arXiv:2602.04022v1 [math.NT] 3 Feb 2026

黎曼猜想：过去、现在与一封穿越时光的信

[阿兰·孔涅]

2026年2月5日

摘要

本文受委托撰写，旨在综述黎曼猜想，全面回顾了165年来人们针对这一基本问题所采用的数学方法，并介绍了撰写过程中形成的一种新视角。文章首先详细介绍我们对黎曼ζ函数及其零点的认识，随后广泛综述了为探究黎曼猜想而发展出的数学理论——从经典解析方法到现代几何方法和物理方法。我们还讨论了该假设的若干等价表述。

在这一综述框架下，我们以一封“致黎曼的信”的形式提出原创性贡献，所用的数学知识仅限于黎曼所处时代已有的内容。这封信揭示了一种受黎曼本人处理保角映射定理的方法启发的途径：通过极值化一个二次型（用现代术语来说，即魏尔二次型的限制），我们得到了对ζ函数零点的惊人近似。仅使用小于13的素数，这一优化过程便能近似前50个零点，精度从2.6×10^{-55}到10^{-3}不等。此外，我们证明了一般性结果：这些近似值恰好位于临界线$\Re(z) = \frac{1}{2}$上。

在这封信之后，我们将用现代术语阐释其背后的数学内容，包括描述韦伊二次型与信息论世界之间的深刻联系。最后几节借助迹公式展开几何视角，并概述一种可能的证明策略：证明零点从有限欧拉乘积到无限欧拉乘积的收敛性。在完成受委托撰写的综述之际，这些新成果也为今后研究黎曼猜想指明了一个有希望的方向。

目录

1 引言 **3**

2 与黎曼ζ函数的相遇

62.1 经典解析数论.6 2.1.1 素数定理（PNT）：.6 2.1.2 黎曼公式、冯·曼戈尔特的论文.7 2.1.3 显式公式.8 2.1.4 $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$ 的符号变化.9 2.1.5 哈代与利特尔伍德.9 2.1.6 塞尔伯格的早期贡献（20世纪40至50年代）：.10 2.1.7 临界线上零点的比例：.10 2.1.8 无零区域与零点密度估计：.10 2.1.9 林德洛夫假设：.10 2.2 整函数与亚纯函数理论.10 2.2.1 阿达马分解定理.10 2.2.2 奈望林纳理论.11 2.2.3 $\log|\zeta(s)|$ 与 $\zeta(s) - x$ 零点的平均行为.12 2.2.4 Voronin 万能性定理：ζ函数如同变色龙.12

3 A C理论构建的一个半世纪：迈向黎曼猜想 13

3.1 调和分析与泛函分析.13 3.1.1 希尔伯特空间与谱理论：.13 3.1.2 散射理论与谱解释：.13 3.2 代数几何与算术几何.13 3.2.1 韦伊关于函数域的证明：.13 3.2.2 格罗滕迪克概形与étale上同调：.14 3.2.3 动机.14 3.3 自守形式与表示论.15 3.3.1 朗兰兹纲领：.15 3.3.2 模形式与L函数：.15 3.3.3 塞尔伯格迹公式与ζ函数：.15 3.4

随机矩阵理论与量子混沌.16

3.4.1 蒙哥马利两点相关：.16 3.4.2 Odlyzko统计：.16 3.4.3 量子混沌：.17 3.4.4 Katz–Sarnak理论.17 3.4.5 矩与酉矩阵（Keating–Snaith）：.17 3.5 非交换几何.18 3.5.1 Connes迹公式.18 3.5.2 纽结、素数与类域论.19 3.6 p 进与动机 L 函数.19 3.6.1 p 进 L 函数与岩泽理论：.19 3.6.2 动机 L 函数与布洛赫–加藤猜想：.19 3.7 计算与实验数学.20 3.7.1 高精度计算.20

4 等价表述 **20**

4.1 外尔正性判据.20 4.2 贝林–尼曼判据：.21 4.3 李准则.21 4.4 初等数论表述.22 4.4.1 Robin 判据（1984年）.22 4.4.2 Lagarias 判据（2002）.22

5 致伯恩哈德·黎曼教授的一封信 23

6 策略与接下来的小步骤 **26**

6.1 θ_x 的傅里叶变换的所有零点都在实数轴上.26 6.2 黎曼的 Ξ 函数与厄米函数.26 6.3 长椭球波函数登场.27 6.4 泊松公式与对k_λ 、 θ_x和 $\lambda = \sqrt{x}$的逼近.28 $\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$6.5 傅里叶变换$k_\lambda \to k$ 的收敛.29 6.6 剩余步骤.30 −

7 几何视角 **30**

7.1 阿基米德迹公式.30 7.2 阿基米德魏尔正性.31 7.3 半局部阿代尔类空间.31 7.4 半局部迹公式.32 7.5 红外区与紫外区.32 7.6 长椭球波算子.33

8 结论 **34**

1 引言

黎曼猜想（RH）或许是数学界最著名的未解难题。自伯恩哈德·黎曼在其1859年的回忆录中随口提到「sehr wahrscheinlich」（非常可能）所有ζ函数的非平凡零点都位于临界线 $\Re(s) = 1/2$ 上以来，证明这一猜想的所有尝试均未成功。

本文的核心是一封写给黎曼的三页信，仿佛可以跨越岁月与他交流；在信中，我将提出一套（旨在证明黎曼猜想的）策略，只使用他所熟悉的数学，并结合现代计算机的强大能力。

在“邂逅黎曼ζ函数”一节中，我们旨在向读者生动地展现黎曼揭示的非凡联系：ζ函数的复零点与素数的分布之间的联系。我们首先简要回顾素数定理的历史，随后介绍黎曼关于 $\pi(x)$（即小于x的素数个数）的显式公式，以及后来将其推广而成的显式公式。接下来，我们将转向最引人注目的后果之一：利特尔伍德发现差值 $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$ 会无穷多次变号；这一发现推翻了此前关于存在简单单调规律的预期。

接着，我们追溯关于 $\zeta(s)$零点的研究进展：从哈代证明其在临界线上有无穷多个零点，到塞尔伯格在1942年取得突破，再到有关恰好位于临界线上的零点比例的现代结果。为阐明这一理论，我们还将借助整函数这一丰富的理论框架，其中包括 Hadamard 的因子分解定理、奈望林纳理论，以及卓越的博尔赫塞纽斯–耶森定理；后者本身就是玻尔–兰道纲领在几乎周期函数领域取得的一项成果。

这一部分以一项想必会令黎曼惊叹的结果作结：Voronin 万能性定理。该定理断言，在条带 $1/2 < \Re(s) < 1$ 内，ζ函数具有变色龙般的性质：通过垂直平移，它可以逼近任意预先指定的函数 $f(s)$ ，只要该函数在条带内某个单连通紧集上连续、不为零且全纯。

综观这些里程碑，我们既能看到$\zeta(s)$解析结构的深度，也能领略其精妙之处。它们让我们得以理解，为什么黎曼猜想至今仍如此难以攻克：函数本身蕴含着惊人丰富的性质，其难以捉摸的程度远超初见时的想象。

黎曼当然不可能预见到，为证明他的猜想而开展的探索将催生出怎样非凡的数学图景。整个理论体系由此诞生，其联系从代数几何延伸至量子物理。《迈向 *RH* 的一个半世纪理论构建》一节将简要概述这些理论。首先，问题被拓展到了代数几何与算术几何领域。在这一背景下，人们发展出了有限特征下黎曼ζ函数的类比形式，并由安德烈·韦伊证明了相应的黎曼猜想。为提供背景，我将简要回顾格罗滕迪克概形与 étale 上同调的概念。这里的关键在于，从概形的视角看，韦伊著名的“罗塞塔石碑”类比便清晰起来。罗塞塔石碑上的平行铭文是横向排列的：顶部是象形文字，中间是世俗体文字，底部是希腊文。韦伊为黎曼猜想提出了类似的三种文本对照。底部对应希腊文的是黎曼关于黎曼曲面的研究。在这一背景下，黎曼猜想并无对应形式，但它展现了超越方法在几何中的非凡力量。中间的文本对应有限域上的代数几何：韦伊在此证明了黎曼猜想的类比形式，而ζ函数则作为生成函数出现，用以计数有限域扩张上曲线的有理点。最后，顶部的“象形文字”文本对应于 $\mathbb{Z}$ 的算术情形，也就是谱；这一领域至今仍充满谜团。

值得注意的是，多亏了 Grothendieck 的概形理论，我们得以在这三种铭文中看到一个统一的框架：每种情况下所处理的都是一维正则概形。为此，我将简要介绍概形、étale上同调和动机。

Anot她的主要推广源于自守形式理论与表示th e-

论，其中塞尔伯格迹公式和ζ函数起着核心作用。
接下来，我将转向随机矩阵理论和量子混沌。由 Montgomery 和 Dyson 发起、后来又经 Odlyzko 大规模数值实验的非凡验证的一项重要发现是：临界线上$\zeta(s)$ 的相邻零点之间归一化间距的两点相关，与随机矩阵理论中高斯酉系综（GUE）的特征值相关性相一致。Nicholas Katz 和 Peter Sarnak 将这一对应关系扩展到整个 L函数族，并建立了一个系统的理论框架，用于理解它们的统计行为，详见 §3.4.4。

在将ζ零点与高斯酉系综的特征值进行比较时，必须在局部进行重新缩放，以补偿零点密度的变化。进行这种调整的必要性揭示了ζ函数缺乏真正的“紫外模型”——这一缺口将在本文的最后部分 §7.6 中得到讨论。

Keating 和 Snaith 在 2000年 的工作带来了进一步的进展：他们运用随机矩阵理论，为黎曼ζ函数的矩提出了一个猜想公式。
接下来，我将简要谈谈自己1998年关于迹公式的研究。其中的新要素是，不直接研究ζ函数，而是考察它所生成的理想，这等价于聚焦于其零点。关键在于，无须显式定义该函数，也无需求助于其解析延拓，就能刻画这个理想及其相关零点。关键是构造一个几何空间——阿代尔类空间；它作为阿代尔在有理数域的遍历乘法作用下所得的商，具有核心意义。这个商将L函数的零点——不仅是黎曼ζ函数的零点——揭示为一种吸收谱。近期成果进一步凸显了阿代尔类空间与类域论中相对应的概形之间的精确对应关系；这些概形与 $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ 密切相关，而 Grothendieck 的 étale位点理论和 étale基本群理论则将其揭示为伽罗瓦理论的一种推广。

相应的迹公式与塞尔伯格的迹公式类似，但更为微妙，因为它同时涉及红外截断和紫外截断。也正是在这里，长椭球波函数首次自然而然地登场。

我将提及黎曼ζ函数的各种推广，这些推广拓宽了视野，并为探索开辟了新的途径。为求完整，我也会谈及p进函数：虽然目前尚未发现这些情形下黎曼猜想的类似命题，但它们仍催生了许多优美的成果。

最后，在“等价表述”一节中，我将转而探讨黎曼猜想的各种等价表述。Kevin Broughan 的网站／著作《黎曼猜想的等价命题》（2017年，剑桥大学出版社）系统地汇集了 100 多种等价表述。这部全面的著作按数学领域对这些等价命题进行了分类：

- 初等算术函数
- 素数计数表述
- 解析等价命题
- 泛函分析判据
- 概率陈述
- 矩阵与算子理论
- 动力系统

黎曼猜想的某些等价表述非常简单：例如，令R_n 为雷德赫弗矩阵，这是一个$n \times n$ (0,1) 矩阵，其中$R_{ij} = 1$ 当$j = 1$ 或i 整除j时成立。于是

$$RH \iff \det(R_n) = O(n^{1/2+\epsilon}),\ \forall \epsilon > 0$$

这些表述引人入胜，却也暗藏陷阱：这门学科的历史表明，试图解决这个问题的努力很容易被这个等价关系“黑洞”的引力所吸引。

我将讨论其中两种等价表述：先是魏尔正性判据，再是经 Lagarias 改进的 Robin 判据。后者表明，黎曼猜想属于希尔伯特在数学基础研究纲领中希望能够“若为真便可证明”的命题类型。然而，哥德尔定理表明，恰恰对于这类命题，真并不意味着可证。本文将结合蔡廷算法复杂性理论，对此进行详细讨论。本文的下一部分题为《致伯恩哈德·黎曼教授的一封信》，其性质则截然不同。它采用一封写给黎曼本人的信的形式，展开一场跨越时空的想象对话。这封信旨在指出一个简单却令人惊讶的观察：有一种研究黎曼猜想的策略，完全符合黎曼本人的数学视野，例如他证明保角映射定理时所展现的视野。重要的是，这一策略只需要运用 1859年已有的数学概念和工具。

具体而言，它使人能够仅利用欧拉乘积中的少数几个因子，求得ζ函数最初的非平凡零点。例如，将欧拉乘积截断于素数13，并使用所述方法进行计算，可得到 $\zeta(s)$ 前50个零点的近似值。要理解其精确度，最好的方式是给出偶然得到如此近似结果的概率。仅凭偶然便得到如此吻合结果的可能性约为 10^{-1235}。为了让大家对这个概率有个概念，这大致相当于连续4000多次抛硬币都猜对结果的概率——这种事情极不可能发生，实际上足以排除巧合和计算错误。

因此，人们或许会得出这样的结论：“这不过是一种计算黎曼ζ函数零点的新算法。”如果真是如此，那么黎曼猜想本身也就随之得证，因为一条一般性定理保证，只要相应算子的最小特征值是单重的，且[1]，由此得到的近似数便构成某个自伴算子的谱，因此全都为实数。

在这封致黎曼的信之后，接下来的小步一节将更详细地讨论信中的内容，并概述一种可能的策略，以严格论证这种方法产生的近似零点通常会收敛到黎曼ζ函数的实际零点。尽管支持这一结论的数值证据无可辩驳，但证据本身并非证明。在这条自然的探索路径中，长椭球波函数发挥着核心作用；我于1998年将其引入这一领域。

计算机实验揭示了一个惊人的事实：用椭球波函数来表达时，可以极好地近似使韦伊二次型达到最小值的函数。这一观察为这种方法提供了强有力的依据。当然，沿着这条思路完成证明，可能会遇到严重障碍。然而，无论能够取得多大进展，这一方向都自然地开启了更深入探索的大门，其起点将在几何视角 一节中呈现——也就是两个看似相距甚远的数学世界之间那出人意料的联系。

一方面，有韦伊二次型的世界。这里的核心事实是韦伊引人注目的等价性：黎曼猜想等价于某些仅涉及有限个素数的二次型的正定性。这一点十分惊人，因为人们可能会预期，要处理黎曼猜想，就必须控制全部无穷多个素数。然而在这里，问题被局部化了，一次只需处理有限的集合。此外，在这一框架下，正如前文所述，可以利用一种一般性的函数构造，使其零点完全位于临界线上。

另一方面，还有由 David Slepian 及其合作者发展出的长椭球波函数世界，其根源可追溯至 Claude Shannon 在通信理论方面的工作。Slepian、Landau 和波拉克在开创性工作中确立了关键联系：定义在直线上的经典二阶微分算子——扁长算子，它由 Heun 方程合流而得；这对黎曼的数学世界而言再熟悉不过。这个算子发挥着双重作用。在红外区，它提供了一种近似韦伊二次型最小特征向量的方法。在另一极端，正如本文最后一节所阐述的，它还为一种自伴算子提供了模型，其谱反映了

[1]即相应的特征函数是偶函数

黎曼ζ函数的零点的紫外行为。
综上，这些观察凸显了理解仅涉及有限多个素数的情形，以及阐明韦伊二次型与扁长算子之间相互关系的重要性。这种联系是通过迹公式建立的，该公式由我于1998年证明。在最后一节中，我将用与通信理论以及 Slepian 及其合作者的研究中完全相同的要素重新表述这一迹公式，从而明确揭示它在韦伊二次型与 prolate 函数之间架起的桥梁。其背后有一个至关重要的几何空间：半局部阿代尔类空间 Y_S，它与一个有限赋值集 S 相关，属于 $\mathbb{Q}$ 且包含阿基米德位。按照构造，Y_S 是通过取由局部域的有限乘积对由 S 中的素数生成的群 的对角作用所得的商

$$\prod_{v\in S}\mathbb{Q}_v/\Gamma,\ \ \Gamma:=\{\pm\prod p_v^{n_v}\mid n_v\in\mathbb{Z}\}$$

得到的。外尔正性判据表明，在这一半局部情形下证明所需的正性，等价于证明黎曼猜想（事实上，这也涵盖了带有格罗森特征的L函数情形）。

与完整阿代尔类空间相比，这个半局部空间的一个关键优势体现在测度论上：在这里，乘法哈尔测度与加法哈尔测度不再彼此奇异，因此从测度论的角度看，商的性质良好。然而，从拓扑角度来看，情况则更为微妙。对于每个素数$p\ \in S$，都会出现一个长度为 log$p$ 的周期轨道，而这些轨道恰好编码了p 对显式公式的贡献。最后，在§7.6中，我将介绍我们与 H. Moscovici 合作的近期发现 [27]，：我们证明，扁长球算子的自伴扩张的特征值重现了黎曼ζ函数零点平方的紫外行为，并构造了一个狄拉克算子的等谱族，其谱具有与ζ函数零点相同的紫外行为。

2 与黎曼ζ函数的邂逅

2.1 经典解析数论

2.1.1 素数定理（PNT）：

In 1852年，帕夫努季·切比雪夫证明了 [14]小于x 的素数个数 $\pi(x)$ 满足

$$A\frac{x}{\log(x)}<\pi(x)<\frac{6A}{5}\frac{x}{\log(x)},\quad A\approx 0.92129$$

当x 足够大时，这使他得以证明关于素数p的级数收敛，

$$\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\frac{1}{5\log 5}+\frac{1}{7\log 7}+\cdots$$

他引入了两个关键的计数函数 ϑ 和 ψ，定义为以下求和

$$\vartheta(x):=\sum_{p<x}\log p,\ \ \psi(x):=\vartheta(x)+\vartheta(x^{1/2})+\vartheta(x^{1/3})+\dots$$

