arXiv:2602.04034v1 [math.RA] 3 Feb 2026

向量空间上的克隆子

Stefano Fioravanti、Michael Kompatscher 与 Bernardo Rossi

Abstract. 克隆子是两个代数结构之间的有限元运算集合，且在两侧均对与其项运算的复合封闭。我们猜想，对于有限模**A** 与**B** ，从**A** 到**B**的克隆子只有有限多个，当且仅当**A**、**B** 具有互素阶。

我们针对一大类模**A**证实了这一猜想。特别地，我们证明：若**A**是有限 k维向量空间，则从**A** 到互素模**B** 的每一个克隆子都由其 k元函数生成（而元数 $k-1$ 并不足够）。为了证明这些结果，我们研究“由**(A**,**B)**-子式的一致生成”，这是一个一般准则，我们证明它适用于若干其他已有的分类结果。基于我们的分析，我们进一步证明，某些二幂零 Mal'cev 代数的子幂成员问题可在多项式时间内求解。

1. Introduction

克隆 是给定集合上的一组有限元运算，它包含所有投影，并且在函数复合下封闭。克隆是泛代数中的基本对象，因为它们描述了任意代数结构的项运算集合。因此，从Post对二元集上克隆的分类 [Pos41], 开始，基于克隆理论的有限代数结构结果已有丰富的历史，参见例如 [Sze86]。另一方面，克隆理论在理论计算机科学中也有若干应用。最突出的例子之一是对多态克隆的研究，用以确定固定模板约束满足问题的复杂性（参见例如综述 [BKW17]），这引出了Bulatov与Zhuk对CSP二分定理的独立证明 [Bul17],[Zhu17, Zhu20]。

近年来，克隆的推广，如仆从 和克隆子 ，受到了越来越多的关注。仆从是从集合 A 到（可能不同的）集合 B 的有限元运算集合，它们在变量的置换与等同以及添加哑变量下封闭。对仆从的研究因其在（承诺）约束满足中的应用而获得很大关注，参见例如综述 [BBKO21]。从代数**A**到代数**B** 的克隆子 是一个minion，它在与**A** 的运算进行（前）复合以及与**B**的运算进行（后）复合下封闭。尽管“克隆子”这一术语最早由Aichinger与Mayr在 [AM16], 中提出，该概念此前已以各种名称出现，例如在 [CF09]中。

由于结构较弱，显然无法明确描述任意两个给定有限集之间的所有仆从。首先面临的难题是其数量庞大：[Pip02] 中已证明，两个二元集合之间就有连续统多个仆从。不过，根据代数**A** 和**B**的表达能力，关于

本论文获得查理大学资助，资助编号为 PRIMUS/24/SCI/008。Michael Kompatscher 另获捷克科学基金会（GAˇCR 资助编号 25-16324S）以及查理大学研究中心计划（编号 UNCE/24/SCI/022）的资助。

代数$\mathbf{A}$ 与$\mathbf{B}$之间的克隆子，还能得出更多结论。Sparks 在 [Spa19], 中证明，如果$\mathbf{B}$ 具有近一致项，那么从$\mathbf{A}$ 到$\mathbf{B}$ 的克隆子只有有限多个；如果$\mathbf{B}$具有边项，则至多有可数多个。不过，丰富的源代数$\mathbf{A}$也能带来有限性结果：正如 [LS09], 所示，从具有判别项的代数$\mathbf{A}$ 到定义在同一集合上的代数$\mathbf{B}$ 的每个克隆子，都会导出有限多个克隆子。

我们还想特别指出 Lehtonen 及其合作者的一系列论文 [LN10,LS09, CL24, Leh24, Leh25],，这些工作最终在 [Leh26] 中对所有二元素代数（$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$）进行了完整刻画：对于这些代数，克隆子至多可数；同时，他们还对所有此类情形下的克隆子进行了完整分类。

在本文中，我们关注克隆子的分类，其中 $\mathbf{B}$ 是一个模。在研究具有中心同余的 Mal'cev代数的项运算时，这类克隆子往往会自然出现；Peter Mayr 最近通过差分克隆子的定义，使这种联系得到了更明确的阐述，参见例如 [Kom24]。特别地，2-幂零代数会产生模 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 之间的克隆子。

作为一个应用示例，我们提及 [AM07] 以及后来的 [Fio21b], 对平方自由群扩张的分类；该工作在很大程度上依赖于对某些克隆子的分类。

文献中已有一系列分类结果。Kreinecker [Kre19] （在 $p = q$ 的情况下）以及第一作者 $p \neq q$ [Fio20], 分别完全分类了素数阶群之间的克隆子。有趣的是，在后一种情况下，只有有限多个克隆子，且它们都由各自的一元函数生成（而对于 $p = q$，则可得到无限多个）。

在这些结果之后的推广中，人们也总是发现，互素阶的某些模 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 之间只有有限多个克隆子——最新且最一般的这类有限性结果由 Mayr 和 Wynne [MW24], 得出，适用于 $\mathbf{A}$ 的子模格为分配格的所有情形。这引出了以下猜想：

猜想 1. 设$\mathbf{A}$ 和$\mathbf{B}$是有限模。当且仅当$\mathbf{A}$ 和$\mathbf{B}$ 的阶互素时，从$\mathbf{A}$到$\mathbf{B}$的克隆子才只有有限多个。

我们指出，“仅当”方向由 [MW24，定理 1.3]得出；其中作者证明，对于具有公因数的模，总能构造出一个克隆子的无限升链。

本文的首要贡献是：当$\mathbf{A}$ 是有限维向量空间时，我们证实了猜想 1。当$\mathbf{B}$ 与向量空间$\mathbf{A}$的阶互素时，我们还能够明确描述所有克隆子的格（定理 55）。特别地，这回答了 [MW24，问题 1.2], 该问题要求在$\mathbf{A}$ 是群 $(\mathbb{Z}_p)^2$,（其中 p为某个素数）时，对克隆子进行分类。结合我们的结果与 [MW24], ，我们还能够证实，对于所有作为$\mathbf{F}_1 \times \cdots \times \mathbf{F}_n \times \mathbf{R}$-模的模$\mathbf{A} = \mathbf{F}_1^{k_1} \times \cdots \times \mathbf{F}_n^{k_n} \times \mathbf{D}$，猜想 1 均成立；其中$\mathbf{D}$ 是一个分配$\mathbf{R}$-模，且所有$\mathbf{F}_i$ 都是域。

我们的分类基于以下证明：对于向量空间 $\mathbf{A} = \mathbf{F}^k$ 和与 $\mathbf{B}$ 互素的情形，从 A到 B 的所有运算组成的集合是由 k元子式一致生成 的。虽然 [MW24], 已经暗示了这一技巧，但我们将在第 3 节中详细讨论，并论证许多现有的克隆子分类都遵循相同的模式。此外，我们还证明元数 k 是最优的，即并非每个从$\mathbf{F}^k$ 到$\mathbf{B}$ 的克隆子都由其 $k-1$元函数生成。这与我们在第6节中推导出的、关于模之间的

完整克隆子生成元元数的下界一致，而 JanVanˇeˇcek [Van25]也已在其学士论文中指出了这一点。

最后，我们提及，仿射代数之间的克隆子也曾（有时是隐式地）用于讨论 Mal'cev 代数的一些计算问题。KKK 在 [KKK24] 中利用了互素模之间的一些克隆子可由一元函数生成这一事实；这使得其元素可以用优良的标准形表示，并据此证明，检查给定 2-幂零代数中的多项式恒等式总能在多项式时间内完成。在 [May24] 和 [KM26] 中，也类似地利用了此类标准形，为一些 2-幂零环路找到了有限等式基。

虽然我们不会讨论克隆子的这类句法方面，但会将我们的结果应用于某些代数的 子幂成员问题。对于固定的有限代数$\mathbf{A}$，子幂成员问题（SMP($\mathbf{A}$)）是这样一个计算问题：给定部分运算 $f\colon A^n \to A$，判断它能否扩展为 $\mathbf{A}$ 的项运算。在 [IMM$^+$10] 中，人们提出了这样的问题：对于具有少子幂的代数，子幂成员问题是否总能在多项式时间内求解。然而，即使在 Mal'cev 情形下，这个问题仍未解决。现有可处理性结果 [May12, BMS19]，尚未涵盖的最简单例子是 2-幂零代数； [Kom24] 已证明，对这类代数而言，该问题与其克隆子上的一个类似"插值问题"在多项式时间内等价。我们将在第5节运用我们的结果，证明一大类 2-幂零代数的子幂成员问题属于 P。

论文结构。 本文组织如下。在第 2 节中，我们介绍泛代数中的必要概念，并固定若干记号。在第 3 节中，我们发展由子式进行"一致生成"与"一致表示"的理论，该概念由 [MW24] 引入。特别地，我们给出一个纯组合判据，用以保证所有 ($\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$)-克隆子均由其 k 元函数生成（定理18）。

第 4 节给出本文的主要结果——定理49，并讨论若干推论。在第5节中，我们将所得结果应用于子幂成员问题。在第 6 节中，我们给出有限模之间全 clonoid 的生成元元数的一个下界，且该下界在我们的设定中是紧的。第 7 节专门讨论未来工作以及我们结果的可能应用。

2. Background

在本节中，我们介绍一些必要的记号、关键定义，以及文献中关于克隆理论、克隆子和模论的基础性结果，这些将作为我们分析的基础。关于泛代数的更多背景，请读者参阅 [BS81]。

关于基本记号，由元素组成的元组用粗体表示，其各个分量记作例如 $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$。此外，我们用$[n]$ 表示集合 $\{1, \ldots, n\}$，用 $[n]_0$ 表示 $[n] \cup \{0\}$。

2.1. 克隆与克隆子。

定义 2. 对于两个集合 A，B，我们定义 $\mathcal{O}_{A,\,B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B^{A^n}$，也就是说，$\mathcal{O}_{A,\,B}$ 是从 A 到 B的所有有限元运算构成的集合。此外，我们将记作 $\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_{A,\,A}$。对于运算集合 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{O}_{A,\,B}$，我们将其 n元部分记作 $\mathcal{C}^{(n)}$，即 $\mathcal{C}^{(n)} = \mathcal{C} \cap B^{A^n}$。

定义 3. 设 A是一个集合，且 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{O}_A$。那么，若 $\mathcal{A}$包含所有投影并且在复合下封闭，即： $\mathcal{A}$ 就是 A上的克隆 。

- $\pi_i^n \in \mathcal{A}$, for every $1 \leq i \leq n$ and $n \in \mathbb{N}$, where $\pi_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$
- $f \in \mathcal{A}^{(n)}, g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{A}^{(k)} \Rightarrow f \circ (g_1, \ldots, g_n) \in \mathcal{A}^{(k)}$ for all $k, n \in \mathbb{N}$.

