exploratory Solid-State Computational Devices and Circuits* **9** 1 1 11 2023 （），–（）。[6] K. Y. Camsari、R. Faria、B. M. Sutton 和 S. Datta。用于可逆逻辑的随机概率位。 *Physical Review X* **7** 3 031014 2017 （），（）。[7] S. Luo、Y. He、B. Cai、X. Gong 和 G. Liang。基于铁电场效应晶体管的概率位，用于概率计算。 *IEEE Electron Device Letters* **44** 8 1356 1359 2023 （），–（）。[8] S. Deng、T. J. Park、H. Yu、A. Saha、A. N. N. Islam、Q. Wang、A. Sengupta 和 S. Ramanathan。用于概率计算的氢化 VO$_2$ *IEEE* 位。（），– *Electron Device Letters* **44** 10 1776 1779 2023 （）。[9] H. Rhee、G. Kim、H. Song、W. Park、D. H. Kim、J. H. In、Y. Lee 和 K. M. Kim。基于 NbO_x 金属-绝缘体转变的自振荡概率位实现概率计算。 *Nature Communications* **14**（1），7199（2023 年）。[10] N. A. Aadit、A. Grimaldi、G. Finocchio 和 K. Y. Camsari。利用环形振荡器激活概率位的物理启发的伊辛计算。载于 *2022 IEEE International Conference on Nanotechnology (NANO)*, 393–396 (2022). [11] T. N. Adeyeye, S. Gibeault, D. P. Lathrop, M. W. Daniels, M. D. Stiles, J. J. McClelland, W. A. Borders, J. T. Ryan, P. Talatchian, U. Ebels, *et al.* 在时域中利用超顺磁隧道结对指数分布进行采样。 *Physical Review Applied* **23** 4 044047 2025 （），（）。[12] W. F. Brown. 单畴粒子的热涨落。 *Physical Review* **130**(5), 1677–1686 (1963). [13] M. W. Daniels, W. A. Borders, N. Prasad, A. Madhavan, S. Gibeault, T. Adeyeye, L. Pocher, L. Wan, M. Tran, J. A. Katine, *et al.* 神经网络的三种实现方式：利用磁性隧道结随机性解锁新型计算方案。载于 *Spintronics XVI* 12656, ，第–卷 84 94 2023 （SPIE，）。[14] E. M. H. E. B. Ekanayake, N. Khan, and N. Shukla. 弥合模拟计算与概率计算之间的鸿沟：将振荡器伊辛机配置为概率位引擎。 *arXiv preprint* arXiv:2508.15234 (2025). [15] V. Ostwal, P. Debashis, R. Faria, Z. Chen, and J. Appen-zeller. 采用硬轴初始化的自旋转矩器件作为随机二值神经元。 *Scientific Reports* **8** (1), 16689 (2018). [16] P. Debashis, V. Ostwal, R. Faria, S. Datta, J. Appen-zeller, and Z. Chen. 利用随机自旋电子器件实现贝叶斯网络构建模块的硬件实现。 *Scientific Reports* **10**(1), 16002 (2020). [17] A. P. Guimar˜aes. *Principles of Nanomagnetism*。Springer (2009). [18] J. W. Milnor. *Morse Theory*。普林斯顿大学出版社 (1963). [19] V. I. Arnold. *Singularity Theory*。Springer 数学专著（Springer，1992）。[20] M. Golubitsky and D. G. Schaeffer. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory Vol. I* ，。应用数学科学丛书第51卷（Springer，1985）。[21] T. Poston and I. Stewart. *Catastrophe Theory and Its Applications* 1978 。Pitman（）。