证明了恒等式 $\sum_1^x\psi(\mathrm{x/n})=\log(\mathrm{x!})$，随后使用了斯特林公式。渐近关系 $\pi(\mathrm{x})\sim\mathrm{x/log\ x}$ 等价于 $\vartheta(\mathrm{x})\sim\mathrm{x}$，这一事实切比雪夫当时肯定已经知晓，并且属于当时数学界的常识。事实上，在他们的论文中， [54], [106], Hadamard 和 de la Vallée Poussin 都证明了 $\vartheta(\mathrm{x})\sim\mathrm{x}$，却没有明确提及等价的结果 $\pi(\mathrm{x})\sim\mathrm{x/log\ x}$。他们各自的证明关键性地确立了 $\zeta(\mathrm{s})$在 $\mathrm{Re(s)}=1$这条直线上的不消失性，所使用的工具包括复分析技术以及Hadamard整函数理论。它与RH的联系意义深远：尽管素数定理只要求 $\zeta(\mathrm{s})\neq 0$ 对于 $\Re(\mathrm{s})=1$，误差项 $\pi(\mathrm{x})-\mathrm{Li(x)}$

在素数计数函数中直接受零点位置控制。在RH成立的条件下，误差项改进为 $O(x^{1/2}\log x)$。用积分对数进行的近似与其首项存在显著差异，即

$$\mathrm{Li}(x) \sim \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \frac{2x}{\log^3 x} + \cdots$$

Hadamard 的证明中包含着一个优美的思想 $\zeta(s) \neq 0$ 对于 $\Re(s) = 1$，它可以通过素数幂的相位来理解，并归结为 $(-1)^2 = 1$。事实上，如果某个实数 t 满足 $\zeta(1+it) = 0$，那么复数 p^{-it} 将趋于聚集在 -1 附近，这可由 $-\log(1-p^{-it+\epsilon})$ 的展开看出。但这样一来，复数 p^{-2it} 便会趋于聚集在 1 附近，从而在 $1+2it$ 处产生 ζ函数的一个极点；除非 $2t = 0$，否则这不可能发生。

Hadamard 和 de la Vallée Poussin 证明素数定理的下一步，源于他们需要从 ζ函数的解析性质中提取关于素数分布的精确渐近信息。他们运用了整函数理论中的复杂技巧，因此需要对 ζ函数在复平面不同区域内的行为作出详细估计。尽管这些方法在数学上是严谨的，也体现了卓越的数学洞见，却掩盖了解析输入与算术输出——即渐近公式——之间的概念联系。埃德蒙·朗道通过引入陶伯方法来证明素数定理，首次作出了重大的概念简化；这一成果发表于他颇具影响力的 1909年著作《素数分布理论手册》中。朗道的创新在于认识到，ζ函数的解析性质与关于素数分布的算术信息之间的联系，可以通过一类称为陶伯型结果的一般定理来建立。这些定理给出了相应条件，使生成函数的渐近性质能够转化为其系数序列的渐近性质。从朗道最初的陶伯方法，到维纳-池原定理[1]，再到纽曼更为简化的论述，这一发展历程展现了数学理解如何通过建立更一般、概念上更清晰的框架而不断深化。

塞尔伯格与埃尔德什于1949年对素数定理的初等证明表明，复分析在逻辑上并非证明该定理所必需。塞尔伯格筛虽是为其素数定理的初等证明而发展的 [97], ，却成为了解析数论中的一项基本工具。塞尔伯格对称公式

$$\sum_{p \le x} \log^2 p + \sum_{pq \le x} \log p \log q = 2x \log x + O(x)$$

体现了他在素数分布中发现意想不到的简洁性的能力。

2.1.2 黎曼公式，冯·曼戈尔特论文

在其奠基性论文[2] [90], 中，黎曼非常谨慎地定义了他所使用的积分对数的分支，并在其关于函数 $f(x)$ 的公式中陈述了条件收敛[3]，该函数是作为计数函数之和 $\pi(x^{1/n})$而得到的。

$$f(x) = \mathrm{Li}(x) - \sum_{\alpha} \left(\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + \mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right) \right) + \int_x^{\infty} \frac{1}{t^2-1} \frac{dt}{t \log t} - \log 2 \tag{1}$$

其中，$\frac{1}{2} + \alpha\, i$ 是 ζ 中具有正虚部的非平凡零点，而各项的次序对应于 $\Re(\alpha)$的递增取值。

正如我会在《致黎曼的信》开头简要提到的，令人遗憾的是，人们对积分对数各个分支的关注

[2]他将其寄给了切比雪夫[3]。他是条件收敛方面的大师，并首次给出严格证明：条件收敛级数可以经重排而收敛到任意预先指定的值，或完全发散。黎曼重排定理源于他1854年的任教资格论文《关于函数用三角级数表示的问题》，这部著作主要致力于将傅里叶级数理论推广到更一般的函数类。经戴德金的编辑工作，它于 1867, [91], 在作者身后出版。

在一些现代论著中已经消失，例如 Edwards 的经典著作 [44], 或某些技术论文中；这些文献将（1）写成上述形式，却没有任何函数 $Li(z)$ 或 $Li(z)+Li(z)$ 能使级数的一般项趋于 0。问题出在记号上，因为如果仔细遵循黎曼的做法，就会发现他所考虑的值不仅取决于x^ρ，还取决于 $\rho\log(x)$。事实上，冯·曼戈尔特的论文 [107], 正确地定义了他所赋予含义的对象：不是函数 $Li(z)$，而是函数 $Li\,(e^w)$。以下是他的原文：

> 令 $w = u + iv$，其中 u 和 v 表示实数，并再次将 h 理解为正实变量，只需作如下定义：1. 若 $v > 0$，则
>
> $$Li\,(e^w) = \lim_{h\to\infty} \int_{-h+w}^{w} \frac{e^z}{z} dz + i\pi$$
>
> 2. 若 $v = 0$，则
>
> $$Li\,(e^w) = \lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{-h} \frac{e^z}{z} dz + \int_{h}^{w} \frac{e^z}{z} dz$$
>
> 3. 若 $v < 0$，则
>
> $$Li\,(e^w) = \lim_{h\to\infty} \int_{-h+w}^{w} \frac{e^z}{z} dz - i\pi$$
>
> 容易验证，以这种方式定义的函数 $Li(e^w)$ 确实具备所需的性质。

因此，冯·曼戈尔特充分意识到了记号 $Li(x^\rho)$ 的缺陷。遗憾的是，这种记号仍被随意使用，尽管大多数作者（可能）都了解这个问题。
借助计算机，可以检验黎曼公式：用函数 $\mathrm{Ei}(\rho\log x)$ 取代 $\mathrm{Li}(x^\rho)$ 对公式进行改写（见 (27)），结果发现，对 ζ函数的数千个零点求和后，两者相当吻合。

2.1.3 显式公式

这些公式将素数计数函数与 $\zeta(s)$的非平凡零点联系起来，精确揭示了零点对算术函数的影响。冯·曼戈尔特 [107] 严格证明了黎曼最初提出的显式公式，该公式可由以下较简单的等式推导得出

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} - \log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(1 - x^{-2})$$

其中 $\psi(x) = \sum_{p^k \le x} \log p$ 是切比雪夫函数，而求和遍及非平凡零点 ρ。与黎曼的情形一样，$\sum_\rho$ 取部分和在 $-T \le \Im(\rho) \le T$ 时的极限，但并非绝对收敛。误差项的阶为$(\log T)^2/T$ （见 [81] 定理12.5）。

Guinand [52] 和 Weil [109] 后来发展出了更一般的显式公式，将测试函数及其傅里叶变换与零点分布联系起来，从调和分析的角度揭示了素数与零点之间的关系。黎曼ζ函数的通常表述涉及满足适当正则性条件的测试函数 $f:\ \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}$ [4], 以及定义为的梅林变换

$$\tilde{f}(s) := \int_0^\infty f(x) x^{s-1} dx \tag{2}$$

[4]它们连续且导数连续，但在有限个点处例外；在这些点，$f(x)$ 和$f'(x)$ 至多有第一类间断，并且$f(x)$ 和$f'(x)$ 的值定义为左右极限的平均值。此外，假设对于某个 $\delta > 0$ 有

$$f(x) = O(x^\delta),\ \text{for } x \to 0+,\ \ f(x) = O(x^{-1-\delta}),\ \text{for } x \to +\infty.$$

它们的形式为

$$\sum_{\rho} \tilde{f}(\rho) = \tilde{f}(0) + \tilde{f}(1) - \sum_{v} \mathcal{W}_v(f), \tag{3}$$

其中，左侧的求和遍及黎曼ζ函数的所有复零点 ρ，通常仅条件收敛；右侧的求和则遍及 $\mathbb{Q}$ 的所有有理点v。非阿基米德分布 $\mathcal{W}_p$ 定义为：使用 $f^\sharp(x) := x^{-1} f(x^{-1})$，即

$$\mathcal{W}_p(f) := (\log p) \sum_{m=1}^{\infty} \left(f(p^m) + f^\sharp(p^m) \right) \tag{4}$$

而阿基米德分布定义为

$$\mathcal{W}_{\mathbb{R}}(f) := (\log 4\pi + \gamma) f(1) + \int_1^{\infty} \left(f(x) + f^\sharp(x) - \frac{2}{x} f(1) \right) \frac{dx}{x - x^{-1}}. \tag{5}$$

2.1.4 $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$的变号

利特尔伍德 1914年的著名结果 [75] 指出， $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$ （假设黎曼猜想成立）会无穷多次变号。这表明素数定理的误差项呈现出复杂的振荡行为，与实证观察到的所有已计算值均满足 $\pi(x) < \mathrm{Li}(x)$ 相矛盾。Skewes 首次给出了此类变号的有效界 [100], ，他证明（假设黎曼猜想成立）在以下数值之前就会出现一次交叉：

$$B = 10^{10^{10^{34}}}$$

Lehman [71], 大幅改进了这个极大的界，他提出了一个关键思路：导出$ue^{-u/2}\left(\pi(e^u) - \mathrm{Li}\left(e^u\right)\right)$的显式公式，并用高斯核取平均。随后，Riele [105]（约为 6.69×10^{370}）、Bays 和 Hudson [2]（约为 1.4×10^{316}）进一步改进了这一结果；最近，Chao 和 Plymen [15] 以及 Saouter、Demichel 和 Trudgian [93], [94]又进行了改进。

2.1.5 哈代与利特尔伍德

哈代在1914年给出的证明 [56] 表明，无穷多个零点位于临界线上；他使用了函数方程，并仔细分析了$Z(t) = e^{i\theta(t)}\zeta(1/2 + it)$，其中 $\theta(t)$ 的选取使$Z(t)$ 在t 为实数时也为实数，

$$\theta(t) = \mathrm{Im}\left(\log \Gamma\left(\frac{1}{4} + i\frac{t}{2} \right) \right) - \frac{t}{2} \log \pi$$

通过研究$Z(t)$的符号变化，他证明存在无穷多个零点满足 $\Re(s) = 1/2$。Hardy-Littlewood 关于条件性结果的研究 [57] 表明，黎曼猜想蕴含着有关素数间隙及其他加性问题的众多推论。他们的方法建立在哈代早期工作的基础上，同时采用了更精细的分析技巧来估计振荡积分和渐近展开。他们后续的研究仔细分析了 ζ函数[5], 的近似函数方程，该方程在整个临界带内为 $\zeta(\mathrm{s})$ 提供了一个明确表示。通过研究这一表示中的抵消与振荡，他们得以证明，哈代的Z函数的符号变化次数，因而虚部位于 $[0,T]$, 以内且落在临界线上的 $\zeta(\mathrm{s})$ 零点数，至少随T线性增长。对于虚部位于 $[0, T]$, 以内的非平凡零点总数$N(T)$ ，黎曼给出的估计为 $N(T) \sim \frac{1}{2\pi} T \log T$；其中是否有正比例的零点落在临界线上，仍不清楚。

—

[5]西格尔在1932年发表的关于黎曼笔记的论文指出，尽管哈代和利特尔伍德于1920年通过类似的方法（鞍点法），利用他们的“近似函数方程”独立地重新发现了这一发展的主项，但黎曼的工作还包含其他见解

2.1.6 塞尔伯格的早期贡献（20世纪40至50年代）：

这一根本问题的突破性解决出现在1942年，阿特勒·塞尔伯格开创性的工作引入了光滑化这一创新技巧，并首次证明有正比例的非平凡零点位于临界线上。塞尔伯格的证明[2] 的核心思路是，将 $\zeta(s)$ 的级数乘以$\zeta(s)^{-1/2}$级数部分和的平方。塞尔伯格的成就在于证明，临界线上的零点数 $N_0(T)$ 满足 $N_0(T) \gg T \log T$，这立即意味着比值 $N_0(T)/N(T)$ 有一个严格大于零的下界，从而确立了所有零点中有正比例位于临界线上。塞尔伯格的工作 [96, 97] 通过几项关键创新，彻底改变了对ζ函数的研究。他关于 $\log |\zeta(1/2+it)|$ 分布的研究表明，它服从具有特定均值和方差的高斯分布，预示了它与随机矩阵理论之间的联系。

2.1.7 临界线上零点的比例：

如上所述，哈代的1914年定理 [56]由塞尔伯格（1942年） [96]加以量化，他证明有正比例的零点具有实部 $1/2$。莱文森在 1974 [73]取得的突破证明，至少有 $1/3$ 的非平凡零点位于临界线上，其所用的平滑器技术使ζ函数在临界线附近得以平滑。Conrey于1989年的改进 [34]将这一比例提升至 $2/5$，采用了更为精细的平滑器与渐近分析。裴、康瑞和杨于2011取得的结果 [12] 达到了41%，运用多个狄利克雷多项式以及极值函数理论中的优化技术，代表了这一方法目前的最高水平。普拉特等人 [88]基于冯的平滑器 [46]，目前保持着41.7%的纪录。

2.1.8 无零区域和零点密度估计：

经典无零区域，例如 de la Vallée Poussin 证明的区域 [106] 表明 $\zeta(s) \neq 0$对于 $\Re(s) \geq 1 - c/\log(|\Im(s)| + 2)$，为算术级数中的素数分布提供了明确的界。由 Bohr 和 Landau 开创的零点密度估计，给出了满足 $\Re(s) \geq \sigma$且 $|\Im(s)| \leq T$ 的零点数 $N(\sigma, T)$ 的上界。已知的最佳结果表明，对于取决于 σ的不同 c 值，$N(\sigma, T) \ll T^{c(1-\sigma)}$，且改进

$$N(\sigma, T) \ll T^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} (\log T)^5$$

来自 Ingham [61]。随着 $\sigma \to 1$，Montgomery 等人给出了越来越精确的界。Guth–Maynard 零点密度结果 [53] 是 85 年来首次改进 Ingham 定理在 $\sigma = 3/4$ 附近的结果。

2.1.9 林德勒夫猜想：

林德勒夫猜想指出，对于任意 $\epsilon > 0$，$|\zeta(1/2 + it)| \ll t^{\epsilon}$。若 σ为实数，则将 $\mu(\sigma)$ 定义为满足 $|\zeta(\sigma + it)| = O(t^{\alpha})$ 的所有实数 α中的下确界。对于 $\sigma > 1$，有 $\mu(\sigma) = 0$，而函数方程意味着 $\mu(\sigma) = \mu(1-\sigma) - \sigma + 1/2$。普丰-林德勒夫定理意味着 μ 是凸函数。林德勒夫猜想指出 $\mu(1/2) = 0$；结合上述关于 μ 的性质可知，对于 $\sigma \geq 1/2$，$\mu(\sigma)$ 为 0；而对于 $\sigma \leq 1/2$，则为 $1/2 - \sigma$。尽管它弱于黎曼猜想，但对 L函数矩和次凸性问题仍有重要应用。

2.2 整函数与亚纯函数理论

2.2.1 Hadamard 因式分解定理

整函数 f 的阶为 σ，当

$$\sigma = \limsup_{r \to \infty} \frac{\log \log M(r)}{\log r}$$

其中 $M(r) = \text{最大值}_{|z|=r} |f(z)|$。哈达玛乘积公式指出，整函数 f 的一阶 可写为

$$f(z) = e^{A+Bz} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) e^{z/\rho}$$

w这里的乘积遍及f的所有零点 ρ，而A和B 是常数。完备 ζ 函数 n

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) \tag{6}$$

是一个一阶整函数，具有哈达玛乘积表示[6] [5,55,72]

$$\xi(z) = \xi(0) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)$$

黎曼考虑这个函数（他将其记作 $\xi(s)$，但自哈代以来，人们使用 $\Xi(s)$）

$$\Xi(s) = \xi(1/2 + is) \tag{7}$$

函数方程 $\xi(s) = \xi(1-s)$ 蕴含 $\Xi(s) = \Xi(-s)$，因此函数 Ξ 是偶函数，其零点成对出现 $\pm\alpha$。此外，Ξ 是阶为1的整函数，对于每一对零点 $\pm\alpha$，指数因子$e^{s/\alpha}$ 和$e^{-s/\alpha}$ 相互抵消， Ξ 的哈达玛因式分解便具有特别简单的形式

$$\Xi(s) = \Xi(0) \prod_{\Re(\alpha)>0} \left(1 - \frac{s^2}{\alpha^2}\right)$$

其中乘积仅对实部为正的零点进行。两种乘积表示除常数因子外完全相同；而当 $\xi(0) = \frac{1}{2}$时，有

$$\Xi(0) = -\frac{\zeta\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{2\sqrt[4]{\pi}} \sim 0.497121$$

这一细微之处正是黎曼关于小于x的素数个数公式中唯一一处“笔误”的根源：他用 $\log \Xi(0)$ 代替了 $\log \xi(0)$。

2.2.2 奈望林纳理论

这种值分布理论 [68, 82, 83] 通过特征函数和亏值关系研究亚纯函数的增长和值分布。值得注意的是，Nevanlinna特征与Jensen公式密切相关。对于一个在$|z| \le r$内零点为a_k 的解析函数f，Jensen公式断言，只要$f(0) \neq 0$,

$$\log|f(0)| + \sum_k \log \frac{r}{|a_k|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})| \, d\theta.$$

f 的平均边界增长与其零点分布之间的这种关系，正是奈望林纳理论对亚纯函数进行系统化描述的内容。因此，特征 T(r, f) =m(r, f) + N(r, f), r > 0可视为 Jensen公式中相关量的精细化版本：计数函数 N(r, f) 记录极点，而逼近函数 m(r, f) 记录边界增长。对于ζ函数，可以定义 Nevanlinna特征 T(r, ζ)，并研究其增长[3]。该理论提供了第一基本定理和第二基本定理等工具，用于将 a点（即 f (z) = a 的解）的分布与函数的增长联系起来。尽管直接应用该理论证明黎曼猜想尚未成功，但奈望林纳理论揭示了值 0 对 ζ(s) 的特殊意义，正如下文讨论的 Borchsenius-Jessen 定理所示；它还提供了与 Picard型定理的类比 [49]。近期研究探索了奈望林纳理论与 ζ(s) 的普适性之间的联系。