定义 4. 一个代数结构 或代数 $\mathbf{A} = (A, (f_i)_{i \in I})$是由一个集合$A$ （即**A**的论域 ）和一族有限元函数 f_i: $A^{k_i} \to A$ （即**A**的基本运算）构成的有序对。$\mathbf{A}$ 的项克隆是包含**A**的所有基本运算的最小克隆。我们将其记作 Clo(**A**)。更一般地，对于 A上的一组运算 F ，我们也将包含 F 的最小克隆记作 Clo(F)。若两个代数**A** 和**A**′ 满足 Clo(**A**) =Clo(**A**′)，则称它们项等价 。

除非另有说明，我们将对克隆/代数及其定义域使用相同字母的不同字体，例如， $\mathcal{B}$ 是集合 B上的克隆，B 是论域为B的代数。若运算 m: $A^3 \to A$ 满足恒等式$m(y, x, x) \approx m(x, x, y) \approx y$，则称其为 Mal'cev 运算。对于 $k \geq 3$，若运算 v: $A^k \to A$ 满足 $v(y, x \ldots, x) \approx v(x, y, x, \ldots, x) \approx \ldots \approx v(x, x, \ldots, x, y) \approx x$，则称其为近一致性运算。

接下来我们引入本文的核心概念：

定义 5 (克隆子)。 设 $\mathcal{A}$ 是集合 A上的一个克隆， $\mathcal{B}$ 是集合 B上的一个克隆。若对所有 $n, k \in \mathbb{N}$, 我们称$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{O}_{A,B}$ 是从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的一个克隆子（简称为$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-克隆子）

- $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}^{(k)}, g \in \mathcal{B}^{(n)} \Rightarrow g \circ (f_1, \ldots, f_n) \in \mathcal{C}^{(k)}$,
- $f \in \mathcal{C}^{(k)}, g_1, \ldots, g_k \in \mathcal{A}^{(n)} \Rightarrow f \circ (g_1, \ldots, g_k) \in \mathcal{C}^{(n)}$.

若对于代数**A**、**B** ， $\mathcal{A} =$ 属于 Clo(**A**) 且 $\mathcal{B} =$ 属于 Clo(**B**)，则称 $\mathcal{C}$ 是从**A** 到**B** 的克隆子，或者等价地，称 $\mathcal{C}$ 是一个(**A**，**B**)-克隆子。

我们指出，文献中也使用其他替代术语；例如， [CF09]将$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-克隆子称为在左侧对 $\mathcal{B}$ 稳定且在右侧对 $\mathcal{A}$稳定的函数类。Aichinger 和 Mayr 在 [AM16], 中创造了术语克隆子 , 最初仅用于 $\mathcal{A}$是投影克隆的情形。

每个$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-克隆子也是一个小变换封闭集，或是从 A 到 B 的$minion$ （分别依照 [Pip02], 和 [BBKO21]的定义）， 也就是说，它对从内部与投影复合封闭。反过来，minion 也可以视为从 A 上的投影克隆到 B上的投影克隆的克隆子。

定义 6. 设 $\mathcal{A}$、 $\mathcal{B}$ 分别是定义在集合 A 和 B上的克隆。对于一组从A到 B的运算 $F \subseteq \mathcal{O}_{A,B}$ ，我们将$\langle F \rangle_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$定义为由 F生成的（$\mathcal{A}, \mathcal{B}$）-克隆子，即包含 F的最小（$\mathcal{A}, \mathcal{B}$）-克隆子。若存在有限的 $F \subseteq \mathcal{C}$ 使得 $\mathcal{C} = \langle F \rangle_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$，则称从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的克隆子 $\mathcal{C}$ 为有限生成的。

不难看出，对于固定的 $\mathcal{A}$、 $\mathcal{B}$，从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的克隆子构成一个格，其并与交运算分别为 $\mathcal{C} \wedge \mathcal{D} = \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ 和 $\mathcal{C} \vee \mathcal{D} = \langle \mathcal{C} \cup \mathcal{D} \rangle_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$。

接下来我们引入多态 minion，以便从关系角度描述克隆子 :

定义 7. 关系结构是一个二元组 $\mathbb{A} = (A, (R_i^{\mathbb{A}})_{i \in I})$，由一个集合 A和一个由有限元数关系组成的关系族 $R_i^{\mathbb{A}} \subseteq A^{k_i}$ 构成。关系符号族及其元数 $((R_i, k_i))_{i \in I}$ 称为 $\mathbb{A}$的语言。

设 $\mathbb{A} = (A, (R_i^{\mathbb{A}})_{i \in I})$ 与 $\mathbb{B} = (B, (R_i^{\mathbb{B}})_{i \in I})$ 为同一语言中的关系结构。从 $\mathbb{A}$ 到 $\mathbb{B}$ 的同态是保持所有关系的映射 h: $A \to B$ ，即对所有 $i \in I$， $\mathbf{a} = (a_1, \ldots\ldots, a_{k_i}) \in R_i^{\mathbb{A}} \Rightarrow h(\mathbf{a}) = (h(a_1) \ldots\ldots, h(a_{k_i})) \in R_i^{\mathbb{B}}$。从 $\mathbb{A}$ 到 $\mathbb{B}$ 的（n元）多态是映射 f: $A^n \to B$，使得对每个关系符号 R_i 以及所有元组

$\mathbf{a}_1$，……，$\mathbf{a}_n \in R_i^{\mathbb{A}}$，也有 $f(\mathbf{a}_1, \ldots\ldots, \mathbf{a}_n) \in R_i^{\mathbb{B}}$；此处，$f$按坐标求值。这等价于 f 是从直积幂 $\mathbb{A}^n$ 到 $\mathbb{B}$ 的同态。

我们将从 $\mathbb{A}$ 到 $\mathbb{B}$ 的所有多态组成的集合记为 Pol($\mathbb{A}$，$\mathbb{B}$)。进一步地，我们将 Pol($\mathbb{A}$) = Pol($\mathbb{A}$，$\mathbb{A}$) 记为。众所周知，Pol($\mathbb{A}$) 构成一个克隆，我们称之为 $\mathbb{A}$ 的多态克隆。同样容易看出，Pol($\mathbb{A}$，$\mathbb{B}$) 是从 Pol($\mathbb{A}$) 到 Pol($\mathbb{B}$) 的一个克隆子。在文献中，Pol($\mathbb{A}$，$\mathbb{B}$) 通常被称为从 $\mathbb{A}$ 到 $\mathbb{B}$ 的多态 *minion*。

在 [Pip02], Pippenger 引入了两个有限集 A 和 B 之间的 minion 与关系结构对之间的伽罗瓦连接。特别地，他的结果表明，A 与 B 之间的每个 minion 都等于某个多态 minion Pol($\mathbb{A}$，$\mathbb{B}$)。[1] 在 [CF09], Couceiro 和 Foldes 将 Pippenger 的伽罗瓦连接作了两方面的推广——既考虑任意基数的集合，也考虑在给定克隆下保持不变的关系。对于本文而言，[CF09 的定理 3] 的以下推论最为相关：

定理 8。设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 是定义在两个有限集 A 和 B上的克隆。那么，$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{O}_{A,\,B}$ 是从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的克隆子，当且仅当存在关系结构 $\mathbb{A}$、$\mathbb{B}$，使得 $\mathcal{C} = \mathrm{Pol}(\mathbb{A},\mathbb{B})$，且 $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Pol}(\mathbb{A})$，以及 $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{Pol}(\mathbb{B})$。

2.2. 模与向量空间。接下来，我们介绍一些关于模与向量空间的记号。本文中的环一律假定为含幺，即每个环 $\mathbf{R} = (R, +, -, 0, \cdot, 1)$都含有一个乘法恒等元 1。本文中的所有模都是左 模。更准确地说，一个$\mathbf{R}$-模是一个单排序代数 $\mathbf{A} = (A, +, 0, -, (r)_{r\in\mathbf{R}})$，其中 $(A, +, 0, -)$是其底层阿贝尔群，并且每个环元素都与一元函数 $r(x) = rx$相对应。

注意，对于一个 R-模 A，Clo(A) 恰好由关于 R 的线性组合所给出的函数组成，即 $t(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n r_i x_i$，其中有 $r_1, \ldots, r_n \in R$。利用矩阵乘法，我们也将 $t(\mathbf{x}) = \mathbf{r}^T\mathbf{x}$ 简写为，其中 $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n)^T \in R^n$，且 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in A^n$。更一般地，注意函数 t: $A^n \to A^m$ 属于 $t \in (\mathrm{Clo(A)}^{(n)})^m$，当且仅当 $t(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$，其中 $A \in R^{m\times n}$。

若 $I = \{r \in R \mid \forall a \in A\colon\ r(a) = 0\}$ 表示一个$\mathbf{R}$-模$\mathbf{A}$ 的零化子，且 $R' = R/I$，那么$\mathbf{A}$ 与模$\mathbf{A}' = (A, +, 0, -, (r)_{r\in\mathbf{R}'})$ 项等价，其中 $(r + I)(a) = r(a)$。因此，每个模都与一个忠实模项等价。

若 F 是一个域，那么按照模的惯例，$\mathbf{A} = (F^k, +, 0, -, (r)_{r\in F})$ 是一个k维的 F 上向量空间。我们将稍微滥用记号，也使用记号 $\mathbf{A} = \mathbf{F}^k$（尽管从普适代数的意义上说，A 并非 F 的直积幂）。我们将 A 的元素视为 k维行向量 $\mathbf{x}^T = (x_1, \ldots, x_k)$，其中 $x_1, \ldots, x_k \in F$。此外，我们将元组 $(\mathbf{x}_1^T, \ldots, \mathbf{x}_n^T) \in (A)^n$ 与矩阵 $X \in \mathbf{F}^{n\times k}$相对应，其第 i行等于 $\mathbf{x}_i^T$。我们采用这一记号约定，因为它与我们此前为模确立的约定一致。特别地，每个项运算 $t \in \mathrm{Clo(A)}^{(n)}$，若可表示为线性组合 $t(\mathbf{x}_1^T, \ldots, \mathbf{x}_n^T) = \sum_{i=1}^n a_i\mathbf{x}_i^T$，就可以简洁地写成 $t(X) = \mathbf{a}^T X$。此外，运算 t: $A^n \to A^m$ 属于 $t \in (\mathrm{Clo(A)}^{(n)})^m$，当且仅当对于某个矩阵 $A \in F^{m\times n}$，有 $t(X) = AX$。

接下来我们回顾线性代数中的一些标准定义：

定义 9. 对于环 $\mathbf{R}$ 和矩阵 $X \in R^{k\times l}$，A 的秩 rk(X) 定义为满足 $X = AB$ 的最小 $n \in \mathbb{N}$，其中 $X = AB$ 对某些 $A \in R^{k\times n}$、$U \in R^{n\times l}$ 成立。若 $n = \mathrm{rk}(X)$，我们将把任何满足 $A \in R^{k\times n}$、$U \in R^{n\times l}$ 的分解 $X = AB$ 称为 X的秩分解 。

[1] 事实上，稍微更一般地，[Pip02 的第 3], 节也已经给出了克隆子的一种关系描述本质上是一元克隆 $\mathcal{A}$ 到 B 上的投影克隆。

对于域上的矩阵，$\mathrm{rk}(X)$ 等于 $\mathrm{rk}(X)$ 的常规定义，即列秩或行秩（参见例如 [BR14，第5节.4]）。此外，以下众所周知的事实成立：

引理 10. 设 $\mathbf{F}$ 是一个域，设 $k,l \in \mathbb{N}$，令 $X \in F^{k\times l}$，并令 n 为 X的秩。若$X = AU = A'U'$ 是 X 的两个不同的秩分解，则存在一个可逆矩阵 $T \in F^{n\times n}$，满足 $A' = AT$和 $U' = T^{-1}U$。

对于域 $\mathbf{F}$ 上的矩阵 $X \in \mathbf{F}^{k\times l}$，我们用 $C(X) = \{X\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in F^l\}$ 表示 X的列空间。

