´多尺度轻载与重载下的莱维驱动排队网络

KRZYSZTOF DE␣BICKI、NIKOLAI KRIUKOV 和 MICHEL MANDJES

Abstract. 我们研究一个排队网络，其路由矩阵为严格上三角矩阵，且每列至多包含一个非负元素；根节点接收来自谱正 Lévy 过程的输入。我们的目标是在服务率按特定方式缩放的条件下，刻画多元平稳工作负荷的分布。在驱动 Lévy 过程的拉普拉斯指数满足温和条件时，我们确定轻交通和重交通状态下适当缩放的联合平稳工作负荷的极限分布。具体而言，我们建立了使网络中的某些排队工作负荷渐近解耦，并在极限状态下相互独立的条件。

Keywords. Lévy 过程 ◦ 排队网络 ◦重负荷 ◦ 轻负荷 ◦ 拉普拉斯指数 t

Affiliations. NK 隶属于阿姆斯特丹大学 Korteweg-de Vries 数学研究所，地址为荷兰阿姆斯特丹 Science Park 904，邮编 1098 XH。
KD 隶 属于弗罗茨瓦夫大学数学研究所，地址为 pl. Grunwaldzki 2/4，50-384 弗罗茨瓦夫 ，波兰。
MM 隶属于莱顿大学数学研究所，地址为荷兰莱顿 P.O. Box 9512，邮编 2300 RA。MM 还隶属于阿姆斯特丹大学 Korteweg-de Vries 数学研究所（荷兰阿姆斯特丹）；埃因霍温理工大学（荷兰埃因霍温）；以及阿姆斯特丹大学阿姆斯特丹商学院经济与商业学院（荷兰阿姆斯特丹）。

Acknowledgments. KD部分获波兰国家科学中心资助，资助编号为2024/55/B/ST1/01062（2025—2028年）。NK和MM获得欧盟地平线 2020研究与创新计划玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议第945045号的支持，同时也获得NWO引力项目networks 资助，资助协议编号为024.002.003。

arXiv:2602.04024v1 [math.PR] 3 Feb 2026

1. Introduction

我们考虑描述一个存储系统演化的经典模型，该系统有时也称为排队系统的工作负载过程。最基本的模型涉及一个具有无限 $J(\cdot)$ 存储容量的单一缓冲资源，该资源由外部输入过程供给，通常假设该过程具有平稳增量，并配备输出速率 $r>0$。时刻 t 的存储水平是输入过程的一个泛函，可通过求解所谓的 *Skorokhod*问题 [1, §IX。2]来确定。事实上，它可以通过模型基本要素 $J(\cdot)$ 和 r 表示为

$$Q(t)=Q(0)+J(t)-rt+\max\Big(0,\ \sup_{0<s<t}\big(-Q(0)-J(s)+rs\big)\Big).$$

重要的是，这种形式体系并不要求过程 $J(\cdot)$ 单调递增。大量文献致力于刻画平稳工作量 Q；在稳定性条件 $\mathbb{E}\{J(1)\}<r$ 下，对于任意初始工作量 $Q(0)$，它可解释为当 $t\to\infty$ 时 $Q(t)$ 的极限。对于谱正的 L´évy 输入过程 $J(\cdot)$（即无负跳跃的 L´évy 过程），其平稳分布对应的拉普拉斯-斯蒂尔切斯变换（LST）可由 Pollaczek-Khinchine 定理（及其推广形式） [8, §III.1] 得知。

单队列已得到非常深入的研究，而多队列网络受到的关注则少得多。这类网络最简单的实例是串联系统队列，它由 $n\geqslant 2$ 个依次连接的队列组成，其中一个队列的输出作为下一个队列的输入。我们将这些队列相应的输出速率记为 r_i，其中 $i\in\{1,\dots,n\}$。不失一般性，可以假设 $r_1>\ldots>r_n$；因为若相邻两个队列 i 和 $i+1$ 的顺序不满足这一关系，则第 $(i+1)$ 个队列将始终为空，因此可以将其省略。注意到，前 i 个工作负载之和可表示为输出速率为 r_i 的单个队列的工作负载，因此可以用一种方法来描述多元工作负载过程 $\boldsymbol{Q}(\cdot)=(Q_1(\cdot)\dots,Q_n(\cdot))^\top$。更确切地说，利用

$$\sum_{j=1}^{i}Q_i(t)=\left(\sum_{j=1}^{i}Q_i(0)\right)+J(t)-r_it+\max\left(0,\ \sup_{0<s<t}\left(-\left(\sum_{j=1}^{i}Q_i(0)\right)-J(s)+r_is\right)\right),$$

对于任意 $t\geqslant 0$ 以及任意 $i\in\{2,\dots,n\}$，我们有，

$$\begin{aligned}Q_i(t)=Q_i(0)-(r_i-r_{i-1})t&+\max\left(0,\ \sup_{0<s<t}\left(-\left(\sum_{j=1}^{i}Q_i(0)\right)-J(s)+r_is\right)\right)\\&-\max\left(0,\ \sup_{0<s<t}\left(-\left(\sum_{j=1}^{i-1}Q_i(0)\right)-J(s)+r_{i-1}s\right)\right).\end{aligned}$$

在假设 $\mathbb{E}\{J(1)\}<r_i$ 第 i 个队列稳定的条件下，n 维极限工作负载 $\boldsymbol{Q}$ 有良好定义。关于多元存储过程（包括上文讨论的串联系统）的更多背景知识，参见例如 [8, 第 XII–XIII 章] 和 [23]。若 $J(\cdot)$ 是谱正的莱维过程，则上述串联网络类别中与 $\boldsymbol{Q}$ 相关的联合平稳分布已用其拉普拉斯–斯蒂尔切斯变换刻画；参见例如 [9] 中的结果。

除了串联网络之外，还可以考虑更一般的 n 节点排队网络，其中树形网络 这一子类仍可进行精确分析。在这类前馈队列中，工作量仅进入根队列。在任一节点，队列的输出都可以分流，并流入一个或多个后续队列，或离开网络。重要的是，这一框架不允许环路 或合并；另见 [9]。关于具有多维莱维输入的存储模型的其他扩展的分析，参见 [12–16, 18]。

我们先简要介绍一些记号；关于模型和所采用假设的更完整说明见第 2 节。我们用 $p_{ij}\in[0,1]$ 表示作为第 i 个节点输入的部分

第 j 个节点的输入。由于网络中不允许存在环路和合并，节点可以按一定顺序排列，使得矩阵 $P = \{p_{ij}\}_{i,\ j=1}^{n}$ 严格上三角，且每列至多有一个正元素。串联队列模型是一个特例，其中 P 的元素满足 $p_{i,\ i+1} = 1$ 当 $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ 时成立，而在其他情况下 $p_{ij} = 0$。因此，我们考虑的排队网络可用以下要素描述：(i) 输入过程 $J(\cdot)$（描述进入队列 1 的工作量）；(ii) 节点 1、……、r_n的输出速率 r_1，分别对应节点 1、……、n；以及 (iii) 路由矩阵 $P = \{p_{ij}\}_{i,\ j=1}^{n}$。请注意，该排队网络模型（$J(\cdot)$ P， $\boldsymbol{r}$）涵盖了存在“泄漏”的串联网络，即网络输入的一部分在到达队列 n 之前便离开系统的情形（也就是说，对于 $i \in \{1, \ldots, n-1\}$，$p_{i,\ i+1} \in$ 属于 (0，1)，而所有其他 $p_{ij} = 0$仍然如此）。

我们对输入过程进行中心化 $J(\cdot$，具体而言，这意味着 $\mathbb{E}\{J(1)\} = 0$；注意，这样做不会失去一般性。在我们的设定中，驱动过程 $J(\cdot)$被假设为谱正的莱维过程。正如´所展示的，平稳工作量向量 [9], 的分布可以通过其（联合）拉普拉斯–斯蒂尔切斯变换，显式地表示为（ $\boldsymbol{Q}J(\cdot)$ $P, \boldsymbol{r}$）的函数。我们将在第2节讨论这一表达式及所需的假设。

研究范围与贡献——本文的主要目标是在特定的轻交通和重交通状态下，分析上述树形网络。正如 [8, 第十四章],莱´维过程特别适合在适当的时间尺度变换下对随机过程的聚合进行建模，应用领域包括金融和通信网络；这一点已有大量论述，例如 [27], ，而随机过程极限的论证见[22, 26]。关于莱´维过程的结构和性质的更多背景知识，可参见经典专著 [2, 21, 24], ；而关于排队网络中的一般重交通与函数极限定理，则见 [3, 11, 27]。重交通状态下队列的研究可追溯至 [17], 的开创性工作，而关于轻交通行为的经典参考文献包括 [6, 25]。对于莱´维输入，存储过程的重交通极限例如在 [20], 中得到了分析，而串联系统则在 [19]中进行了研究。

更精确地说，我们的目标是描述网络中所有节点在以下两种渐近机制下的联合平稳分布：

- 轻负荷：对所有节点 $i \in \{1, \ldots, n\}$，输出速率 r_i 满足 $r_i = r_i(u) \to \infty$,
- 重负荷：对所有节点 $i \in \{1, \ldots, n\}$，输出速率 r_i 满足 $r_i = r_i(u) \to 0$,

令 $u \to \infty$（其中 u表示缩放参数）。本文包含两个主要结果。在定理3.1 中，我们在关于网络结构以及输入L´evy过程的拉普拉斯指数的温和假设下，给出轻负荷情形中经适当重缩放的平稳工作量的极限拉普拉斯–斯蒂尔切斯变换。定理 3.2 是定理 3.1 在重负荷情形下的对应结果。特别地，我们给出显式条件，使得不同队列的平稳工作量发生“解耦”，即在极限 $u \to \infty$下变得相互独立。非正式地说，这些条件意味着不同队列处的工作量过程在不同的时间尺度上波动（“多尺度轻负荷与重负荷”）：波动较慢的队列会把快速波动的队列基本上视为处于均衡。

平稳工作量在多尺度轻交通与重交通状态下的渐近独立性，此前已在多种具体情形中得到确立。在此背景下，我们提及开创性论文 [5] ，其讨论平稳状态下 Jackson 网络的多尺度重负荷极限定理；另见近期的相关工作 [4, 10]。在 [7], 中，重点是路径级收敛，主要结果给出了具有高斯输入的树形网络在多尺度轻交通与重交通下的函数型极限定理。本文所采用的方法与 [5, 7]中的方法有本质区别：由于我们可以得到平稳工作量向量的联合拉普拉斯-斯蒂尔切斯变换，因此可以借助 L´evy 收敛定理证明分布收敛。需要指出的是，也可以先建立函数型收敛，再分析相应的平稳行为。然而，这种方法

将需要处理把关于时间 $t \to \infty$ 的极限与缩放参数 $u \to \infty$的极限互换这一微妙问题。

概要 — 本文结构如下。小节 2.1 正式介绍模型及其所采用的假设。小节 2.2 列出阐述主要结果所需的全部记号。第 3 节介绍本文的两项主要结果。第 4 节通过一系列示例说明主要结果的应用。本节分为两个小节：小节 4.1 介绍满足所采用假设的 L´évy 过程，而小节 4.2则列举具体网络的示例。第 5 节专门用于证明主要定理。附录 A包含一系列辅助结果的（较为技术性的）证明。

2. Model, assumptions and notation

本节详细介绍所研究的模型、所采用的假设，以及全文使用的其他记号。

2.1. 模型与假设。 如引言中所述，为了描述排队网络，我们应指定三元组 $(J(\cdot)\ P,\ \boldsymbol{r})$。我们首先详细说明输入过程 $J(\cdot)$，它是系统中唯一的输入，流入节点 1：

P： $J(\cdot)$ 是一个中心化的谱正 L´evy 过程。

接下来，我们指定网络结构，其中包括路由矩阵 $P = \{p_{ij}\}_{i,\ j=1}^{n}$ 以及输出速率 $\boldsymbol{r}$。输出速率 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u) > 0$ 由缩放参数 u参数化。为了获得以驱动过程 $J(\cdot)$ 表示的平稳工作负载的闭式表达，需要求解相应的 Skorokhod问题；例如，参见 [9]。为此，我们提出以下三个假设：

N1：路由矩阵 P 是严格上三角矩阵，仅包含非负元素，且除第一列外，每一列恰有一个正元素；**N2**⋆：对于任意 $i,\ j \in \{1,\ldots,n\}$，若 $p_{ij} > 0$，则对任意 $u > 0$，$p_{ij}\, r_i(u) > r_j(u)$；**N3**⋆：对于任意 $i \in \{1,\ldots,n\}$ 以及任意 $u > 0$，$\mathbb{E}\{J(1)\}(I - P^{\top})^{-1}_{i,\ 1} < r_i(u)$。

在假设 **N1**、**N2**⋆ 和 **N3**⋆ 下，平稳工作负载可以用输入过程 $J(\cdot)$ 表示。事实上，正如 [9] 和 [8, 第 XIII 章], 中所指出的，在这些条件下，对于任意给定的 $u > 0$，平稳工作负载 $\boldsymbol{Q}_u$ 满足以下分布等式

$$\boldsymbol{Q}_u \stackrel{\mathrm{d}}{=} (I - P^{\top})\overline{\boldsymbol{X}}_u, \tag{1}$$

其中，$\overline{\boldsymbol{X}}_u = \big(X_{u,\ 1},\ \ldots,\ X_{u,\ n}\big)^{\top}$ 定义为

$$\overline{\boldsymbol{X}}_u := \left(\sup_{s\geqslant 0} X_{u,1}(s),\ \ldots,\ \sup_{s\geqslant 0} X_{u,n}(s)\right)^{\top},$$

对于过程 $\boldsymbol{X}_u(\cdot) = (X_{1,\ u}(\cdot)\ldots,\ X_{n,\ u}(\cdot))$，其对任意 $t \in \mathbb{R}$ 定义为

$$\boldsymbol{X}_u(t) := (I - P^{\top})^{-1}\boldsymbol{J}(t) - \boldsymbol{r}t = \hat{\boldsymbol{p}}\, J(t) - \boldsymbol{r}(u)\, t,$$

其中，$\boldsymbol{J}(\cdot) := (J(\cdot)0,\ \ldots,\ 0) \in \mathbb{R}^n$，而 $\hat{\boldsymbol{p}}$是矩阵 $\big(I - P^{\top}\big)^{-}$的第一列。在我们的方法中，我们打算大量使用 LST，这意味着我们需要控制任意一对节点（即，不仅是相邻节点）的输出速率。因此，假设 **N2**⋆ 并不足够；相反，我们需要假设以下更严格版本的假设 **N2**⋆ 成立：

N2：对于任意 $j \in \{1,\ldots,n-1\}$ 以及任意的 $u > 0$，我们有 $r_j(u) > 0$ 和 $r_j(u)/p_j > r_{j+1}(u)/p_{j+1}$。

事实上，假设 **N1**和 **N2**结合起来意味着假设 **N2*** 成立，理由如下。对于任意的 $i,\ j \in \{1,\dots n\}$ 若 $p_{ij} > 0$，则根据假设 **N1**，我们有 $j > i$；根据假设 **N2**，我们有

$$r_i(u)/\hat{p}_i > r_{i+1}(u)/\hat{p}_{i+1} > \ldots > r_j(u)/\hat{p}_j.$$

因此，在情形 $p_{ij} > 0$ 下，由于 $\hat{p}_j = p_{ij}\hat{p}_i$，假设 **N2*** 得以成立。
也可以证明，假设 **N3*** 可由假设 **P** 直接推出。事实上，注意到$\mathbb{E}\{J(1)\}(I-P^\top)^{-1}_{i,\ 1} = 0$因为我们假设过程 $J(\cdot)$ 是中心化的。综合本段及前几段给出的论证，本文将始终采用假设 **P**、**N1** 和 **N2**。在这些假设下，我们知道**N1**、**N2*** 和 **N3*** 均成立。

此外，我们对 t 施加以下关于输出速率相对渐近行为的限制 :

R：对于任意 $i,\ j \in \{1,\dots,n\}$ 且满足 $i > j$ 的情形，我们假设 $\lim_{u\to\infty} r_i(u)/r_j(u) \in [0,1]$。