---

[6]这里将无穷乘积定义为当 $T \to \infty$ 时，对 ρ的乘积取极限，其中 $|\rho| < T$[7]利用恒等式 $1 - \frac{1}{2} +$ 为 $\frac{1}{2} + ia$ = $1 - {}^{sa} 1 - {}^{i2a}$ $\frac{-}{-}$ $\frac{-}{-}$

2.2.3 $\log|\zeta(s)|$ 的平均行为以及 $\zeta(s)-x$的零点

Borchsenius-Jessen 定理 [7]与黎曼猜想形成了鲜明对比。尽管人们猜想$\zeta(s)$ 的所有非平凡零点都位于 $\Re(s)=1/2$，但对于任意$x\neq 0$， $\zeta(s)-$的零点都在临界线右侧稠密聚集。具体而言：

- 对于 x $\neq 0$，方程 ζ(s) = x 在任意条带 $1/2<\Re$中都有无穷多个解。
- 随着 $\Re(s)\to 1/2^{+}$解的密度无限增大
- 若 $N_x(T)$ 表示 ζ(s) − x 在 $\Re$中且 $>1/2$、 $<$满足相应条件时的零点数，那么 $N_x(T)/T\to\infty$ 当$T\to\infty$

这一现象凸显了取值 $x=0$ 的特殊性，并表明 RH 在扰动下并不稳定：给 ζ(s) 加上任意常数，都会破坏零点在临界线上的排列。这一结果与临界带内 log ζ(s) 的平均值定理，以及流 $s\mapsto s+it$ 在ζ(s)值分布上的遍历性质有关。Borchsenius-Jessen 定理可视为 Bohr-Landau 纲领在几乎周期函数与狄利克雷级数方面的巅峰成果。Bohr 和 Landau 建立了一般框架，通过几乎周期性来理解狄利克雷级数的值分布；Borchsenius 和 Jessen 则为黎曼ζ函数本身得出了定论，证明 log ζ($\sigma+it$) 存在连续极限分布[4]。

2.2.4 Voronin 万能性定理，ζ函数如变色龙

这条卓越的1975年定理 [108] 指出，在临界带内，黎曼ζ函数可以任意精确地逼近任何不消失的全纯函数。Voronin 最初的定理证明了圆盘上的万能性：若 $0<r<1/4$，$f(s)$ 在 $|s|\le r$上连续，在$|s|<r$上全纯，且$f(s)\neq 0$在 $|s|\le r$上成立，并且 $\epsilon>0$，那么存在t_0使得

$$\max_{|s|\le r}\left|f(s)-\zeta\left(s+\frac{3}{4}+it_0\right)\right|<\epsilon$$

继 Voronin 的开创性工作之后，Reich 和 Bagchi 证明：若K 是条带 $\{s:\ 1/2<\Re(s)<1\}$ 中的一个紧子集，且其补集连通；f 在K 上连续，并在K的内部全纯，且$f(s)\neq 0$在K上成立，并且 $\epsilon>0$，那么存在t_0使得

$$\max_{s\in K}|\zeta(s+it_0)-f(s)|<\epsilon$$

此外，这类t_0 的集合具有正的下密度。因此，临界带 $\frac{1}{2}<\Re(z)<1$ 中的黎曼ζ函数就像一只数学变色龙：只需在复平面中沿垂直方向平移，它就能在紧集上逼近任意不消失的全纯函数。与 Bohr-Landau 几乎周期的框架一样，这一结果运用了克罗内克流在无限维环面上的遍历性质；该环面是非零有理数离散群的紧对偶。不过，我们现在要讨论其中性质截然不同的关键要素。

正如我们在上文的脚注中简要提到的，黎曼在其关于三角级数的回忆录中讨论狄利克雷核时指出，经过适当重排项，一个实数条件收敛级数可以取任意和C 。令人惊叹的是，Voronin 证明的核心正是这一事实的推广。关键结果如下（ [70], 定理 1.16）

设 H 为一个希尔伯特空间， $\{x_m\}$ 是H 中的一个序列，满足以下两个条件：

$$\sum_{m=1}^{\infty}\|x_m\|^2<\infty;\quad \sum_{m=1}^{\infty}|(x_m,x)|=\infty\ \ \forall x\in H, x\neq 0$$

那么，所有收敛级数 $\sum_{m=1}^{\infty}a_m x_m,\quad |a_m|=1, m=1,2,\ldots$ 在 H 中稠密。

这一结果的证明展现了 Hahn-Banach 定理的威力[5]，其运用了由和式 $\sum b_m x_m$ 构成的凸集，其中 $|b_m| \leq 1$。

Voronin定理已被推广至狄利克雷L函数及其他类别L函数的联合普遍性，揭示了这是具有欧拉乘积的函数的一种普遍现象。证明的核心在于证明：作为适当的Bergman/Hardy型空间H中的元素，系统 $\{\log(1-p^{-s})\}$（其中p 遍历素数）满足上述定理的两个条件。由此便可以逼近函数$f(s)$ 的对数（这有意义，因为K 是单连通的）。

3 迈向RH的一个半世纪理论构建

自黎曼1859年回忆录《关于小于给定大小的素数个数》问世以来，他提出的关于ζ函数零点的假设，激发了数学领域一些最深刻的发展。无论是明确地追求黎曼猜想（RH），还是将其作为激励性的理想，这一追求都催生了完整的理论体系，并重塑了多个数学领域。本节将概述这一持续探索过程中发展起来的主要数学框架与思想。

3.1 调和分析与泛函分析

3.1.1 希尔伯特空间与谱理论：

上文讨论的 Voronin定理 的证明展现了希尔伯特空间方法的强大力量。希尔伯特将 RH 列为他的第八问题（1900年），这恰逢谱理论的发展时期。希尔伯特–波利亚猜想（20世纪10年代）提出，存在一个自伴算子 H，使得 $\zeta(1/2+it) = 0$ 的非平凡解就是 H 的特征值。由于自伴算子的特征值均为实数，这将立即推出 RH。

3.1.2 散射理论与谱解释：

法捷耶夫和帕夫洛夫提出的散射方法，将 $\zeta(s)$ 的零点解释为某个量子力学系统的共振（散射矩阵的极点）。贝里–基廷猜想 [3] 提出，这与经典混沌哈密顿系统有关，而对其进行量子化或许能得到所需的算子。具体方案包括 $H = \frac{1}{2}(xp + px)$（其中 x 表示位置，p 表示动量），并施加适当的边界条件，但严格的构造仍难以实现。零点的统计性质与量子混沌系统的统计性质相吻合，进一步印证了它们与量子混沌的联系。

3.2 代数几何与算术几何

正如每位数学家都知道的那样，面对难题时，一个由来已久的策略是扩大问题的范围：将问题一般化，然后考察一些特殊情形，以便更清晰地辨明其本质特征。在这一背景下，安德烈·韦伊通过解决有限特征整体域上该假设的类似命题，取得了决定性的突破。

3.2.1 韦伊对函数域的证明：

韦伊在20世纪40年代证明有限域上的曲线的 RH 时，使用了曲线与自身的乘积$C \times C$上的交叉理论。对于 $\mathbb{F}_q$ 上的一条光滑射影曲线C，ζ函数

$$Z_C(t) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n}{n} t^n\right)$$

其中，$N_n = |C(\mathbb{F}_{q^n})|$，满足函数方程，且具有如下形式：$Z_C(t) = P(t)/((1-t(1-qt))$ 其中，$P(t)$ 是一个多项式，其根的绝对值为$q^{-1/2}$。这就是 RH 的对应形式。韦伊的证明运用了除子上的交叉配对和 Hodge指标定理，由此确立了研究 RH 类型问题的一种几何方法。Mattuck-Tate 和 Grothendieck 对韦伊证明所做的逐步简化，是数学理解如何随着更强有力的理论框架的发展而演进的典型范例。韦伊最初的成就依靠高超的技术技巧，克服了关键理论工具的缺失。后来的简化则表明，通用结果——曲面上的黎曼–罗赫定理[6]和系统的交叉理论——能够如何将专门构造转化为标准技术的应用。尽管曲面上的经典黎曼–罗赫定理源自 Castelnuovo 在19世纪90年代的工作，但促成 Mattuck-Tate 简化的层论版本由 Serre 发展而来；适用于这一框架的交叉理论，则是多方合作的成果，其中包括 André Weil 奠基性的1946年工作、Claude Chevalley 的局部理论、Serre 于1958年提出的代数表述，以及此后的发展。这些进展借助 Tor函子和层上同调，建立了运用交叉重数的现代框架。

3.2.2 Grothendieck的概形与étale上同调：

Grothendieck通过引入概形和étale上同调，彻底革新了代数几何[1]，；这在一定程度上是受到在任意维数上证明Weil猜想这一目标的推动。代数簇X 在 $\mathbb{F}_q$ 上的étale上同调群 $H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell)$ 承载着Frobenius态射的作用，而ζ函数可表示为

$$Z_X(t) = \prod_{i=0}^{2\dim X} P_i(t)^{(-1)^{i+1}}$$

其中 $P_i(t) = \det(1 - tF|H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell))$。Deligne于1974年对Weil猜想的证明表明，Frobenius在H^i 上的特征值的绝对值为$q^{i/2}$，从而确立了有限域上代数簇的RH。

在研究 $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ 的étale位点时，最引人入胜之处是 David Mumford 和 Barry Mazur 提出的一个惊人类比：算术几何中素理想的作用，类似于三维球面中的纽结。在这一视角下，每个素数都可视为一个纽结的对应物，而素数在赋有étale拓扑的 $\text{Spec}(\mathbb{Z})$中的错综交织，则映照出纽结彼此交错的情形[3]。这一构想为数论打开了新的拓扑想象空间，提示我们，理解素数的几何或许应借助更接近低维拓扑、而非经典分析的概念。这一类比的核心，是 Grothendieck 将伽罗瓦理论从域推广到一般概形的深远拓展，而这一拓展是通过引入étale基本群实现的。它为我们提供了自然的语言，以覆盖空间的术语诠释素数的算术，从而构建了一个概念框架，使 Mazur 和 Mumford 的类比得以形成和发展 [77]。我们将在 §3.5.2 中简要回到这一点。

3.2.3 动机

Grothendieck关于动机的构想，旨在建立一种普适的上同调理论，解释各种上同调理论（德拉姆、étale、晶体等）中的共同模式。在这一框架下，ζ函数和L函数都与动机关联起来，而它们的解析性质（包括可能的黎曼猜想）将由动机的几何性质推导出来。动机形式体系表明，经典黎曼猜想应当有一种上同调解释：将 $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ 视为一条算术曲线，并寻找适当的上同调理论。尽管混合动机的完整理论仍属猜想，但 Artin动机和模形式的动机等特殊情形已经得到广泛发展。

3.3 自守形式与表示论

在安德烈·韦伊的研究中，黎曼猜想很自然地被置于整体域这一更广阔的框架中重新表述。他证明了有限特征整体域中与该猜想相对应的结论；他的著作《基础数论》（施普林格，1967年）展现了从这一统一视角研究数论的强大力量。一个基本见解是，尽管整体域本身是可数且离散的，但每个整体域都有一个自然的伴随对象：一个局部紧、非离散的环，其中整体域是离散的余紧子群。这个伴随对象就是阿代尔环，最初是在类域论的背景下引入的。阿代尔环具有丰富的调和分析结构，而 Weil 在这一框架下对显式公式的重新表述，是利用这种结构作为解析数论工具的重要一步。韦伊的著作《基础数论》是第一部系统阐述阿代尔和伊代尔在数论中应用的著作。它不仅统一了类域论，也为自守形式和表示论的后续发展奠定了基础，接下来我们将转向这些内容。

3.3.1 朗兰兹纲领：

这是将类域论推广到非阿贝尔情形的宏大猜想网络，由朗兰兹于20世纪60年代提出，预言伽罗瓦表示与自守表示之间存在深刻联系。对于L函数，它预言每个动机L函数（源自代数几何）都等于一个自守L函数（源自阿代尔群上的调和分析）。已证明的函数方程实际上是自守理论的一项关键成就，它确立了自守L函数具有恰当的解析结构，因而能够提出广义黎曼猜想。由于预期自守L函数满足黎曼猜想，这将意味着所有动机L函数都满足黎曼猜想。该纲领取得了惊人的成功（怀尔斯证明费马大定理时用到了谷山–志村猜想，如今它已成为定理），但一般情形下的猜想仍未解决。

3.3.2 模形式与L函数：

模形式理论提供了具有解析延拓和函数方程的L函数的具体例子。对于权为k 的尖点形式$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$ 在 $\Gamma_0(N)$上的情形，其关联的L函数

$$L(s,f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

满足一个将s 与$k\ -s$联系起来的函数方程。拉马努金–彼得松猜想（由Deligne证明）对 $|a_p| \le 2\,p^{(k-1)/2}$给出了界，这相当于欧拉因子层面上的RH。这些例子阐明了一般L函数的预期形式及其与几何对象的联系。

3.3.3 塞尔伯格迹公式与ζ函数：

塞尔伯格迹公式 [59,98] 将作用于双曲空间上的离散群 Γ的谱数据（拉普拉斯算子的特征值）与几何数据（闭测地线的长度）联系起来。对于 $\Gamma = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$，可由此得到塞尔伯格ζ函数

$$Z_\Gamma(s) = \prod_{p \text{ primitive}} \prod_{k=0}^{\infty} (1 - e^{-(s+k)l(p)})$$

其中乘积遍历长度为p $l(p)$的本原闭测地线。该函数在拉普拉斯算子的特征值处有零点，从而提供了完整的谱解释。它与黎曼ζ函数的类比十分显著：二者都有欧拉乘积和函数方程，其零点都编码着重要信息（特征值与素数分布）。对于有限面积黎曼曲面，塞尔伯格迹公式会出现额外项，使其看起来例如在

有理数域$X = H/PSL(2,\mathbb{Z})$ 的情形下（其中H 是带庞加莱度量的上半平面），与显式公式更加相似，因为此时抛物项明确涉及求和

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n}g(2\log n)$$

（对于测试函数g），用于与显式公式中的 $\Lambda(n)$ 项进行比较

$$-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{\frac{1}{2}}}g(\log n)$$

不过，这里有一个显著差异：正如 [59] §12 中所讨论的，这些项的符号是正号，而不是负号。 [3] 将关于负号的讨论扩展到了物理学中哈密顿系统的半经典极限情形。

3.4 随机矩阵理论与量子混沌

3.4.1 Montgomery 的配对关联：

1973年，Hugh Montgomery [79,80]猜想了黎曼ζ函数在临界线上的非平凡零点的一种引人注目的统计性质。令 γ 表示虚部为 $\rho = \frac{1}{2} + i\gamma$、且满足 $0 < \gamma < T$ 的零点的纵坐标，他研究了零点重标度间距的二点关联函数。具体而言，他猜想，对于 $0 < a < b$，且$N(T) = \sum_{0<\gamma\le T} 1$,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{N(T)}\#\left\{(\gamma,\gamma') : 0 < \gamma,\gamma' < T,\ \frac{2\pi a}{\log T} \le |\gamma-\gamma'| \le \frac{2\pi b}{\log T}\right\} = \int_a^b \left(1-\left(\frac{\sin\pi u}{\pi u}\right)^2\right) du,$$

这一猜想的密度反映了零点之间的排斥，并表明它们并非随机分布，而是呈现出类似于大型随机厄米矩阵特征值的规律性。在一则广为流传的轶事中，Montgomery在访问高等研究院期间提到了他的公式；物理学家Freeman Dyson一看到它，便立即认出这正是随机矩阵理论中高斯酉系综（GUE）特征值的对关联函数。Odlyzko以极高的精度对此进行了数值验证。这一联系表明，这些零点的行为类似于随机厄米矩阵的特征值，从而指向一个潜在的混沌量子系统。这次偶然的相遇为数论与量子统计力学之间深刻而富有成果的联系奠定了基础。

3.4.2 Odlyzko统计：

Andrew Odlyzko在1980年代至1990年代的计算彻底改变了我们对ζ零点统计性质的理解。他在极高的高度（大约在第10^{20}个零点附近）计算了数百万个零点，发现：

- 最近邻间距以极高的精度遵循GUE分布
- 高阶关联函数也与随机矩阵预测相符
- 局部统计具有普适性，但整体统计呈现出数论涨落

他的数据为GUE假设提供了有力证据，并启发了此后大量将数论与随机矩阵理论联系起来的工作。这种吻合延伸到诸多精细细节，例如区间内零点个数的方差，以及 $\zeta(1/2+it)$的辐角分布。

要比较黎曼ζ零点的统计性质与高斯酉系综（GUE）随机矩阵的特征值，必须先处理二者密度之间一个根本的不相容之处

。GUE矩阵的特征值沿实轴具有恒定的平均间距（经过适当归一化后）。相比之下，黎曼ζ函数的零点的虚部密度呈对数增长：虚部为 $0 < \gamma < T$ 的零点数量约为$\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}$，因此在高度$T$ 附近的局部平均间距约为$\frac{2\pi}{\log(T/2\pi)}$。

为了进行有意义的比较，必须对零点进行局部重标度。具体而言，研究高度T附近的零点时，人们会考察重标度后的间距

$$\tilde{\gamma}_n = \frac{\log(T/2\pi)}{2\pi}(\gamma_{n+1} - \gamma_n)$$

其平均值为 1。随后，人们将这些重标度间距与阶数为$N \sim \log\frac{T}{2\pi}$的 GUE 矩阵的特征值间距进行比较。经过这种依赖于高度的重标度后，人们发现，在局部统计方面，例如最近邻间距分布和n点关联函数，两者有着惊人的一致性。然而，这种重标度过程也凸显出，ζ零点与随机矩阵特征值之间的任何对应关系都必然是局部的，不可能来自一个简单而固定的谱算子。