对于任意线性子空间 $V \leq \mathbf{F}^k$，我们将用 $V^\perp = \{\mathbf{y} \in \mathbf{F}^k \mid \forall \mathbf{x} \in V\colon \mathbf{y}^T\mathbf{x} = 0\}$表示与 V “正交”的向量所构成的空间。注意，$(V^\perp)^\perp = V$、$\dim(V) + \dim(V^\perp) = k$以及 $(V \cap W)^\perp = V^\perp + W^\perp$均成立。然而（与真正的内积空间不同）， V和$V^\perp$ 未必互为补空间。

3. 一致生成的函数

本节讨论由其 一致生成的 n元小算子的运算集合，这一概念最初由 [MW24]引入。具体而言，我们将给出一个一般准则，判定克隆 $\mathcal{A}$和 $\mathcal{B}$ 之间的所有克隆子是否都由其 n元部分生成（推论 20）。随后，我们将讨论这一准则如何在一些基本构造下保持不变，并说明如何利用它重新证明若干已知结果。

定义 11. 设 $\mathcal{A}$是集合 A上的一个克隆。对于 $k,l,n \in \mathbb{N}$，令 $R^{k}{}_{,n}{}^{l}(\mathcal{A})$表示所有满足以下条件的运算 $r \in (\mathcal{A}^{(k)})^l$ 的集合：存在 $v \in (\mathcal{A}^{(n)})^l$ 和 $w \in (\mathcal{A}^{(k)})^n$，使得

$$r(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} r_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ r_l(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1(w_1(\mathbf{x}),\dots,w_n(\mathbf{x})) \\ \vdots \\ v_l(w_1(\mathbf{x}),\dots,w_n(\mathbf{x})) \end{bmatrix} = v \circ w(\mathbf{x}).$$

我们进一步定义 $R_n(\mathcal{A}) = \bigcup_{l,k} R^{k}{}_{,n}{}^{l}(\mathcal{A})$。对于代数$\mathbf{A}$，我们还将使用记号$R^{k,n}{}^{l}(\mathbf{A}) = R^{k}{}_{,n}{}^{l}(\mathrm{Clo}(\mathbf{A}))$以及 $R_n(\mathbf{A}) = R_n(\mathrm{Clo}(\mathbf{A}))$。

换言之，$R^{k}{}_{,n}{}^{l}(\mathcal{A})$由所有可经由 $\mathcal{A}^{(n)}$ 分解的运算（$\mathcal{A}^{(k)}$）^{l} 组成。正如 [MW24]，已经指出的那样，根据定义可直接得出，对于一个$\mathbf{R}$-模 $\mathbf{A}$：

$$R_n^{k,l}(\mathbf{A}) = \{f\colon A^k \to A^l \mid \exists M \in R^{l\times k} : \mathrm{rk}(M) \leq n, f(\mathbf{x}) = M\mathbf{x}\}.$$

因此，$R_n(\mathbf{A})$ 对应于秩至多为 n 的$\mathbf{R}$ 上的矩阵。因此，以下引理可视为如下事实的推广：对于给定环上的矩阵 M,N，$\mathrm{rk}(MN) \leq \min(\mathrm{rk}(M), \mathrm{rk}(N))$：

Lem引理 12. 设 $\mathcal{A}$ 为一个克隆。若 $s \in R^{j}{}_{,n}{}^{k}(\mathcal{A})$，$r \in R^{k}{}_{,m}{}^{l}(\mathcal{A})$，则 $r \circ s \in R^{j}{}_{,\min(n,m)}{}^{l}(\mathcal{A})$。

证明。根据定义，存在 $u \in (\mathcal{A}^{(k)})^m, t \in (\mathcal{A}^{(m)})^l$ 使得 $r = t \circ u$，并且存在$w \in (\mathcal{A}^{(j)})^n, v \in (\mathcal{A}^{(n)})^k$ 使得 $s = v \circ w$。因此 $r \circ s = t \circ (u \circ v \circ w)$。由于 $t \in (\mathcal{A}^{(m)})^l$，且 $(u \circ v \circ w) \in (\mathcal{A}^{(j)})^m$，我们得到 $r \circ s \in R^{j}{}_{,m}{}^{l}(\mathcal{A})$。另一方面，$r \circ s = (t \circ u \circ v) \circ w$ 同理可推出 $r \circ s \in R^{j}{}_{,n}{}^{l}(\mathcal{A})$。因此 $r \circ s \in R^{j}{}_{,n}{}^{l}(\mathcal{A}) \cap R^{j}{}_{,m}{}^{l}(\mathcal{A}) = R^{j}{}_{,\min(n,m)}{}^{l}(\mathcal{A})$。□

根据以下观察，在尝试刻画由其 n 元运算生成的克隆子时，$R_n(\mathcal{A})$ 中的运算很有帮助：

引理13。 设 $\mathcal{A}$、 $\mathcal{B}$ 为克隆， $f\colon\ A^l \to B$、 $g\colon\ A^k \to B$，且 $\mathcal{C} = \langle f\rangle_{\mathcal{A},\ \mathcal{B}}$。那么 $g \in \langle \mathcal{C}^{(n)}\rangle_{\mathcal{A},\ \mathcal{B}}$ 当且仅当存在 $m \in \mathbb{N}$、 $s \in \mathcal{B}^{(m)}$ 和 $r_1 \ldots$、 $r_m \in R^{k}{}_{,\ n}{}^{l}(\mathcal{A})$ 使得

$$g = s \circ (f \circ r_1, \ldots, f \circ r_m). \tag{1}$$

特别地， $\mathcal{C} = \langle \mathcal{C}^{(n)}\rangle_{\mathcal{A},\ \mathcal{B}}$ 当且仅当存在 $m \in \mathbb{N}, s \in \mathcal{B}^{(m)}$ 和 $r_1 \ldots, r_m \in R^{k}{}_{,\ n}{}^{k}(\mathcal{A})$使得

$$f = s \circ (f \circ r_1, \ldots, f \circ r_m). \tag{2}$$

证明。 注意到 $g \in \langle \mathcal{C}^{(n)}\rangle_{\mathcal{A},\ \mathcal{B}}$ 当且仅当它属于由所有形如 $f \circ (v_1, \ldots, v_k)$ 的函数生成的 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-克隆子，其中 $v_i \in \mathcal{A}^{(n)}$。若进一步从内部与来自 $\mathcal{A}^{(k)}$ 的运算复合，则可得到所有形如 $f \circ r$ 的运算，其中 $r \in R^{k}{}_{,\ n}{}^{l}(\mathcal{A})$。因此， $g \in \langle \mathcal{C}^{(n)}\rangle_{\mathcal{A},\ \mathcal{B}}$ 当且仅当存在 $s \in \mathcal{B}^{(m)}$ 和 $r_1 \ldots,\ r_m \in R^{k}{}_{,\ n}{}^{l}(\mathcal{A})$，且满足 $g = s \circ (f \circ r_1, \ldots, f \circ r_m)$。

对于第二个陈述，注意到 $\mathcal{C} = \langle \mathcal{C}^{(n)}\rangle_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ 当且仅当 $f \in \langle \mathcal{C}^{(n)}\rangle_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$。因此，结论可由（1）直接得出。□

注意，在引理13的两个陈述中，只需写出 $r_i \in R_n(\mathcal{A})$；例如， $r_i \in R^{k,n}{}^{l}(\mathcal{A})$ 可由 f 和 g 的元数以及方程（1）推出。因此，在上下文明确时，我们通常会省略这些上标。

如果公式（2）不依赖于 f 的选取： $A^k \to B$ ，那么我们称 B^{A^k} 是由 n 元子式一致生成的。更准确地说，按照 [MW24], ，我们定义：

定义14。 设 $\mathcal{A}$、 $\mathcal{B}$ 为克隆。如果存在 $s \in \mathcal{B}^{(m)}$ 和 $r_1 \ldots, r_m \in R^{k}{}_{,n}{}^{k}(\mathcal{A})$，使得对每个 $f \in U$：我们称 $U \subseteq B^{A^k}$ 是由其 n 元$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$小算子一致生成的，

$$f = s \circ (f \circ r_1, \ldots, f \circ r_m). \tag{3}$$

更一般地，对于 $U \subseteq \mathcal{O}_{A,\ B}$ 我们称 U 由其 n元 $(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$子式一致生成，如果对于每个 $k \in \mathbb{N}$， $U^{(k)}$ 都由其 n 元 $(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$ 子式一致生成。简而言之，我们也将称 U 为 $(n,\ \mathcal{A},\ \mathcal{B})$-一致生成（UG）。

定义15。 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是克隆。若存在 $s \in \mathcal{B}^{(m)}$ 和 $r_1 \ldots,\ r_m \in R^{l}{}_{,\ n}{}^{k}(\mathcal{A})$，使得对于定义域中的所有 f， I

$$I(f) = s \circ (f \circ r_1, \ldots, f \circ r_m). \tag{4}$$

如果对于某个 n， I 可以由 n 元 $(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$ 子式一致表示，我们就简单地说 I可以一致表示（在 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 上）。简而言之，如果 I 可以由 $(n$ 元$)$ $(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$ 子式表示，我们也将称 I 为 $(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$-一致可表示（UR）（或 $(n,\ \mathcal{A},\ \mathcal{B})$-一致可表示（UR））。

定义16. 如果我们考察定义14和15中的项克隆 $\mathcal{A}$ =Clo(**A**) 和 $\mathcal{B}$ =Clo(**B**)，我们也将把通过 n 元 (**A**,**B**)- 小算子的一致生成 / 表示称为。如果运算 $I\colon\ \mathcal{O}_A^{(l)}{}_{,B} \to \mathcal{O}_A^{(k)}{}_{,B}$ an 能通过 n 元 (**A**,**B**)-小算子一致表示，这意味着存在项运算 $s^{\mathbf{B}}$ 和 $r_1^{\mathbf{A}} \ldots, r_m^{\mathbf{A}} \in R^{k}{}_{,n}{}^{l}(\mathbf{A})$，使得

$$I(f) = s^{\mathbf{B}} \circ (f \circ r_1^{\mathbf{A}}, \ldots, f \circ r_m^{\mathbf{A}}). \tag{5}$$

相反，如果我们将 m 元项 s（在 **B** 的语言中）以及 $r_1, \ldots,\ r_m$（作为 k 元组的 l 元项，在 **A** 的语言中）视为，那么我们将把这个（多类）项称为

$$I(f) = s \circ (f \circ r_1, \ldots, f \circ r_m), \tag{6}$$

运算 I（通过 n 元（$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$）子式）的 表示（公式）。

在实际使用中，我们有时不会区分一个运算及其表示，但这绝不会引起任何混淆。

我们来观察一些基本事实：

引理 17. 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是克隆。那么

(1) $U \subseteq \mathcal{O}_A^{(k)}$，$_B$ 是 $(n, \mathcal{A}, \mathcal{B})$-一致生成，当且仅当 $id|_U$ 是 $(n, \mathcal{A}, \mathcal{B})$-一致可表示。*(2)* 若运算 I 是 $(n, \mathcal{A}, \mathcal{B})$-一致可表示，且 $m \geq n$，则 I 是 m-*ur*。*(3)* 假设 $I_1, \ldots, I_r$：$\mathcal{O}_A^{(k)}$，$_B \to \mathcal{O}_A^{(l)}$，$_B$ 是 $(n, \mathcal{A}, \mathcal{B})$-一致可表示，且 $s \in \mathcal{B}^{(r)}$。那么 $I(f) = s \circ (I_1(f) \ldots, I_i(f))$ 是 $(n, \mathcal{A}, \mathcal{B})$-一致可表示。*(4)* 假设 I_1：$\mathcal{O}^{(k_1)}{}_{A,B} \to \mathcal{O}_A^{(k_2)}$，$_B$ 是 $(n_1, \mathcal{A}, \mathcal{B})$-一致可表示，且 I_2：$\mathcal{O}^{(k_2)}{}_{A,B} \to \mathcal{O}_A^{(k_3)}$，$_B$ 是 $(n_2, \mathcal{A}, \mathcal{B})$-一致可表示。那么 $I_2 \circ I_1$：$\mathcal{O}^{(k_1)}{}_{A,B} \to \mathcal{O}_A^{(k_3)}$，$_B$ 是 $(n, \mathcal{A}, \mathcal{B})$-一致可表示，其中 $n = min(n_1, n_2)$。