本文考虑两种极限状态：轻载情形，即当 $u \to \infty$时 $\boldsymbol{r}(u) \to \boldsymbol{\infty}$，以及重载情形，即当 $u \to \infty$ 时 $\boldsymbol{r}(u) \to \mathbf{0}$（其中$\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{\infty}$ 的含义不言自明）。对每种情形，我们对驱动L´evy过程 $J(\cdot)$的拉普拉斯指数施加特定假设：

- 对于轻负荷情形，我们假设**L**：当 $s \to \infty$ 时，$\log\ \mathbb{E}\left\{e^{-sJ_{(1)}}\right\} = \mathfrak{C}s^\alpha + o(s^\alpha)$，其中 $\mathfrak{C} < 0$ 与 $\alpha > 1$为某些常数。
- 对于重交通，我们假设**H**：当 $s \downarrow 0$ 时，$\log\ \mathbb{E}\left\{e^{-sJ_{(1)}}\right\} = \mathfrak{C}s^\alpha + o(s^\alpha)$，其中 $\mathfrak{C} < 0$ 与 $\alpha > 1$为某些常数。

2.2. 记号。 全文始终采用如下记号。对任意 $n \in \mathbb{N}$，我们用 $\langle n\rangle$ 表示集合 $\{1,\dots,n\}$；对任意 $n,k \in \mathbb{N}$，$k \leqslant n$，我们用 $\langle n\rangle^{k+}$ 表示集合$\{k,\dots,n\}$（从而 $\langle n\rangle = \langle n\rangle^{1+}$）。所有向量均以粗体书写，反之，所有粗体符号均表示向量。若 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^d$，我们也可写作 $\boldsymbol{b} = (b_1,\dots,b_d)^\top$（即对 $\boldsymbol{b}$的各分量不使用粗体）；在记号的轻微滥用下，若对某个有限集合I有 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\mathtt{I}} = \{i_1,\dots,i_k\} \subset \mathbb{N}$，则$\boldsymbol{b} = (b_{i_1},\dots,b_{i_n})^\top$。在此意义下，$\mathbb{R}^d$是 $\mathbb{R}^{\langle d\rangle}$的简化记号。对任意有限集合I，我们用 |I|表示其基数。对任意 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^k$，我们用 $\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}$ 表示它们的逐分量乘法，即$\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b} := (a_1b_1,,\dots,,a_kb_k)^\top$。

对于任意两个函数 $f(x)$ $g(x)$，$x \in \mathbb{R}$ 我们将 $f(x) \sim g(x)$ 记作 $x \to \infty$，如果 $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 1$。类似地，如果 $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 0$，我们将 $f(x) = o(g(x))$ 记作 $x \to \infty$；如果 $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) \in (0,\infty)$，则将 $f(x) \asymp g(x)$ 记作$x \to \infty$。
除了上述一般记号外，我们还引入专门针对网络结构和输出速率的其他记号。首先介绍与网络结构相关的记号。对于任意节点 $j \in \langle n\rangle^{2+}$，我们用 $j' \in \langle n\rangle$ 表示其在树形网络中的唯一祖先，即满足 $p_{j'j} > 0$ 的j'。对于任意 $j \in \langle n\rangle$，集合 $\mathtt{S}_j \subset \{j,\dots,n\}$ 表示索引不小于 j、且其祖先的索引（若存在）小于 j 的顶点集合，即

$$\mathtt{S}_j := \{j\} \cup \{i \in \langle n\rangle^{(j+1)+} \colon i' < j\}.$$

此外，对任意的 $j \in \langle n\rangle$，记 $\mathtt{D}j$ 为顶点 j 的所有子代组成的集合，即

$$\mathtt{D}_j := \{i \in \langle n\rangle \colon p_{ji} > 0\}.$$

下面列出集合 $\mathtt{S}j$ 和 $\mathtt{D}j$ 之间的一些关系，我们将在证明中反复使用这些关系。

引理 2.1。对于任意 $j,\ k \in \langle n\rangle,\ j \neq k$

(2) $$\mathtt{D}_j \cap \mathtt{D}_k = \varnothing,$$

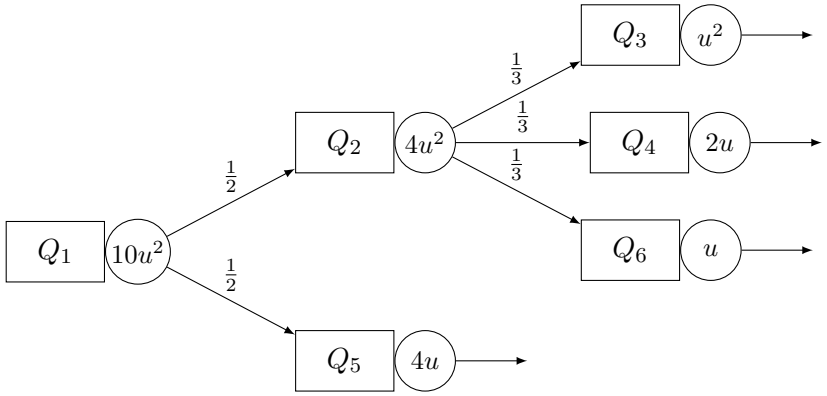


FIGURE 1. 含六个节点的示例树形网络。 $r_i(u)$ 的取值标在圆圈中，相应箭头上方标示了 p_{ij} 的取值。

$$\mathtt{S}_j \cap \bigcup_{l=j}^{n} \mathtt{D}_l = \varnothing, \tag{3}$$

$$\mathtt{S}_j \cup \bigcup_{l=j}^{n} \mathtt{D}_l = \langle n \rangle^{j+}, \tag{4}$$

$$\mathtt{S}_{j+1} = \mathtt{S}_j \cup \mathtt{D}_j \setminus \{j\}. \tag{5}$$

$$k \in \mathtt{S}_j \iff j \in \{k'+1, \ldots, k\}. \tag{6}$$

引理 2.1 的证明见附录A.1。特别地，将（4）与（2）和（3）结合可得

$$\mathtt{S}_j \sqcup \bigsqcup_{l=j}^{n} \mathtt{D}_l = \langle n \rangle^{j+}, \tag{7}$$

其中， $A \sqcup B = C$ 表示 $A \cap B = \varnothing$ 和 $A \cup B = C$。

接下来，我们介绍与输出速率相关的其他记号。根据假设 **R**，可以将集合 $\langle n \rangle$ 划分为互不相交的集合 $\mathbf{I}_1, \ldots, \mathbf{I}_m$，其中 $m \in \mathbb{N}$，并定义函数 $\mathbf{k}(\cdot) : \langle n \rangle \to \langle m \rangle$；对于任意 $k \in \langle m \rangle$，定义函数 $\mathbf{r}_k(\cdot)$，使得对于任意 $i \in \mathbf{I}_k$

$$\lim_{u\to\infty} \frac{r_i(u)}{r_{\mathtt{k}(i)}(u)} = \mathfrak{r}_i \in (0, 1], \tag{8}$$

并且，对于任意 $k, l \in \langle m \rangle$，满足 $k > l$，

$$\lim_{u\to\infty} \frac{r_k(u)}{r_l(u)} = 0. \tag{9}$$

关系（9）连同假设 **R1** 表明，集合 $\mathtt{I}_k$ 对任意 $k \in \langle m \rangle$ 是一个“区间”，即若 a， b， $c \in \langle n \rangle$，$a \leqslant b \leqslant c$ 且 a， $c \in \mathtt{I}_k$，则 $b \in \mathtt{I}_k$。对任意 $k \in \langle m \rangle$，我们将集合 $\mathtt{I}_k$ 的最小元素定义为 q_k，即

$$q_k := \min\{i \in \mathtt{I}_k\}.$$

（8）和（9）的一个关键推论是，对任意 i， $j \in \langle n \rangle$ 且满足 $i \leqslant j$，

$$\lim_{u\to\infty} \frac{r_j(u)}{r_{\mathtt{k}(i)}(u)} = \mathfrak{r}_j \mathbb{I}_{\{j \in \mathtt{I}_{\mathtt{k}(i)}\}} \tag{10}$$

记 $\mathtt{S}_j^\star := \mathtt{S}_j \cap \mathbf{I}^{\mathtt{k}(j)}$ 和 $\mathtt{D}_j^\star := \mathtt{D}_j \cap \mathbf{I}^{\mathtt{k}(j)}$。

例 2.2. 为说明上述记号，我们考虑以下示例网络；参见图 1。转移矩阵和输出速率向量分别为：

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r}(u) = \begin{pmatrix} 10u^2 \\ 4u^2 \\ u^2 \\ 2u \\ 4u \\ u \end{pmatrix}.$$

现在很容易验证，$\hat{}\boldsymbol{p} = (\mathbf{1}, 1/2, 1/6, 1/6, 1/2, 1/6)^\top$。这意味着假设**N2** 成立，因为对于 $u > 1$ ，我们有

$$r_1(u) > 2r_2(u) > 6r_3(u) > 6r_4(u) > 2r_5(u) > 6r_6(u).$$

输出速率仅对应于等价类，即

$$\mathtt{I}_1 = \{1, 2, 3\}, \qquad \mathtt{I}_2 = \{4, 5, 6\},$$

而可以验证，对于 $j \in \langle 6\rangle$ ，集合Sj、Dj、$\mathtt{S}_j^\star$ 和$\mathtt{D}_j^\star$ 为

$$\begin{aligned}
&\mathtt{S}_1 = \{1\}, \quad \mathtt{S}_1^\star = \{1\}, \quad \mathtt{D}_1 = \{2, 3\}, \quad \mathtt{D}_1^\star = \{2\}, \\
&\mathtt{S}_2 = \{2, 5\}, \quad \mathtt{S}_2^\star = \{2\}, \quad \mathtt{D}_2 = \{3, 4, 6\}, \quad \mathtt{D}_2^\star = \{3\}, \\
&\mathtt{S}_3 = \{3, 4, 5, 6\}, \quad \mathtt{S}_3^\star = \{3\}, \quad \mathtt{D}_3 = \{\varnothing\}, \quad \mathtt{D}_3^\star = \{\varnothing\}, \\
&\mathtt{S}_4 = \{4, 5, 6\}, \quad \mathtt{S}_4^\star = \{4, 5, 6\}, \quad \mathtt{D}_4 = \{\varnothing\}, \quad \mathtt{D}_4^\star = \{\varnothing\}, \\
&\mathtt{S}_5 = \{5, 6\}, \quad \mathtt{S}_5^\star = \{5, 6\}, \quad \mathtt{D}_5 = \{\varnothing\}, \quad \mathtt{D}_5^\star = \{\varnothing\}, \\
&\mathtt{S}_6 = \{6\}, \quad \mathtt{S}_6^\star = \{6\}, \quad \mathtt{D}_6 = \{\varnothing\}, \quad \mathtt{D}_6^\star = \{\varnothing\}.
\end{aligned}$$

T上述例子说明了如何确定我们之前引入的集合 . ◊

为了陈述本文的主要结果，我们需要一些额外的记号。令$\Psi^{-1}_{\alpha}{}_{C,,j}$(·)为（对于$C > 0$、 $\alpha > 1$ 和 $j \in \langle n\rangle$）由函数$\Psi_{\alpha,C,j}$(·)定义的逆函数

$$\Psi_{\alpha,C,j}(s) := \mathfrak{r}_j s + C\hat{p}_j^{\alpha} s^{\alpha}. \tag{11}$$

然后定义 （对于 $k \in \langle m\rangle$、 $j \in \langle n\rangle$、 $C > 0$、 $\alpha > 1$ 以及任意 $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^{\mathtt{I}_{k(j)}}$）如下常数 ts:

$$\mathscr{A}_{\alpha,k}(C, \boldsymbol{\omega}) := \sum_{l \in \mathtt{I}_k} \frac{\mathfrak{r}_l}{\hat{p}_l} \sum_{m \in \mathtt{D}_l^\star} \hat{p}_m \omega_m - \sum_{l \in \mathtt{I}_k} \omega_l \mathfrak{r}_l - C \left(\sum_{l \in \mathtt{S}^\star_{q_k}} \hat{p}_l \omega_l \right)^{\alpha}, \tag{12}$$

$$\mathscr{C}_{\alpha,j}(C, \boldsymbol{\omega}) := \Psi^{-1}_{\alpha,C,j}\big(\mathscr{F}_j(\boldsymbol{\omega})\big) - \sum_{l \in \mathtt{S}_j^\star} \frac{\hat{p}_l \omega_l}{\hat{p}_j}, \tag{13}$$

$$\mathscr{D}_{\alpha,j}(C, \boldsymbol{\omega}) := \Psi^{-1}_{\alpha,C,j}\big(\mathscr{F}_j(\boldsymbol{\omega})\big) - \sum_{l \in \mathtt{S}_{j+1}^\star} \frac{\hat{p}_l \omega_l}{\hat{p}_j}, \tag{14}$$

其中

$$\mathscr{F}_j(\boldsymbol{\omega}) := \sum_{\substack{l=j+1 \\ l \in \mathtt{I}_{k(j+1)}}}^{n} \left(\frac{\mathfrak{r}_{l-1}}{\hat{p}_{l-1}} - \frac{\mathfrak{r}_l}{\hat{p}_l} \right) \sum_{i \in \mathtt{S}_l^\star} \hat{p}_i \omega_i. \tag{15}$$

3. Main result

本节将介绍本文的主要结果。我们的目标是尽可能完整地描述随机变量 $u \to \infty$ 的联合分布 $Q^{r,\ j}{}^{u} := r_j^{\beta}(u)Q_{u,\ j}$，其中 $j \in \langle n \rangle$，记 $\beta := 1/(\alpha-1)$)。我们的结果分为两个定理：定理 3.1 讨论轻负荷情形，而定理 3.2讨论重负荷情形。回顾一下，我们已将 $\langle n \rangle$ 划分为以下 m 互不相交的集合 $\mathtt{I}_1, \ldots, \mathtt{I}_m$；参见第 2.2小节。

定理 3.1。 设网络 $(J(\cdot)\ P, \boldsymbol{r}(\cdot))$ 处于轻载情形。假设满足 **P**、**N1**、**N2**、**R** 和**L**。则，对于任意 $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}_+^n$,

$$\lim_{u\to\infty} \mathbb{E}\left\{e^{-\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{Q}^{r,u}\rangle}\right\} = \prod_{k=1}^{m} F_k\left(\mathfrak{r}_{\mathtt{I}_k}^{1/(\alpha-1)} \circ \boldsymbol{\omega}_{\mathtt{I}_k}\right),$$

其中，对于任意 $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}_+^{\mathtt{I}_k}$,

$$F_k(\boldsymbol{\omega}) := \frac{\omega_{q_k+|\mathtt{I}_k|-1}\mathfrak{r}_{q_k+|\mathtt{I}_k|-1}}{|\mathscr{A}_{\alpha,k}(\mathfrak{C},\boldsymbol{\omega})|} \prod_{j=0}^{|\mathtt{I}_k|-2} \frac{|\mathscr{C}_{\alpha,q_k+j}(\mathfrak{C},\boldsymbol{\omega})|}{|\mathscr{D}_{\alpha,q_k+j}(\mathfrak{C},\boldsymbol{\omega})|}.$$

定理 3.2 的证明见第5节。

定理 3.2。 设网络 $(J(\cdot)\ P, \boldsymbol{r}(\cdot))$ 处于重载情形。假设满足 **P**、**N1**、**N2**、**R** 和**H**。则，对于任意 $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}_+^n$,

$$\lim_{u\to\infty} \mathbb{E}\left\{e^{-\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{Q}^{r,u}\rangle}\right\} = \prod_{k=1}^{m} F_k\left(\mathfrak{r}_{\mathtt{I}_k}^{1/(\alpha-1)} \circ \boldsymbol{\omega}_{\mathtt{I}_k}\right),$$