3.4.3 量子混沌：

量子混沌领域研究经典混沌系统的量子力学。Berry–Tabor猜想指出，具有可积经典极限的量子系统，其特征值服从泊松统计；而具有混沌经典极限的系统，其特征值则遵循随机矩阵统计（对于时间反演不变系统，为 GUE）。ζ零点呈现出 GUE 统计，这暗示它们源于对某个混沌经典系统的量子化 [3]。具体设想包括在某些区域中的台球系统，或更抽象的动力系统。

3.4.4 Katz–Sarnak理论

在Montgomery的发现以及Odlyzko对黎曼ζ零点与随机矩阵统计之间联系的计算确认基础上，Nicholas Katz与Peter Sarnak将这一对应关系推广到整个L函数族，并建立了理解其统计行为的系统理论框架 [64,65]。他们的开创性洞见在于，不同的L函数族展现出由某一经典矩阵群——酉群$U(N)$、正交群$O(N)$或辛群$Sp(2N)$——所支配的普适统计性质，而具体的对称类型则由该族自身的算术与几何结构决定 [42,64]。Katz–Sarnak密度猜想预言，当一族中L函数的解析导子趋于无穷时，其在临界点$s = 1/2$ 附近的归一化低位零点的分布，将收敛于相应随机矩阵系综中聚集在1附近的特征值的标度极限 [64–66]。最为引人注目的是，他们通过将零点与弗罗贝尼乌斯特征值联系起来，并应用Deligne等分布定理，对有限域上的L函数族严格证明了其猜想 [40,41,51,64],，从而首次在数论背景中完整验证了随机矩阵普适性。这项工作不仅将此前彼此分立的现象统一在单一概念框架之下，也为研究解析数论中的经典问题——从素数分布到椭圆曲线的算术——提供了强有力的新工具。

3.4.5 矩与酉矩阵（Keating–Snaith）：

ζ函数矩的渐近行为被猜想（见 [33]）具有如下形式：

$$\frac{1}{T}\int_0^T |\zeta(1/2+it)|^{2k}dt \sim c_k(\log T)^{k^2}$$

对于某个常数 c_k。哈代和利特尔伍德在 1918年证明了这一点，当$k = 1$ 时；Ingham 在 1926 [62] 证明了当$k = 2$时，$c_1 = 1$，且$c_2 = \left(2\pi^2\right)^{-1}$。这些是$k$的唯一取值

在这些取值下，这个猜想得到了证明；而很长一段时间里，对于其他任何 k 值，甚至都没有人猜测 c_k可能是多少。Conrey 和 Ghosh [35]于 1992年猜测了 $k = 3$时的答案，Conrey 和 Gonek [36] 则于 1998年猜测了 $k = 4$ 时的答案。这两个猜想的形式都是 $c_k = a_k g_k/(k^2!)$；如下文所述，a_k 是一个广为人知的算术因子，但常数 $g_3 = 42$ 和 $g_4 = 24024$ 仍然笼罩在神秘之中。1998年的维也纳会议讨论黎曼猜想时，Keating 和 Snaith [66, 67] 宣布，他们取得了突破：利用随机矩阵理论猜测 g_k的值。Keating 和 Snaith 的新见解是，他们认识到常数 $f_k = g_k/(k^2!)$ 自然地出现在随机矩阵理论中。于是，一般猜想的形式为 $c_k = a_k f_k$，其中

- f_k 来自随机矩阵理论（ $|\det(I - U)|^2$ 对于U 随机酉矩阵的第k阶矩）

- a_k 是一个算术因子，通过欧拉乘积体现算术复杂性，

$$a_k = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{k^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(m+k)}{m!\Gamma(k)}\right)^2 p^{-m}$$

随机矩阵部分f_k 可以表示为：

$$f_k = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{j!}{(j+k)!} \implies g_k = (k^2)!\, f_k$$

这种分离揭示了一个优美的原理：“普适”行为来自随机矩阵理论，而ζ函数的算术特性则由a_k单独编码。这开创了一种新范式，即利用随机矩阵模型预测数论结果；后来，这种方法又扩展到了其他L函数及其导数 [38, 50, 104]。

3.5 非交换几何

3.5.1 Connes 的迹公式

Connes 在非交换几何[8] 的背景下发展出一种迹公式，它恢复了关于 $\zeta(s)$ 的零点以及 L-函数 [17, 18] 零点的 Weil显式公式。其关键思想是研究阿代尔类的非交换空间 $\mathbb{A}/\mathbb{Q}^*$，其中 $\mathbb{A}$ 是阿代尔环。在这个空间上，idele类群 $\mathrm{GL}(\mathbb{A})/\mathbb{Q}^* \simeq \hat{\mathbb{Z}}^* \times \mathbb{R}_+^*$有一个自然作用。该迹公式将以下两者联系起来：

- 谱侧：来自带有格罗森特征的 L-函数零点的贡献。
- 几何侧：来自 $\mathbb{Q}$的赋值的贡献。

起初，针对一般整体域的迹公式被表述为一个猜想，它等价于所有带有格罗森特征的 L-函数的类 RH 类比成立；但迹公式的半局部形式早已在 [17], 得到证明，并且它可以直接推出允许存在非临界零点 [78]的全局版本（另见 [18]）。这提供了一种谱实现，其中零点表现为吸收谱，从而解释了与塞尔伯格迹公式相比，显式公式中负号的由来。

这些方法旨在利用算子代数和非交换微分几何中的工具，将 RH 几何化。像数域 $K^\times$ 的阿代尔类空间 $\mathbb{A}_K/K$ 这样的遍历商空间，通过函数代数与$K^\times$作用的交叉积来编码。上述谱实现涉及 Bruhat-Schwartz代数的交叉积的霍赫希尔德同调，而 $\mathbb{A}_K/K^\times$ 的拓扑则通过C^*-代数交叉积来编码。最近的一项结果 [13] 表明，这种拓扑编码是忠实的：非同构的数域对应非同构的C^*-代数。

[8] Th其起源来自一个会发生相变、并具有黎曼 nn
ζ函 数作为配分函数的量子统计力学系统 [8]

3.5.2 纽结、素数与类域论

对于整体域$K = \mathbb{Q}$，阿代尔类空间的投影

$$\pi : Y_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^* \backslash \mathbb{A} \to \mathbb{Q}^* \backslash \mathbb{A} / \hat{\mathbb{Z}}^* = X_{\mathbb{Q}}$$

在扇区 $X_{\mathbb{Q}}$ 上，与 ζ 对应的内容展示了类域论中与上述 Mazur-Mumford 纽结与素数类比相对应的结果。每个素数p 对应一个周期轨道$C_p \subset X_{\mathbb{Q}}$，其长度为 $\log p$。于是，令 $\mathrm{Frob}_p \in \pi_1^{et}(\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p))$ 为 étale 基本群的典范生成元，并令 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 为在 p 处局部化的环 $\mathbb{Z}$。则有 [26]，

(i) 周期轨道C_p 的逆像 $\pi^{-1}(C_p) \subset Y_{\mathbb{Q}}$ 典范地同构于映射环面，其对应的映射是阿贝尔化 étale 基本群$\pi_1^{et}(\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}_{(p)})^{ab}$中 $\mathrm{Frob}_p\}$ 的 r 次幂乘法。

(ii) (i) 中的典范同构对于 idele类群的作用是等变的 .

(iii) $\pi^{-1}(C_p) \subset Y_{\mathbb{Q}}$ 中周期C_p 的单值化等于自然映射

$$r^* : \pi_1^{et}\left(\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_p\right) \to \pi_1^{et}(\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}_{(p)})^{ab}$$

并确定素数p 与所有其他素数之间的链接数。

这一结果表明，阿代尔类空间在类域论中扮演着与 Grothendieck 理论所涉及的阿贝尔 étale 覆盖相对应的角色。相当引人注目的是，空间$X_{\mathbb{Q}}$ 可通过拓扑斯论实现为缩放位点，并自然配备一个特征为一的结构层（参见 [20]及其中的参考文献）。

3.6 p 进与动机 L 函数

3.6.1 p 进 L 函数与岩泽理论：

Kubota 和 Leopoldt 构造了黎曼ζ函数的p进类似物，它们是p进解析函数，可插值经典ζ函数的特殊值。对于每个素数p，p进ζ函数 $\zeta_p(s)$ 是在 $\mathbb{Z}_p$ 上的p进解析函数，满足

$$\zeta_p(1-k) = (1-p^{k-1})\zeta(1-k)$$

对于正整数k。岩泽理论研究这些函数在圆分扩张塔中的性质，并将它们与理想类群和单位联系起来。岩泽理论主猜想（由 Mazur-Wiles 证明）将p进L函数与伽罗瓦表示的塞尔默群联系起来。虽然不存在直接的p进版 RH，p进L函数的增长和零点却与深刻的算术现象密切相关。

3.6.2 动机 L 函数与布洛赫–加藤猜想：

这些影响深远的猜想将L函数的特殊值与算术不变量联系起来。对于一个动机M，其L函数为$L(M, s)$，这些猜想预言：

- 整数点处$L(M, s)$ 的消失阶等于某些K群或塞尔默群的秩

- 首项系数与调节子、周期和玉河数有关

特殊情形包括伯奇–斯温纳顿-戴尔猜想（针对椭圆曲线）和贝林森猜想。这些猜想将黎曼猜想置于更广阔的算术背景中，在这一背景下，L函数的零点编码着几何与算术信息。这些猜想表明，黎曼猜想是分析、代数与几何之间庞大关系网络的一部分。

3.7 计算与实验数学

3.7.1 高精度计算

黎曼猜想的数值验证有着悠久的历史:

- 黎曼（1859年）： 计算了最初几个零点
- 格拉姆（1903年）： 15 个零点
- 巴克伦德（1914年）： 79 个零点
- 哈钦森（1925年）： 138 个零点
- 蒂奇马什（1935—1936）： 使用黎曼-西格尔公式计算了1,041个零点
- 图灵（1950）： 使用曼彻斯特马克一号验证了1,104个零点
- 莱默（1956）： 使用电子计算机计算了25,000个零点
- 罗瑟、约、舍恩菲尔德（1968）： 3,500,000个零点
- 范德吕讷、特里勒、温特（1986）： 1,500,000,000个零点
- 古尔东和Demichel（2004）： 前1013个零点
- Platt（2021年）： 验证范围达到高度 3×10^{12}, [87]。

现代计算采用带有精细误差界的黎曼-西格尔公式，以及图灵方法进行严格验证。1988年发表奥德利兹科-舍恩哈格算法，是方法上的一项重大突破。这些大规模计算为黎曼猜想提供了压倒性的证据，同时也用于检验是否存在异常现象 [44, 63]。

4 等价表述

在前文各节中，我们回顾了为探索黎曼猜想而建立的各种理论；与此同时，还有一条并行的传统，即发现黎曼猜想本身的等价表述。这些重新表述从初等数论到泛函分析不一而足，揭示了该假设与数学各领域之间的深刻联系，有时还会带来新的攻关角度。这类等价表述数量众多，以至于专门有一个网站对它们进行汇总。所有这些表述的主要意义在于，其中的初等表述，例如罗宾斯判据或拉加里亚斯判据，表明黎曼猜想在逻辑层面具有一种非常特殊的地位，下文将对此作详细讨论。

4.1 外尔正性判据

黎曼猜想等价于由零点构造的某些分布具有正性，这与 Weil 通过显式公式提出的方法相联系。在解析表述中，黎曼猜想之所以难以求解，通常主要归因于欧拉乘积中包含无穷多个项。

$$\zeta(s) = \prod_{p} (1 - p^{-s})^{-1} \tag{8}$$

然而，与这种广为流传的看法相反，存在一个性质$P(n)$，它只涉及小于n的素数的欧拉因子，而且该性质对所有n 都成立，当且仅当黎曼猜想成立。这一结论源自魏尔正性判据，该判据涉及二次型QW，它利用黎曼—Weil 显式公式对支撑集位于紧对称区间内的测试函数进行定义。稍作记号调整后，梅林变换便成为群 $\mathbb{R}_+^*$ 的傅里叶变换，其庞特里亚金对偶被识别为加法群 $\mathbb{R}$，而显式公式则呈现为

如下 形式与（4）、（5）类似，但记号调整为适用于带对合的卷积代数的群 $\mathbb{R}_+^*$，

$$\widehat{f}\left(\frac{i}{2}\right) - \sum_{\frac{1}{2}+is\in Z} \widehat{f}(s) + \widehat{f}\left(-\frac{i}{2}\right) = \sum_v W_v(f)$$

$$\widehat{f}(s) := \int_0^\infty f(x) x^{-is} d^*x, \quad d^*x = \frac{dx}{x}$$

其中局部贡献现在由下式给出

$$W_p(f) := (\log p) \sum_{m=1}^{\infty} p^{-m/2} \left(f\left(p^m\right) + f\left(p^{-m}\right)\right) \tag{9}$$

对于阿基米德位

$$\begin{aligned} W_{\mathbb{R}}(f) :=& (\log 4\pi + \gamma) f(1) \\ &+ \int_1^\infty \left(f(x) + f\left(x^{-1}\right) - 2x^{-1/2} f(1)\right) \frac{x^{1/2}}{x - x^{-1}} d^*x \end{aligned} \tag{10}$$

安德烈·韦伊的关键结果是以下等价关系

$$RH \Longleftrightarrow \sum_v W_v\left(g * g^*\right) \le 0,\ \forall g,\ \widehat{g}\left(\pm\frac{i}{2}\right) = 0$$

其中$g \in C_c^\infty\left(\mathbb{R}_+^*\right)$光滑且具有紧支集，并且$g^*(x) := \bar{g}\left(x^{-1}\right)$。这一等价关系的关键在于，右侧的和作用于一个具有紧支集的测试函数g时，只涉及有限多个素数（因为W_p在支撑集位于$\left(p^{-1}、p\right)$中的函数上为零）。因此，尽管黎曼猜想关注的是素数的渐近分布，这个等价表述一次只涉及有限多个素数。在 [111]H. Yoshida 证明了以下结果（该论文中的定理1）

> 对于任意支撑集位于区间$(1/2,2)$内、光滑且为正定函数的f，若其傅里叶变换在$\pm i2$处为零，则有：$W_\infty(f) \ge 0$其中$W_\infty := -W_{\mathbb{R}}$。

该证明通过数值分析考察韦伊泛函W_∞在区间$\left(\frac{1}{2}, 2\right)$上的正性，因此并未给出任何概念上的理由来说明这种正性为何成立，而这种理由或许能在涉及素数时继续适用。

4.2 Beurling–Nyman 判据：

这一卓越的改写（贝林 1955，尼曼 1950）指出，RH 等价于$L^2(0,1)$中以下线性组合的密度 $\sum_1^n c_\nu \rho_{\theta_\nu}, 0 < \theta_\nu \le 1, \sum_1^n c_\nu \theta_\nu = 0$其中

$$\rho_\theta(x) = \left\{\frac{\theta}{x}\right\} \quad \text{for } x \in (0,1)$$

而 $\{y\}$ 表示y的小数部分。这将 RH 转化为泛函分析中的完备性问题。巴埃斯-杜阿尔特及其他人后来的研究给出了定量版本，表明这一判据中的逼近速率与临界线外的零点分布有关。

4.3 李准则

李宪金（1997年）证明 [74]黎曼猜想等价于以下数均为正

$$\lambda_n = \sum_\rho \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)^n\right)$$

对所有$n \ge 1$，其中求和遍及 ρ 的所有非平凡零点 $\zeta(s)$。

4.4 初等数论表述

1913年，格伦瓦尔在其论文《数论中的一些渐近表达式》中证明了

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\sigma(n)}{n\log\log n}=e^{\gamma},\ \gamma=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right)$$

其中 σ（n）是除数和函数，γ 是欧拉-马歇罗尼常数。在 Gronwall 奠定的基础上，斯里瓦纳瑟·拉马努金在关于高合成数的研究中，揭示了函数 σ（n）与黎曼猜想之间的重要联系。拉马努金证明，如果黎曼猜想成立，那么不等式 σ（n）$/n$ $<e^{\gamma}\log\log n$ 对所有充分大的正整数n都成立。这首次直接建立了黎曼猜想的正确性与算术函数界之间的联系。

4.4.1 Robin 判据（1984年）

居伊·罗宾证明，RH 等价于不等式

$$\sigma(n)<e^{\gamma}n\log\log n$$

对所有n >5040均成立，其中σ（n）如上所述，是除数和函数，γ是欧拉-马歇罗尼常数。这一非凡结果将复分析中的 RH 转化为了纯粹的算术表述。

4.4.2 Lagarias 判据（2002）

杰弗里·拉加里亚斯将 Robin 判据改进为如下形式

$$RH\iff\sigma(n)<H_n+e^{H_n}\log H_n,\ \forall n\geq 1$$

其中 $H_n=1+1/2+\cdots+1/n$ 是第 n 个调和数。这一表述具有对所有正整数都成立的美学优势。

将黎曼猜想重新表述为关于可判定算术性质的全称命题，恰好将其置于希尔伯特希望在其为真时视为“可证”的那一类陈述之中，而哥德尔不完备定理则指出这类陈述可能“为真但不可证”！柴廷的算法信息论结果表明，随着陈述复杂度的增长，此类不可证性会愈发普遍。这一联系揭示了形式数学系统的根本局限，并提供了一个鲜明例证：即便是数论中的核心问题，也会与关于数学真理与证明之本质的最深刻问题相交汇。柴廷的工作表明，从信息论的视角看，数学真理与可证性运作于根本不同的领域。大多数数学真理具有很高的描述复杂度，其所含信息多于通过演绎过程从有限公理系统中所能提取的信息。由此形成一片广阔的真陈述图景，它们永远超出形式证明的范围；随着复杂度增加，可证陈述仅占数学实在的无穷小部分。对拉加里亚斯判据的算法复杂度进行估计，揭示了通过直接算术检验来验证黎曼猜想时所面临的根本计算障碍。主要复杂度来自计算除数和函数所需的整数分解，这使得对一般整数的单个验证实例超出多项式时间计算的范围。调和数的计算与超越函数的求值又带来额外复杂度，从而进一步加重总体计算成本。