证明。(1) 直接由定义得到。(2) 直接由以下观察得到：对于 $n \leq m$，$R_n(\mathcal{A}) \subseteq R_m(\mathcal{A})$。为证明 (3)，对每个 $i \in [r]$，固定 I_i 的一个一致表示，即某个 $g_i \in \mathcal{B}^{(m_i)}$、$r_{i,\,j_i} \in R_n(\mathcal{A})$，使得对所有 $j_i \in [m_i]$ 均有

$$I_i(f) = g_i \circ (f \circ r_{i,1}, \ldots, f \circ r_{i,m_i}),$$

对所有 $f \in \mathsf{dom}(I_i)$ 均成立。令 $g = s \circ (g_1, \ldots, g_n) \in \mathcal{B}$。则

$$I(f) = g \circ (f \circ r_{1,1}, \ldots, f \circ r_{1,m_1}, \ldots f \circ r_{r,1}, \ldots, f \circ r_{r,m_r})$$

对所有 $f \in \bigcap_{i \in [r]} \mathsf{dom}(I_i)$ 均成立。该公式表明，I 可以由 n 元 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-小算子一致表示。

最后证明 (4)。取 I_1、I_2 的一致表示，即函数 g_1，$g_2 \in \mathcal{B}$、$r_1, \ldots, r_m \in R_{n_1}(\mathcal{A})$，以及 $s_1, \ldots, s_l \in R_{n_2}(\mathcal{A})$，使得

$$I_1(f) = g_1 \circ (f \circ r_1, \ldots, f \circ r_m)$$
$$I_2(h) = g_2 \circ (h \circ s_1, \ldots, f \circ s_l)$$

对所有 $f \in \mathsf{dom}(I_1)$ 和 $h \in \mathsf{dom}(I_2)$。于是，对于 $f \in \mathsf{dom}(I_1) \cap I_1^{-1}(\mathsf{dom}(I_2))$，我们得到：

$$I_2 \circ I_1(f) = g \circ (f \circ r_1 \circ s_1, f \circ r_2 \circ s_1 \ldots, f \circ r_{m-1} \circ s_l, f \circ r_m \circ s_l), \text{ where}$$

$g(x_1, x_2, \ldots, x_{mn}) = g_2(g_1(x_1, \ldots, x_m) \ldots, g_1(x_{(l-1)m+1}, \ldots, x_{lm}))$。

由引理 12 可知，对于所有 $i \in [m]$ 和 $j \in [l]$，$r_i \circ s_j \in R_n(\mathcal{A})$ 因而 $I_2 \circ I_1$ 可以表示为 n-元小算子。□

现在我们可以证明本节的一个主要定理。该定理使我们能够将通过带有 $k > n$ 的 n-元小算子一致生成一个 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-克隆子的 k-元部分的问题，归约为通过 n-元小算子一致生成其 $(n+1)$-元部分。

定理18。设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 为克隆，$n \geq 1$，且令 $\mathcal{A}_{const} = \mathsf{Clo}(\mathcal{A} \cup \{a\}_{a \in A})$ 为由 $\mathcal{A}$及其集合上的所有常值运算生成的克隆。令 $\mathcal{C}$ 为从 $\mathcal{A}_{const}$ 到 $\mathcal{B}$的克隆子。那么以下各项等价：

(1) $\mathcal{C}^{(n+1)}$ 是$(n, \mathcal{A}, \mathcal{B})$-一致生成 *(2)* 对某个 $k > n$，$\mathcal{C}^{(k)}$ 是$(n, \mathcal{A}, \mathcal{B})$-一致生成 *(3)* $\mathcal{C}$ 是$(n, \mathcal{A}, \mathcal{B})$-一致生成 *(4)* 对每个部分运算 I：$\mathcal{C}^{(k)} \to \mathcal{C}^{(l)}$，若其是$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-一致可表示，则它是$(n, \mathcal{A}, \mathcal{B})$-一致可表示。

我们想强调的是，尽管我们假设 $\mathcal{C}$ 在与来自 A 的常值运算复合后仍封闭，但定理18中 (1)–(4) 各项对于 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-小算子成立，而不仅仅对于 $(\mathcal{A}_{const},\mathcal{B})$-小算子成立。

定理*18*的证明。 由引理 17 中的观察可直接得出蕴含关系 (4) $\to$(3) $\to$(2) $\to$ (1)。

为证明 (3) $\to$ (4)，令 $I\colon \mathcal{C}^{(k)}\to\mathcal{C}^{(l)}$ 为一个运算，它对某个 $s\in\mathbb{N}$ 可以由 s 元 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 小算子一致可表示，并假设 $\mathcal{C}$ 由 n 元 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 小算子一致生成。引理 17 (1) 推出 $\mathrm{id}:\mathcal{C}^{(k)}\to\mathcal{C}^{(k)}$ 可以由 n 元 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 小算子一致可表示。将引理 17 (4) 应用于 $I=I\circ\mathrm{id}$，可得 I 可以由 n' 元 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 小算子一致可表示，其中 $n'=\min(n,s)$。由引理 17 (2)，证明完成。

现在只需证明蕴含关系 (1) $\to$ (3)。因此，假设 (1) 成立。

我们先证明，任何满足 $(n+1,\mathcal{A},\mathcal{B})$-UR 的运算 $I\colon \mathcal{C}^{(l)}\to\mathcal{C}^{(k)}$，实际上已经满足 $(n,\mathcal{A},\mathcal{B})$-UR。注意，根据引理 17 (1)，只需对形如 $I_r(f)=f\circ r$ 的运算证明这一结论，其中 $r\in R^{k,\,l}_{n+1}(\mathcal{A})$。对于任意 $r\in R^{k,\,l}_{n+1}(\mathcal{A})$，根据定义，存在$u\in(\mathcal{A}^{(n+1)})^l, v\in(\mathcal{A}^{(k)})^{n+1}$，使得 $r=u\circ v$。因此，我们可以将 I_r 写成复合$I_r=I_v\circ\mathrm{id}\circ I_u$，其中 $I_u(f)=f\circ u$, $I_v(g)=g\circ u$，而 id 表示 $\mathcal{C}^{(n+1)}$ 上的恒等映射。由 (1) 和引理 17 (3)，id 可以表示为 n 元 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-子式。由引理 17 (2) 和 (4)，$I_r$ 也可以表示为 n 元 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-子式，因此得证。

为了证明 (3)，我们将通过对 $k=1,2,\ldots$ 作归纳来证明： $\mathcal{C}^{(k)}$ 是 $(n,\mathcal{A},\mathcal{B})$-一致生成。注意，对于 $k\le n+1$，这可由 (1) 与引理 17 (2) 得出。对于归纳步骤 $k\to k+1$，根据归纳假设，存在运算 $s\in\mathcal{B}^{(m)}$ 和$r_1,\ldots,r_m\in R^{k,\,k}_{n}(\mathcal{A})$，使得对每一个 $f\in\mathcal{C}^{(k)}$，都有 $f=s\circ(f\circ r_1,\ldots,f\circ r_m)$。如果我们将函数 $g\in\mathcal{C}^{(k+1)}$ 的最后一个自变量固定为某个常数 $a_{k+1}\in A$，则 $\mathbf{x}\mapsto g(\mathbf{x}\ a_{k+1})$ 属于$\mathcal{C}^{(k)}$，因为 $\mathcal{C}$ 在与 $\mathcal{A}_{const}$ 的复合下是封闭的。由此可得，对每一个 $g\in\mathcal{C}^{(k+1)}$:

$$g(\mathbf{x},x_{k+1})=s(g(r_1(\mathbf{x}),x_{k+1}),\ldots,g(r_m(\mathbf{x}),x_{k+1})). \tag{7}$$

注意，对于每个 $r\in R^{k,\,k}_{n}(\mathbf{A})$，映射 $(\mathbf{x}\ x_{k+1})\mapsto(r(\mathbf{x})\ x_{k+1})$ 都属于 $R^{k+1,\,k+1}_{n+1}(\mathbf{A})$。因此，方程 (7) 表明，$\mathcal{C}^{(k)}$ 上的恒等映射是 $(n+1,\ \mathcal{A},\ \mathcal{B})$- 一致可表示的。根据我们先前的观察，它也必定是 $(n,\ \mathcal{A},\ \mathcal{B})$-一致可表示的。换言之，$\mathcal{C}^{(k)}$ 由 n元 $(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$-小算子一致生成，因此结论得证。

□

定理18的直接推论如下:

推论19。 设 $\mathcal{A}$和 $\mathcal{B}$ 是定义在集合 A和 B上的克隆，并设 $\mathcal{C}$ 是从 $\mathcal{A}_{const}$ 到$\mathcal{B}$ 的克隆子，满足 $\mathcal{C}^{(n+1)}$ 由 n元 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-小算子一致生成。那么，对于每个子克隆体 $\mathcal{D}\subseteq\mathcal{C}$，$\mathcal{D}=\langle\mathcal{D}^{(n)}\rangle_{\mathcal{A},\ \mathcal{B}}$。

证明。 由定理18（3）可知，对每个 $k\in\mathbb{N}$，$\mathcal{C}^{(k)}$ 由 n元（$\mathcal{A},\mathcal{B}$）-子式一致生成。由引理13，对每个 $f\in\mathcal{C}$，克隆子$\langle f\rangle_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ 由其n元函数生成。这直接推出，$\mathcal{C}$ 的每个子克隆体 $\mathcal{D}$ 均由$\mathcal{D}^{(n)}$生成。□

将推论19应用于$\mathcal{C}=\mathcal{O}_{A,B}$，我们得到以下准则：所有$(\mathcal{A},\mathcal{B})$-克隆子均由其 n元部分生成:

推论 20. 设 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 为集合 A 与 B上的克隆。若 $\mathcal{O}_{A\,B}^{(n+1)}$,由n元$(\mathcal{A},\mathcal{B})$-子式一致生成，则对每个$(\mathcal{A},\mathcal{B})$-克隆子，有$\mathcal{C}=\langle\mathcal{C}^{(n)}\rangle_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$。

若 $\mathcal{A}$与 $\mathcal{B}$ 是有限集合 A与 B 上的克隆，且 $\mathcal{O}_{A\,B}^{(n+1)}$ ，由 n元（$\mathcal{A}$， $\mathcal{B}$）-子式一致生成，则推论 20 表明仅存在有限多个（$\mathcal{A}$， $\mathcal{B}$）-克隆子。对它们全部分类可归结为如下纯组合问题：确定 $\mathcal{O}_{A}^{(n)}$ ，B 中所有在右侧与 $\mathcal{A}$ 复合、左侧与 $\mathcal{B}$ 复合下保持稳定的子集。这一策略已（隐含地）用于文献中的若干分类结果。在以下子小节中，我们将首先讨论一致生成的其他一些良好结论，然后从一致生成的视角回顾现有文献。