其中，对任意 $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}_+^{\mathtt{I}_k}$,

$$F_k(\boldsymbol{\omega}) := \frac{\omega_{q_k+|\mathtt{I}_k|-1}\mathfrak{r}_{q_k+|\mathtt{I}_k|-1}}{|\mathscr{A}_{\alpha,k}(\mathfrak{C},\boldsymbol{\omega})|} \prod_{j=0}^{|\mathtt{I}_k|-2} \frac{|\mathscr{C}_{\alpha,q_k+j}(\mathfrak{C},\boldsymbol{\omega})|}{|\mathscr{D}_{\alpha,q_k+j}(\mathfrak{C},\boldsymbol{\omega})|}.$$

定理 3.2的证明与定理 3.1的证明类似。

注 3.3。 值得注意的是，定理 3.2要求假设 $J(\cdot)$ 的拉普拉斯指数在零点处的渐近分析满足条件（即 **L**），而定理 3.1 要求假设 $J(\cdot)$ 的拉普拉斯指数在无穷远处的渐近分析满足条件（即 **H**）。第 4 节表明，假设 **H** 适用于一大类 L´évy 过程，而满足假设 **L**的过程类则窄得多。$\Diamond$

注 3.4。 我们的假设无法确定常数 $\mathrm{A}_{\alpha,k}(\mathfrak{C},\boldsymbol{\omega})$ 和 $\mathrm{D}_{\alpha,q_k+j}(\mathfrak{C},\boldsymbol{\omega})$ 的符号，甚至无法保证这些常数非零。然而，如果 $\mathrm{A}_{\alpha,k}(\mathfrak{C},\boldsymbol{\omega}^\star) = 0$ 对某个 $\boldsymbol{\omega}^\star \in \mathbb{R}_+^n$成立，那么这意味着

$$\lim_{\omega\to\omega^\star} \mathscr{C}_{\alpha,q_k}(\mathfrak{C},\boldsymbol{\omega})/\mathscr{A}_{\alpha,k}(\mathfrak{C},\boldsymbol{\omega}) \in (0,\infty); \tag{16}$$

if $\mathrm{D}_{\alpha,\ q_k+j}(\mathfrak{C},\ \boldsymbol{\omega}^\star) = 0$ 对于某个 $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}_+^{|\mathtt{I}_k|}$，则这意味着 $j < |\mathtt{I}_k| - 2$，并且

$$\lim_{\omega\to\omega^\star} \mathscr{C}_{\alpha,q_k+j+1}(\mathfrak{C},\boldsymbol{\omega})/\mathscr{D}_{\alpha,q_k+j}(\mathfrak{C},\boldsymbol{\omega}) \in (0,\infty). \tag{17}$$

因此，函数 $F_k(\boldsymbol{\omega})$ 对所有$\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}_+^{\mathtt{I}_k}$仍然可以良好定义。这些性质的证明见附录A.3。$\Diamond$

4. Examples

我们可以将定理3.1 和3.2 中提出的假设分为两类：关于输入过程的假设 $J(\cdot)$（即**P**、**L**、**H**）以及关于网络结构的假设（即**N1**、**N2** 和**R**）。本节首先给出两个由我们的结果涵盖的输入过程示例，随后讨论定理3.1 和3.2 在两个特定网络中的应用（所需的关于过程 $J(\cdot)$的假设均已满足）。

4.1. 输入过程的示例。 在本小节中，我们讨论三类过程：复合泊松过程、伽马过程以及 α-稳定过程之和。

中心化谱正复合泊松过程——设 $J^\star(t)$（对 $t \in [0,\infty)$）为一个强度为 $\lambda > 0$的复合泊松过程，其独立跳跃几乎必然非负，且与随机变量 B同分布，该随机变量的拉普拉斯–斯蒂尔切斯变换为 $b(s)$：$= \mathbb{E}\left\{e^{-sB}\right\}$。我们用 $J(\cdot)$表示过程 $J^\star(\cdot)$的中心化版本，即对任意 $t \in [0,\infty)$,

$$J(t) := J^\star(t) - \mathbb{E}\left\{J^\star(t)\right\} = J^\star(t) - \lambda t\,\mathbb{E}\left\{B\right\}.$$

过程 $J(\cdot)$仅具有正跳跃，因此它满足**P**。与过程 $J(\cdot)$相应的拉普拉斯指数对任意 $t \in [0,\infty)$为

$$\log \mathbb{E}\left\{e^{-sJ(1)}\right\} = \log \mathbb{E}\left\{e^{-sJ^\star(1)}\right\} + \lambda s\,\mathbb{E}\left\{B\right\} = \lambda\left(b(s) - 1 + s\,\mathbb{E}\left\{B\right\}\right).$$

在情形 $\mathbb{E}\left\{B^2\right\} < \infty$ 下，我们可以写成

$$\log \mathbb{E}\left\{e^{sJ(1)}\right\} = s^2\lambda\mathbb{E}\left\{B^2\right\}/2 + o(s^2)$$

为 $s \downarrow 0$，这意味着过程 $J(\cdot)$ 在 $\alpha = 2$和 $\mathfrak{C} = \lambda\mathbb{E}\left\{B^2\right\}/2$ 下满足假设 **H**。然而，在区域 $s \to \infty$ 中，我们有 $b(s) \to 0$，这意味着当 $s \to \infty$ 时 $\log\ \mathbb{E}\left\{e^{-sJ(1)}\right\} = \mathbb{E}\left\{B\right\}s + o(s)$，因此这类过程无法满足假设**L**。

中心化伽马过程——对于正常数 γ，$\beta > 0$，考虑 L´evy 过程 $J(\cdot)$ 由其 *L´evy* 三元组 $(d,\ 0,\ \Pi)$ [21, 第 1.1 节，第 1.2 小节。4], 其中

$$\log \mathbb{E}\left\{e^{-sJ(1)}\right\} = -sd + \beta\log\left(\frac{\gamma}{\gamma+s}\right) + s\int_0^1 x\,\Pi(\mathrm{d}x),\ \text{with}\ \Pi(\mathrm{d}x) := \mathbb{I}_{x>0}\frac{\beta}{x}e^{-\gamma x}\mathrm{d}x.$$

由于支 t of Π 完全位于 $\mathbb{R}_+$ 上，过程 $J(\cdot)$ 是谱正的。注意到 t

$$\mathbb{E}\left\{J(1)\right\} = -\lim_{s\downarrow 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\log \mathbb{E}\left\{e^{-sJ(1)}\right\} = d + \frac{\beta}{\gamma} - \int_0^1 x\,\Pi(\mathrm{d}x),$$

如果我们选择.....，该过程就是中心化的

$$d := \int_0^1 x\Pi(\mathrm{d}x) - \frac{\beta}{\gamma}.$$

采用这一选择，我们得出 出结论， $J(\cdot)$ 满足假设 **P**。应用弗鲁拉尼积分，我们得到

$$\mathbb{E}\left\{e^{-sJ(1)}\right\} = \left(\frac{\gamma}{\gamma+s}\right)^\beta e^{s\beta/\gamma};$$

参见例如 [8, 第 2 节2]。因此，当 $s \downarrow 0$ 时，

$$\begin{aligned}\log \mathbb{E}\left\{e^{-sJ(1)}\right\} &= \beta\log\left(\frac{\gamma}{\gamma+s}\right) + \frac{s\beta}{\gamma} = \frac{s\beta}{\gamma} - \frac{s\beta}{\gamma+s} - \frac{s^2\beta}{2(\gamma+s)^2} + o(s^2)\\ &= \frac{s^2\beta}{\gamma(\gamma+s)} - \frac{s^2\beta}{2(\gamma+s)^2} + o(s^2) = \frac{s^2\beta}{2\gamma^2} + o(s^2),\end{aligned}$$

这意味着 $J(\cdot)$ 满足假设 **H**，其中 $\alpha = 2$ 和 $\mathfrak{C} = \beta/2\gamma^2$。然而，由于 $s \to \infty$，我们有 $\log\ \mathbb{E}\left\{e^{-sJ(1)}\right\} = s\beta/\gamma + o(s)$，因此中心化伽马过程 $J(\cdot)$ 不满足假设 **L**。

叠加 α-稳定过程——固定某个整数常数 $l \in \mathbb{N}$。令 $J_k(\cdot)$ 对任意 $k \in \langle l \rangle$ 均为中心化、谱正的 α-稳定的勒维过程，其参数为 $\alpha_k \in (1,2]$。我们假设所有过程 $J_k(\cdot)$（对 $k \in \langle l \rangle$ 而言）相互独立。根据 [8, 第 2 节，3], 与 $J_k(1)$ 对应的拉普拉斯指数具有如下形式：对于常数 C_k,

$$\log \mathbb{E}\left\{e^{-sJ_k(1)}\right\} = C_k s^{\alpha_k}.$$

那么，过程 $J(\cdot) := \sum_{k=1}^{l} J_k(\cdot)$ 仍然是中心化的谱正 Lévy 过程，因此满足假设 **P**，且 $J(\cdot)$ 的拉普拉斯指数为

$$\log \mathbb{E}\left\{e^{-sJ(1)}\right\} = \sum_{k=1}^{l} C_k s^{\alpha_k}.$$

因此，过程 $J(\cdot)$ 满足假设 **L** ，其中

$$\alpha = \max_{k \in \langle l \rangle} \alpha_k, \qquad \mathfrak{C} = \sum_{k=1}^{l} C_k \mathbb{I}_{\{\alpha_k = \alpha\}},$$

并且满足假设**H** ，其中

$$\alpha = \min_{k \in \langle l \rangle} \alpha_k, \qquad \mathfrak{C} = \sum_{k=1}^{l} C_k \mathbb{I}_{\{\alpha_k = \alpha\}}.$$

类似地，我们可以考虑上述三类过程的各种混合，例如，将谱正 α-稳定 Lévy 过程与谱正复合泊松过程或伽马过程进行卷积。

4.2. 网络结构示例。 本节通过考察特定的网络结构来说明我们的主要结果。

双层网络 — 我们考虑一个包含两层的模型：一个根节点和第二层的 $n-1$ 个节点，其特征由路由矩阵刻画

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p_2 & \dots & p_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

输出速率 $r_i(u)$ 满足：对于任意 $i \in \langle n \rangle^{2+}$

$$\lim_{u\to\infty} \frac{r_i(u)}{r_1(u)} = 0, \quad \lim_{u\to\infty} \frac{r_i(u)}{r_2(u)} = \mathfrak{r}_i.$$

对于某些常数 $\mathfrak{r}_j > 0$。此外，假设对于任意 $j \in \langle n-1 \rangle^{2+}$ 和任意 $u > 0$

$$\frac{r_{j+1}(u)}{p_{j+1}} < \frac{r_j(u)}{p_j}.$$

那么，若在轻负荷情况下，输入过程 $J(\cdot)$ 满足假设**P** 和**L** ，或在重负荷情况下满足假设**P** 和**H**，我们的结果意味着

$$\lim_{u\to\infty} \mathbb{E}\left\{e^{-\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{Q}^{r,u}\rangle}\right\} = F_1(\omega_1) F_2(\mathfrak{r}_2^{\beta}\omega_2, \dots, \mathfrak{r}_n^{\beta}\omega_n) \tag{18}$$

其中， $\psi_j(s) = \mathfrak{r}_j s + \mathfrak{C} p_j^\alpha s^\alpha$ 适用于 $\alpha \in (1,2]$,

$$F_1(\omega_1) = \frac{1}{1+\mathfrak{C}\omega_1^{\alpha-1}}, \quad F_2(\boldsymbol{\omega}) = \frac{\omega_n \mathfrak{r}_n}{\sum\limits_{l=2}^{n} \omega_l \mathfrak{r}_l + \mathfrak{C}\left(\sum\limits_{l=2}^{n} p_l \omega_l\right)^\alpha} \prod_{j=2}^{n-1} \frac{\left|\psi_j^{-1}\left(\sum\limits_{l=j+1}^{n}\left(\frac{\mathfrak{r}_j}{p_j}-\frac{\mathfrak{r}_l}{p_l}\right)p_l\omega_l\right) - \sum\limits_{l=j}^{n}\frac{p_l\omega_l}{p_j}\right|}{\left|\psi_j^{-1}\left(\sum\limits_{l=j+1}^{n}\left(\frac{\mathfrak{r}_j}{p_j}-\frac{\mathfrak{r}_l}{p_l}\right)p_l\omega_l\right) - \sum\limits_{l=j+1}^{n}\frac{p_l\omega_l}{p_j}\right|}.$$

式（18）的证明见附录A.4。请注意，在所考虑的极限状态下，根节点的平稳工作量与下游节点的平稳工作量渐近独立，但各个下游节点之间仍然相依；参见 [5, 7]。可见，根队列中的平稳工作量具有 *Mittag-Leffler*型的极限分布（指数为 α）。

下面详细讨论几个特殊情形。首先，若 $\mathfrak{r}_2 = \ldots = \mathfrak{r}_n = 1$，则 $\psi_j(s) = s + \mathfrak{C} p_j^\alpha s^\alpha$。我们得到

$$F_2(\omega_2,\ldots,\omega_n) = \frac{\omega_n}{\sum\limits_{l=2}^{n}\omega_l + \mathfrak{C}\left(\sum\limits_{l=2}^{n} p_l\omega_l\right)^\alpha} \prod_{j=2}^{n-1} \frac{\psi_j^{-1}\left(\sum\limits_{l=j+1}^{n}\frac{p_l-p_j}{p_j}\omega_l\right) - \sum\limits_{l=j}^{n}\frac{p_l\omega_l}{p_j}}{\psi_j^{-1}\left(\sum\limits_{l=j+1}^{n}\frac{p_l-p_j}{p_j}\omega_l\right) - \sum\limits_{l=j+1}^{n}\frac{p_l\omega_l}{p_j}}.$$

其次，若 $p_2 = \ldots = p_n = 1/(n-1)$，则 $\psi_j(s) = \mathfrak{r}_j s + \frac{\mathfrak{C}}{n-1)_\alpha} s^\alpha$。由此可得

$$F_2(\omega_2,\ldots,\omega_n) = \frac{\omega_n \mathfrak{r}_n}{\sum\limits_{l=2}^{n}\omega_l\mathfrak{r}_l + \mathfrak{C}\left(\sum\limits_{l=2}^{n}\frac{\omega_l}{n-1}\right)^\alpha} \prod_{j=2}^{n-1} \frac{\psi_j^{-1}\left(\sum\limits_{l=j+1}^{n}(\mathfrak{r}_j-\mathfrak{r}_l)\omega_l\right) - \sum_{l=j}^{n}\omega_l\mathfrak{r}_l}{\psi_j^{-1}\left(\sum\limits_{l=j+1}^{n}(\mathfrak{r}_j-\mathfrak{r}_l)\omega_l\right) - \sum_{l=j+1}^{n}\omega_l\mathfrak{r}_l}.$$

若 $\mathfrak{r}_2 = \ldots = \mathfrak{r}_n = 1$ 和 $p_2 = \ldots = p_n = 1/(n-1)$ 同时成立，则

$$F_2(\omega_2,\ldots,\omega_n) = \frac{\sum\limits_{l=2}^{n}\omega_l}{\sum\limits_{l=2}^{n}\omega_l - \mathfrak{C}\left(\frac{1}{n-1}\sum\limits_{l=2}^{n}\omega_l\right)^\alpha} = \frac{1}{1-\frac{\mathfrak{C}}{(n-1)^\alpha}\left(\sum\limits_{l=2}^{n}\omega_l\right)^{\alpha-1}},$$

这意味着，在所考虑的极限状态下， $n-1$ 个下游队列的总和在平稳状态下服从 Mittag-Leffler 分布（指数为 α）。

串联系统 — 作为第二个例子，我们考虑一个由 n个节点构成的串联系统，即一个由路由矩阵刻画的网络

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

输出速率为 $r_1(u) > \ldots > r_n(u)$。我们假设，对于任意 $i,\ j \in \langle n\rangle$ 且满足 $i<j$ 的情形，

$$\lim_{u\to\infty}\frac{r_j(u)}{r_i(u)} \in [0,1].$$

如果输入过程 $J(\cdot)$ 在轻负荷情况下满足假设 **P** 和 **L**，或在重负荷情况下满足假设 **P** 和 **H**，那么

$$\lim_{u\to\infty}\mathbb{E}\left\{e^{-\langle\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{Q}^{r,u}\rangle}\right\}=\prod_{k=1}^{m}F_k(\omega_{q_k},\ldots,\omega_{q_{k+1}-1}), \tag{19}$$