这些复杂性限制凸显了拉加里亚斯判据作为验证黎曼猜想的一种方法所兼具的优雅与计算上的棘手性。该判据成功地将一个深刻的分析学命题转化为初等算术问题，但验证所需的计算成本也反映出这一基础数学问题的深刻难度。这一分析表明，计算复杂性理论为了解数学验证方法在实践中的可行性，以及数学真理与计算资源之间的基本关系，提供了不可或缺的见解。

5 致伯恩哈德·黎曼教授的一封信

2025年6月4日，我受邀在瓦雷泽的托普利茨别墅发表演讲，黎曼国际数学学院就坐落于此。为了准备这场演讲，我提前两天前往塞拉斯卡朝圣，那里是黎曼于1866年7月20日逝世的地方。鉴于我演讲的地点，我接受了以下挑战：

> 有什么话可以告诉黎曼，既能让他感到惊讶，又能让他确信他的假设是正确的？

所以，我现在要写一封信给他。我会称他为“大师”。当然，必要条件是，不能使用他不了解或不容易理解的数学概念。事实上，我会把自己局限于他在著作中用过的那些概念。经过一段开场的话后，真正的新内容在信的第二部分。

致伯恩哈德·黎曼教授

您在论文中证明的那个优美公式，也就是那个可以根据ζ函数的零点计算小于x 的素数个数的公式，不幸的是，在教科书中被错误地表述了出来，这显示出人们对公式中间项的深刻误解。您将 $\pi'(x)$ 定义为严格小于x 的素数个数，并在x 为素数时加上 12，然后得出了计数函数

$$f(x) := \sum \frac{1}{n}\pi'\left(x^{\frac{1}{n}}\right),$$

公式的下公式涉及积分对数函数 $\mathrm{Li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\log t}$，

$$f(x) = \mathrm{Li}(x) - \sum_{\alpha}\left(\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + \mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right) + \int_x^{\infty} \frac{1}{t^2-1}\frac{dt}{t\log t} - \log 2 \quad (11)$$

您在论文末尾处理多值函数时非常谨慎，但数学语言已经发展演变；如今，人们只使用具有明确单值含义的函数，而多值函数的用法已不再普遍被接受。

例如，在标准教科书中，包括 Edwards 的经典著作[7]，中间项写作在 x^{ρ} 处取值的积分对数 Li 函数之和，其中ρ是 ζ的非平凡零点。

显然，这是一个毫无意义的求和，因为x 的 ρ 次幂不会因将 ρ 替换为 $\rho + 2\pi i/\log x$中而改变，其中n 是任意整数。因此，$\mathrm{Li}(x^{\rho})$ 在这个等差数列上的恒定性意味着，这个无穷和不可能有任何意义，因为其中包含了无穷多个本质上相同项的重复；这是因为复数x^{ρ} 至少会在半径为$x^{1/2}$的圆上无限聚集。事实上，在你的论文发表多年后，冯·曼戈尔特给出了你的定理的详细证明，而且他在写公式时多少更为谨慎……他没有处理 Li 函数，而是考虑了正确变量z 的良定义单值函数 $\mathrm{Ei}(z) = \mathrm{Li}(\exp(z))$（而不是 $\exp(z)$）。接着，他将项 $\sum \mathrm{Li}(x^{\rho})$ 替换为 $\sum \mathrm{Ei}(\rho \log x)$，从而证明了你的公式。

话虽如此，从你的公式中可以清楚看出，你已经知道了如今所谓的 Guinand-Weil 显式公式。而这个公式中的新内容——不过这不会让你感到意外——是：人们不再像你那样使用函数 $1/\log u$，而是在素数幂上应用任意测试函数 $\phi(u)$，并写出一个等式，其中涉及如今所谓的梅林变换[9]：将函数 $\phi(u)$ 作用于ζ函数的非平凡零点后求值。这样得到的等式并不是真正意义上对你公式的推广，因为你的公式比这些经典的 Guinand-Weil 显式公式更深一层：你的测试函数 $1/\log u$ 在 $u = 1$处是奇异的。这些显式公式中有一点很引人注目：如果测试函数 $\phi(u)$在有限区间 $[1, x]$, 之外为零，那么计算中只涉及有限多个素数，即小于x的素数。当然，你的公式也有这种情况；它所涉及的函数在区间 $[1, x]$ 内等于 $\phi(u) = 1/\log u$，在区间外为零，所以这不会让你感到意外。

但是，大师，请允许我告诉您一个事实，我认为它非常支持您的假设。事实如下：我将设计一种方法，只使用少数几个素数，就能以惊人的精确度找到您的ζ函数的第一个非平凡零点。那么，使用少数几个素数究竟是什么意思呢？我来设想一个具体情形：假设我不知道大于13的素数是什么。因此，我只知道2、3、5、7、11和13。乍看之下，要想对ζ函数的零点有任何了解，似乎必须涉及所有素数，因为它们全都出现在定义该函数的欧拉乘积中。因此，截断这个欧拉乘积——也就是说，只考虑欧拉乘积中涉及小于13的素数的项——竟然能够为ζ函数的零点提供任何线索，似乎是相当不可思议的。

那么，我就只用您熟悉的概念来描述这个过程。从这些素数中，取 2、3 等一直到 13，构造一个二次型。这个二次型类似于您在证明保角映射定理时应用狄利克雷原理所用的二次型。它是定义在正实变量的函数 $\phi(\mathrm{u})$所构成的无限维空间上的二次型，这些函数在区间 $[1, 13]$之外都为零。二次型的值 $\mathrm{Q}(\phi)$ 是通过将显式公式应用于函数 $\psi(\mathrm{v}) = \int \phi(\mathrm{u})\phi(\mathrm{uv})\mathrm{du}/\mathrm{u}$ 得到的。因此，由于函数 ϕ 在区间 $[1, 13]$, 之外为零，函数 ψ 在区间 $[1/13, 13]$ 之外也为零，所以计算 $\mathrm{Q}(\phi)$ 时不需要使用 2、3、4、5、7、8、9、11、13 以外的任何素数幂。接下来，我知道如何证明存在一个函数 $\eta(\mathrm{u})$，使二次型 $\mathrm{Q}(\phi)$ 取到最小值，同时满足 $\int \phi(\mathrm{u})^2\mathrm{du}/\mathrm{u} = 1$。这个存在性证明与希尔伯特在 1900年 发表的论文《论狄利克雷原理》中给出的狄利克雷原理证明完全类似。然后，我对函数 $\eta(\mathrm{u})$ 作梅林变换。我也知道如何证明[10] 这个梅林变换的零点都位于临界线[11]上。这是在最小值的唯一性条件[12]成立的前提下证明的。

[9]函数 $\phi(u)$ 的梅林变换定义为 $\mathcal{M}(\phi)(s) = \int_0^\infty u^{s-1}\phi(u)du$ [10]见 §6.1[11]这里将其归一化为虚轴[12]证明使用了 Caratheodory-Fejer 关于托普利茨矩阵的一个定理的推广，该定理于 1911 年得到；需要假设二次型的最小特征值是单重且为偶数

令人惊奇的是，我想向您报告：当人们借助远胜于您那个时代所能获得的现代计算机器，计算 $\eta(u)$ 的梅林变换的零点，比如说它的前 50 个零点时，会发现它们与ζ函数的非平凡零点惊人地吻合。例如，对于第一个零点，可以发现有 54 位小数完全一致，诸如此类。吻合的小数位数缓慢减少；到了第 50 个零点时，只有少数几位小数一致。

我计算了以下差值（上界），即使用小于 13 的素数计算所得值与 ζ函数零点的真实值之间的差值，现列于此：

数值之间的差异（使用素数 ≤ 13）

2.60179×10^{-55}, 4.80071×10^{-52}, 4.43756×10^{-50}, 3.89903×10^{-47}, 7.59453×10^{-46}, 1.13198×10^{-43}, 1.07245×10^{-41}, 1.2694×10^{-40}, 4.40141×10^{-38}, 4.24869×10^{-37}, 5.86724×10^{-36}, 3.24443×10^{-34}, 2.44517×10^{-32}, 9.02026×10^{-32}, 5.13539×10^{-30}, 7.04142×10^{-29}, 6.47754×10^{-28}, 4.96772×10^{-27}, 5.86016×10^{-25}, 3.76751×10^{-24}, 1.03779×10^{-23}, 3.52722×10^{-22}, 3.03977×10^{-21}, 5.66201×10^{-20}, 1.41755×10^{-19}, 2.19821×10^{-18}, 6.31599×10^{-17}, 1.42037×10^{-16}, 4.34328×10^{-16}, 4.47113×10^{-15}, 7.01522×10^{-14}, 3.81989×10^{-13}, 5.99581×10^{-13}, 4.26414×10^{-11}, 1.10653×10^{-10}, 1.95651×10^{-10}, 5.20728×10^{-10}, 2.05031×10^{-9}, 3.42274×10^{-8}, 2.10931×10^{-7}, 2.23714×10^{-7}, 5.95608×10^{-7}, 5.77737×10^{-6}, 0.000141389, 0.000556111, 0.000720794, 0.000314865, 0.0209081, 0.00313565, 0.00212727

这就是说，我们已经牢牢掌握了你的零点，而且完全不必涉及所有素数这一集合的无穷性。此外，我们先验地知道，η（u）的梅林变换的所有零点都位于临界线上。

我们尚不知道的是，当增大上限（此处为 x =13）时，相应的零点集合是否会收敛到ζ函数的零点。目前尚未证明这一点。另一方面，既然我们知道最小特征向量的梅林变换的零点 η_x 都是纯虚数，而且预计 η_x 会收敛到这样一个函数：其梅林变换就是你的函数 Ξ（it），那么你的猜想成立背后的抽象原因似乎已触手可及。这样一来，根据赫尔维茨定理，结论便可得出：该定理指出，若一列全纯函数收敛，且其零点都位于同一条固定直线上，那么极限函数的所有零点也仍位于该直线上。[13]

谨致敬意与钦佩，阿兰·孔涅

[13]在紧子集上一致

6 策略与接下来的小步

我们首先在§6.1中解释这一一般结果，它提供了大量整函数，这些整函数的全部零点都位于实数轴上。接下来的目标是试图证明：当上界x（即上文中的x = 13）趋于无穷时，最小特征向量 η_x 在适当意义下收敛，从而它们关于$\mathbb{R}_+^*$ 与 $\mathbb{R}$之间对偶性的傅里叶变换将在紧子集上一致收敛到黎曼在其论文中作为Ξ函数引入的全纯函数。事实上，我们将追随他的足迹，考察他为傅里叶变换等于 Ξ(t)的函数k所给出的显式公式。我们将在§6.2中把该函数k改写为求和映射 $\mathcal{E}$ 作用于两个厄米函数 h_0,h_4的线性组合h所得的像。于是，问题在于证明最小特征向量 η_x 收敛到函数 $\mathcal{E}$(h)。事实上，首先需要将η_x 重新居中为 $\theta_x(u) = \eta_x(x^{1/2}u)$，其支撑集位于 $[x^{-1/2}, x^{1/2}]$。为实现这一目标，计划是将其分解为若干小步骤。在第二步§6.3中，给定 $\lambda > 1$，引入长椭球波函数，它们给出适配$h_{n,\lambda}$，即将厄米函数h_n适配为支撑集位于区间 $[-\lambda, \lambda] \subset \mathbb{R}$内的函数。函数$h_{n,\lambda}$ 是厄米特算子(14)的一种修正、即(15)中的长椭球波算子PW_λ 的本征函数；该算子是通过向厄米特算子H添加伸缩平方的唯一倍数而得到的，使得该和与支撑集位于区间 $[-\lambda, \lambda] \subset \mathbb{R}$内的函数上的正交投影可交换。由构造可知，$PW_\lambda$ 在区间的边界 $\pm\lambda$ 处具有两个正规奇点，并在 ∞处具有一个非正规奇点。第三步§6.4在于，采用与§6.2中简单情形相同的过程，对最小特征向量 θ_x 的近似作出有根据的猜测。因此，只需将厄米函数h_0,h_4 替换为其局部化函数$h0,_\lambda$、$h4,_\lambda$（对于$\lambda = x^{1/2}$），并将求和映射 $\mathcal{E}$ 作用于这两个积分为零的函数的线性组合。由此得到函数k_λ，它逼近 θ_x 于区间 $[x^{-1/2}, x^{1/2}]$上。在§6.5中证明：当 $\lambda \to \infty$时，傅里叶变换 $\widehat{k_\lambda}$ 收敛到黎曼的 Ξ 函数，且在实数轴宽度为1的邻域这一开条带的闭子条带上是一致的。最后，在§6.6中，我们指出尚缺的最后几步。

6.1 θ_x 的傅里叶变换的所有零点都在实数轴上

这一结果的证明源自一篇与 Walter van Sui- jlekom 合著的论文中的一个定理，论文题为《二次型、实零点与谱作用量的回响》。其精确表述如下：

定理 6.1。 设 $L > 0$, $\mathcal{D}$ 是区间 $[0,L]$ 上的实分布，且 $\tilde{\mathcal{D}}$ 是 $[-L, L]$上的关联偶分布。假设施瓦茨核为 $\tilde{\mathcal{D}}(x-y)$ 的二次型定义了 $L^2([-\frac{L}{2}, L_2])$上的一个有下界的自伴算子，并且其谱的最小值是一个简单的孤立特征值，对应的特征函数 η为偶函数。那么，整函数 $\widehat{\eta}(z)$（$z \in \mathbb{C}$，即 η 的傅里叶变换）的所有零点都位于实数轴上。

该定理的证明基于三角正交基下二次型矩阵的特殊形式、对这种特殊形式的矩阵构造自伴算子，以及上述赫尔维茨定理；当矩阵的阶数趋于无穷时，利用该定理取极限。关于有限截断的傅里叶变换零点的结果有效性 [32] 在数值计算[14] 中起着关键作用，并使人们能够利用黎曼在 [91]分析的狄利克雷核所得到的周期狄拉克算子的秩一扰动之谱，来逼近 $\widehat{\eta}(z)$ 的零点。

6.2 黎曼 Ξ 函数与厄米函数

黎曼采用如下记法

$$\psi(x) := \sum_1^\infty e^{-n^2\pi x}$$

[14]它用于信中所述计算中在$N = 100$ 处进行的三角截断

以及 t 然后写作，令 $\xi(s) := \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$，$\Xi(t) := \xi(s)$，对于$s = \frac{1}{2} + \text{它}$，等式[15]

$$\Xi(t) = 4\int_1^\infty \frac{d\left(x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)\right)}{dx} x^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{1}{2}t\log x\right) dx$$

然后利用泊松公式中的等式 $k(u) = k(u^{-1})$，得到其中

$$k(u) := u^{1/2}\frac{\pi}{2}\sum_1^\infty n^2u^2\left(2\pi n^2u^2 - 3\right)e^{-\pi n^2u^2}$$

其中 $\Xi(t)$ 是函数 $k(u)$ 的傅里叶变换：

$$\Xi(t) = 2\int_1^\infty k(u)\cos\left(t\log u\right)d^*u = \int_0^\infty k(u)u^{it}d^*u,$$

此外，引入记号

$$\mathcal{E}(f)(u) := u^{1/2}\sum_1^\infty f(nu) \tag{12}$$

有

$$k(u) = \mathcal{E}(h)(u),\ h(u) = \frac{\pi}{2}u^2\left(2\pi u^2 - 3\right)e^{-\pi u^2}. \tag{13}$$

函数 $h(u)$ 可作如下刻画。考虑厄米特算子（谐振子）

$$\mathbf{H}f(u) := -f''(u) + 4\pi^2u^2f(u) \tag{14}$$

并令 h_n 为特征值 $2\pi(1+2n)$对应的归一化特征函数。当n 为偶数时，这些函数是偶函数；当n 是 4 的倍数时，它们在傅里叶变换下保持不变。

事实 6.2。 黎曼的 Ξ 函数是 $k = \mathcal{E}(h)$ 的傅里叶变换，其中 h 除了相差一个乘法常数外，是唯一一个积分为零的线性组合 h_0, h_4[8]。

6.3 长椭球波函数登场

下一步需要引入一类函数。Slepian、波拉克和 Landau 于 20世纪60年代在贝尔实验室发现了这类函数在信号传输中的关键作用。他们的研究探讨了一个由 Claude Shannon 在其关于熵的奠基性研究[16]中首次提出的基本问题：带限函数在多大程度上也能是时限函数？ Shannon 曾估算，在时间窗口 T 和频带W 中，能够容纳的正交信号数量N 满足 $N \simeq 2TW$。在此基础上，Slepian 及其合作者致力于最大化给定带宽内有限时间内可传输的信息量——这是实现高效通信系统的核心问题。

为描述他们的结果，将时间区间与频率区间固定为 $[-\lambda, \lambda] \subset \mathbb{R}$，并令$P_\lambda$ 为希尔伯特空间$L^2(\mathbb{R})$（平方可积函数）中由乘以区间 $[-\lambda, \lambda]$的特征函数所定义的投影。令 $\widehat{P_\lambda} := \mathbb{F}_{e_\mathbb{R}} P_\lambda \mathbb{F}^{-1}_{e_\mathbb{R}}$ 为其在傅里叶变换下的共轭，[17]

[15]该函数的传统记号是 $\Xi(t)$，而非黎曼的 $\xi(t)$。[16]C. E. Shannon，《存在噪声时的通信》，IRE会刊**37**（1949年），10–21。[17]归一化傅里叶变换定义为

$$\mathbb{F}_{e_\mathbb{R}}(f)(y) := \int_\mathbb{R} f(x)e^{2\pi ixy}\,dx.$$

注意，在偶函数上有 $\mathbb{F}^{-1}_{e_\mathbb{R}} = \mathbb{F}_{e_\mathbb{R}}$。

在他们的开创性论文中， [101], Slepian和波拉克证明，压缩傅里叶变换$P_\lambda \mathbb{F}_{e_\mathbb{R}} P_\lambda$ 与二阶微分算子对易

$$\mathrm{PW}_\lambda := -\partial_x \left((\lambda^2 - x^2)\partial_x \right) + (2\pi\lambda x)^2. \tag{15}$$