3.1. **基本性质**。对于分别定义在集合 A_1与 A_2上的两个克隆 $\mathcal{A}_1$、 $\mathcal{A}_2$ ，我们将它们的直积 $\mathcal{A}=\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2$ 定义为集合 $A=A_1\times A_2$上的克隆，使得若将A^n 与 $A_1^n\times A_2^n$等同，则 $\mathcal{A}^{(n)}=\mathcal{A}_1^{(n)}\times\mathcal{A}_2^{(n)}$ 以自然方式作用在 A^n 上。直积在如下意义下与一致生成相容：

命题 21。 设 $\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\mathcal{B}$ 是克隆（分别定义在集合 A_1,A_2,B 上），并假设对于 $i=1,2$，$\mathcal{O}_{A_i,B}$ 由 n 元（$\mathcal{A}_i$,$\mathcal{B}$）小算子一致生成。那么 $\mathcal{O}_{A_1\times A_2,B}$ 由 n 元（$\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2$,$\mathcal{B}$）小算子一致生成。

证明。 设 $k=n+1$，并将每个元组 $\mathbf{x}\in(A_1\times A_2)^k$ 视为 $(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\in A_1^k\times A_2^k$，其中 $\mathbf{x}_1$ （分别地，$\mathbf{x}_2$）表示到 A_1^k （分别地， A_2^k）的逐坐标投影。采用这一记号，我们还可以将每个 k 元运算 $f\colon A^k\to B$ 视为函数 $f\colon A_1^k\times A_2^k\to B$。

由于 $\mathcal{O}_{A_1}^{(k)},_B$ 和 $\mathcal{O}_{A_2}^{(k)},_B$ 由 n 元子式一致生成，因此存在 $r_1,\dots r_m\in R^{k,n^k}(\mathcal{A}_1)$ 以及 $s_1,\dots s_l\in R^{k,n^k}(\mathcal{A}_2)$ 和 $g_1,g_2\in\mathcal{B}$，使得对所有 $f\colon A^k\to B$ 以及所有 $(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\in A_1^k\times A_2^k$，

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=&g_1(f(r_1(\mathbf{x}_1),\mathbf{x}_2),\dots,f(r_m(\mathbf{x}_1),\mathbf{x}_2),\\ f(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=&g_2(f(\mathbf{x}_1,s_1(\mathbf{x}_2)),\dots,f(\mathbf{x}_1,s_l(\mathbf{x}_2)).\end{aligned}$$

结合这两个方程，我们得到

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=g_1(&g_2(f(r_1(\mathbf{x}_1),s_1(\mathbf{x}_2)),\dots,f(r_1(\mathbf{x}_1),s_l(\mathbf{x}_2))),\\ &g_2(f(r_2(\mathbf{x}_1),s_1(\mathbf{x}_2)),\dots,f(r_2(\mathbf{x}_1),s_l(\mathbf{x}_2))),\dots,\\ &g_2(f(r_m(\mathbf{x}_1),s_1(\mathbf{x}_2)),\dots,f(r_m(\mathbf{x}_1),s_l(\mathbf{x}_2)))),\end{aligned}\tag{8}$$

对所有 $f\colon A^k\to B$ and $(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\in A_1^k\times A_2^k$。由于 $\mathcal{A}^{(k)}=\mathcal{A}_1^{(k)}\times\mathcal{A}_2^{(k)}$，对于每一对$r_i\in R^{k,n^k}(\mathcal{A}_1)$、 $s_j\in R^{k,n^k}(\mathcal{A}_2)$，都存在一个 $t_{ij}\in R^{k,n^k}(\mathcal{A})$，使得 $t_{i,j}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=(r_i(\mathbf{x}_1)s_j(\mathbf{x}_2))$。因此，(8) 表明 $\mathcal{O}_{A,B}$是 $(n,\mathcal{A},\mathcal{B})$-一致生成的，从而完成证明。□

我们还想指出，如果 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 是定义在有限集上的克隆，并且 $\mathcal{O}_{A,B}$ 是 n-一致生成的，那么每个 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-克隆子都可以描述为最大元数为 $\leq|A|^n$ 的关系结构的多态 minion。事实上，这里并不需要一致生成。其证明可由 [CF09] 中定理 8 的证明推导得出。为完整起见，我们将其列出：

引理 22。 设 $\mathcal{A}$、 $\mathcal{B}$ 是定义在有限集 A 和 B 上的克隆，并且 $n\in\mathbb{N}$。接下来定义关系结构 $\mathbb{A}=(A,\mathcal{A}^{(n)})$，并对每个克隆子 $\mathcal{C}$，定义 $\mathbb{B}_{\mathcal{C}}=(B,\mathcal{C}^{(n)})$ （这里，我们分别将 $\mathcal{A}^{(n)}\subseteq A^{A^n}$ 和 $\mathcal{C}^{(n)}\subseteq B^{A^n}$ 视为 A 和 B 上的 A^n 元关系）。那么以下命题等价：

(1) $\forall(\mathcal{A},\mathcal{B})$-克隆子 $\mathcal{C}$: $\mathcal{C}=\langle\mathcal{C}^{(n)}\rangle_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$;

(2) $\forall(\mathcal{A},\mathcal{B})$-克隆子 $\mathcal{C}$: $\mathcal{C}=\mathrm{Pol}(\mathbb{A},\mathbb{B}_{\mathcal{C}})$。

证明。 首先，注意对于每个 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-克隆子 $\mathcal{C}$，都有包含关系 $\langle\mathcal{C}^{(n)}\rangle\subseteq\mathcal{C}\subseteq\mathrm{Pol}(\mathbb{A},\mathbb{B}_{\mathcal{C}})$。此外， $\mathbb{A}$ 显然在 $\mathcal{A}$下是不变的；由于 $\mathcal{C}$ 在与$\mathcal{B}$复合时保持稳定，因此 $\mathbb{B}_{\mathcal{C}}$在 $\mathcal{B}$下也不变。因此，根据定理 8，$\mathrm{Pol}(\mathbb{A},\mathbb{B}_{\mathcal{C}})$ 是一个 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-克隆子。

接下来我们证明 $\mathcal{C}^{(n)}=\mathrm{Pol}(\mathbb{A},\mathbb{B}_{\mathcal{C}})^{(n)}$。根据上文，我们只需证明包含关系$\supseteq$。因此，设 $f\in\mathrm{Pol}(\mathbb{A},\mathbb{B}_{\mathcal{C}})^{(n)}$。注意 $\pi_1^n,\dots,\pi_n^n\in\mathcal{A}^{(n)}$，其中 π_i^n表示 n 元投影到 A 上的第 i 个坐标。由于 $f\in\mathrm{Pol}(\mathbb{A},\mathbb{B}_{\mathcal{C}})^{(n)}$，我们得到 $f(\pi_1^n,\dots,\pi_n^n)\in\mathcal{C}^{(n)}$。换言之， $f\in\mathcal{C}^{(n)}$，这正是我们要证明的。

为了证明引理中的陈述，我们先假设 (1) 成立。这尤其意味着，每个 $(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$-克隆子都完全由其 n 元部分确定。因此，对于每个 $(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$-克隆子 $\mathcal{C}$， $\mathcal{C}^{(n)}=\mathrm{Pol}(\mathbb{A},\ \mathbb{B}_{\mathcal{C}})^{(n)}$ 蕴含 $\mathcal{C}=\mathrm{Pol}(\mathbb{A},\ \mathbb{B}_{\mathcal{C}})$。于是 (2) 成立。

反过来，假设 (2) 成立。根据其定义，对于每个 $(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$-克隆子 $\mathcal{C}$， $\mathbb{B}_{\mathcal{C}}=\mathbb{B}_{\langle\mathcal{C}^{(n)}\rangle_{\mathcal{A},\ \mathcal{B}}}$ 成立。现在，由 (2) 可知，对于每个 $(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$-克隆子 $\mathcal{C}$， $\mathcal{C}=\mathrm{Pol}(\mathbb{A},\ \mathbb{B}_{\mathcal{C}})=\mathrm{Pol}(\mathbb{A},\ \mathbb{B}_{\langle\mathcal{C}^{(n)}\rangle_{\mathcal{A},\ \mathcal{B}}})=\langle\mathcal{C}^{(n)}\rangle_{\mathcal{A},\ \mathcal{B}}$。因此 (1) 成立。□

由引理 22 和推论 20 可直接得到：

推论 23。 设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 是有限集 A 和 B 上的克隆，并假设 $\mathcal{O}_{A\ B}^{(n+1)}$，是($n$、 $\mathcal{A}$、 $\mathcal{B}$)-一致生成的。那么，每个($\mathcal{A}$、 $\mathcal{B}$)-克隆子 $\mathcal{C}$ 都是元数最大为 $\leq|A|^n$ 的关系结构的多态 *minion*。

3.2. **仿射克隆之间克隆子的一致生成**。 本节将从一致生成的角度回顾文献中关于仿射克隆之间克隆子的一些结果。

首先，我们想指出，所有已知的关于互素模之间克隆子的分类，都（隐式地）基于这样一个证明：$\mathcal{O}_{A,\ B}$ 由 n 元小算子一致生成。

可以说，这类结果中最早的一项是在 [Fio20], 中证明的，第一作者在那里对互素有限域上的一维向量空间之间的所有克隆子进行了分类。尽管 [Fio20], 中并未明确表述，但很容易从中推出以下结论：

引理 24. 设$\mathbf{A}$ 是有限域$\mathbf{F}$上的一维向量空间，且$\mathbf{B}$ 是$\mathbf{S}$-模，并且$\mathrm{char}(\mathbf{F})$ 在$\mathbf{S}$中可逆。那么 $\mathcal{O}_{A,B}$ 由一元($\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$)-小算子一致生成。

证明。这个引理的证明可从 [Fio20, 定理4.3.]的证明中提取。尽管 [Fio20, 定理4.3.] 仅针对 $\mathbf{B}$ 也是一维向量空间的情况陈述，但很容易看出，对模$\mathbf{B}$唯一需要的假设是 $|F|$，或者等价地，char(**F**)在$\mathbf{S}$中可逆。□

引理 24 与命题 21 一起表明，若$\mathbf{A}$是有限域的直积，并视为正则模，则引理 24 的结论仍然成立。 [Fio21a]中已经部分注意到了这一点。利用这一观察，我们可以得到 [MW24, 定理 1.5.]的如下一个小推广：

定理25。 设$\mathbf{A}$是交换环$\mathbf{R}$上的有限忠实$\mathbf{R}$-模，且$\mathbf{B}$ 是忠实$\mathbf{S}$-模。则以下命题等价：

(1) $\mathcal{O}_{A,\ B}$ 由一元$(\mathbf{A},\mathbf{B})$-小算子一致生成。*(2)* 每个$(\mathbf{A},\mathbf{B})$-克隆子都由一元函数生成。*(3)* $\mathrm{char}(R)$在$\mathbf{S}$中可逆，$\mathbf{R}$ 是有限域的直积，且$\mathbf{A}$ 同构于正则 R-模。

证明。 由推论 20 可得蕴含关系 (1)→(2)。由引理 24 和命题 21 可得蕴含关系 (3)→(1)。蕴含关系 (2)→(3) 已在 [MW24, 定理 1.5.]中针对$\mathbf{B}$ 为有限集的情况证明。然而，不难看出，完全相同的证明也适用于一般的$\mathbf{B}$。□