其中，$q_{m+1}=n+1$，整数值序列 $1=q_1<\ldots<q_m\le n$ 的选取方式使得对于任意 $k\in\langle m\rangle$ 和任意 $j\in\langle q_{k+1}-1\rangle^{q_k+}$（表示 $r_{n+1}(u):=0$）

$$\lim_{u\to\infty}\frac{r_{q_{k+1}}(u)}{r_{q_k}(u)}=0,\quad \lim_{u\to\infty}\frac{r_j(u)}{r_{q_k}(u)}=\mathfrak{r}_j>0,$$

（注意，这样的序列存在且唯一），其中 $\psi_j(s):=\mathfrak{r}_j s+\mathfrak{C}s^{\alpha}$ 和 $F_k\equiv F_k(\omega_{q_k},\ldots\ldots,\omega_{q_{k+1}-1})$ 定义如下

$$F_k:=\left|\frac{\omega_{q_{k+1}-1}\mathfrak{r}^{\alpha\beta}_{q_{k+1}-1}}{\sum_{l=q_k+1}^{q_{k+1}-1}(\mathfrak{r}_{l-1}-\mathfrak{r}_l)\omega_l\mathfrak{r}_l^{\beta}-\omega_{q_k}-\mathfrak{C}\omega^{\alpha}_{q_k}}\prod_{j=q_k}^{q_{k+1}-2}\frac{\psi_j^{-1}\left(\sum_{l=j+1}^{q_{k+1}-1}(\mathfrak{r}_{l-1}-\mathfrak{r}_l)\omega_l\mathfrak{r}_l^{\beta}\right)-\omega_j\mathfrak{r}_j^{\beta}}{\psi_j^{-1}\left(\sum_{l=j+1}^{q_{k+1}-1}(\mathfrak{r}_{l-1}-\mathfrak{r}_l)\omega_l\mathfrak{r}_l^{\beta}\right)-\omega_{j+1}\mathfrak{r}_{j+1}^{\beta}}\right|.$$

式（19）的证明见附录A.5。特别地，在“完全解耦”的情形下（即，如果对于任意 $u\to\infty\, r_j(u)/r_i(u)$，都有 $=0$，$i,\ j\in\langle n\rangle$ 且 $i<j$），则有 $m=n,\ q_k=k$ 对于任意 $k\in\langle n\rangle$，并且

$$\lim_{u\to\infty}\mathbb{E}\left\{e^{-\langle\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{Q}^{r,u}\rangle}\right\}=\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{1+\mathfrak{C}\omega_k^{\alpha-1}},$$

这意味着，在这一极限状态下，所有节点的平稳工作负载渐近地相互独立且同分布，其极限分布属于指数为 α 的 Mittag-Leffler 型。

5. Proof of Theorem 3.1

在整个证明过程中，除非另有说明，我们都将渐近关系视为 $u\to\infty$。首先，为证明定理 3.1，我们推导任意固定输出速率 $\boldsymbol{r}>0$下平稳工作负载 $\boldsymbol{Q}$的拉普拉斯–斯蒂尔切斯变换。以下结果推广了 [9, Theorem6.1]，适用于排队网络；其证明见附录 $j\in\langle n-1\rangle$A.3 $\boldsymbol{\omega}\in\mathbb{R}^n_+$。对任意 $s\in\mathbb{R}_+$，定义

$$\delta_j(\boldsymbol{\omega}):=\sum_{l\in\mathtt{S}_j}\frac{\hat{p}_l\omega_l}{\hat{p}_j}, \tag{20}$$

$$\hat{\delta}_j(\boldsymbol{\omega}):=\sum_{l\in\mathtt{S}_{j+1}}\frac{\hat{p}_l\omega_l}{\hat{p}_j}, \tag{21}$$

$$\kappa_{j+1}(\boldsymbol{\omega}):=\sum_{l=j+1}^{n}\left(\frac{r_{l-1}}{\hat{p}_{l-1}}-\frac{r_l}{\hat{p}_l}\right)\sum_{i\in\mathtt{S}_l}\hat{p}_i\omega_i, \tag{22}$$

$$\psi_i(s):=\log\mathbb{E}\left\{e^{-sX_i(1)}\right\}=r_i s+\log\mathbb{E}\left\{e^{-s\hat{p}_j J(1)}\right\}, \tag{23}$$

且 $\Phi_i(\cdot)$ 是 $\psi_i(\cdot)$ 的逆函数，此外，

$$\kappa_{j+1}(\boldsymbol{\omega})=\sum_{i=j+1}^{n}\left(\frac{r_{\max(j,i')}}{\hat{p}_{\max(j,i')}}-\frac{r_i}{\hat{p}_i}\right)\hat{p}_i\omega_i. \tag{24}$$

引理 5.1。 考虑排队网络 $(J, P, \boldsymbol{r})$，并假设 **P**、**N1**、**N2** 和**R**成立。则，对于任意 $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^n_+$

$$\mathbb{E}\left\{e^{-\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{Q}\rangle}\right\} = -\mathbb{E}\left\{X_n(1)\right\} \frac{\omega_n}{\psi_n(\omega_n)} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\Phi_j\big(\kappa_{j+1}(\boldsymbol{\omega})\big) - \delta_j(\boldsymbol{\omega})}{\Phi_j\big(\kappa_{j+1}(\boldsymbol{\omega})\big) - \hat{\delta}_j(\boldsymbol{\omega})} \frac{\kappa_{j+1}(\boldsymbol{\omega}) - \psi_j\big(\hat{\delta}_j(\boldsymbol{\omega})\big)}{\kappa_{j+1}(\boldsymbol{\omega}) - \psi_j\big(\delta_j(\boldsymbol{\omega})\big)}. \tag{25}$$

对于给定的 $\boldsymbol{\omega}$，定义

$$\begin{aligned} N_{j,1}(u) &:= \Phi_j\left(\kappa^\star_{j+1}(u)\right) - \delta^\star_j(u), \quad N_{j,2}(u) := \kappa^\star_{j+1}(u) - \psi_j\big(\hat{\delta}^\star_j(u)\big), \\ D_{j,1}(u) &:= \Phi_j\left(\kappa^\star_{j+1}(u)\right) - \hat{\delta}^\star_j(u), \quad D_{j,2}(u) := \kappa^\star_{j+1}(u) - \psi_j\big(\delta^\star_j(u)\big), \end{aligned}$$

其中，对于任意 $j \in \langle n-1\rangle$，记

$$\kappa^\star_{j+1}(u) := \kappa_{j+1}\big(\boldsymbol{\omega}^\star(u)\big), \qquad \delta^\star_j(u) := \delta_j\big(\boldsymbol{\omega}^\star(u)\big), \qquad \hat{\delta}^\star_j(u) := \hat{\delta}_j\big(\boldsymbol{\omega}^\star(u)\big),$$

对于任意 $j \in \langle n\rangle$，有

$$\omega^\star_j(u) := r^\beta_j(u)\, \omega_j. \tag{26}$$

作为上述引理的直接推论，由（25），随机向量,^{u} 的联合拉普拉斯-斯蒂尔切斯变换等于

$$\mathbb{E}\left\{e^{-\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{Q}^{r,u}\rangle}\right\} = \mathbb{E}\left\{e^{-\langle \boldsymbol{\omega}^\star(u), \boldsymbol{Q}_u\rangle}\right\} = -\mathbb{E}\left\{X_n(1)\right\} \frac{\omega^\star_n(u)}{\psi_n\big(\omega^\star_n(u)\big)} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{N_{j,1}(u)}{D_{j,1}(u)} \frac{N_{j,2}(u)}{D_{j,2}(u)}. \tag{27}$$

利用（20）、（21）、（22）和（24），可得对于任意 $j \in \langle n-1\rangle$,

$$\delta^\star_j(u) = \sum_{l \in \mathtt{S}_j} \frac{\hat{p}_l \omega_l r^\beta_l(u)}{\hat{p}_j}, \tag{28}$$

$$\hat{\delta}^\star_j(u) = \sum_{l \in \mathtt{S}_{j+1}} \frac{\hat{p}_l \omega_l r^\beta_l(u)}{\hat{p}_j}, \tag{29}$$

$$\kappa^\star_{j+1}(u) = \sum_{l=j+1}^{n} \left(\frac{r_{l-1}(u)}{\hat{p}_{l-1}} - \frac{r_l(u)}{\hat{p}_l}\right) \sum_{i \in \mathtt{S}_l} \hat{p}_i \omega_i r^\beta_i(u), \tag{30}$$

我们分别评估（27）中乘积内各因子的分子和分母（在 $u \to \infty$ 的情形下），但先从乘积前分式的分母开始。

——展开 $\psi_n\big(\omega^\star_n$（$u$）$\big)$。 假设 **L** 结合定义（23）告诉我们，当 $s \to \infty$ 时，在 u 中一致地有,

$$\begin{aligned} \psi_j(s) &= \log \mathbb{E}\left\{e^{-sX_j(1)}\right\} = \log \mathbb{E}\left\{e^{-s(\hat{p}_j J(1) - r_j(u))}\right\} = \log \mathbb{E}\left\{e^{sr_j(u))}\right\} \log \mathbb{E}\left\{e^{-s\hat{p}_j J(1)}\right\} \\ &= r_j(u)s + \mathfrak{C}\hat{p}^\alpha_j s^\alpha + o(s^\alpha). \end{aligned} \tag{31}$$

因此，回顾（26）以及 $\beta + 1 = \alpha\beta$ 这一事实,

$$\begin{aligned} \psi_n\big(\omega^\star_n(u)\big) &= r_n(u) r^\beta_n(u) \omega_n + \mathfrak{C}\hat{p}^\alpha_n \left(r^\beta_n(u)\omega_n\right)^\alpha + o\left(r^\beta_n(u)\right) \\ &= \left(\omega_n + \mathfrak{C}\hat{p}^\alpha_n \omega^\alpha_n\right) r^{\alpha\beta}_n(u) + o\left(r^{\alpha\beta}_n(u)\right) \end{aligned} \tag{32}$$

— D_j的展开，$_2(u)$。 将 (10) 应用于 (28) 与 (29)，我们得到，对任意 $j \in \langle n-1\rangle$,

$$\delta^\star_j(u) = \varkappa^\beta_{\mathscr{k}(j)}(u) \sum_{l \in \mathtt{S}^\star_j} \frac{\hat{p}_l \omega_l \mathfrak{r}^\beta_l}{\hat{p}_j} + o\left(\varkappa^\beta_{\mathscr{k}(j)}(u)\right), \tag{33}$$

$$\hat{\delta}^\star_j(u) = \varkappa^\beta_{\mathscr{k}(j+1)}(u) \sum_{l \in \mathtt{S}^\star_{j+1}} \frac{\hat{p}_l \omega_l \mathfrak{r}^\beta_l}{\hat{p}_j} + o\left(\varkappa^\beta_{\mathscr{k}(j+1)}(u)\right), \tag{34}$$

并且，将 (30) 与 (10) 结合，我们有，对任意 $j \in \langle n-1 \rangle$,

$$\kappa^{\star}_{j+1}(u) = f_j \varkappa_{\mathscr{k}(j)}(u) \varkappa^{\beta}_{\mathscr{k}(j+1)}(u) + o\left(\varkappa_{\mathscr{k}(j)}(u) \varkappa^{\beta}_{\mathscr{k}(j+1)}(u)\right), \tag{35}$$

其中，回顾定义（15），

$$\begin{aligned} f_j &= \sum_{l=j+1}^{n} \left(\mathbb{I}_{\{l-1 \in \mathscr{k}(j)\}} \frac{\mathfrak{r}_{l-1}}{\hat{p}_{l-1}} - \mathbb{I}_{\{l \in \mathscr{k}(j+1)\}} \frac{\mathfrak{r}_l}{\hat{p}_l} \right) \sum_{i \in \mathtt{S}^{\star}_l} \hat{p}_i \omega_i \mathfrak{r}_i^{\beta} \\ &= \begin{cases} \sum\limits_{\substack{l=j+1 \\ l \in \mathtt{I}_{\mathscr{k}(j+1)}}}^{n} \left(\frac{\mathfrak{r}_{l-1}}{\hat{p}_{l-1}} - \frac{\mathfrak{r}_l}{\hat{p}_l} \right) \sum\limits_{i \in \mathtt{S}^{\star}_l} \hat{p}_i \omega_i \mathfrak{r}_i^{\beta}, & \text{if } \mathscr{k}(j) = \mathscr{k}(j+1), \\ \frac{\mathfrak{r}_j}{\hat{p}_j} \sum\limits_{l \in \mathtt{S}^{\star}_{j+1}} \hat{p}_l \omega_l \mathfrak{r}_l^{\beta}, & \text{if } \mathscr{k}(j) \neq \mathscr{k}(j+1), \end{cases} \\ &= \begin{cases} \mathscr{F}_{\alpha,j}\left(\mathfrak{r}_{\mathtt{I}_k} \circ \boldsymbol{\omega}_{\mathtt{I}_{\mathscr{k}(j)}} \right), & \text{if } \mathscr{k}(j) = \mathscr{k}(j+1), \\ \frac{\mathfrak{r}_j}{\hat{p}_j} \sum\limits_{l \in \mathtt{S}^{\star}_{j+1}} \hat{p}_l \omega_l \mathfrak{r}_l^{\beta}, & \text{if } \mathscr{k}(j) \neq \mathscr{k}(j+1). \end{cases} \end{aligned}$$

将（31）与（33）结合，可得，对任意 $j \in \langle n-1 \rangle$,

$$\begin{aligned} \psi_j\left(\delta^{\star}_j(u)\right) &= r_j(u)\delta^{\star}_j(u) + \mathfrak{C}\hat{p}_j^{\alpha}\left(\delta^{\star}_j(u)\right)^{\alpha} + o\left(\left(\delta^{\star}_j(u)\right)^{\alpha}\right) \\ &= \left(\mathfrak{r}_j \left(\sum_{l \in \mathtt{S}^{\star}_j} \frac{\hat{p}_l \omega_l \mathfrak{r}_l^{\beta}}{\hat{p}_j} \right) + \mathfrak{C}\hat{p}_j^{\alpha} \left(\sum_{l \in \mathtt{S}^{\star}_j} \frac{\hat{p}_l \omega_l \mathfrak{r}_l^{\beta}}{\hat{p}_j} \right)^{\alpha} \right) \varkappa^{\alpha\beta}_{\mathscr{k}(j)}(u) + o\left(\varkappa^{\alpha\beta}_{\mathscr{k}(j)}(u)\right). \end{aligned} \tag{36}$$

由（5）可知，对任意 $j \in \langle n-1 \rangle$,

$$\sum_{l \in \mathtt{S}^{\star}_{j+1}} \hat{p}_l \omega_l \mathfrak{r}_l^{\beta} - \sum_{l \in \mathtt{S}^{\star}_j} \hat{p}_l \omega_l \mathfrak{r}_l^{\beta} = \sum_{l \in \mathtt{D}^{\star}_j} \hat{p}_l \omega_l \mathfrak{r}_l^{\beta} - \hat{p}_j \omega_j \mathfrak{r}_j^{\beta}. \tag{37}$$

因此，将（35）与（36）结合，我们得出以下渐近展开成立：当 $u \to \infty$ 时，对任意 $j \in \langle n-1 \rangle$,

$$D_{j,2}(u) = \kappa^{\star}_{j+1}(u) - \psi_j\left(\delta^{\star}_j(u)\right) = a_j \varkappa^{\alpha\beta}_{\mathscr{k}(j)}(u) + o\left(\varkappa^{\alpha\beta}_{\mathscr{k}(j)}(u)\right), \tag{38}$$