由此可知，该算子在$L^2(\mathbb{R})^{\mathrm{ev}}$ （偶函数）上与

$$P_\lambda \widehat{P_\lambda} P_\lambda = P_\lambda \mathbb{F}_{e_\mathbb{R}} P_\lambda \mathbb{F}_{e_\mathbb{R}} P_\lambda = \left(P_\lambda \mathbb{F}_{e_\mathbb{R}} P_\lambda\right)^2,$$

这使得人们可以对角度算子[9] α_λ 进行对角化，该算子位于由恒等式定义的投影P_λ 和 $\widehat{\ } P_\lambda$ 之间

$$P_\lambda \cos^2(\alpha_\lambda) = P_\lambda \widehat{P_\lambda} P_\lambda.$$

事实 *6.3*。算子 $P_\lambda \widehat{\ }_\lambda P\, P_\lambda$ 在 $L^2([-\lambda,\lambda])^{\mathrm{ev}}$ 中的特征值是单重的，并构成一个递减序列$\nu_n(\lambda)$，$n \geq 0$, $\nu_n(\lambda) \to 0$，对于 $n \to \infty$，满足 $1 > \nu_0(\lambda) > \nu_1(\lambda > \ldots > 0$。相应的特征函数是偶数阶的长椭球波函数 $h_{2n,\lambda}$，其中 $h_{m,\lambda}$ 是 $L^2([-\lambda,\lambda])$中长椭球波算子 *(15)* 的第 $m+1$个特征函数。

算子 α_λ 有有限个较小的非零特征值。遵循文献中的标准记法，长椭球波函数记作

$$h_{n,\lambda}(x) := \mathrm{PS}_{n,0}\left(2\pi\lambda^2, \frac{x}{\lambda}\right)$$

其中，下标n 表示特征函数，第二个下标 0 表示角阶——这是该算子源于在扁长椭球上分离拉普拉斯算子变量时留下的痕迹——第一个参数 $2\pi\lambda^2$ 则是无量纲带宽参数。每个$h_{n,\lambda}$ 的支撑集为 $[-\lambda,\lambda]$，并在其外延拓为零。函数$h_{n,\lambda}$ 在n 为偶数时是偶函数。函数$h_{2m,\lambda}$的傅里叶变换限制在 $[-\lambda,\lambda]$上时，满足

$$\mathbb{F}_{e_\mathbb{R}}(h_{2m,\lambda}) = \chi_m h_{2m,\lambda},$$

其中 $\chi_m^2 = \nu_m$，且 χ_m 的符号为$(-1)^m$。就我们的目的而言，需要与特征函数$h_{0,\lambda}$、$h_{4,\lambda}$ 相对应的特征值 χ_0, χ_2，并且$(1-\chi_0)$和$(1-\chi_2)$ 都随$x = \lambda^2$趋于 0，且速度呈指数级。

6.4 泊松公式与近似k_λ of θ_x, $\lambda = \sqrt{x}$。

令 $\lambda > 1$，并令QW_λ 为韦伊二次型在支撑集位于区间 $[\lambda^{-1},\lambda]$ 内的测试函数上的限制。根据 §4.1 中讨论的安德烈·韦伊的结果，对所有 $\lambda > 1$，QW_λ 的正性等价于黎曼猜想。对于较小的 λ，可以证明这种正性（见 [111], [24]）。对每个 $\lambda > 1$，都存在（见 [25, 31]）一个典范的、下有界且无界的自伴算子A_λ，它作用于希尔伯特空间$L^2\left([\lambda^{-1},\lambda],\, du/u\right)$，且具有紧预解式，使得

$$QW_\lambda(f,f) = \langle A_\lambda f \mid f \rangle \tag{16}$$

最小特征值 $\epsilon(\lambda)$ 的数值计算表明，在 [25], 中， $\epsilon(\lambda)$ 作为 $\mu = \lambda^2$ 的函数，趋于 0 的速度呈指数级。事实上，仔细分析后会发现， $\epsilon(\lambda)$ 与角函数 $1-\chi_2(\lambda)$的行为惊人地相似（图 1）。就 QW_λ 的测试函数支撑集长度$L = 2\log\lambda$而言，像 $1-\chi_2$ 这样的极小量趋于 0 的速度是双重指数级[19]:

$$1 - \chi_2 \sim \frac{2^{14}}{3}\sqrt{2}\pi^5 e^{-4\pi e^L + 9/2L}$$

[18]按照我们的归一化，时间长度为$T = 2\lambda$，带宽限制为$W = \lambda$。[19]见 [47],定理1。注意， $\chi_k(\lambda)$ $^2 = \lambda_{2k}(a)$ 在本定理的记号中对应$a = \sqrt{2\pi}\,\lambda$

.

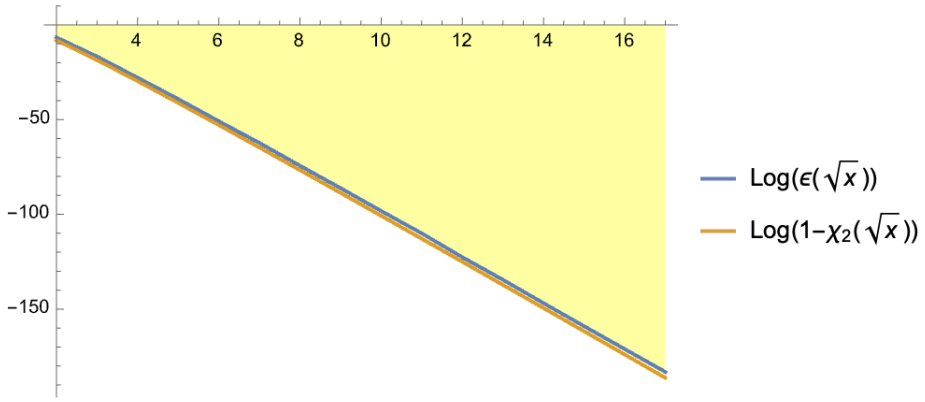


图 1：$\log(\epsilon(\sqrt{x}))$ 和 $\log(1-\bar{\chi}_2(\sqrt{x}))$ 关于x的函数图像。

在 [25]，中，我们给出了一个经数值验证的构造[10]，用于构造 QW_λ 的前几个极小特征值对应的特征向量，所用方法是采用与区间 $[-\lambda,\lambda]$ 相关的长椭球波函数。尤其是，这为近似 A_λ 的最小特征值 $\epsilon(\lambda)$ 对应的特征向量提供了一个有根据的猜测。与事实 6.2 一致，它

$$k_\lambda(u) := \mathcal{E}(h_\lambda)(u),\ \ \forall u \in [\lambda^{-1},\lambda] \tag{17}$$

其中h_λ 在相差一个乘法常数的意义下，是$h_{0,\lambda},h_{4,\lambda}$ 中积分为零[20]的唯一线性组合。

这个公式的概念性论证如下：映射 $\mathcal{E}$ 的值域包含在全局韦伊二次型的根基中（见 [18]），但 RH 意味着QW_λ 严格为正，且其根基为 $\{0\}$，因此我们应当预期QW_λ 的定义域不可能包含映射 $\mathcal{E}$ 值域中的任何非零元素。尽管如此，仍可如下构造支撑集包含于 $[\lambda^{-1},\lambda]$、且属于韦伊二次型“近似根基”的函数。若偶函数f的支撑集包含在区间 $[-\lambda,\lambda]\subset\mathbb{R}$ 内，则 $\mathcal{E}(f)$ 的支撑集包含在$\widehat{(0,}$ $\lambda]\subset\mathbb{R}_+^*$内。另一方面，利用条件$f(0)=f(0)=0$来定义施瓦茨空间的余维 2 子空间 $\mathcal{S}_0\subset\mathcal{S}(\mathbb{R})$，泊松公式给出

$$\mathcal{E}(\widehat{f})(x) = \mathcal{E}(f)(x^{-1}),\quad \forall f\in\mathcal{S}_0^{\mathrm{ev}} \tag{18}$$

这表明，只要偶函数 f 的支撑集包含在区间 $[-\lambda,\lambda]\subset\mathbb{R}$ 内，$\mathcal{E}(\mathrm{f})$ 的支撑集就包含在 $[\lambda^{-1},\infty)$ 内。要得到 QW_λ 的根基中的元素 $\mathcal{E}(\mathrm{f})$，障碍在于等式 $\mathrm{P}_\lambda\cap\mathrm{P}_\lambda=\{0\}$，其中 P_λ 和 P_λ 如上所述。但正如 §6.3$\widehat{\ }$ 中所解释的，这两个投影几乎相交；在处理好 $\mathrm{f}(0)=\mathrm{f}(0)=0$ 这两个条件后，将 $\mathcal{E}(\mathrm{f})$ 限制在区间 $[\lambda^{-1},\lambda]$ 上，便得到式 (17) 中的函数 k_λ。QW_λ 在该函数上的取值非零，但极小，因此自然可以猜测它是与 A_λ 的最小特征值 $\epsilon(\lambda)$ 相对应的特征向量的近似。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$6.5 傅里叶变换的收敛性 $k_\lambda\to k$

得益于关于长椭球波函数收敛至厄米-韦伯函数的经典估计，可以控制（17）中的k_λ 向$k=\mathcal{E}(h)$ 的收敛，并由此得到

[20]注意，对于 $(h_\lambda)(u)$，当 $u\in[\lambda^{-1},\lambda]$ 时，其计算仅涉及对整数 $\leq\lambda^2$ 求和

事实 6.4。 当 $\lambda \to \infty$ 时，k_λ 的傅里叶变换在开条带 $\Im(z) < \frac{1}{2}$ 的闭子条带上一致收敛于黎曼的 Ξ-函数。

在直线 $\Im(z) = \alpha$ 上，差值受到控制，其中 $\alpha \in (-\frac{1}{2}, 12)$ 由 $c\lambda^{-\frac{1}{2}-\alpha}(1-2\alpha)^{-1}$ 控制，其中 c 是一个有限常数。

6.6 剩余步骤

为了应用定理 6.1，需要证明 Weil 二次型 QW_λ 的最小特征值是单的，并且具有偶特征向量。长椭球波算子的类似性质已为人所知。此外，仍需证明 k_λ 是对 $\theta_{x,\lambda} = \sqrt{x}$ 的足够良好近似。

7 几何视角

在合作著作 [19]（见 [20]）中所采用的几何方法，揭示了一幅新颖的几何图景：对于整体域 $\mathbb{Q}$，它自然对应于有限特征整体域所关联的几何。特别是，弗罗贝尼乌斯对应在缩放位点的平方上是有意义的，而完备黎曼 ζ 函数则作为哈塞-韦伊生成函数的对应物出现。处理黎曼-韦伊显式公式中涉及的微妙主值，需要使用缩放位点的阿代尔实现；如今，我们将其理解为缩放位点的类域论对应物 [26]。

在论文 [24], 中，我们开始利用数域 $\mathbb{Q}$ 上弗罗贝尼乌斯对应的阿代尔解释，逐步研究魏尔正性。如 §4.1 所述，魏尔正性一次只涉及有限个素数，但它等价于黎曼猜想。在阿代尔几何框架中，对应由施瓦茨核编码；施瓦茨核是阿代尔数据平方上的分布，在其中扮演类域论中几何曲线对应物的角色。更一般地说，算子理论视角与几何视角之间的联系，是通过与算子相关联的施瓦茨核建立的。利用阿代尔的加法结构可以看出，伸缩算子的施瓦茨核在几何上对应于弗罗贝尼乌斯对应的因子。

$\mathbb{Q}$ 的阿代尔的加法结构使我们能够将伸缩作用 $k(x,\ y)\, f(x) \mapsto f(\lambda x)$ 的施瓦茨核写成如下形式（其中 $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ 为狄拉克分布）：

$$k(x,y) = \underline{\delta}(\lambda x - y).$$

7.1 阿基米德迹公式

韦伊二次型与迹公式之间，与信息论领域之间，存在着一个非常重要的平行关系。这个平行关系的起点，是通过引入两个独立参数来改写 [17] 的迹公式的阿基米德情形；这两个参数在此扮演的角色，类似于 Shannon、Slepian 及其合作者在信息传输研究中所采用方法里的时间限制和频率限制。研究在偶平方可积函数的希尔伯特空间 $L^2(\mathbb{R})_{\mathrm{ev}}$ 中进行。$\mathbb{R}_+^*$ 的缩放作用定义如下

$$(\vartheta_\lambda \xi)(v) := \lambda^{-1/2}\xi\left(\lambda^{-1}v\right),\ \vartheta(f) = \int f(\lambda)\ \vartheta_\lambda d^*\lambda, \quad \forall \xi \in L^2(\mathbb{R})_{\mathrm{ev}}$$

参数 T 给出了时间限制的区间 $[-T,T]$，定义了正交投影 P_T；参数 W 给出了频率限制的区间 $[-W,W]\widehat{\ }$，定义了投影 P_W。有理数域 [17] 的阿基米德情形的迹公式可以写成如下形式，其中 $W_\infty := -W_{\mathbb{R}}$ 已在（10）中定义：

$$W_\infty(f) = \log(TW)\, f(1) + \operatorname{Trace}\left(\vartheta(f)\left(1 - P_T - \widehat{P}_W\right)\right) \tag{19}$$

我们将此公式视为显式公式与信息论世界之间的桥梁$\widehat{\ }$，其中投影 P_T 和 P_W 发挥着核心作用。下文第 7.4 节将对其进行扩展，以纳入素数对显式公式的贡献。

7.2 阿基米德魏尔正性

关键要素是半局部迹公式。在我们的论文中，该公式用于不涉及素数的简单情形。我们发现，正如§4.1所述，在这种情形下不仅魏尔正性成立，而且正性的主要来源是 Sonin 空间。Burnol 最先在黎曼猜想的背景下引入了 Sonin 空间 [9–11]。Sonin 空间 $\mathfrak{S}_\lambda$ 是由平方可积函数组成的空间，这些函数在区间 $[-\lambda, \lambda]$ 上恒为零，其傅里叶变换也如此。根据构造，它是投影 P_λ 和 P_λ值域的正交补。我们将 $\mathfrak{S}$ 记为到 Sonin 空间 $\mathfrak{S}_1$ 上的正交投影（对于 $\lambda = 1$）。于是有 [24],

定理7.1。 设 $g \in C_c^\infty\left(\mathbb{R}_+^*\right)$ 的支撑集位于区间 $\left[2^{-1/2}, 2^{1/2}\right]$ 内，且其傅里叶变换在 i_2 和 0 处为零。那么以下不等式成立

$$W_\infty\left(g * g^*\right) \geq \operatorname{Tr}\left(\vartheta(g)\mathfrak{S}\vartheta(g)^*\right)$$

7.3 半局部阿代尔类空间

作为§7.4中所讨论的半局部迹公式之基础的，是半局部阿代尔类空间。这些几何空间Y_S 与 $\mathbb{Q}$ 的一个包含无穷赋值的有限赋值集S 相关联。按构造，Y_S 是商

$$Y_S := \mathbb{A}_S/\Gamma_S, \ \mathbb{A}_S = \prod_{v \in S} \mathbb{Q}_v \tag{20}$$

整体域 $\mathbb{Q}$ 在赋值$v \in S$处的局部域完备化所构成的阿代尔空间乘积的。群 Γ_S 是 $\mathbb{Q}^\times$ 的由下述方式定义的子群

$$\Gamma_S := \left\{\pm p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k} \,:\, p_j \in S \setminus \{\infty\}, \, n_j \in \mathbb{Z}\right\} \subset \mathbb{Q}^\times \tag{21}$$

环 $\mathbb{A}_S$ 通过对角嵌入将 $\mathbb{Q}$ 包含为子环，并由此诱导 Γ_S 对 $\mathbb{A}_S$ 的乘法作用。半局部阿代尔类空间最好编码为非交换代数 $\mathcal{S}(\mathbb{A}_S) \rtimes \Gamma_S$，即半局部阿代尔上函数的Bruhat-Schwartz代数 $\mathcal{S}(\mathbb{A}_S)$ 与乘法群 Γ_S的交叉积。这些非交换代数构成Spec $\mathbb{Z}$上的一个代数层。群 Γ_S 应恰当地理解为截面 $\mathbb{Z}^\times{}_S$，即层$\mathbf{G}_m$在S 于Spec $\mathbb{Z}$中的开补集上的截面。可以证明，半局部Bruhat-Schwartz代数 $\mathcal{S}(\mathbb{A}_S)$ 构成Spec $\mathbb{Z}$上交换代数的一个层 $\mathscr{O}$。由此便得到如下结果，它确立了非交换几何构造与Spec $\mathbb{Z}$的代数几何之间的相容性。

定理 7.2. *1.* 代数交叉积 $\mathscr{O} \rtimes \mathbf{G}_m$ 在 $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ 上定义了一个代数层，使得对于每个有限的赋值集 $S \ni \infty$

$$\left(\mathscr{O} \rtimes \mathbf{G}_m\right)\left(S^c\right) = \mathcal{S}(\mathbb{A}_S) \rtimes \mathbb{Z}_S^\times$$

2. $\mathscr{O} \rtimes \mathbf{G}_m$ 在泛点处的茎是整体交叉积 $\mathcal{S}(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) \rtimes \mathbb{Q}^\times$。

3. $\mathscr{O} \rtimes \mathbf{G}_m$ 的整体截面构成交叉积 $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \rtimes \{\pm 1\}$。

§7.4 中半局部迹公式涉及的函数空间，从概念上最好理解为半局部代数的霍赫希尔德同调。

7.4 半局部迹公式

要证明特征向量 θ_x 收敛到事实 6.2 中的函数 $k = \mathcal{E}(h)$，剩下的难点在于有效地比较 θ_x 与 k_λ，其中 $\lambda = \sqrt{x}$。[25]中展示了数值证据：比较范围扩展到了与最小的特征值对应的 QW_λ 的特征向量，并使用了形如 $\mathcal{E}(\psi)$ 的向量进行格拉姆–施密特正交化；其中的ψ 由下一组长椭球波函数构造而成。