更一般地， [MW24] 中证明了以下结论：

定理 26。 设$\mathbf{A}$ 是有限分配$\mathbf{R}$-模（即其子模格是分配格），并设$\mathbf{B}$是一个$\mathbf{S}$-模，满足$\mathrm{char}(R)$在 $\mathbf{S}$ 中可逆。那么 $\mathcal{O}_{A,B}$ 由 n- 元的 $(\mathbf{A},\mathbf{B})$- 小算子一致生成，其中 n 是 $\mathbf{R}$ 的 *Jacobson* 根的幂零度。

证明。 这可由 [MW24, 定理 1.4.], 证明，尽管该定理并未明确提及一致 生成。仔细阅读 [MW24]也会发现，由于命题 21，只需对单列模$\mathbf{A}$证明该结论。□

关于模$\mathbf{A}$的结果可以直接推广到与$\mathbf{A}$多项式等价的代数，即与所有常值运算一起生成与$\mathbf{A}$相同克隆的代数。对于某些特殊情形，这一点已在 [MW24, 定理 4.1.]中得到注意。

引理 27。 设$\mathbf{A} = (A, +, 0, -, (r)_{r\in\mathbf{R}})$ 是一个$\mathbf{R}$-模，且$\mathbf{A}'$与$\mathbf{A}$ 多项式等价，并设$\mathbf{B}$ 是任意代数。

(1) 若$\mathcal{O}_{A,B}$ 由 n元$(\mathbf{A},\mathbf{B})$小算子一致生成，则它也由$(n+1)$元$(\mathbf{A}',\mathbf{B})$小算子一致生成。
(2) 若$\mathcal{O}_{B,A}$ 由 n元$(\mathbf{B},\mathbf{A})$小算子一致生成，则它也由 n元$(\mathbf{B},\mathbf{A}')$小算子一致生成。

证明。 交换子理论中的一个众所周知的结果是，$\mathrm{Clo}(\mathbf{A}')$ 必须包含三元运算 $x-y+z$（$\mathrm{Clo}(\mathbf{A})$ 中唯一的 Mal'cev 项）以及所有形如 $rx+(1-r)y$（其中 $r\in\mathbf{R}$）的二元运算。为简便起见，记 $x+^y z = x-y+z$ 和 $r^y(x) = rx+(1-r)y$。若将 y 替换为某个常数 $a\in A$，便得到代数 $\mathbf{A}^a = (A, +^a, a, -^a, (r^a)_{r\in\mathbf{R}})$，它通过同构 $x\mapsto x-a$ 与 $\mathbf{A}$ 同构。

对于每个 l 元项运算 $t(x_1,\dots,x_l) = \sum_{i=1}^{l} r_i x_i \in \mathrm{Clo}(\mathbf{A})$，我们也可以类似地关联一个 $l+1$ 元运算 $t^y(x_1,\dots,x_l,y) = r_1^y x_1 +^y r_2^y x_2 +^y \dots +^y r_l^y x_l \in \mathrm{Clo}(\mathbf{A}')$；并且对于固定的 $a\in A$，关联一个 l 元运算 $t^a(x_1,\dots,x_l) = r_1^a x_1 +^a r_2^a x_2 +^a \dots +^a r_l^a x_l \in \mathrm{Clo}(\mathbf{A}^a)$。特别要注意，$r\in R^{k}{}_{,n}{}^{k}(\mathbf{A})$ 蕴含 $r^a \in R^{k}{}_{,n}{}^{k}(\mathbf{A}^a)$ 和 $r^y \in R^{k+1}{}_{,n+1}{}^{k}(\mathbf{A}')$。

我们首先证明 (1)。令 $k > n+1$。根据假设，存在 $g\in\mathrm{Clo}(\mathbf{B})^{(l)}$ 和 $r_1,\dots,r_l \in R^{k}{}_{,n}{}^{k}(\mathbf{A})$，使得对所有 $f\colon A^k\to B$: $f = g\circ(f\circ r_1,\dots,f\circ r_l)$ 都成立。由于对于每个 $a\in A$，$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}^a$ 都同构，因此对所有 $f\colon A^k\to B$ 以及每个 $a\in A$，$f = g\circ(f\circ r_1^a,\dots,f\circ r_l^a)$ 也成立。或者，我们也可以将这一事实写成方程 $f(\mathbf{x}) = g\circ(f(r_1^y(\mathbf{x}))\dots,f(r_l^y(\mathbf{x}))$，对所有 $f\colon A^k\to B$ 都成立，其中我们把 y 看作一个新变量。若将 y 替换为 x_k ($\mathbf{x}$ 的最后一个坐标)，便得到方程

$$f(\mathbf{x}) = g\circ(f(r_1^{x_k}(\mathbf{x})),\dots,f(r_l^{x_k}(\mathbf{x}))),$$

对所有 $f\colon A^k \to B$ 和 $\mathbf{x} \in A^k$ 都成立。容易看出，$r_i^y(\mathbf{x}) \in R^{k+1,\ k}_{\ n+1}(\mathbf{A}')$ 意味着 $r_i^{x_k}(\mathbf{x}) \in R^{k,\ k}_{\ n+1}(\mathbf{A}')$。证明至此完成。

为证明（2），令 $k > n$，并令 $g \in \mathrm{Clo(A)}$、r_1、……、$r_l \in R_n\mathrm{(B)}$，使得公式 $f = g \circ (f \circ r_1, \ldots\ldots, f \circ r_l)$ 见证了 $\mathcal{O}_B^{(k)}$、$_A$ 是由 n 元（B，A）-小算子一致生成的。然后，再由同构可知，对于每个 $a \in A$，都有 $f = g^a \circ (f \circ r_1, \ldots\ldots, f \circ r_l)$。这又意味着，对于 y 的任意选择，都有 $f(\mathbf{x}) = g^y(f(r_1(\mathbf{x})) \ldots\ldots, f(r_l(\mathbf{x})))$。如果将 y 替换为任意表达式 $f(q(\mathbf{x}))$，使得 $q \in R_n\mathrm{(A)}$（例如 $y = f(x_1, x_1, \ldots\ldots, x_1)$），我们便得到一个公式，见证了 $\mathcal{O}_B^{(k)}$、$_A$ 是由 n 元（B，A′）-小算子一致生成的。□

3.3. 仿射克隆以外的例子。 此外，当目标 $\mathcal{B}$ 具有近一致性运算 [Spa19]时，Spark 的有限性结果也可以利用推论 20 中的准则推导出来。我们给出这一事实的证明，因为 [Spa19] 的证明采用了不同的（关系式）论证。

引理28。 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是有限集 A, B 上的克隆，且 $\mathcal{B}$ 包含一个元数为 $l \geq 3$的近一致性运算。那么 $\mathcal{O}_{A,B}$ 由 $|A|^l$元的 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-小算子一致生成

证明。 不失一般性，可假设 $\mathcal{A}$是 A上的投影克隆。令$m = |A|$ 和 $n = |A|^l$。根据定理18，只需证明存在某个 $k > n$, $\mathcal{O}_A^{(k)}$ $_{,B}$ 由 n元小算子一致生成。

对于整数 $a, b \in \mathbb{N}$、一个 b元元组 $\mathbf{x}$ 以及一个映射 $\alpha\colon [a] \to [b]$，令 $\mathbf{x}^\alpha$ 表示由 $\mathbf{x}^\alpha = (x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(2)}, \ldots, x_{\alpha(a)})$ 定义的 a元元组。注意，若存在一个 $\alpha\colon [k] \to [k]$，其像至多含有 n 个元素，且满足 $r(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\alpha$，则 $r \in R^{k,\ k}_{\ n}(\mathcal{A})$。

我们断言，对于每个函数集 $S \subseteq [m]^{[k]}$，都存在一个运算 $I_S\colon \mathcal{O}_A^{(k)}{}_{,\ B} \to \mathcal{O}^{(k)}_{A\ B,}$ 该运算可由 n 元（$\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$）子式一致可表示，并且对于所有$\alpha \in S$ 和 $\mathbf{a} \in A^k$，有 $I_S(f)(\mathbf{a}^\alpha) = f(\mathbf{a}^\alpha)$。我们用关于 $|S|$ 的归纳法证明这一断言。

首先，假设 $|S| \leq l$。令 $\beta\colon [k] \to [k]$ 为一个映射，它将 $\bigcap_{\alpha \in S} \ker(\alpha)$ 的每个等价类映射到同一个代表元，例如 $\beta(i) = \min(\{i' \in [k] \mid \forall \alpha \in S\colon \alpha(i') = \alpha(i)\})$。由于 $|S| \leq l$，且对于每个 $\alpha \in S$，$\ker(\alpha)$ 至多有 $|A|$ 个等价类，因此 β 至多取 $\leq |A|^l = n$ 个值。于是，显然 $I_S(f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^\beta)$ 满足我们的断言。

在归纳步骤中，设 $|S| > l$。固定 l 个互不相同的元素 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l \in S$，并设 $S_i = S \setminus \{\alpha_i\}$。根据归纳假设，对于每个集合 S_i，都存在满足该断言的运算 I_{S_i}。

我们定义 $I_S = v \circ (I_{S_1}, \ldots, I_{S_l})$，其中 v 是 $\mathcal{B}$ 的 l 元近一致性运算。根据引理 17，I_S 可由 n 元 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-子式一致表示。对于映射 $\alpha \in S$ 和元组 $\mathbf{a} \in A^m$，注意到方程 $I_{S_i}(f)(\mathbf{a}^\alpha) = f(\mathbf{a}^\alpha)$ 对除至多一个指标i之外的所有指标都成立。由于 v 是近一致性运算，我们得到 $I_S(f)(\mathbf{a}^\alpha) = f(\mathbf{a}^\alpha)$。至此，我们完成了该断言的证明。

最后，注意到每个元组 $\mathbf{a} \in A^k$ 都可写成 $\mathbf{b}^\alpha$ 的形式，其中某个 $\alpha \in [m]^{[k]}$，$\mathbf{b} \in A^m$：要验证这一点，只需取 A 的一个枚举 $A = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$，令 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$，并且当 $a_j = b_i$ 时令 $\alpha(j) = i$。因此，对于 $S = [m]^{[k]}$，我们得出 $I_S(f) = f$ 对所有 $f \in \mathcal{O}^{(k)}_{A\ B,}$ 都成立。由于 I_S 有一个由 n 元小算子给出的一致表示，证毕。□

如果一致生成要求目标克隆 $\mathcal{B}$ 包含非本质上一元的函数（即依赖于多个参数的函数）。

引理29. 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是定义在有限集 A、 B 上的克隆，且这些集合至少有 *2* 个元素，并假设 $\mathcal{O}_{A,B}$ 由 n 元 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-子式一致生成。那么 $\mathcal{B} \neq \mathsf{Clo}(\mathcal{B}^{(1)})$。

证明。为导出矛盾，假设 $\mathcal{B} = \mathsf{Clo}(\mathcal{B}^{(1)})$ 且 $\mathcal{O}_{A,B}$ 由 n-元（$\mathcal{A},\mathcal{B}$）-子式一致生成。因此，对于每个 $k > n$，存在 $s \in \mathcal{B}^{(1)}$ 和 $r \in R^k{}_n{}^k(\mathcal{A})$，使得对于所有 f都有：$f = s \circ f \circ r$ $A^k \to B$。对于 A^k 中的每一对 $\mathsf{a}_1 \neq \mathsf{a}_2$，我们都可以找到一个函数 f，满足 $s(f(r(\mathsf{a}_1))) = f(\mathsf{a}_1) \neq f(\mathsf{a}_2) = s(f(r(\mathsf{a}_2)))$。由此可得，对于所有 $\mathsf{a}_1 \neq \mathsf{a}_2$,， $r(\mathsf{a}_1) \neq r(\mathsf{a}_2)$，即 r 是单射的。然而，对于 $k > n$， $R^k{}_n{}^k(\mathcal{A})$ 中没有元素是单射的——矛盾。□