其中，由于（37），对于任意 $j \in \langle n-1 \rangle$,

$$\begin{aligned} a_j &:= \mathbb{I}_{\mathscr{k}(j)=\mathscr{k}(j+1)} f_j - \mathfrak{r}_j \sum_{l \in \mathtt{S}^{\star}_j} \frac{\hat{p}_l \omega_l \mathfrak{r}_l^{\beta}}{\hat{p}_j} - \mathfrak{C}\left(\sum_{l \in \mathtt{S}^{\star}_j} \hat{p}_l \omega_l \mathfrak{r}_l^{\beta} \right)^{\alpha} \\ &= \begin{cases} \sum\limits_{\substack{l=j+1 \\ l \in \mathtt{I}_{\mathscr{k}(j+1)}}}^{n} \left(\frac{\mathfrak{r}_{l-1}}{\hat{p}_{l-1}} - \frac{\mathfrak{r}_l}{\hat{p}_l} \right) \sum\limits_{i \in \mathtt{S}^{\star}_l} \hat{p}_i \omega_i \mathfrak{r}_i^{\beta} - \mathfrak{r}_j \sum\limits_{l \in \mathtt{S}^{\star}_j} \frac{\hat{p}_l \omega_l \mathfrak{r}_l^{\beta}}{\hat{p}_j} - \mathfrak{C}\left(\sum\limits_{l \in \mathtt{S}^{\star}_j} \hat{p}_l \omega_l \mathfrak{r}_l^{\beta} \right)^{\alpha}, & \text{if } \mathscr{k}(j) = \mathscr{k}(j+1), \\ -\omega_j \mathfrak{r}_j^{\alpha\beta} - \mathfrak{C}\hat{p}_j^{\alpha} \omega_j^{\alpha} \mathfrak{r}_j^{\alpha\beta}, & \text{if } \mathscr{k}(j) \neq \mathscr{k}(j+1). \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sum\limits_{\substack{l=j+1 \\ l \in \mathtt{I}_{\mathscr{k}(j+1)}}}^{n-1} \frac{\mathfrak{r}_l}{\hat{p}_l} \left(\sum\limits_{i \in \mathtt{S}^{\star}_{l+1}} \hat{p}_i \omega_i \mathfrak{r}_i^{\beta} - \sum\limits_{i \in \mathtt{S}^{\star}_l} \hat{p}_i \omega_i \mathfrak{r}_i^{\beta} \right) - \omega_n \mathfrak{r}_n^{\alpha\beta} - \mathfrak{C}\left(\sum\limits_{l \in \mathtt{S}^{\star}_j} \hat{p}_l \omega_l \mathfrak{r}_l^{\beta} \right)^{\alpha}, & \text{if } \mathscr{k}(j) = \mathscr{k}(j+1), \\ -\omega_j \mathfrak{r}_j^{\alpha\beta} - \mathfrak{C}\hat{p}_j^{\alpha} \omega_j^{\alpha} \mathfrak{r}_j^{\alpha\beta}, & \text{if } \mathscr{k}(j) \neq \mathscr{k}(j+1). \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sum\limits_{\substack{l=j \\ l \in \mathtt{I}_{\mathscr{k}(j)}}}^{n-1} \frac{\mathfrak{r}_l}{\hat{p}_l} \sum\limits_{m \in \mathtt{D}^{\star}_l} \hat{p}_m \omega_m \mathfrak{r}_m^{\beta} - \sum\limits_{\substack{l=j \\ l \in \mathtt{I}_{\mathscr{k}(j)}}}^{n} \omega_l \mathfrak{r}_l^{\alpha\beta} - \mathfrak{C}\left(\sum\limits_{l \in \mathtt{S}^{\star}_j} \hat{p}_l \omega_l \mathfrak{r}_l^{\beta} \right)^{\alpha}, & \text{if } \mathscr{k}(j) = \mathscr{k}(j+1), \\ -\omega_j \mathfrak{r}_j^{\alpha\beta} - \mathfrak{C}\hat{p}_j^{\alpha} \omega_j^{\alpha} \mathfrak{r}_j^{\alpha\beta}, & \text{if } \mathscr{k}(j) \neq \mathscr{k}(j+1). \end{cases} \end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{l=j \\ l\in \mathtt{I}_{\mathfrak{k}(j)}}}^{n} \frac{\mathfrak{r}_l}{\hat{p}_l} \sum_{m\in \mathtt{D}_l^\star} \hat{p}_m\omega_m\mathfrak{r}_m^\beta - \sum_{\substack{l=j \\ l\in \mathtt{I}_{\mathfrak{k}(j)}}}^{n} \omega_l\mathfrak{r}_l^{\alpha\beta} - \mathfrak{C}\left(\sum_{l\in \mathtt{S}_j^\star} \hat{p}_l\omega_l\mathfrak{r}_l^\beta\right)^\alpha, \tag{39}$$

当 $\mathtt{D}_j^\star = \varnothing$ 时，若 $\mathtt{k}(j) \neq \mathtt{k}(j+1)$。

注 5.2. 注意，公式 (39) 对于 $j = n$ 也定义良好。因此，同样地，我们可以定义常数 a_n。

— $N_{j\text{的展开},\,2}(u)$。 首先，将 (29) 与 (30) 结合，并利用 (37)，对任意 $j \in \langle n-1\rangle$，回忆 $\mathtt{D}_n = \varnothing$，可得

$$\begin{aligned}
\kappa_{j+1}^\star(u) - r_j(u)\hat{\delta}_j^\star(u) &= \sum_{l=j+1}^{n}\left(\frac{r_{l-1}(u)}{\hat{p}_{l-1}} - \frac{r_l(u)}{\hat{p}_l}\right)\sum_{i\in \mathtt{S}_l}\hat{p}_i\omega_i r_i^\beta(u) - \frac{r_j(u)}{\hat{p}_j}\sum_{l\in \mathtt{S}_{j+1}}\hat{p}_l\omega_l r_l^\beta(u)\\
&= \sum_{l=j+2}^{n}\frac{r_{l-1}(u)}{\hat{p}_{l-1}}\sum_{i\in \mathtt{S}_l}\hat{p}_i\omega_i r_i^\beta(u) - \sum_{l=j+1}^{n}\frac{r_l(u)}{\hat{p}_l}\sum_{i\in \mathtt{S}_l}\hat{p}_i\omega_i r_i^\beta(u)\\
&= \sum_{l=j+1}^{n-1}\frac{r_l(u)}{\hat{p}_l}\left(\sum_{i\in \mathtt{S}_{l+1}}\hat{p}_i\omega_i r_i^\beta(u) - \sum_{i\in \mathtt{S}_l}\hat{p}_i\omega_i r_i^\beta(u)\right) - \omega_n r_n^{\alpha\beta}(u)\\
&= \sum_{l=j+1}^{n-1}\frac{r_l(u)}{\hat{p}_l}\left(\sum_{m\in \mathtt{D}_l}\hat{p}_m\omega_m r_m^\beta(u) - \hat{p}_l\omega_l r_l^\beta(u)\right) - \omega_n r_n^{\alpha\beta}(u)\\
&= \sum_{l=j+1}^{n}\frac{r_l(u)}{\hat{p}_l}\sum_{m\in \mathtt{D}_l}\hat{p}_m\omega_m r_m^\beta(u) - \sum_{l=j+1}^{n}\omega_l r_l^{\alpha\beta}(u).
\end{aligned} \tag{40}$$

因此，应用 (31) 和 (40)，对任意 $j \in \langle n-1\rangle$ 可得 (27) 中最后一个分数的分母的渐近分析：

$$\begin{aligned}
N_{j,2}(u) = \kappa_{j+1}^\star(u) - \psi_j\big(\hat{\delta}_j^\star(u)\big) &= \kappa_{j+1}^\star(u) - r_j(u)\hat{\delta}_j^\star(u) - \mathfrak{C}\hat{p}_j^\alpha\big(\hat{\delta}_j^\star(u)\big)^\alpha + o\big(\big(\hat{\delta}_j^\star(u)\big)^\alpha\big)\\
&= \sum_{l=j+1}^{n}\frac{r_l(u)}{\hat{p}_l}\sum_{i\in \mathtt{D}_l}\hat{p}_i\omega_i r_i^\beta(u) - \sum_{l=j+1}^{n}\omega_l r_l^{\alpha\beta}(u) - \mathfrak{C}\hat{p}_j^\alpha\big(\hat{\delta}_j^\star(u)\big)^\alpha + o\big(\big(\hat{\delta}_j^\star(u)\big)^\alpha\big)\\
&= b_j\varkappa_{\mathfrak{k}(j+1)}^{\alpha\beta} + o\big(\varkappa_{\mathfrak{k}(j+1)}^{\alpha\beta}\big),
\end{aligned} \tag{41}$$

其中，利用 (10) 和 (34)，

$$b_j := \sum_{\substack{l=j+1 \\ l\in \mathtt{I}_{\mathfrak{k}(j+1)}}}^{n} \frac{\mathfrak{r}_l}{\hat{p}_l} \sum_{m\in \mathtt{D}_l^\star} \hat{p}_m\omega_m\mathfrak{r}_m^\beta - \sum_{\substack{l=j+1 \\ l\in \mathtt{I}_{\mathfrak{k}(j+1)}}}^{n} \omega_l\mathfrak{r}_l^{\alpha\beta} - \mathfrak{C}\hat{p}_j^\alpha\left(\sum_{l\in \mathtt{S}_{j+1}^\star}\frac{\hat{p}_l\omega_l\mathfrak{r}_l^\beta}{\hat{p}_j}\right)^\alpha = a_{j+1}$$

由 (39) 可知。

— 展开 $N_{j,1}(u)$ 和 $D_{j,1}(u)$。对任意 $j \in \langle n-1\rangle$ 定义

$$\phi_j(u) := \Phi_j\big(\kappa_{j+1}^\star(u)\big). \tag{42}$$

我们需要推导函数 $\phi_j(u)$ 在 $u \to \infty$ 对每个 $j \in \langle n-1\rangle$ 的渐近分析。另一方面，利用（35），

$$\psi_j\big(\phi_j(u)\big) = \kappa_{j+1}^\star(u) = f_j\varkappa_{\mathfrak{k}(j)}(u)\varkappa_{\mathfrak{k}(j+1)}^\beta(u) + o\left(\varkappa_{\mathfrak{k}(j)}(u)\varkappa_{\mathfrak{k}(j+1)}^\beta(u)\right), \tag{43}$$

另一方面，使用（31）

$$\psi_j\big(\phi_j(u)\big) = r_j(u)\phi_j(u) + \mathfrak{C}\hat{p}_j^\alpha\big(\phi_j(u)\big)^\alpha + o\left(\big(\phi_j(u)\big)^\alpha\right). \tag{44}$$

比较（43）和（44）的主项可知，只可能有两种情况：要么

$$r_{k(j)}(u)r^{\beta}_{k(j+1)}(u) \asymp r_j(u)\phi_j(u),$$

or

$$r_{k(j)}(u)r^{\beta}_{k(j+1)}(u) \asymp \big(\phi_j(u)\big)^{\alpha}.$$

第一种情形等价于

$$\phi_j(u) \asymp r^{\beta}_{k(j+1)}(u),$$

而第二种情形等价于

$$\phi_j(u) \asymp r^{\frac{1}{\alpha}}_{k(j)}(u)r^{\frac{\beta}{\alpha}}_{k(j+1)}(u).$$

若 $k(j) = k(j+1)$，则这两种情形等价。然而，若 $k(j) \neq k(j+1)$，则在第二种情形中我们可以看到，应用（9），

$$\kappa^{\star}_{j+i}(u) = o\big(r_j(u)\phi_j(u)\big),$$

这意味着第二种情形不可能。因此，不失一般性，

$$\phi_j(u) = g_j r^{\beta}_{k(j+1)}(u) + o\left(r^{\beta}_{k(j+1)}(u)\right), \tag{45}$$

其中g_j 是如下方程的解

$$f_j = \mathfrak{r}_j g_j + \mathbb{I}_{k(j)=k(j+1)}\mathfrak{C}\hat{p}_j^{\alpha} g_j^{\alpha}$$

注 5.3. 由于 $f_j \geqslant 0$ 对于任意 $j \in \langle n-1\rangle$，常数 g_j 均有定义且对所有$j \in \langle n-1\rangle$非负。

结合（45）与（33）和（34），应用可得，当 $u \to \infty$时，

$$N_{j,1}(u) := \Phi_j\big(\kappa^{\star}_{j+1}(u)\big) - \delta^{\star}_j(u) = \phi_j(u) - \delta^{\star}_j(u) = c_j r^{\beta}_{k(j)}(u) + o\left(r^{\beta}_{k(j)}(u)\right), \tag{46}$$

$$D_{j,1}(u) := \Phi_j\big(\kappa^{\star}_{j+1}(u)\big) - \hat{\delta}^{\star}_j(u) = \phi_j(u) - \hat{\delta}^{\star}_j(u) = d^{\star}_j r^{\beta}_{k(j+1)}(u) + o\left(r^{\beta}_{k(j+1)}(u)\right), \tag{47}$$

其中

$$c_j := \mathbb{I}_{k(j)=k(j+1)} g_j - \sum_{l\in \mathrm{s}^{\star}_j} \frac{\hat{p}_l \omega_l \mathfrak{r}_l^{\beta}}{\hat{p}_j}, \qquad d^{\star}_j := g_j - \sum_{l\in \mathrm{s}^{\star}_{j+1}} \frac{\hat{p}_l \omega_l \mathfrak{r}_l^{\beta}}{\hat{p}_j}.$$

渐近关系（46）和（47）只有在常数 c_j 和 $d^{\star}_j$ 均非零时才有意义。可以验证，对于勒贝格测度下几乎所有 $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^n_+$， $c_j \neq 0$ 成立；若 $\mathrm{k}(j) = \mathrm{k}(j+1)$，则 $d^{\star}_j \neq 0$ 也成立。因此，关系（46）以及在 $\mathrm{k}(j) = \mathrm{k}(j+1)$ 时的关系（47），对几乎所有 $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^d_+$ 均适用；与注 3.4 类似，这些关系可推广至所有 $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^d_+$。然而，若 $\mathrm{k}(j) \neq \mathrm{k}(j+1)$，则对于任意 $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^n_+$，

$$g_j = \frac{f_j}{\mathfrak{r}_j} = \sum_{l\in \mathrm{s}^{\star}_{j+1}} \frac{\hat{p}_l \omega_l \mathfrak{r}_l^{\beta}}{\hat{p}_j},$$

这意味着 $d^{\star}_j = 0$。因此，关系式 (47) 可简化为 $D_{j,1}(u) = o(\mathrm{r}^{\beta}\ \mathrm{k}_{(j+1)}(u))$。于是，为了在 $\mathrm{k}(j) \neq \mathrm{k}(j+1)$ 的情形下导出 $D_{j,1}(u)$ 的首项，我们需要进一步展开 $\phi_j(u)$。将 (45) 与 (34)

$$\phi_j(u) = \hat{\delta}^{\star}_j(u) + o\big(r^{\beta}_{k(j+1)}(u)\big).$$

记$\varrho_j(u) := \phi_j(u) - \hat{\delta}^{\star}_j(u)$。因此，当 $u \to \infty$, $\varrho_j(u) = o\left(r^{\beta}_{k(j+1)}(u)\right)$。根据（31），

$$\psi_j\big(\phi_j(u)\big) = \kappa^{\star}_{j+1}(u) = r_j(u)\left(\hat{\delta}^{\star}_j(u) + \varrho_j(u)\right) + \mathfrak{C}\hat{p}_j^{\alpha}\left(\hat{\delta}^{\star}_j(u) + \varrho_j(u)\right)^{\alpha} + o\left(\left(\hat{\delta}^{\star}_j(u)\right)^{\alpha}\right).$$

考虑到（40），

$$\sum_{l=j+1}^{n}\frac{r_l(u)}{\hat{p}_l}\sum_{m\in\mathtt{D}_l}\hat{p}_m\omega_m r_m^{\beta}(u)-\sum_{l=j+1}^{n}\omega_l r_l^{\alpha\beta}(u)=r_j(u)\varrho_j(u)+\mathfrak{C}\hat{p}_j^{\alpha}\left(\hat{\delta}_j^{\star}(u)+\varrho_j(u)\right)^{\alpha}+o\left(\left(\hat{\delta}_j^{\star}(u)\right)^{\alpha}\right).$$