作为对这一数值事实进行概念性论证的一步， [17]给出了半局部迹公式。它为韦伊二次型QW_λ 提供了一种迹公式表示，与（19）完全类似，但现在给出的是素数$p \in S$ 对显式公式的贡献。其形式为

$$-\sum_{v\in S} W_v(f) = \log(TW)\, f(1) + \operatorname{Trace}\left(\vartheta(f)\left(1 - P_T^S - \widehat{P}_W^S\right)\right) \tag{22}$$

w这里的投影P_T^S 和 $\widehat{\ }P_W^S$ 按照阿基米德情形中的定义，利用模[11]来定义。

7.5 红外与紫外区间

在非交换几何的框架下，通过谱三元组$(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ 对几何空间进行编码，可以从狄拉克算子D的两个互补谱区间中揭示相关信息：

• 紫外（UV）区间对应于谱的高能部分，也就是D 的特征值在无穷远处的行为。该区间刻画了空间的无穷小结构，并决定其局部几何不变量，例如维数、体积形式和曲率。在物理学中，这相当于以极短距离或高动量探测一个系统。从数学上讲，紫外行为支配热核的渐近性质，并在谱作用量原理中发挥关键作用。

• 红外区（IR）涉及算子 D 谱的低端部分，尤其是较小的特征值。这部分反映了空间的全局拓扑与几何特征，例如连通性、体积增长和指标理论量。在物理学中，红外行为指低能现象和大尺度性质。它对于理解长程关联和拓扑效应起着核心作用。

特别是，这种双重视角使非交换几何能够通过统一的算子理论语言，同时研究局部谱不变量以及全局算术或拓扑特征。

对于红外区，我们构造 [30] 自伴算子 $D_{(\lambda,N)}$ log，它们是区间 $[\lambda^{-1}, \lambda]$ 上与伸缩算子相关联的谱三元组的秩一扰动，其谱与致黎曼的信中所述低位ζ零点的惊人近似相吻合。我们进一步计算这些算子的正则化行列式 $\det^{\mathrm{reg}}(D_{(\lambda,N)}\ \log\ ^{-}z)$，并讨论它们在解析上的作用：通过证明在适当归一化后，这些行列式趋近于黎曼 Ξ ζ函数，说明它们如何控制并有望证明上述结果。对于紫外区，我们将在第 7.6 节简要介绍 [27] 的结果，该结果表明长椭球波算子给出了一个自伴算子，其表现与零点的紫外行为相吻合。作为准备，可以利用显式公式计算一个算子的热展开（假设黎曼猜想成立）；该算子的谱由 $\zeta(z)$ 的非平凡零点的虚部构成：

定理7.3。 *[28]* 假设黎曼猜想成立，并令 D 为一个自伴算子，其谱由黎曼ζ函数非平凡零点的虚部构成。那么，对于 $t \to 0$，有如下渐近展开

$$\operatorname{Tr}(\exp(-tD^2)) \sim \frac{\log\left(\frac{1}{t}\right)}{4\sqrt{\pi}\sqrt{t}} - \frac{(\log 4\pi + \frac{1}{2}\gamma)}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t}} + 2\exp(t/4) + \sum a_n t^{n/2} \tag{23}$$

其中 $a_0 = -\frac{1}{4}$，对于 $k > 0$，利用伯努利数 B^j 和欧拉数 $E(k)$，

$$a_{2k-1} = \frac{\Gamma(k)\left(2^{2k-1}-1\right)B_{2k}}{2\sqrt{\pi}(2k)!},\ a_{2k} = -\frac{1}{4}\,\Gamma(k+\frac{1}{2})\,\frac{E(2k)}{\sqrt{\pi}(2k)!}.$$

欧拉数定义为

$$E(2n) := \sum_{k=1}^{2n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k \sum_{j=0}^{2k}(-1)^j\binom{2k}{j}(k-j)^{2n} \tag{24}$$

当$k \to \infty$时，其渐近行为为

$$\frac{E(2k)}{(2k)!} \sim (-1)^k 2^{2k}\frac{4}{\pi}\pi^{-2k}$$

这表明渐近展开（23）绝不收敛，因为其一般系数a_n 按阶乘的速度发散。

7.6 长椭球波算子

正如我们上文所见，长椭球波函数在与黎曼ζ函数相关的研究中发挥着关键作用。在所有这些应用中，它们都是希尔伯特空间$L^2(\mathbb{R})^{\mathrm{ev}}$ 中定义在 $\mathbb{R}$上的偶平方可积函数空间里，两个正交投影之间的角度算子的特征函数。这些投影依赖于参数 $\lambda > 0$；投影P_λ 由乘以区间 $[-\lambda,\lambda] \subset \mathbb{R}$的特征函数给出。投影$P_\lambda$ 则是它经过傅里叶变换 $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}$共轭后的结果。在上述所有长椭球波函数的应用中，贝尔实验室团队发现的一个奇妙存在——与角度算子对易的微分算子PW_λ ——仅起辅助作用。在本节中，我们将阐释另一种“奇迹”，这是我们与 H. Moscovici 合作时发现的 [27]：对PW_λ 的自然自伴扩张进行细致研究，并将其扩张到$L^2(\mathbb{R})$ 后发现，它仍具有离散谱，其负特征值再现了黎曼ζ函数零点平方的紫外行为。类似地，在紫外区，正谱对应于平凡零点。这种巧合对两个取值 $\lambda = 1$ 和 $\lambda = \sqrt{2}$成立。这种巧合的概念性原因，在于式（15）中的算子与即之间的联系。

$$(\mathrm{PW}_\lambda\,\psi)(q) = -\partial((\lambda^2-q^2)\partial)\,\psi(q) + (2\pi\lambda q)^2\,\psi(q) \tag{25}$$

以及伸缩算子 $/S := x\partial_x$ 的平方。如上文所述，将伸缩$\vartheta(f)$ 压缩到 Sonin空间，被证明是在支撑集位于区间 $\left[2^{-1/2}, 2^{1/2}\right]$ 内的测试函数上，阿基米德位处魏尔正性的根源；但我在1998年已证明，长椭球波算子存在一个与正交投影 $\widehat{\ }P_\lambda$ 和 P_λ对易的唯一自伴扩张。它在傅里叶变换下保持不变，并限制在 Sonin空间上，即*i.e.* 由平方可积的偶函数组成的空间；这些函数及其傅里叶变换在区间 $[-\lambda,\lambda]$ 上恒等为零。我们在 [27], 中发现，PW_λ 在 Sonin空间上的这一限制是一个自伴算子，它为黎曼ζ函数的零点的紫外区提供了一个谱实现。更准确地说，该算子的谱由一列离散的负数 ν_k 以及数 $2\sqrt{\nu_k}$ 构成；对于选择 $\lambda = \sqrt{2}$，这些数具有与 $\rho - \frac{1}{2}$ 相同的紫外行为，其中 ρ's 是ζ函数的零点。

事实上，利用达布过程，我们构造了一个依赖于变形参数的 PW_λ 的狄拉克平方根D，其谱由数值 $2\sqrt{\nu_k}$ 构成（取 $\lambda = \sqrt{2}$ 时），并且具有与黎曼ζ函数的零点相同的紫外行为。图2展示了算子D 的谱以及ζ函数的零点的虚部。这种紫外谱

相似性表明，我们在谱上捕捉到了阿基米德位对神秘ζ谱的贡献。狄拉克平方根D 的选择歧义，与 J. P. Ramis 及其合作者 [45,89] 研究的细长椭圆微分方程的微分伽罗瓦理论有着深刻的关联。

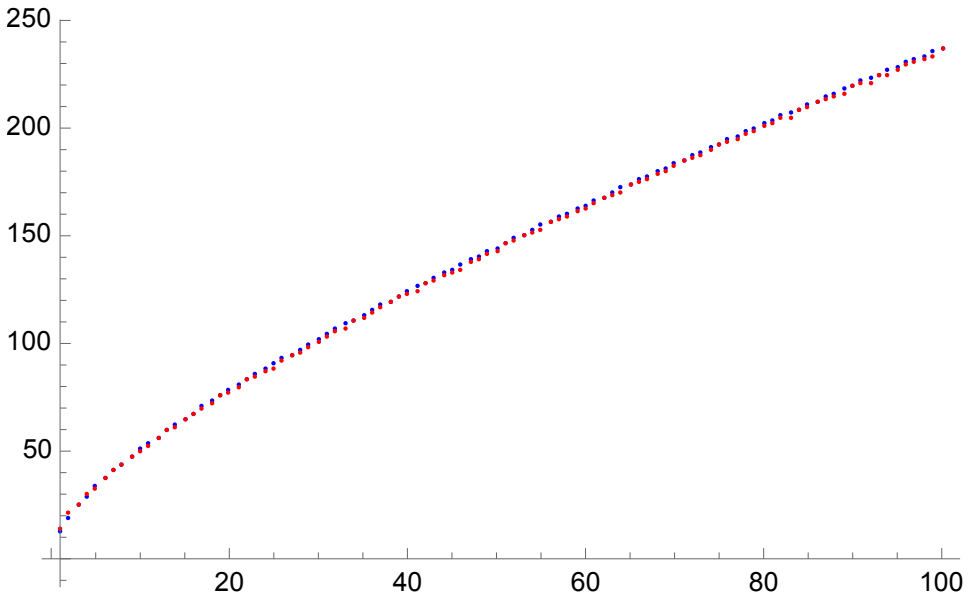


图2：该图展示了ζ函数第n个零点与 Spec$D$的第n个元素之间的接近程度。

8 结论

黎曼猜想推动了数学诸多领域的发展，从经典分析到现代算术几何和数学物理。尽管各种方法未能给出证明，却都深化了我们对ζ函数及其推广的理解。在这篇综述中，我们全面展现了这一数学图景。我们先详细考察了关于黎曼ζ函数及其零点的已知结果，随后综述了165年来为解决黎曼猜想而发展出的种类繁多的数学理论——从经典解析方法和L函数理论，到随机矩阵理论、算子理论和算术几何等现代方法。我们还探讨了该假设的各种等价表述，每一种都从自身角度说明了这个问题为何如此难以解决。这篇全面的综述既展现了黎曼猜想激发出的丰富数学思想，也揭示了即使是最精妙的现代方法，至今仍未能破解这个已有165年历史的谜题。

在这些累积知识的背景下，本文的第二部分另辟蹊径，以全新的视角回归黎曼的原始观点。我们发现了一大类与韦伊二次型直接相关、且其零点可证明位于临界线上的函数；再加上截断欧拉乘积与ζ函数的实际零点之间存在链接数的非凡数值证据，这些都表明，黎曼最初的洞见或许比以往所认识到的更有力量。仅使用小于 $2\,6\times 10^{13}$ 的素数就达到了如此高的精度——误差小至 10^{-55} .——这不能被视为巧合。

此处提出的几何框架运用了迹公式和谱方法，提供了一条潜在的前进路径：证明适当构造的逼近函数的零点会收敛到 ζ 函数的零点。这种将计算发现、经典分析与现代几何技术融为一体的思路，代表了一种新方法，既传承了黎曼的遗志，又运用了当代数学工具。

这条路径能否通向黎曼猜想的证明，尚待观察。然而，这段探索已经揭示了韦伊二次型与信息论世界之间，以及计算证据与理论结构之间出人意料的联系。正如我们在致黎曼的信中所写，有时，最深刻的真理就隐藏在最简单的观察之中。

关于黎曼猜想及其诸多方面的全面综述，请参见 [6,37,39,44,63,86]。本研究将与 C. Consani 和 H. Moscovici 合作继续开展，为这一持续发展的故事谱写新的篇章。

注释

[1]维纳-池原定理指出，若$A(x)$ 是一个非负、单调递增函数，并且

$$f(s) = \int_0^\infty A(x) e^{-xs} dx$$

在 $\mathrm{Re}(s) > 1$处收敛，且若$f(s) - c/(s-1)$ 可连续延拓至 $\mathrm{Re}(s) \geq 1$，其中$c \geq 0$为某个常数，则

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} A(x) = c.$$

这一结果恰好提供了所需的框架，使我们能够将关于 ζ函数在 Re(s) = 1 处不消失的信息，转化为关于素数计数函数的精确渐近结论。将其应用于素数定理时，需要把 ζ函数的对数导数表示为切比雪夫函数 $\psi(x) = \sum_{p^k \leq x} \log p$ 的梅林变换，即等式 $-\zeta'(s)/\zeta(s) = s \int_1^\infty \psi(x) x^{-(s+1)} dx$。ζ函数在 Re(s) = 1处不消失，再结合 ζ(s) 在 s = 1处的已知行为，可确保 $\zeta'(s)/\zeta(s) + 1/(s-1)$ 具备应用维纳-池原定理所需的解析性质。该定理随即直接推出 $\psi(x) \sim x$，由此通过初等论证即可得到素数定理

[2]塞尔伯格光滑子的形式为

$$\sum_{n \leq \xi} \frac{\alpha_n \left(1 - \frac{\log n}{\log \xi}\right)}{n^s}$$

其中 α_n 是 $1/\sqrt{\zeta(s)}$ 的狄利克雷级数系数，且满足 $\alpha_1 = 1$。他需要对 $|\zeta(1/2 + it)|^2$ 乘以该光滑子的四次方取平均。

[3]对于复平面上的亚纯函数f，Nevanlinna特征定义为

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f), \qquad r > 0,$$

其中

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right| d\theta$$

是邻近函数，而

$$N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t} \, dt + n(0, f) \log r$$

是极点的积分计数函数，其中$n(t, f)$ 表示f在 $|z| \leq t$内的极点数（计重数）。对于整函数，$N(r, f) = 0$，因此$T(r, f) = m(r, f)$。

对于黎曼ζ函数 $\zeta(s)$，它在 $\mathbb{C}$ 上是亚纯函数，且在 $s = 1$ 处有一个极点，可以用同样的方式定义 $T(r, \zeta)$。Borchsenius 和 Jessen（1948）的一项经典结果表明

$$T(r, \zeta) \sim \frac{\log r}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left| \zeta\left(re^{i\theta}\right) \right| d\theta \qquad (r \to \infty),$$

更准确地说，他们得到了如下渐近关系

$$T(r, \zeta) \sim \frac{1}{\pi} r \log r \quad \text{as } r \to \infty.$$

因此，$\zeta(s)$ 的Nevanlinna特征本质上按 $r \log r$ 的速度增长，其阶与 $\log M(r, \zeta)$ 的增长阶相同，其中 $M(r, \zeta) = \max_{|s| = r} |\zeta(s)|$。

[4]该定理指出，对于固定的 $\sigma > 1/2$，这些值

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(\log \zeta(\sigma + it)) dt$$

对于连续有界函数 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，当 $T \to \infty$ 时收敛。μ_σ 极限分布 μ_σ 是定义在$\mathbb{C}$ 上的一个概率测度，满足：

- 不含原子（连续分布）

- 当 $1/2 < \sigma < 1$ 时，其支撑集为整个复平面。
此外，尽管在存在 ζ 函数零点时，$\log \zeta(\sigma + it)$ 的定义存在歧义，Borchsenius-Jessen 定理并不以黎曼猜想为前提。

$_1$，[5]除了 Hahn-Banach 定理外，还要用到以下引理（见 [70] 引理 1.15）：设 $x_1, \ldots, x_n \in H$，$_1$，并设 b_n $=$ 1 $\ldots, b$为复数，满足 $|b_j| \leqslant 1, j, \ldots, n$。那么存在复数 $a \ldots, a$，满足 $|a_j| = 1, j, \ldots, n$，使得

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j - \sum_{j=1}^{n} b_j x_j \right\|^2 \leqslant 4 \sum_{j=1}^{n} \left\| x_j \right\|^2$$

[6]它的形式为

$$\sum_{0}^{2} (-1)^j \dim H^j(X, \mathcal{O}(D)) = \frac{1}{2} D.(D - K) + \chi(X) \tag{26}$$

其中 D 是一个因子，$\mathcal{O}(D)$ 是其截面层，$\chi(X)$ 是算术亏格

[7]尚不清楚本书中是否存在某种隐含约定，但第 1.15 节中所写的下列公式“涉及根的项 ρ”

$$\int_{C^+} \frac{t^{\beta-1}}{\log t} dt = \int_0^{x^\beta} \frac{du}{\log u}$$

（附有评注“其中第二个积分沿一条从上方经过$u = 1$处奇点的路径”）将两个不可能相等的项等同起来，因为当把 β 替换为 $\beta + 2\pi i/\log(x)$ 时，左边的积分会取不同的值，而x^β 并不改变。这意味着黎曼公式应改用如下函数来改写

$$\mathrm{Ei}(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{e^t}{t} dt$$

该函数在复z 平面上具有一条从 $-\infty$ 延伸至 0 的支割线不连续性。(11) 的正确形式为

$$f(x) = \mathrm{Li}(x) - \sum_{\Im(\rho)>0} (\mathrm{Ei}(\rho \log x) + \mathrm{Ei}(\bar{\rho} \log x)) + \int_x^\infty \frac{1}{t^2 - 1} \frac{dt}{t \log t} - \log 2 \tag{27}$$

其中求和遍历虚部为正的 ζ 函数的零点。

[8]更精确地说，有

$$h = \frac{\sqrt{3}}{4\, 2^{3/4}} h_4 - \frac{3}{2^{17/4}} h_0, \ \|h_j\| = 1, \ \|h\| = \frac{\sqrt{33}}{2^{17/4}}. \tag{28}$$

[9]希尔伯特空间中两个闭子空间之间的夹角概念——或等价地，两个正交投影P 与Q 之间的夹角——由 J. Dixmier 在希尔伯特空间中两个闭线性流形的相对位置，Revue Sci. 86（1948），387–399 中加以研究。其核心思想是，一对(P, Q) 对应于无限二面体群的一个酉表示。其不可约表示由一个角度 α分类，该角度在实平面中表示两条实直线之间的夹角。关系式 $P\cos^2\alpha = PQP$ 确定了每个不可约分量上的角度算子。

[10]这一事实在 [25], 中得到了验证：我们将韦伊二次型QW_λ 对应于其最小特征值的特征向量，与使用上述技术从长椭球波函数得到的长旋转体向量的正交化结果进行了比较。

[11] 该模可扩展为一个乘法映射 $|\bullet|_S$，从环 $\mathbb{A}_S = \prod_{v \in S} \mathbb{Q}_v$ 映到 $\mathbb{R}_+$；根据构造，此映射可下降到商上，成为映射 $\mathrm{Mod}_S : Y_S = \mathbb{A}_S/\Gamma \to \mathbb{R}_+$。

$$\mathrm{Mod}_S(u) := |(u_v)_{v \in S}|_S = \prod |u|_v \in \mathbb{R}_+ \tag{29}$$