Lehtonen 和 Szendrei 在 [LS09] 中证明，对于同一有限集上的判别克隆到投影克隆的每个克隆子都是有限生成的。根据引理29，这一有限性结果无法用推论 20 中的准则证明。

3.4. 通过一致可表示运算进行插值。 要证明 $\mathcal{O}_A^{(k)}{}_{,B}$ 由 n元小算子一致生成，一个有用的步骤可能是先构造 n个一致可表示运算I，使得对于所有 f以及来自某个“良好”子集$K \subseteq A^k$的所有元组 $\mathbf{x} \in K$， $I(f)(\mathbf{x})$ 都与 $f(\mathbf{x})$ 相同。

例如， [MW24, 引理 2.14 (3)], 证明了，对于模 $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$，从 $\mathbf{A}$ 的子模到 $\mathbf{B}$ 的一致生成可以提升为这样一个“插值”运算 I，使其在上述子模的并集上都成立。下文将把这一结果推广到仅要求目标代数具有 Mal’cev 项的情形：

引理30。 设$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 是代数，且$\mathbf{B}$ 具有一个 *Mal’cev* 项。设$\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_l \leq \mathbf{A}$是子代数，并且对每个 $i \in [l]$， $\mathcal{O}_{C_i,\ B}$ 均由 n元子式一致生成。则存在一个$(n,\ \mathbf{A},\ \mathbf{B})$-一致可表示运算 I，定义在 $\mathcal{O}_{A\ B}^{(n+1)}{}_{,}$ 上，且满足 $I(f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$，其中$\mathbf{x} \in \bigcup_{i\in[l]} C_i^{n+1}$。

证明。 设 m 是$\mathbf{B}$的 Mal’cev 项，并设 $k = n + 1$。我们的假设意味着，对每个 $i \in [l]$，都存在 $(n,\ \mathbf{A},\ \mathbf{B})$-一致可表示运算 I_i：$\mathcal{O}_A^{(k)}{}_{,\ B} \to \mathcal{O}_A^{(k)}{}_{,\ B}$，使得当$\mathbf{x} \in C_i^k$时， $I_i(f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$。

我们递归地定义运算 $J_1(f) = I_1(f)$，以及

$$J_{i+1}(f) = m(J_i(f)(\mathbf{x}), I_{i+1}(J_i(f))(\mathbf{x}), I_{i+1}(f)(\mathbf{x}))$$

对每个 $i < l$。我们声称，对每个 $i \in [l]$： $J_i(f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ 对所有元组 $\mathbf{x} \in C_1^k \cup C_2^k \cup \cdots \cup C_i^k$。我们对 i 使用归纳法证明这一断言。

对于 $i = 1$，该命题显然成立。现在考虑归纳步骤 $i \to i+1$。首先，令 $\mathbf{x} \in C_j^k$，其中 $j \leq i$。根据归纳假设，我们知道 $J_i(f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$。此外，注意到，对于每个 $r \in R_n(\mathbf{A})$，我们有 $r(\mathbf{x}) \in C_j^k$，因为 C_j 是 $\mathbf{A}$ 的子代数。令$I_{i+1}(f)(\mathbf{x}) = s(f(r_1(\mathbf{x})) \ldots, f(r_l(\mathbf{x})))$ 为 I_{i+1} 的一个表示。那么，对于 $\mathbf{x} \in C_j^k$:

$$\begin{aligned} I_{i+1}(J_i(f))(\mathbf{x}) &= s(J_i(f)(r_1(\mathbf{x})), \ldots, J_i(f)(r_l(\mathbf{x})) \\ &= s(f(r_1(\mathbf{x})), \ldots, f(r_l(\mathbf{x})) \\ &= I_{i+1}(f)(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

根据 Mal’cev 恒等式，我们得到 $J_{i+1}(f)(\mathbf{x}) = m(f(\mathbf{x})\ I_{i+1}(f)(\mathbf{x})\ I_{i+1}(f)(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x})$。

接下来，假设 $\mathbf{x} \in C_{i+1}^k$。那么，根据假设， $I_{i+1}(J_i(f))(\mathbf{x}) = J_i(f)(\mathbf{x})$ 成立，因此 $J_{i+1}(f)(\mathbf{x}) = m(J_i(f)(\mathbf{x})\ J_i(f)(\mathbf{x})\ f(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x})$。令 $I = J_l$。根据引理 17（3）和（4）， I 可以由 n 元子式一致表示，因此得证。□

接下来我们证明，“一致插值”在代数 $R^k{}_{,n}{}^k(\mathbf{A})$ 的自同态下也保持不变，即映射 $e\colon A^k \to A^k$ 满足对每个 $r \in R^k{}_{,n}{}^k(\mathbf{A})$，都有 $e(r(\mathbf{x})) = r(e(\mathbf{x}))$ 成立。注意，代数 $(A^k, R^k{}_{,n}{}^k(\mathbf{A}))$ 是 $\mathbf{A}^{[k]}$ 的 k 次矩阵幂的一个（一元）项约化（在 [HM88，练习 3.12（4）] 的意义下），因此这包括 $\mathbf{A}^{[k]}$ 的所有自同态。如果 $\mathbf{A} = \mathbf{F}^l$ 是一个向量空间，那么对于 $X \in \mathbf{F}^{k\times l}$ 和 $T \in \mathbf{F}^{l\times l}$，所有映射 $X \mapsto XT$ 都是代数 $R^k{}_{,n}{}^k(\mathbf{A})$ 的自同态。

引理 31. 设 A 和 B 是任意代数，令 $a \in A^n$，并假设 $I\colon \mathcal{O}_A^{(k)}{}_{,B} \to \mathcal{O}_A^{(k)}{}_{,B}$ *is* (n, A, B)*-*一致可表示，使得对所有 $f \in \mathcal{O}_A^{(k)}{}_{,B}$，$I(f)(a) = f(a)$。那么，对于每个 $e \in \mathrm{End}(R^k{}_{,n}{}^k(A))$，也成立 $I(f)(e(a)) = f(e(a))$。

证明。令 $I(f) = s\circ(f\circ r_1, \dots, f\circ r_l)$，其中 $s \in \mathrm{Clo}(\mathbf{B})$ 且 $r_1, \dots, r_l \in R_n(\mathbf{A})$ 是 I 的一个表示。令 $e \in \mathrm{End}(R^k{}_{,n}{}^k(\mathbf{A}))$。那么

$$\begin{aligned} I(f)(e(\mathbf{a})) &= s(f(r_1(e(\mathbf{a}))), \dots, f(r_l(e(\mathbf{a})))) \\ &= s(f(e(r_1(\mathbf{a}))), \dots, f(e(r_l(\mathbf{a})))) \\ &= I(f\circ e)(\mathbf{a}) = f(e(\mathbf{a})). \end{aligned}$$

□

当 $\mathbf{B}$ 是一个模时，我们可以证明一些额外的结果。我们将使用以下记号：

定义 32. 设 $\mathbf{B}$ 是一个模，且 A a 是任意集合。对于 $\mathbf{a} \in A^k$ 和 $b \in B$，我们定义映射 $\delta^b_{\mathbf{a}}\colon A^k \to B$ 如下

$$\delta^b_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} b & \text{if } \mathbf{x} = \mathbf{a} \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

若$\mathbf{B}$ 是含幺元 1 的环上的正则模，则简记为 $\delta_{\mathbf{a}} = \delta^1_{\mathbf{a}}$。

定义 33. 对于模$\mathbf{B}$，我们将函数 $f\colon A^n \to B$ 的支撑 $\mathrm{supp}(f)$定义为 $\mathrm{supp}(f) = \{\mathbf{a} \in A^n \mid f(\mathbf{a}) \neq 0\}$。

下面的引理说明，若目标代数$\mathbf{B}$是一个模，我们如何将特征函数 $\delta_{\mathbf{a}}$ 的一致生成提升到所有支撑仅包含$\mathbf{a}$在 $\mathrm{Aut}(R^k{}_{,n}{}^k(\mathbf{A}))$ 的作用下的轨道中元素的函数：

引理 34. 设$\mathbf{A}$ 是一个有限代数，$T \subseteq A^k$，且$\mathbf{R}$ 是一个环，使得 $\{\delta_{\mathbf{a}} \mid \mathbf{a} \in T\}$ 由 n 元 $(\mathbf{A},\mathbf{R})$-小算子一致生成（其中$\mathbf{R}$ 视为正则模）。

那么，对于 $T' = \{e(\mathbf{a}) \mid e \in \mathrm{Aut}(R^k{}_{,n}{}^k(\mathbf{A})), \mathbf{a} \in T\}$ 以及任意$\mathbf{R}$-模$\mathbf{B}$，集合$\{f\colon A^k \to B \mid \mathrm{supp}(f) \subseteq T'\}$ 也由 n 元 $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$-小算子一致生成。

证明。设 I 是一个 $(n, \mathbf{A}, \mathbf{R})$-一致可表示运算，满足对所有 $\mathbf{a} \in T$，均有 $I(\delta_{\mathbf{a}}) = \delta_{\mathbf{a}}$；设 $\mathbf{B}$ 是一个一般的 $\mathbf{R}$- 模。则 I 可由公式 $I(f)(\mathbf{x}) = \sum_{s\in R^k{}_{,n}{}^k(\mathbf{A})} r_s f(s(\mathbf{x}))$ 表示，其中每个 $r_s \in R$。设 $\mathbf{B}$是一个任意的$\mathbf{R}$-模。I 的公式还诱导出运算 $I\colon \mathcal{O}_A^{(k)}{}_{,B} \to \mathcal{O}_A^{(k)}{}_{B,}$，为简便起见，我们仍用同一个字母表示该运算。显然，$I(\delta_{\mathbf{a}}) = \delta_{\mathbf{a}}$ 蕴含

$$I(\delta^b_{\mathbf{a}})(\mathbf{x}) = \sum_{s\in R^{k,k}_n(\mathbf{A})} r_s \delta^b_{\mathbf{a}}(s(\mathbf{x})) = \sum_{s\in R^{k,k}_n(\mathbf{A})} r_s \delta_{\mathbf{a}}(s(\mathbf{x}))\cdot b = I(\delta_{\mathbf{a}})\cdot b = \delta_{\mathbf{a}}\cdot b = \delta^b_{\mathbf{a}}.$$

由引理 31，对所有$e \in \mathrm{Aut}(R^k{}_{,n}{}^k(\mathrm{A}))$，还有 $I(\delta^b_{e^{-1}}(\mathrm{a}))(\mathrm{x}) = I(\delta^b_{\mathbf{a}})(e(\mathrm{x})) = \delta^b_{\mathbf{a}}(e(\mathrm{x})) = \delta^b_{e^{-1}}(\mathrm{a})(\mathrm{x})$。因此，对所有 $\mathrm{a} \in T', b \in B,$ 均有 $I(\delta^b_{\mathbf{a}}) = \delta^b_{\mathbf{a}}$。接下来注意到，每个支撑在 T' 中的函数 f 都可以写成和 $f = \sum_{\mathrm{a} \in T'} \delta^{f(\mathbf{a})}_{\mathbf{a}}$。由于 B 是一个模，$I$ 是线性的，即 $I(f+g) = I(f) + I(g)$。因此可得 $I(f) = \sum_{\mathrm{a} \in T'} I(\delta^{f(\mathbf{a})}_{\mathbf{a}}) = \sum_{\mathrm{a} \in T'} \delta^{f(\mathbf{a})}_{\mathbf{a}} = f$，证明完毕。□