因此，利用（10），当 $u\to\infty$ （回忆定义（39））

$$\begin{aligned}r_j(u)\varrho_j(u)&=\left(\sum_{\substack{l=j+1\\ l\in\mathtt{I}_{\mathscr{k}(i+1)}}}^{n}\frac{\mathfrak{r}_l}{\hat{p}_l}\sum_{m\in\mathtt{D}_l^{\star}}\hat{p}_m\omega_m\mathfrak{r}_m^{\beta}-\sum_{\substack{l=j+1\\ l\in\mathtt{I}_{\mathscr{k}(j+1)}}}^{n}\omega_l\mathfrak{r}_l^{\alpha\beta}-\mathfrak{C}\hat{p}_j^{\alpha}\left(\sum_{l\in\mathtt{S}_{j+1}^{\star}}\frac{\hat{p}_l\omega_l\mathfrak{r}_l^{\beta}}{\hat{p}_j}\right)^{\alpha}\right)\varkappa_{\mathscr{k}(j+1)}^{\alpha\beta}(u)\\&\quad+o\left(\varkappa_{\mathscr{k}(j+1)}^{\alpha\beta}(u)\right)\\&=a_{j+1}\varkappa_{\mathscr{k}(j+1)}^{\alpha\beta}(u)+o\left(\varkappa_{\mathscr{k}(j+1)}^{\alpha\beta}(u)\right).\end{aligned}$$

这意味着

$$\varrho_j(u)=d_j^{\star\star}\varkappa_{\mathscr{k}(j+1)}^{\alpha\beta}(u)\varkappa_{\mathscr{k}(j)}^{-1}(u)+o\left(\varkappa_{\mathscr{k}(j+1)}^{\alpha\beta}(u)\varkappa_{\mathscr{k}(j)}^{-1}(u)\right),\tag{48}$$

对于 $d_j^{\star\star}:=a_{j+1}/\mathfrak{r}_j$。因此，当 $\mathbf{k}(j)\neq\mathbf{k}(j+1)$ 时，我们有

$$D_{j,1}(u)=\Phi_j(\kappa_{j+1}^{\star})-\hat{\delta}_j^{\star}(u)=\varrho_j(u)=d_j^{\star\star}\varkappa_{\mathscr{k}(j+1)}^{\alpha\beta}(u)\varkappa_{\mathscr{k}(j)}^{-1}(u)+o\left(\varkappa_{\mathscr{k}(j+1)}^{\alpha\beta}(u)\varkappa_{\mathscr{k}(j)}^{-1}(u)\right).\tag{49}$$

现在，我们结合 $D_{j,\,1}(u)$ 的两种渐近表示：在 47）中，当 $\mathscr{k}(j)=\mathscr{k}(j+1)$ 时；以及在（49）中，当 $\mathscr{k}(j)\neq\mathscr{k}(j+1)$ 时。因此，我们得到 $u\to\infty$ 时渐近分析的一般形式：

$$D_{j,1}(u)=\big(d_j+o(1)\big)\varkappa_{\mathscr{k}(j+1)}^{\beta}(u)\left(\frac{\varkappa_{\mathscr{k}(j+1)}}{\varkappa_{\mathscr{k}(j)}}\right)^{\mathbb{I}_{\mathscr{k}(j)\neq\mathscr{k}(j+1)}}=d_j\varkappa_{\mathscr{k}(j+1)}^{\alpha\beta}(u)\varkappa_{\mathscr{k}(j)}^{-1}+o\left(\varkappa_{\mathscr{k}(j+1)}^{\alpha\beta}(u)\varkappa_{\mathscr{k}(j)}^{-1}\right),\tag{50}$$

其中

$$d_j:=\begin{cases}d_j^{\star}=g_j-\sum\limits_{l\in\mathtt{S}_{j+1}^{\star}}\frac{\hat{p}_l\omega_l\mathfrak{r}_l^{\beta}}{\hat{p}_j}, & \text{if } \mathscr{k}(j)=\mathscr{k}(j+1),\\ d_j^{\star\star}=\frac{a_{j+1}}{\mathfrak{r}_j} & \text{if } \mathscr{k}(j)\neq\mathscr{k}(j+1).\end{cases}$$

— 综合上述展开式。将（32）、（38）、（41）、（46）和（50）代入（27），我们得到向量 $\boldsymbol{Q}^{r,u}$ 的拉普拉斯–斯蒂尔切斯变换的最终渐近表示：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\{e^{-\langle\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{Q}^{r,u}\rangle}\right\}&=\mathbb{E}\left\{e^{-\langle\boldsymbol{\omega}^{\star}(u),\boldsymbol{Q}_u\rangle}\right\}\\&=-\mathbb{E}\left\{X_n(1)\right\}\frac{\omega_n^{\star}(u)}{\psi_n\big(\omega_n^{\star}(u)\big)}\prod_{j=1}^{n-1}\frac{\Phi_j\left(\kappa_{j+1}^{\star}(u)\right)-\delta_j^{\star}(u)}{\Phi_j\left(\kappa_{j+1}^{\star}(u)\right)-\hat{\delta}_j^{\star}(u)}\frac{\kappa_{j+1}^{\star}(u)-\psi_j\big(\hat{\delta}_j^{\star}(u)\big)}{\kappa_{j+1}^{\star}(u)-\psi_j\big(\delta_j^{\star}(u)\big)}\\&\sim-r_n(u)\frac{r_n^{\beta}(u)\omega_n}{\left(\omega_n+\mathfrak{C}\hat{p}_n^{\alpha}\omega_n^{\alpha}\right)r_n^{\alpha\beta}(u)}\prod_{j=1}^{n-1}\frac{c_j\varkappa_{\mathscr{k}(j)}^{\beta}(u)}{d_j\varkappa_{\mathscr{k}(j+1)}^{\alpha\beta}(u)\varkappa_{\mathscr{k}(j)}^{-1}}\frac{b_j\varkappa_{\mathscr{k}(j+1)}^{\alpha\beta}}{a_j\varkappa_{\mathscr{k}(j)}^{\alpha\beta}(u)}\\&=-\frac{\omega_n\mathfrak{r}_n^{\alpha\beta}}{\left(\omega_n+\mathfrak{C}\hat{p}_n^{\alpha}\omega_n^{\alpha}\right)\mathfrak{r}_n^{\alpha\beta}}\prod_{j=1}^{n-1}\frac{c_j}{a_j}\frac{b_j}{a_j}=-\frac{\omega_n\mathfrak{r}_n^{\alpha\beta}a_n}{\left(\omega_n+\mathfrak{C}\hat{p}_n^{\alpha}\omega_n^{\alpha}\right)\mathfrak{r}_n^{\alpha\beta}a_1}\prod_{j=1}^{n-1}\frac{c_j}{d_j}\\&=\frac{\omega_n\mathfrak{r}_n^{\alpha\beta}}{a_1}\prod_{j=1}^{n-1}\frac{c_j}{d_j}=\prod_{k=1}^{m}f_k^{\star}\end{aligned}$$

其中，对任意 $k\in\langle m\rangle$,

$$f_k^{\star}:=\frac{\omega_{q_k+|\mathtt{I}_k|-1}\mathfrak{r}_{q_k+|\mathtt{I}_k|}^{\alpha\beta}-1}{|a_{q_k+1}|}\prod_{j=0}^{|\mathtt{I}_k|-2}\frac{|c_{q_k+j}|}{|d_{q_k+j}|}.$$

因此，由于对任意 $j \in \langle |\mathtt{I}_k| - 1 \rangle$，该结论得证。

$$a_{q_k} = \mathscr{A}_{\alpha,k}(\mathfrak{C}, \mathfrak{r}_{\mathtt{I}_k} \circ \boldsymbol{\omega}_{\mathtt{I}_k}), \quad c_{q_k+j} = \mathscr{C}_{\alpha,q_k+j}(\mathfrak{C}, \mathfrak{r}_{\mathtt{I}_k} \circ \boldsymbol{\omega}_{\mathtt{I}_k}), \quad d_{q_k+j} = \mathscr{D}_{\alpha,q_k+j}(\mathfrak{C}, \mathfrak{r}_{\mathtt{I}_k} \circ \boldsymbol{\omega}_{\mathtt{I}_k}),$$

利用此处的 $\mathscr{k}(j) = \mathscr{k}(j+1)$。定理 3.1 的证明至此完成。 □

Appendix A.

A.1. **引理 2.1 的证明：** 断言（2）由我们的系统中不允许合并这一事实得出；也就是说，如果 $p_{ij} > 0$ 且 $p_{kl} > 0$，那么要么 $j \neq l$，要么 $i = k$。因此，对于任意不同的 j，$k \in \langle n \rangle$，若 $i \in \mathtt{D}_j \cap \mathtt{D}_k$ 对某个 $i \in \langle n \rangle$ 成立，则根据集合 $\mathtt{D}^j$ 和 $\mathtt{D}_k$ 的定义，我们有 $p_{ji} > 0$ 且 $p_{ki} > 0$。这与前述无合并条件矛盾。因此，（2）得证。
现在我们继续证明断言（3）。假设该断言不成立，即存在 i，j，$l \in \langle n \rangle$ 使得 $l \geqslant j$，$i \in \mathtt{S}^j$ 且 $i \in \mathtt{D}_l$。根据集合 $\mathtt{D}_l$ 的定义，最后一个关系意味着 $i' = l \geqslant j$，这与关系 $i \in \mathtt{S}^j$ 矛盾。因此，（3）得证。

接下来考虑断言 (4)。根据定义，对于任意 $j \in \langle n \rangle$ 和 $l \in \langle n \rangle^{j+}$，我们有 $\mathtt{S}^j, \mathtt{D}_l \subset \langle n \rangle^{j+}$，这意味着 $\mathtt{S}_j \cup \bigcup_{l=j}^n \mathtt{D}_l \subset \langle n \rangle^{j+}$。另一方面，对于任意 $i \in \langle n \rangle^{j+}$，有两种情况：要么 $i' < j$，这意味着 $i \in \mathtt{S}^j$；要么 $i' \geqslant j$，这意味着 $i \in \mathtt{D}_{i'} \subset \bigcup_{l=j}^n \mathtt{D}_l$。两种情况下我们都得到 $i \in \mathtt{S}_j \cup \bigcup_{l=j}^n \mathtt{D}_l$，因此$\langle n \rangle^{j+} \subset \mathtt{S}_j \cup \bigcup_{l=j}^n \mathtt{D}_l$，从而推出 (4)。
接下来证明断言 (5)。取定某个 $i \in \mathtt{S}^{j+1}$。根据集合 $\mathtt{S}^{j+1}$ 的定义，$i' < j+1$。因此，要么$i' < j$，这意味着 $i \in \mathtt{S}^j$；要么 $i' = j$，这意味着 $i \in \mathtt{D}^j$。两种情况下，$i \in \mathtt{S}_j \cup \mathtt{D}^j$。进一步利用$j < j+1$，因此 $j \notin \mathtt{S}^{j+1}$，我们有 $\mathtt{S}_{j+1} \subset \mathtt{S}_j \cup \mathtt{D}_j \setminus \{j\}$。另一方面，若 $i \in \mathtt{D}^j$，则 $i > j$ 且 $i' = j < j+1$，因此 $i \in \mathtt{S}^{j+1}$。若 $i \in \mathtt{S}_j \setminus \{j\}$，则 $i \geqslant j+1$ 且 $i' < j < j+1$，因此再次有$i \in \mathtt{S}^{j+1}$。结合最后两个结论可得 $\mathtt{S}_j \cup \mathtt{D}_j \setminus \{j\} \subset \mathtt{S}^{j+1}$，从而推出 (5)。

最后，我们来证明断言（6）。设 $k \in \mathtt{S}^j$。根据集合 $\mathtt{S}^j$ 的定义，$k \geqslant j$ 且 $k' < j$，由此可知 $j \in [k'+1, k]$。反过来，若 $j \in [k'+1, k]$，则 $k \geqslant j$ 且 $k' < j$，因此根据定义可得 $k \in \mathtt{S}^j$。 □

A.2. **注记 3.4 的证明。** 该注记主要基于以下引理。其证明很简单，因此略去。

引理 *A.1.* 设 $g(\cdot)$ $h(\cdot)$ 是两个连续函数 $g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$，满足 $\lim_{s\to\infty} g(s) \in \mathbb{R}_+$ 且$h_\infty := \lim_{s\to\infty} h(s) \in \mathbb{R}_+$。对于任意常数 $A, B > 0$，$\alpha > 1$，记 $\varphi_{\alpha,A,B}(s) := As + Bs^\alpha$，其中$s \geqslant 0$。那么

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\varphi^{-1}_{\alpha,A,B}(g(s)) - h(s)}{g(s) - \varphi_{\alpha,A,B}(h(s))} = \frac{1}{\varphi'_{\alpha,A,B}(h_\infty)} \in (0, \infty).$$

令 $\omega(s): R \to \mathbb{R}^n_+$，使得 $\lim_{s\to\infty} \omega(s) \in \mathbb{R}^n_+$，且 $A = \mathfrak{r}_j$, $B = \mathfrak{C}\hat{}p_j^\alpha$（因此，根据（11），$\varphi_{\alpha,\,A,\,B}(\cdot) = \Psi_{\alpha,\,\mathfrak{C},\,j}(\cdot)$）并且

$$g(s) := \mathscr{F}_{q_k}(\boldsymbol{\omega}(s)), \quad h(s) := \sum_{l \in \mathtt{S}^\star_{q_k}} \frac{\hat{p}_l \omega_l(s)}{\hat{p}_{q_k}}.$$

由此可得，回顾定义（13），

$$\Psi^{-1}_{\alpha,\mathfrak{C},j}(g(s)) - h(s) = \mathscr{C}_{\alpha,q_k}(\mathfrak{C}, \boldsymbol{\omega}(s)),$$

并且，结合关系（6）与定义（12），

$$g(s) - \Psi_{\alpha,\mathfrak{C},j}(h(s)) = \mathscr{F}_{q_k}(\boldsymbol{\omega}(s)) - \mathfrak{r}_j \sum_{l \in \mathtt{S}^\star_{q_k}} \frac{\hat{p}_l \omega_l(s)}{\hat{p}_j} - C \left(\sum_{l \in \mathtt{S}^\star_{q_k}} \hat{p}_l \omega_l(s) \right)^\alpha$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{l=q_k+1 \\ l\in \mathtt{I}_{\nexists(q_k+1)}}}^{n} \left(\frac{\mathfrak{r}_{l-1}}{\hat{p}_{l-1}} - \frac{\mathfrak{r}_l}{\hat{p}_l}\right) \sum_{i\in \mathtt{S}_l^\star} \hat{p}_i\omega_i(s) - \mathfrak{r}_j \sum_{l\in \mathtt{S}_{q_k}^\star} \frac{\hat{p}_l\omega_l(s)}{\hat{p}_j} - \mathfrak{C}\left(\sum_{l\in \mathtt{S}_{q_k}^\star} \hat{p}_l\omega_l(s)\right)^\alpha \\
&= \sum_{l\in \mathtt{I}_k}^{n} \left(\frac{\mathfrak{r}_{l-1}}{\hat{p}_{l-1}} - \frac{\mathfrak{r}_l}{\hat{p}_l}\right) \sum_{i\in \mathtt{S}_l^\star} \hat{p}_i\omega_i(s) - \mathfrak{r}_j \sum_{l\in \mathtt{S}_{q_k}^\star} \frac{\hat{p}_l\omega_l(s)}{\hat{p}_j} - \mathfrak{C}\left(\sum_{l\in \mathtt{S}_{q_k}^\star} \hat{p}_l\omega_l(s)\right)^\alpha \\
&= \mathscr{A}_{\alpha,k}(\mathfrak{C},\boldsymbol{\omega}(s)).
\end{aligned}
$$