。idele 与 idele 类群

$$\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_S) = \prod_{p \in S} \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p), \ C_S = \mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_S)/\Gamma \tag{30}$$

在商Y_S 上自然地通过乘法作用，而 $1 \in \mathbb{A}_S$ 的轨道给出一个嵌入$C_S \to Y_S$。C_S 在Y_S 中的补集，相对于局部域加法群的哈尔测度之积而言是零测集（该测度在可数群 Γ的作用下保持不变）。利用乘法群的哈尔测度相对于加法群的哈尔测度的拉东-尼科迪姆导数，可得到一个酉同一化

$$w_S : L^2(Y_S) \to L^2(C_S) \tag{31}$$

（参见 [18] 命题 2.30）。我们还回顾一下（参见 [18, 式 (2.223) 和 (2.239)]，C_S 是一个模化局部紧群，其模为

$$\mathrm{Mod}_S(\lambda) = |\lambda|_S := \prod_{p \in S} |\lambda_p|, \quad \forall \lambda = (\lambda_p) \in C_S \tag{32}$$

它与 $\mathbb{R}_+^* \times K_S$（非典范地）同构，其中 K_S 是 Mod_S 的核。式 (22) 形式的迹公式是 [17] 的一般迹公式在K_S 不变部分上的特化。

致谢

我谨感谢雅克·迪克斯米耶和第一位审稿人提出的非常有用的意见。

参考文献

[1] M. Artin、A. Grothendieck 与 J. L. Verdier，《拓扑斯理论与概形的 étale 上同调》（SGA 4），数学讲义，第269、270、305卷，施普林格，1972–1973。[2] C. Bays 与 R. H. Hudson，关于使 $\pi(x) > \mathrm{Li}(x)$ 成立的最小 x 的一个新界，《数学计算》69（2000年），第231期，1285–1296。[3] M. V. Berry 与 J. P. Keating，黎曼零点与特征值渐近，SIAM 评论 41（1999），第2期，236–266。[4] M. V. Berry 与 J. P. Keating，$H = xp$ 与黎曼零点，载于：超对称与迹公式：混沌与无序，施普林格，1999，355–367。[5] R. P. Boas Jr.，《整函数》，Academic Press，1954。[6] E. Bombieri，黎曼猜想，载于：千禧年大奖难题，J. Carlson、A. Jaffe 与 A. Wiles（编），克雷数学研究所/美国数学会，2006，107–124。[7] V. Borchsenius 与 B. Jessen，平均运动与黎曼ζ函数的值，数学学报 80（1948），97–166。[8] J.B. Bost、A. Connes，Hecke 代数、III 型因子以及数论中伴随自发对称性破缺的相变，《数学精选》（新辑）第1卷（1995）第3期，411–457。[9] J.-F. Burnol，关于与傅里叶变换以及狄利克雷和黎曼 L 函数相关的某些整函数希尔伯特空间，巴黎科学院报告 I 辑 333（2001），201–206。[10] J.-F. Burnol，论 de Branges 与傅里叶变换相关联的 Sonine 空间，巴黎科学院报告 I 辑 335（2002），689–692。[11] J.-F. Burnol，与黎曼ζ函数的零点相关联的两个完备且极小的系统，波尔多数论杂志 16（2004），第1期，65–94。[12] H. M. Bui、J. B. Conrey 与 M. P. Young，ζ函数超过41%的零点位于临界线上，《算术学报》150（2011），第1期，35–64。[13] C. Bruce、T. Takeishi，论与数域的全阿代尔环相关联的 C^*-代数。非交换几何杂志 19（2025），第2期，383–399。[14] P. L. Chebyshev，《关于素数的回忆录》，纯粹与应用数学杂志，第1辑，第17卷（1852），366–390。[15] Y. Chao 与 R. Plymen，关于使 $\pi(x) > \mathrm{Li}(x)$ 成立的最小 x 的一个新界，国际数论杂志 6（2010），681–690。[16] A. Connes，《非交换几何》，Academic Press，1994。[17] A. Connes，非交换几何中的迹公式与黎曼ζ函数的零点，《数学精选》（新辑）5（1999），第1期，29–106。[18] A. Connes 与 M. Marcolli，《非交换几何、量子场与动机》，学术讨论会出版物，第55卷，美国数学会，2008。[19] A. Connes 与 C. Consani，$\mathbb{F}_1$ 上的概形与ζ函数，组合数学 146（2010），第6期，1383–1415。[20] A. Connes，关于黎曼猜想的一篇论述。载于《数学中的公开问题》，施普林格（2016），卷主编为 Michael Rassias 与 John Nash。[21] A. Connes 与 C. Consani，缩放哈密顿量，算子理论杂志 85（2019），257–276。

[22] A. Connes 和 C. Consani，《绝对代数几何：仿射情形》，《数学进展》390 (2021年)，论文编号 107909，共 44 页。[23] A. Connes 和 C. Consani，《准内函数与局部因子》，《数论杂志》226 (2021)，139–167。[24] A. Connes 和 C. Consani，《Weil 正性与迹公式：阿基米德位》，《数学精选》（新系列）27 (2021)，第 4 期，论文编号 77，共 70 页。[25] A. Connes 和 C. Consani，《谱三元组与 ζ-循环》，《数学教学》69 (2023)，第 1–2 期，93–148。[26] A. Connes 和 C. Consani，《纽结、素数与类域论》，arXiv:2501.06560，即将发表于《Regulators V》会议论文集，美国数学会。[27] A. Connes、H. Moscovici，《紫外 prolate 谱与 ζ函数的零点相吻合》，《美国国家科学院院刊》119 (2022)，第 22 期。[28] A. Connes，《热展开与 ζ函数》，《泛函分析年刊》15 (2024)，第 3 期，论文编号 59，共 13 页。[29] A. Connes、C. Consani 和 H. Moscovici，《ζ零点与 prolate 波算子：半局部阿代尔算子》，《泛函分析年刊》15 (2024)，第 4 期，论文编号 87，共 38 页。[30] A. Connes、C. Consani 和 H. Moscovici，《ζ 谱三元组》。即将发表于 CIRM 会议论文集《非交换几何在规范理论、场论与量子时空中的应用》，2025年4月7日至11日。[31] A. Connes、C. Consani 和 H. Moscovici，《借助 Weil 型研究黎曼零点：从 prolate 函数到上同调》，编写中。[32] A. Connes 和 W. van Suijlekom，《二次型、实零点与谱作用量的回响》，《数学物理通讯》(2025) 406:312，献给 H. Araki 的专卷。[33] J. B. Conrey、A. Ghosh，《关于 ζ 函数均值》，《Mathematika》31 (1984)，第 1 期，159–161。[34] J. B. Conrey，《黎曼ζ函数的零点中有超过五分之二位于临界线上》，《纯粹与应用数学杂志》399 (1989)，1–26。[35] J. B. Conrey、A. Ghosh，《关于黎曼ζ函数六次幂矩的一个猜想》，《国际数学研究通报》1998，第 15 期，775–780。[36] J. B. Conrey、S. Gonek，《黎曼ζ函数的高阶矩》，《杜克数学杂志》107 (2001)，第 3 期，577–604。[37] J. B. Conrey，《黎曼猜想》，《美国数学学会通报》50 (2003)，第 3 期，341–353。[38] J. B. Conrey 和 N. C. Snaith，《L 函数比值猜想的应用》，《伦敦数学会会刊》（第 3 辑）94 (2007)，第 3 期，594–646。[39] J. B. Conrey，《黎曼猜想》，载于《伯恩哈德·黎曼逝世一百五十周年纪念：黎曼的遗产》第 I 卷，107–190，《高级数学讲义》(ALM) 35.1，国际出版社，马萨诸塞州萨默维尔，2016。[40] P. Deligne，《Weil 猜想 I》，《高等科学研究所数学出版物》43 (1974)，273–307。[41] P. Deligne，《Weil 猜想 II》，《高等科学研究所数学出版物》52 (1980)，137–252。[42] E. Dueñez，《与紧致对称空间相关的随机矩阵系综》，《数学物理通讯》244 (2004)，29–61。[43] F. J. Dyson，《复杂系统能级的统计理论 I–III》，《数学物理杂志》3 (1962)，140–175。

[44] H. M. Edwards, 《黎曼ζ函数》, Dover出版社, 2001（原版由 Academic Press 于 1974年出版）。[45] F. Fauvet、J.-P. Ramis、F. Richard-Jung 和 J. Thomann, 《长旋转椭球波方程的斯托克斯现象》, 《应用数值数学》60 (2010), 第 12 期, 1309–1319。[46] S. Feng, 《黎曼ζ函数在临界线上的零点》, 《数论杂志》132, 511–542 (2012)。[47] W. H. J. Fuchs, 《关于带限信号理论中出现的一个积分方程的特征值》, 《数学分析及其应用杂志》9 (1964), 317–330。[48] C. F. Gauss, 《算术研究》, 1801。[49] A. A. Goldberg 和 I. V. Ostrovskii, 《亚纯函数的值分布》, 《数学专著译丛》第 236 卷, 美国数学会, 2008。[50] S. M. Gonek、C. P. Hughes 和 J. P. Keating, 《黎曼ζ函数的混合欧拉–阿达马乘积》, 《杜克数学杂志》136 (2007), 第 3 期, 507–549。[51] C. Gordon 和 P. Sarnak, 《有限域上曲线的ζ函数零点》, 《美国数学会通报》（新系列）23 (1990), 147–182。[52] A. P. Guinand, 《素数理论中的一个求和公式》, 《伦敦数学会会刊》（第 2 辑）50 (1949), 107–119。[53] L. Guth 和 J. Maynard, 《狄利克雷多项式的新大值估计》, arXiv:2405.20552。[54] J. Hadamard, 《关于函数 ζ(s)的零点分布及其算术后果》, 《法国数学会通报》24 (1896), 199–220。[55] J. Hadamard, 《关于由泰勒展开式给出的函数之研究》, 《纯粹与应用数学杂志》（第 4 辑）8 (1892), 101–186。[56] G. H. Hardy, 《关于黎曼函数 ζ(s)的零点》, 《巴黎科学院报告》158 (1914年), 1012–1014。[57] G. H. Hardy 和 J. E. Littlewood, 《对黎曼ζ函数理论及素数分布理论的贡献》, 《数学学报》41 (1916), 119–196。[58] D. R. Heath-Brown, 《狄利克雷L函数的无零区域及等差数列中的最小素数》, 《伦敦数学会会刊》（第 3 辑）64 (1992), 第 2 期, 265–338。[59] D. A. Hejhal, 《PSL(2, ℝ) 的塞尔伯格迹公式》, 《数学讲义》第 548 卷, 施普林格, 1976。[60] A. E. Ingham, 《素数分布》, 剑桥大学出版社, 1932年。[61] A. E. Ingham, 《关于 N(σ, T) 的估计》, 《牛津季刊数学杂志》11 (1940), 183–188。[62] A. E. Ingham, 《黎曼ζ函数理论中的均值定理》, 《伦敦数学会会刊》27 (1926), 273–300。[63] A. Ivi´c, 《黎曼ζ函数：理论与应用》, Dover出版社, 2003。[64] N. M. Katz 和 P. Sarnak, 《随机矩阵、弗罗贝尼乌斯特征值与单值化》, 《美国数学会讨论会出版物》第 45 卷, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 1999。[65] N. M. Katz 和 P. Sarnak, 《ζ函数的零点与对称性》, 《美国数学会通报》（新系列）36 (1999), 1–26。

[66] J. P. Keating 和 N. C. Snaith，随机矩阵理论与 $\zeta(1/2+it$[67] J. P. Keating 和 N. C. Snaith，随机矩阵理论与 s $=1/2$处的 L函数，《数学物理通讯》214（2000），第1期，57–89。[68] I. Laine，《奈望林纳理论与复微分方程》，Walter de Gruyter，1993年。[69] C. L. Siegel，《关于具有给定判别式的整二次型类数》，《数学年刊》106（1932年），538–586。[70] A. Laurinˇcikas，《黎曼ζ函数的极限定理》，《数学及其应用》，第352卷，Kluwer，1996年。[71] R. Lehman，关于 π(x) − Li(x) 之差，《算术学报》11（1966年），397–410。[72] B. Ya. Levin，《整函数的零点分布》，《数学专著译丛》，第5卷，美国数学会，1964年。[73] N. Levinson，黎曼ζ函数的零点中超过三分之一位于 $\sigma=1/2$，《数学进展》13（1974年），383–436。[74] X.-J. Li，数列的正性与黎曼猜想。《数论杂志》65（1997年），第2期，325–333。[75] J. E. Littlewood，关于素数的分布，《巴黎科学院报告》158（1914年），1869–1872。[76] J. Lurie，《高阶托普斯理论》，《数学年刊研究》，第170卷，普林斯顿大学出版社，2009年。[77] B. Mazur，关于数域的 étale上同调，《高等师范学校科学年刊》（第4辑）6（1973年），521–552。[78] R. Meyer，关于一个与素数和 L函数零点相关的 idele类群表示，《杜克数学杂志》第127卷（2005年），第3期，519–595。[79] H. L. Montgomery，ζ函数的零点，《国际数学家大会论文集》（温哥华，1974年），第1卷，379–381。[80] H. L. Montgomery，ζ函数零点的两点相关，载于：《解析数论》，《纯粹数学专题讨论会论文集》，第24卷，美国数学会，1973年，181–193。[81] H. L. Montgomery 和 R. C. Vaughan，《乘法数论 I：经典理论》，剑桥高等数学研究丛书，第97卷，剑桥大学出版社，剑桥，2007年。[82] R. Nevanlinna，《皮卡–博雷尔定理与亚纯函数理论》，Gauthier-Villars，巴黎，1929年。[83] R. Nevanlinna，《解析函数》，施普林格出版社，1970年。[84] A. M. Odlyzko，ζ函数零点间距的分布，《数学计算》48（1987年），第177期，273–308。[85] A. M. Odlyzko，黎曼ζ函数的第 10^{20}个零点及其7000万个邻近零点，预印本（1990年）；可访问 https://www.dtc.umn.edu/~odlyzko。[86] S. J. Patterson，《黎曼ζ函数理论导论》，剑桥高等数学研究丛书，第14卷，剑桥大学出版社，1988年。[87] D. Platt，T. Trudgian，黎曼猜想在 $3\cdot10^{12}$ 以内成立。《伦敦数学会通报》53（2021年），第3期，792–797。

[88] K. Pratt、N. Robles、A. Zaharescu、D. Zeindler，黎曼ζ函数零点中超过十二分之五位于 ζ 临界线上。《数学研究通讯》7（2020），第2期，论文第2篇，共74页。[89] J. P. Ramis、F. Richard-Jung、J. Thomann，Connes–Moscovici 长椭球谱负部分的新特征函数。《巴黎科学院数学报告》363（2025），1065–1081。[90] B. Riemann，《给定数值以下素数的数量》，柏林皇家普鲁士科学院月报（1859年），671–680。[91] B. Riemann，《关于函数用三角级数表示的问题》（On the Representability of a Function by a Trigonometric Series），哥廷根皇家学会论文集，第13卷（1867年），第87–132页。[92] W. Rudin，《实分析与复分析》，第3版，McGraw-Hill，1987年。[93] Y. Saouter 和 P. Demichel， $\pi(x)$ –Li(x) 为正的精确区域，《数学计算》79（2010），2395–2405。[94] Y. Saouter、T. Trudgian 和 P. Demichel， $\pi(x)$ –Li(x) 为正的更精确区域，《数学计算》84（2015），第295期，2433–2446。[95] K. Schmüdgen，《希尔伯特空间上的无界自伴算子》，《数学研究生教材》，第265卷，施普林格，2012年。[96] A. Selberg，对黎曼ζ函数理论的贡献，《挪威科学院奥斯陆分院论文集》I（1942年），第10号，1–59。[97] A. Selberg，素数定理的初等证明，《数学年刊》第二辑50（1949年），305–313。[98] A. Selberg，弱对称黎曼空间中的调和分析与不连续群及其在狄利克雷级数中的应用，《印度数学会杂志》20（1956年），47–87。[99] B. Simon，正二次型的下半连续性，《爱丁堡皇家学会论文集》79（1977年），267–273。[100] S. Skewes，关于 $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$ 之差，《伦敦数学会杂志》8（1933年），277–283。[101] D. Slepian 和 H. Pollack，长椭球波函数、傅里叶分析与不确定性，《贝尔系统技术杂志》（1961年），43–63。[102] D. Slepian，长椭球波函数的若干渐近展开，《数学物理杂志》44（1965年），99–140。[103] D. Slepian，关于傅里叶分析、不确定性与建模的一些评论，SIAM 评论23（1983年），379–393。[104] N. Snaith，黎曼零点与随机矩阵理论，《米兰数学杂志》第78卷（2010年），135–152。[105] H. J. J. 特里勒，关于差值 $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$ 的符号，《数学计算》48（1987年），323–328。[106] 德拉瓦莱普桑，关于素数理论的解析研究，《布鲁塞尔科学学会年刊》20（1896年），183–256。[107] 冯·曼戈尔特，论黎曼的论文《关于给定数值以下素数的数量》，《纯粹与应用数学杂志》114（1895年），255–305。[108] S. M. Voronin，黎曼ζ函数普遍性的定理，《苏联科学院学报·数学辑》39（1975年），475–486；《苏联数学学报》9（1975年），443–445。[109] A. Weil，关于素数理论的显式公式，隆德大学数学研讨会通讯，1952年，252–265。

[110] A. Weil, 《基础数论》, 《数学科学基础教程》丛书第144卷, 施普林格, 1967年; 第2版, 1973年; 校正后重印版, 1995。

[111] H. Yoshida, 《关于与ζ函数相关的厄米形式》, 载于: 《几何中的ζ函数》(东京, 1990年), 《纯粹数学高级研究》21, 纪伊国屋书店, 东京, 1992年, 281–325。

ALAIN CONNES高等研究院与法兰西
公学院, 法国巴黎*75005*。电子邮件
地址: alain@connes.org