因此，应用引理A.1，

$$
\lim_{s\to\infty} \frac{\mathscr{C}_{\alpha,q_k}(\mathfrak{C},\boldsymbol{\omega}(s))}{\mathscr{A}_{\alpha,k}(\mathfrak{C},\boldsymbol{\omega}(s))} \in (0,\infty),
$$

从而证明了（17）。现在我们继续证明第二个断言。对于任意 $k\in m$和 $j\in\langle|\mathbb{I}_k|-3\rangle$，取 $A_1=\mathfrak{r}_{q_k+j}$, $B_1=\mathfrak{C}\hat{}p_{q_k+j}^\alpha$ （即$\varphi_{\alpha,A_1,B_1}(\cdot)=\Psi_{\alpha,\mathfrak{C},q_k+j}(\cdot)$）

$$
g_1(s) := \mathscr{F}_{q_k+j}\big(\omega(s)\big), \quad h_1(s) := \sum_{l\in \mathtt{S}_{q_k+j+1}^\star} \frac{\hat{p}_l\omega_l(s)}{\hat{p}_{q_k+j}},
$$

应用引理 A.1，并回顾定义（14），可得

$$
\lim_{s\to\infty} \frac{\mathscr{D}_{\alpha,q_k+j}(\mathfrak{C},\boldsymbol{\omega}(s))}{\mathscr{E}_{k,j}(\boldsymbol{\omega}(s))} \in (0,\infty), \tag{51}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\mathscr{E}_{k,j}(\boldsymbol{\omega}(s)) &= \mathscr{F}_{q_k+j}\big(\boldsymbol{\omega}(s)\big) - \mathfrak{r}_{q_k+j}h_1(s) - C\hat{p}_{q_k+j}^\alpha h_1^\alpha(s) \\
&= \sum_{\substack{l=q_k+j+1 \\ l\in \mathtt{I}_k}}^{n} \left(\frac{\mathfrak{r}_{l-1}}{\hat{p}_{l-1}} - \frac{\mathfrak{r}_l}{\hat{p}_l}\right) \sum_{i\in \mathtt{S}_l^\star} \hat{p}_i\omega_i - \frac{\mathfrak{r}_{q_k+j}}{\hat{p}_{q_k+j}} \sum_{l\in \mathtt{S}_{q_k+j+1}^\star} \hat{p}_l\omega_l(s) - \mathfrak{C}\left(\sum_{l\in \mathtt{S}_{q_k+j+1}^\star} \hat{p}_l\omega_l(s)\right)^\alpha \\
&= \sum_{\substack{l=q_k+j+2 \\ l\in \mathtt{I}_k}}^{n} \left(\frac{\mathfrak{r}_{l-1}}{\hat{p}_{l-1}} - \frac{\mathfrak{r}_l}{\hat{p}_l}\right) \sum_{i\in \mathtt{S}_l^\star} \hat{p}_i\omega_i - \frac{\mathfrak{r}_{q_k+j+1}}{\hat{p}_{q_k+j+1}} \sum_{l\in \mathtt{S}_{q_k+j+1}^\star} \hat{p}_l\omega_l(s) - \mathfrak{C}\left(\sum_{l\in \mathtt{S}_{q_k+j+1}^\star} \hat{p}_l\omega_l(s)\right)^\alpha.
\end{aligned}
$$

另一方面，取 $A_2=\mathfrak{r}_{q_k+j+1}$, $B_2=\mathfrak{C}\hat{}p_{q_k+j+1}^\alpha$ （即$\varphi_{\alpha,A_1,B_1}(\cdot)=\Psi_{\alpha,\mathfrak{C},q_k+j+1}(\cdot)$）

$$
g_2(s) := \mathscr{F}_{q_k+j+1}(\boldsymbol{\omega}(s)), \quad h_2(s) := \sum_{l\in \mathtt{S}_{q_k+j+1}^\star} \frac{\hat{p}_l\omega_l}{\hat{p}_{q_k+j+1}},
$$

并应用引理A.1，现在回想定义（13），

$$
\lim_{s\to\infty} \frac{\mathscr{C}_{\alpha,q_k+j+1}(\mathfrak{C},\boldsymbol{\omega}(s))}{\mathscr{E}_{k,j}^\circ(\boldsymbol{\omega}(s))} \in (0,\infty), \tag{52}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\mathscr{E}_{k,j}^\circ(\boldsymbol{\omega}(s)) &= \mathscr{F}_{q_k+j+1}(\boldsymbol{\omega}(s)) - \mathfrak{r}_{q_k+j+1}h_2(s) - C\hat{p}_{q_k+j+1}^\alpha h_2^\alpha(s) \\
&= \sum_{\substack{l=q_k+j+2 \\ l\in \mathtt{I}_k}}^{n} \left(\frac{\mathfrak{r}_{l-1}}{\hat{p}_{l-1}} - \frac{\mathfrak{r}_l}{\hat{p}_l}\right) \sum_{i\in \mathtt{S}_l^\star} \hat{p}_i\omega_i - \frac{\mathfrak{r}_{q_k+j+1}}{\hat{p}_{q_k+j+1}} \sum_{l\in \mathtt{S}_{q_k+j+1}^\star} \hat{p}_l\omega_l(s) - \mathfrak{C}\left(\sum_{l\in \mathtt{S}_{q_k+j+1}^\star} \hat{p}_l\omega_l(s)\right)^\alpha \\
&= \mathscr{E}_{k,j}(\boldsymbol{\omega}(s)).
\end{aligned}
$$

因此，对任意 $j \leqslant |\mathtt{I}_k| - 3$，由51和52，即可推出（17）。最后，对于 $j = |\mathtt{I}_k| - 2$ 以及任意$\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^n_+$（回忆一下，$\mathtt{I}_k = \{q_k, \dots, q_k + |\mathtt{I}_k| - 1\}$ 且 $\mathtt{S}^\star_l \subset \mathtt{I}_k$对任意 $l \in \mathtt{I}_k$），

$$\mathscr{F}_{q_k+|\mathtt{I}_k|-2}(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{\substack{l=q_k+|\mathtt{I}_k|-1 \\ l\in\mathtt{I}_k}}^{n} \left(\frac{\mathfrak{r}_{l-1}}{\hat{p}_{l-1}} - \frac{\mathfrak{r}_l}{\hat{p}_l}\right) \sum_{i\in\mathtt{S}^\star_l} \hat{p}_i\omega_i = \left(\frac{\mathfrak{r}_{q_k+|\mathtt{I}_k|-2}}{\hat{p}_{q_k+|\mathtt{I}_k|-2}} - \frac{\mathfrak{r}_{q_k+|\mathtt{I}_k|-1}}{\hat{p}_{q_k+|\mathtt{I}_k|-1}}\right) \hat{p}_{q_k+|\mathtt{I}_k|-1}\omega_{q_k+|\mathtt{I}_k|-1},$$

and

$$\Psi_{\alpha,\mathfrak{C},q_k+|\mathtt{I}_k|-2}\left(\sum_{l\in\mathtt{S}^\star_{q_k+|\mathtt{I}_k|-1}} \frac{\hat{p}_l\omega_l}{\hat{p}_{q_k+|\mathtt{I}_k|-2}}\right) = \frac{\mathfrak{r}_{q_k+|\mathtt{I}_k|-2}}{\hat{p}_{q_k+|\mathtt{I}_k|-2}}\hat{p}_{q_k+|\mathtt{I}_k|-1}\omega_{q_k+|\mathtt{I}_k|-1} + \mathfrak{C}\hat{p}^\alpha_{q_k+|\mathtt{I}_k|-1}\boldsymbol{\omega}^\alpha_{q_k+|\mathtt{I}_k|-1},$$

这意味着

$$\Psi_{\alpha,\mathfrak{C},q_k+|\mathtt{I}_k|-2}\left(\sum_{l\in\mathtt{S}^\star_{q_k+|\mathtt{I}_k|-1}} \frac{\hat{p}_l\omega_l}{\hat{p}_{q_k+|\mathtt{I}_k|-2}}\right) > \frac{\mathfrak{r}_{q_k+|\mathtt{I}_k|-2}}{\hat{p}_{q_k+|\mathtt{I}_k|-2}}\hat{p}_{q_k+|\mathtt{I}_k|-1}\omega_{q_k+|\mathtt{I}_k|-1} > \mathscr{F}_{q_k+|\mathtt{I}_k|-2}(\boldsymbol{\omega}).$$

因此，由于 $\Psi_{\alpha,\ \mathfrak{C},\ q_k+|\mathtt{I}_k|-2}(\cdot)$ 是递增的，

$$\mathscr{D}_{\alpha,|\mathtt{I}_k|-2}(C,\boldsymbol{\omega}) = \Psi^{-1}_{\alpha,C,q_k+|\mathtt{I}_k|-2}\big(\mathscr{F}_{q_k+|\mathtt{I}_k|-2}(\boldsymbol{\omega})\big) - \sum_{l\in\mathtt{S}^\star_{|\mathtt{I}_k|-1}} \frac{\hat{p}_l\omega_l}{\hat{p}_j} < 0,$$

由此证明了该结论。 □

A.3. **引理 5.1的证明：** 对于任意 $j \in \langle n-1\rangle$，$t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} X_{j+1}(t) &= \hat{p}_{j+1}J(t) - r_{j+1}t = \hat{p}_{j+1}\frac{X_j(t) + r_jt}{\hat{p}_j} - r_{j+1}t \\ &= \frac{\hat{p}_{j+1}}{\hat{p}_j}X_j(t) + \hat{p}_{j+1}\left(\frac{r_j}{\hat{p}_j} - \frac{r_{j+1}}{\hat{p}_{j+1}}\right)t \;=\; K_{j+1}X_j(t) + \Upsilon_{j+1}(t), \end{aligned}$$

其中

$$K_{j+1} := \frac{\hat{p}_{j+1}}{\hat{p}_j}, \qquad \Upsilon_{j+1}(t) := \hat{p}_{j+1}\left(\frac{r_j}{\hat{p}_j} - \frac{r_{j+1}}{\hat{p}_{j+1}}\right)t.$$

注意到 $K_{j+1} > 0$ 并且，由于假设 **N2**，$\Upsilon_{j+1}(t) > 0$。回忆过程 $J(\cdot)$ 是中心化的，且 $r_j > 0$，因此 $X_j(t) \to -\infty$ 当 $t \to \infty$ 时几乎必然成立，这意味着 **D** 中的假设 [9] 有效。因此，对 [9, 定理 3.1] 应用于 $\alpha = \mathbf{0}$ 和 $\beta = \boldsymbol{\omega}$后，随机向量 $\boldsymbol{X}$ 具有以下联合拉普拉斯-斯蒂尔切斯变换：

$$\mathbb{E}\left\{e^{-\langle\boldsymbol{\omega},\overline{\boldsymbol{X}}\rangle}\right\} = \mathbb{E}\left\{e^{-\omega_n\overline{X}_n}\right\}\prod_{j=1}^{n-1}\frac{\mathbb{E}\left\{e^{-\left(\sum_{l=j+1}^n\theta^\Upsilon_l\left(\sum_{k=l}^n K^k_l\omega_k\right)\right)G_j-\left(\sum_{l=j}^n K^l_j\omega_l\right)\overline{X}_j}\right\}}{\mathbb{E}\left\{e^{-\left(\sum_{l=j+1}^n\theta^\Upsilon_l\left(\sum_{k=l}^n K^k_l\omega_k\right)\right)G_j-\left(\sum_{l=j+1}^n K^l_j\omega_l\right)\overline{X}_j}\right\}}, \tag{53}$$

其中，利用 $\Upsilon_j(t)$ 是确定性的线性函数，

$$\theta^\Upsilon_j(t) := -\log\mathbb{E}\left\{e^{-t\Upsilon_j(1)}\right\} = t\Upsilon_j(1) = \Upsilon_j(t), \qquad K^j_i := \prod_{l=i+1}^{j} K_l = \frac{\hat{p}_j}{\hat{p}_i}.$$

并且 $\boldsymbol{G} \equiv (G_1, \dots, G_n)$，其中 $G_j := $下确界$\{t \geqslant 0\colon\ \overline{X}_j(t) = X_j$或 $X_j(-t) = X_j\}$对于任意 $j \in \langle n\rangle$，是过程 $X(t)$ 达到其最大值的首次时刻。利用 (1)，

$$\mathbb{E}\left\{e^{-\langle\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{Q}\rangle}\right\} = \mathbb{E}\left\{e^{-\langle\widetilde{\boldsymbol{\omega}},\overline{\boldsymbol{X}}\rangle}\right\}, \tag{54}$$

其中，对于任意 $j \in \langle n\rangle$，

$$\widetilde{\omega}_j := ((I-P)\boldsymbol{\omega})_j = \omega_j - \sum_{i=1}^{n} p_{j,i}\omega_i = \omega_j - \sum_{i\in\mathtt{D}_j} p_{j,i}\omega_i.$$

将（53）与（54）结合可得

$$\mathbb{E}\left\{e^{-\langle\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{Q}\rangle}\right\}=\mathbb{E}\left\{e^{-\widetilde{\omega}_n\overline{X}_n}\right\}\prod_{j=1}^{n-1}\frac{\mathbb{E}\left\{e^{-\left(\sum_{l=j+1}^{n}\theta_l^{\Upsilon}\left(\sum_{k=l}^{n}K_l^k\widetilde{\omega}_k\right)\right)G_j-\left(\sum_{l=j}^{n}K_j^l\widetilde{\omega}_l\right)\overline{X}_j}\right\}}{\mathbb{E}\left\{e^{-\left(\sum_{l=j+1}^{n}\theta_l^{\Upsilon}\left(\sum_{k=l}^{n}K_l^k\widetilde{\omega}_k\right)\right)G_j-\left(\sum_{l=j+1}^{n}K_j^l\widetilde{\omega}_l\right)\overline{X}_j}\right\}}. \tag{55}$$

下一步是化简方程（55）。记

$$\kappa_{j+1}^{\star}(\boldsymbol{\omega}):=\sum_{l=j+1}^{n}\theta_l^{\Upsilon}\left(\sum_{k=l}^{n}K_l^k\widetilde{\omega}_k\right),\quad \delta_j^{\star}(\boldsymbol{\omega}):=\sum_{l=j}^{n}K_j^l\widetilde{\omega}_l,\quad \hat{\delta}_j^{\star}(\boldsymbol{\omega}):=\sum_{l=j+1}^{n}K_j^l\widetilde{\omega}_l.$$

利用（7），不难验证，

$$\delta_j^{\star}(\boldsymbol{\omega})=\sum_{l=j}^{n}K_j^l\left(\omega_l-\sum_{i\in\mathtt{D}_l}p_{l,i}\omega_i\right)=\sum_{l=j}^{n}K_j^l\omega_l-\sum_{l=j}^{n}\sum_{i\in\mathtt{D}_l}K_j^i\omega_i=\sum_{l\in\mathtt{S}_j}K_j^l\omega_l=\delta_j(\boldsymbol{\omega}),$$

$$\hat{\delta}_j^{\star}(\boldsymbol{\omega})=K_{j+1}\delta_{j+1}=\hat{\delta}_j(\boldsymbol{\omega}),\qquad \kappa_{j+1}^{\star}(\boldsymbol{\omega})=\sum_{l=j+1}^{n}\Upsilon_l(\delta_l)=\kappa_{j+1}(\boldsymbol{\omega}).$$

现在利用（6），我们可以证明（24）：

$$\begin{aligned}\kappa_{j+1}(\boldsymbol{\omega})&=\sum_{l=j+1}^{n}\left(\frac{r_{l-1}}{\hat{p}_{l-1}}-\frac{r_l}{\hat{p}_l}\right)\sum_{i\in\mathtt{S}_l}\hat{p}_i\omega_i=\sum_{i=j+1}^{n}\hat{p}_i\omega_i\sum_{l=j+1}^{i}\mathbb{I}_{\{i\in\mathtt{S}_l\}}\left(\frac{r_{l-1}}{\hat{p}_{l-1}}-\frac{r_l}{\hat{p}_l}\right)\\&=\sum_{i=j+1}^{n}\hat{p}_i\omega_i\sum_{l=j+1}^{i}\mathbb{I}_{\{l\in[i'+1,i]\}}\left(\frac{r_{l-1}}{\hat{p}_{l-1}}-\frac{r_l}{\hat{p}_l}\right)=\sum_{i=j+1}^{n}\hat{p}_i\omega_i\sum_{l=\max(j,i')+1}^{i}\left(\frac{r_{l-1}}{\hat{p}_{l-1}}-\frac{r_l}{\hat{p}_l}\right)\\&=\sum_{i=j+1}^{n}\left(\frac{r_{\max(j,i')}}{\hat{p}_{\max(j,i')}}-\frac{r_i}{\hat{p}_i}\right)\hat{p}_i\omega_i.\end{aligned}$$

然后应用 [2, 定理 VII.4], 由此可得，对任意 $x,\ y>0$

$$\mathbb{E}\left\{e^{-xG_i-y\overline{X}_i}\right\}=-\mathbb{E}\left\{X_i(1)\right\}\frac{\Phi_i(x)-y}{x-\psi_i(y)},$$

其中 $\psi_i(\cdot)$ 为 在（23）中定义，且 $\Phi_i(\cdot)$ 是 $\psi_i(\cdot)$ 的逆。因此，（25）由（55）得出。 □

A.4. **双层网络示例相关的证明**。 在本附录的这一部分中，我们证明（18）。在此情形下，对于任意 $j\in\langle n\rangle^{2+}$

$$\mathtt{I}_1=\{1\},\qquad \mathtt{I}_2=\langle n\rangle^{2+},$$

$$\kappa_1(u)=r_1(u),\qquad \kappa_2(u)=r_2(u),$$

$$\mathfrak{r}_1=1,\qquad \hat{p}_1=1,\qquad \hat{p}_j=p_j,$$

$$\mathtt{D}_1^{\star}=\mathtt{D}_i^{\star}=\varnothing,\qquad \mathtt{S}_1^{\star}=\{1\},\qquad \mathtt{S}_j^{\star}=\{j,\ldots,n\}.$$

应用定理 3.1 （或定理 3.2，分别）时，我们首先计算$\mathscr{A}_{\alpha,\ 1}(\mathfrak{C},\ \omega_1)$ 和$\mathscr{A}_{\alpha,\ 2}(\mathfrak{C},\ \boldsymbol{\omega})$ 的常数，其中 $\boldsymbol{\omega}\in R_+^{\langle n\rangle^{2+}}$ 定义见（12）

$$\mathscr{A}_{\alpha,1}(\mathfrak{C},\omega_1)=\sum_{l\in\mathtt{I}_1}\frac{\mathfrak{r}_l}{\hat{p}_l}\sum_{m\in\mathtt{D}_l^{\star}}\hat{p}_m\omega_m-\sum_{l\in\mathtt{I}_1}\omega_l\mathfrak{r}_l-\mathfrak{C}\left(\sum_{l\in\mathtt{S}_{q1}^{\star}}\hat{p}_l\omega_l\right)^{\alpha}=-\omega_1-\mathfrak{C}\omega_1^{\alpha},$$

$$\mathscr{A}_{\alpha,2}(\mathfrak{C},\omega_1)=\sum_{l\in\mathtt{I}_2}\frac{\mathfrak{r}_l}{\hat{p}_l}\sum_{m\in\mathtt{D}_l^{\star}}\hat{p}_m\omega_m-\sum_{l\in\mathtt{I}_2}\omega_l\mathfrak{r}_l-\mathfrak{C}\left(\sum_{l\in\mathtt{S}_{q2}^{\star}}\hat{p}_l\omega_l\right)^{\alpha}=-\sum_{l=2}^{n}\omega_l\mathfrak{r}_l-\mathfrak{C}\left(\sum_{l=2}^{n}p_l\omega_l\right)^{\alpha}.$$

接着，我们计算$\mathscr{F}_{\alpha,\ j}(\boldsymbol{\omega})$的常数，该定义见（15），其中 $j\in\langle n-1\rangle^{2+}$:

$$\mathscr{F}_{\alpha,j}(\omega)=\sum_{\substack{l=j+1\\ l\in \mathtt{I}_{\not k(j+1)}}}^{n}\left(\frac{\mathfrak{r}_{l-1}}{\hat{p}_{l-1}}-\frac{\mathfrak{r}_l}{\hat{p}_l}\right)\sum_{i\in\mathtt{S}_l^\star}\hat{p}_i\omega_i=\sum_{l=j+1}^{n}\left(\frac{\mathfrak{r}_{l-1}}{p_{l-1}}-\frac{\mathfrak{r}_l}{p_l}\right)\sum_{i=l}^{n}p_i\omega_i=\sum_{l=j+1}^{n}\left(\frac{\mathfrak{r}_j}{p_j}-\frac{\mathfrak{r}_l}{p_l}\right)p_l\omega_l.$$

进一步利用对任意 $j\in\langle n-1\rangle^{2+}$，根据（11），

$$\Psi_{\alpha,\mathfrak{C},j}(s)=\mathfrak{r}_j s+\mathfrak{C}\hat{p}_j^{\alpha}s^{\alpha}=\mathfrak{r}_j s+\mathfrak{C}p_j^{\alpha}s^{\alpha}=\psi_j(s),$$

对任意 $j\in\langle n-1\rangle^{2+}$，我们有（由（13）和（14）可得）

$$\begin{aligned}\mathscr{C}_{\alpha,j}(\mathfrak{C},\omega_2,\ldots,\omega_n)&=\Psi_{\alpha,C,j}^{-1}\left(\mathscr{F}_{\alpha,j}(\boldsymbol{\omega})\right)-\sum_{l\in\mathtt{S}_j^\star}\frac{\hat{p}_l\omega_l}{\hat{p}_j}\\&=\psi_j^{-1}\left(\sum_{l=j+1}^{n}\left(\frac{\mathfrak{r}_j}{p_j}-\frac{\mathfrak{r}_l}{p_l}\right)p_l\omega_l\right)-\sum_{l=j}^{n}\frac{p_l\omega_l}{p_j},\\ \mathscr{D}_{\alpha,j}(\mathfrak{C},\omega_2,\ldots,\omega_n)&=\Psi_{\alpha,C,j}^{-1}\left(\mathscr{F}_{\alpha,j}(\boldsymbol{\omega})\right)-\sum_{l\in\mathtt{S}_{j+1}^\star}\frac{\hat{p}_l\omega_l}{\hat{p}_j}\\&=\psi_j^{-1}\left(\sum_{l=j+1}^{n}\left(\frac{\mathfrak{r}_j}{p_j}-\frac{\mathfrak{r}_l}{p_l}\right)p_l\omega_l\right)-\sum_{l=j+1}^{n}\frac{p_l\omega_l}{p_j}.\end{aligned}$$

因此，根据定理 3.1，结论得证。 □

A.5. **串联网络示例相关证明**。 现在我们着手证明（19）。在这种情况下，对任意 $k\in\langle m\rangle$,

$$\mathtt{I}_k=\langle q_{k+1}-1\rangle^{q_k+},\quad \mathscr{r}_k(u)=r_{q_k}(u),$$

对任意 $j\in\langle n\rangle$,

$$\hat{p}_j=1,\quad \mathtt{S}_j^\star=j,$$

并且，对于任意 $j\in\langle q_{k+1}-2\rangle^{q_k+}$,

$$\mathtt{D}_j^\star=\{j+1\},\qquad \mathtt{D}_{q_{k+1}-1}^\star=\varnothing.$$

要应用定理 3.1 ，我们首先计算 $\mathscr{A}_{\alpha,\ k}(\mathfrak{C}、\ \boldsymbol{\omega})$ 中定义的常数（12）：对于任意 $k\in\langle m\rangle$ 和$\boldsymbol{\omega}\in R_+^{\mathtt{I}_k}$,

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{\alpha,k}(\mathfrak{C},\boldsymbol{\omega})&=\sum_{l\in\mathtt{I}_k}\frac{\mathfrak{r}_l}{\hat{p}_l}\sum_{m\in\mathtt{D}_l^\star}\hat{p}_m\omega_m-\sum_{l\in\mathtt{I}_k}\omega_l\mathfrak{r}_l-\mathfrak{C}\left(\sum_{l\in\mathtt{S}_{q_k}^\star}\hat{p}_l\omega_l\right)^{\alpha}\\&=\sum_{l=q_k}^{q_{k+1}-2}\left(\frac{\mathfrak{r}_l\hat{p}_{l+1}}{\hat{p}_l}-\mathfrak{r}_{l+1}\right)\omega_{l+1}-\omega_{q_k}\mathfrak{r}_{q_k}-\mathfrak{C}\left(\hat{p}_{q_k}\omega_{q_k}\right)^{\alpha}\\&=\sum_{l=q_k+1}^{q_{k+1}-1}\left(\mathfrak{r}_{l-1}-\mathfrak{r}_l\right)\omega_l-\omega_{q_k}-\mathfrak{C}\omega_{q_k}^{\alpha}.\end{aligned}$$

然后我们计算常数 $\mathscr{F}_{\alpha,\ j}(\boldsymbol{\omega})$ 定义于 (15)：对于任意 $j\in\langle q_{k+1}-2\rangle^{q_k+},\quad k\in\langle m\rangle$,

$$\mathscr{F}_{\alpha,j}(\boldsymbol{\omega})=\sum_{\substack{l=j+1\\ l\in \mathtt{I}_{\not k(j+1)}}}^{n}\left(\frac{\mathfrak{r}_{l-1}}{\hat{p}_{l-1}}-\frac{\mathfrak{r}_l}{\hat{p}_l}\right)\sum_{i\in\mathtt{S}_l^\star}\hat{p}_i\omega_i=\sum_{l=j+1}^{q_{k+1}-1}\left(\mathfrak{r}_{l-1}-\mathfrak{r}_l\right)\omega_l.$$

利用对于任意 $j \in \langle n-1 \rangle$，根据 (11)，

$$\Psi_{\alpha,\mathfrak{C},j}(s) = \mathfrak{r}_j s + \mathfrak{C}\hat{p}_j^{\alpha} s^{\alpha} = \mathfrak{r}_j s + \mathfrak{C} s^{\alpha} = \psi_j(s),$$

根据（13）和（14），我们有，对任意 $j \in \langle q_{k+1}-2 \rangle^{q_k+}$， $k \in \langle m \rangle$，

$$\mathscr{C}_{\alpha,j}(\mathfrak{C}, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \Psi_{\alpha,C,j}^{-1}\big(\mathscr{F}_{\alpha,j}(\boldsymbol{\omega})\big) - \sum_{l \in \mathbb{S}_j^{\star}} \frac{\hat{p}_l \omega_l}{\hat{p}_j} = \psi_j^{-1}\left(\sum_{l=j+1}^{q_{k+1}-1} (\mathfrak{r}_{l-1} - \mathfrak{r}_l)\, \omega_l\right) - \omega_j,$$

$$\mathscr{D}_{\alpha,j}(\mathfrak{C}, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \Psi_{\alpha,C,j}^{-1}\big(\mathscr{F}_{\alpha,j}(\boldsymbol{\omega})\big) - \sum_{l \in \mathbb{S}_{j+1}^{\star}} \frac{\hat{p}_l \omega_l}{\hat{p}_j} = \psi_j^{-1}\left(\sum_{l=j+1}^{q_{k+1}-1} (\mathfrak{r}_{l-1} - \mathfrak{r}_l)\, \omega_l\right) - \omega_{j+1}.$$

因此，根据定理 3.1，结论成立。

References

[1] S. Asmussen，《应用概率与排队论》，第2版，数学应用丛书。纽约：施普林格，2003年，第51卷。[2] J. Bertoin，《L´évy过程》。剑桥：剑桥大学出版社，1996年。[3] H. Chen和D. Yao，《排队网络基础：性能、渐近分析与优化》。纽约：施普林格，2001年。[4] J. Dai和D. Huo，“多尺度重交通下采用SBP服务策略的多类别排队网络的渐近乘积形式稳态”，arXiv预印本 arXiv:2403.04090，2024年。[5] J. Dai、P. Glynn和Y. Xu，“多尺度重交通下广义Jackson网络的渐近乘积形式稳态”，arXiv预印本 arXiv:2304.01499，2023年。[6] D. Daley和T. Rolski，“多服务器排队系统的轻载近似”，《应用概率进展》，第24卷，第1期，第202–218页，1992年。[7] K. D˛ebicki、N. Kriukov和M. Mandjes，“轻负荷和重负荷下高斯输入排队网络的函数型极限定理”，arXiv预印本 arXiv:2503.16633，2025年。[8] K. D˛ebicki和M. Mandjes，《队列与L´évy波动理论》。纽约：施普林格，2015年。[9] K. D˛ebicki、T. Dieker和T. Rolski，“L´évy驱动流体网络的准乘积形式”，《运筹学数学》，第32卷，第629–647页，2007年。[10] J. Guang、Y. Xu和J. Dai，“重负荷下具有一般分布的连续时间路由系统的稳态收敛”，《ACM计算系统测量与分析汇刊》，第9卷，第1期，第1–29页，2025年。[11] J. M. Harrison，《布朗运动与随机流系统》。纽约：威利，1985年。[12] O. Kella和W. Whitt，“具有L´évy输入的串联流体网络。《排队论及相关模型》。U.N. Bhat和I.V. Basawa编”，1992年。[13] O. Kella，“具有相关L´évy输入的并联和串联流体网络”，《应用概率年刊》，第682–695页，1993年。[14] ——，“具有L´évy输入的随机流体网络的稳定性与非乘积形式”，《应用概率年刊》，第6卷，第1期，第186–199页，1996年。[15] ——，“具有相关L´évy输入的二维流体网络的非乘积形式”，《应用概率杂志》，第37卷，第4期，第1117–1122页，2000年。[16] O. Kella和W. Whitt，“适用于具有L´évy输入的随机存储过程的鞅”，《应用概率杂志》，第29卷，第2期，第396–403页，1992年。[17] J. Kingman，“重交通下的单服务器排队系统”，《剑桥哲学学会数学学报》，第57卷，第902–904页，1961年。[18] T. Konstantopoulos、G. Last和S.-J. Lin，“一类L´évy随机网络”，《排队系统》，第46卷，第3期，第409–437页，2004年。[19] D. T. Koops、O. J. Boxma和M. Mandjes，“重交通下具有L´évy输入的串联流体网络”，《排队系统》，第84卷，第3期，第355–379页，2016年。

[20] K. Kosi´nski、O. J. Boxma和B. Zwart，“重交通状态下L´évy过程全时上确界的收敛性”，《排队系统》，第67卷，第4期，第295–304页，2011年。[21] A. E. Kyprianou，*L´évy*过程的波动理论及其应用，第2版。海德堡：施普林格，2014年。[22] T. Mikosch、S. Resnick、H. Rootz´en和A. Stegeman，“网络流量是否可由稳定L´évy运动或分数布朗运动近似？”《应用概率年刊》，第12卷，第1期，第23–68页，2002年。[23] P. Robert，《随机网络与排队》。纽约：施普林格，2013年，第52卷。[24] K.-I. Sato，*L´évy*过程与无限可分分布。剑桥大学出版社，1999年。[25] K. Sigman，“队列中工作负载的轻负荷情形”，《排队系统》，第11卷，第4期，第429–442页，1992年。[26] M. S. Taqqu、W. Willinger和R. Sherman，“自相似流量建模中一项基本结果的证明”，《*ACM SIGCOMM*计算机通信评论》，第27卷，第2期，第5–23页，1997年。[27] W. Whitt，《随机过程极限定理》。纽约：施普林格，2002年。

Krzysztof Dębicki, Mathematical Institute, Wrocław University, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław, Poland*Email address*: krzysztof.debicki@math.uni.wroc.plNikolai Kriukov、 Korteweg-de Vries Institute、 University of Amsterdam、 P.O. Box 94248、 1090 GE Amster-dam、 The Netherlands*Email address*: n.kriukov@uva.nlMichel Mandjes、 Mathematical Institute、 Leiden University、 P.O. Box 9512、 2300 RA Leiden、 The Nether-lands*Email address*: m.r.h.mandjes@math.leidenuniv.nl