引理 34 蕴含两个重要事实：首先，为了证明从某个代数**A**到目标**R**-模**B** 的所有运算都由 n 元小算子一致生成，只需对特征函数 $\delta_{\mathbf{a}}$ 证明这一点，且元组**a** 在 $\mathrm{Aut}(R^k{}_{,n}{}^k(\mathbf{A}))$ 下的轨道覆盖所有 A^k。其次，为了证明对所有 **R**-模**B**的一致生成，实际上只需考虑以正则模 **R**为目标：

推论 35. 设**A** 是有限代数，**R**是一个环，并将其视为正则模。如果$\mathcal{O}_{\mathbf{A},\mathbf{R}}$ 由 k 元小算子一致生成，那么对每个**R**-模**B**，$\mathcal{O}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$也由此一致生成。

4. The main result

本节将证明：如果**A** $= \mathbf{F}^k$ 是有限维向量空间，且**B**是一个 char(**F**) 可逆的模，那么从 **A** 到**B** 的 $(k+1)$ 元函数由其 k 元 (**A**,**B**)-小算子一致生成。由此，推论 20 表明，从**A** 到 **B** 的每个克隆子都由其 k 元部分生成。

使用我们在预备部分引入的记号，回顾一下，R_n(**A**)由所有运算 $X \mapsto MX$组成，其中 M 是一个秩小于或等于 n的 F 上的矩阵。因此，我们的目标是证明：对于每个（$k+1$）×（$k+1$）矩阵M（其元素属于**F** ），都存在坐标 $\alpha_M \in R_{\mathbf{B}}$，使得对每个 f：$\mathbf{F}^{(k+1)\times k} \to B$，我们有

$$\forall X \in \mathbf{F}^{(k+1)\times k}\colon f(X) = \sum_{\mathrm{rk}(M) \le k} \alpha_M f(MX).$$

我们的证明首先利用第 3 节的结果，将问题化简为：能否通过满秩矩阵的 k元子式生成特征函数δ_{X_0}。我们在第 4.1 小节讨论这一化简。接着，我们在第 4.2 小节证明这一事实。在第 4.3 小节中，我们概述证明并讨论一些直接推论。在第 4.4 小节中，我们利用所得结果，对（$\mathbf{F}^n$，**B**）-克隆子的格给出更明确的描述。

4.1. 约化为单点支撑函数。

我们先给出以下引理，其证明方法与引理 34 类似：

引理 36。 设 $X_0 \in \mathbf{F}^{m\times k}$ 是一个矩阵，且 $\mathrm{rk}(X_0) = n$；假设 J 是一个$(n,\ \mathbf{F}^k,\ \mathbf{B})$-一致可表示运算，由以下公式给出

$$J(f)(X) = \sum_{\mathcal{C}(M) = \mathcal{C}(X_0)} \alpha_M f(MX), \tag{9}$$

使得 $J(\delta_{X_0})(X) = \delta_{X_0}(X)$，对所有秩为 $\mathrm{rk}(X) \le i$ 的 X 均成立。

那么，对于所有满足 $\mathrm{supp}(f) \subseteq \{X \mid \mathrm{rk}(X) \ge n\}$ 的 f，以及每个满足 $\mathrm{rk}(X) \le i$ 的 $X \in \mathbf{F}^{m\times k}$：

$$J(f)(X) = \begin{cases} f(X) & \text{if } \mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(X_0), \\ 0 & \text{else.} \end{cases} \tag{10}$$

证明。我们首先考察 J 对某些特征函数的作用。如果 $Z \in F^{m\times k}$ 是一个满足 $\mathcal{C}(Z) = \mathcal{C}(X_0)$ 的矩阵，那么存在一个可逆矩阵 $T \in F^{k\times k}$，使得$ZT = X_0$，因此 $\delta_Z(X) = \delta_{X_0}(XT)$。根据引理 34，对于所有满足 $\mathrm{rk}(X) \le i$ 的 X，$J_H(\delta_Z)(X) = \delta_Z(X)$ 均成立。

接下来，设 $Z \in F^{m\times k}$ 为矩阵，满足 $\mathrm{rk}(Z) \ge n$ 且 $\mathcal{C}(Z) \neq \mathcal{C}(X_0)$。注意，这意味着对于所有满足 $\mathcal{C}(M) = \mathcal{C}(X_0)$ 的 $X \in \mathbf{F}^{m\times k}$ 和 $M \in \mathbf{F}^{m\times m}$，都有 $\mathcal{C}(MX) \subseteq \mathcal{C}(X_0) \neq \mathcal{C}(Z)$。由于 $\dim(\mathcal{C}(MX)) \le n \le \dim(\mathcal{C}(Z))$，这进一步意味着 $Z \neq MX$。因此，对于每个 $X \in \mathbf{F}^{m\times k}$，$J(\delta_Z)(X) = 0$ 均成立。

接下来，设 $f \in \mathcal{O}_k^{(m)}{}_{\mathbf{F},\mathbf{B}}$ 为任意函数，其支撑仅包含秩为 $\ge n$ 的矩阵。因此，f 可写作 $f = \sum_{\mathrm{rk}(Z)\ge n} \delta_Z^{f(Z)}$，从而 $J(f) = \sum_{\mathcal{C}(Z)=\mathcal{C}(X)} J(\delta_Z^{f(Z)})$。

若我们在某个满足 $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(X_0)$ 的矩阵 X处计算 $J(f)$，则由上述可得 $J(f)(X) = \delta_X^{f(X)} = f(X)$。若我们在某个满足 $\mathrm{rk}(X) \le i$ 且 $\mathcal{C}(X) \neq \mathcal{C}(X_0)$ 的 X处计算 $J(f)(X)$，则类似地得到 $J(f)(X) = 0$。至此证明完毕。□

尽管引理 36 本身是一个相对技术性的陈述，但它有若干非常有用的推论，我们将在全文中使用。例如，若我们假设方程 (9) 对所有矩阵 $X \in \mathbf{F}^{m\times k}$ 成立，则得到如下推论：

引理 37. 设 $X_0 \in \mathbf{F}^{m\times k}$ 是一个满足 $\mathrm{rk}(X_0) = n$ 的矩阵，并假设 δ_{X_0} 由其 n元 $(\mathbf{F}^k,\mathbf{R})$-子式生成。则

(1) 对每一个满足 $\dim(H) = n$ 的 $H \le \mathbf{F}^m$，存在一个 $(n, \mathbf{F}^k, \mathbf{B})$-*UR*运算 J_H，使得对所有满足 $\mathrm{supp}(f) \subseteq \{X \in F^{m\times k} \mid \mathrm{rk}(X) \ge n\}$ 的 f：

$$J_H(f)(X) = \begin{cases} f(X) & \text{if } \mathcal{C}(X) = H \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

(2) 存在一个$(n$、$\mathbf{F}^k$、$\mathbf{B})$-一致可表示运算 J_n，使得对于所有满足$\mathrm{supp}(f) \subseteq \{X \mid \mathrm{rk}(X) \ge n\}$的 f，都有：

$$J_n(f)(X) = \begin{cases} f(X) & \text{if } \mathrm{rk}(X) = n \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

证明。我们首先对 $H = \mathcal{C}(X_0)$ 证明 (1)。根据我们的假设，可知存在 $\alpha_M \in \mathbf{R}$，使得

$$\delta_{X_0}(X) = \sum_{\mathrm{rk}(M)\le n} \alpha_M \delta_{X_0}(MX) = \sum_{\mathcal{C}(M)=\mathcal{C}(X_0)} \alpha_M \delta_{X_0}(MX). \tag{11}$$

对于第二个方程，注意对于所有秩为 $\le n$ 的矩阵 M，$\mathcal{C}(M) \neq \mathcal{C}(X_0)$ 蕴含 $\delta_{X_0}(MX) = 0$ 对所有 $X \in \mathbf{F}^{m\times k}$ 都成立。因此，不失一般性，我们可以假设，若 $\mathcal{C}(M)$，则$\alpha_M = 0 \neq \mathcal{C}(X_0)$。然后，将引理 36 应用于

$$J_H(f) = \sum_{\mathcal{C}(M)=\mathcal{C}(X_0)} \alpha_M f(MX). \tag{12}$$

接下来，设 $H \le \mathbf{F}^m$ 是一个维数为 n 的任意子空间。那么，存在一个可逆矩阵 $S \in F^{m\times m}$，使得 $\mathcal{C}(SX_0) = H$。注意，$\delta_{SX_0}(X) = \delta_{X_0}(S^{-1}X)$，因此（11）

意味着

$$\delta_{SX_0}(X) = \sum_{\mathcal{C}(M)=\mathcal{C}(X_0)} \alpha_M \delta_{X_0}(MS^{-1}X) = \sum_{\mathcal{C}(M)=\mathcal{C}(X_0)} \alpha_M \delta_{SX_0}(SMS^{-1}X).$$

再次，由引理 36 可知，$J_H(f)(X) = \sum_{\mathcal{C}(M)=\mathcal{C}(X_0)} \alpha_M f(SMS^{-1}X)$ 具有所需性质。

对于 (2)，我们定义 $J_n(f) = \sum_{H\leq \mathbf{F}^m, \dim(H)=n} J_H(f)$。对于每个函数 f，其支撑仅包含秩为 n 或更高的矩阵，注意由 (1) 可知：若 $\mathrm{rk}(X) > n$，则 $J_n(f)(X) = 0$；若 $\mathrm{rk}(X) = n$，则 $J_n(f)(X) = J_{\mathcal{C}(X)}(f)(X) = f(X)$。因此，证明完毕。□

我们指出，若对于给定的秩分解 $X_0 = AU$，有 $\delta_{X_0} \in \langle \delta_U \rangle_{\mathbf{F}^k,\mathbf{R}}$ 成立，则引理 37 的条件尤其得到满足。于是，存在系数$\alpha_M \in \mathbf{R}$ 使得

$$\delta_{X_0}(X) = \sum_{M\in F^{n\times m}} \alpha_M \delta_U(MX) = \sum_{M\in F^{n\times m}} \alpha_M \delta_{X_0}(AMX). \tag{13}$$

由于 $\mathrm{rk}(AM) \leq n$，对于每个矩阵 $M \in F^{n\times m}$，方程 (13) 清楚地表明，δ_{X_0}由其 n元（$\mathbf{F}^k$, $\mathbf{R}$）子式生成。

接下来我们证明，为了证明 $\mathcal{O}_{\mathbf{F}^k,\ \mathbf{R}}$ 由 k元子式一致生成，只需进一步考虑每个 $j \in [k]$ 的满秩矩阵 $X_0 \in \mathbf{F}^{(j+1)\times j}$：

引理 38. 设 $\mathbf{F}$ 是一个有限域，$\mathbf{R}$ 是一个环，$\mathbf{B}$ 是一个 $\mathbf{R}$-模，且 $k \geq 0$。假设对于每个 $j \in [k]$，都存在一个秩为 $\mathrm{rk}(X_0) = j$ 的矩阵 $X_0 \in \mathbf{F}^{(j+1)\times j}$，使得 δ_{X_0} 由其 j元（($\mathbf{F}^j$,$\mathbf{R}$)）子式生成。那么

(1) $\mathcal{O}_{\mathbf{F}^k,B}$ 由 k元子式一致生成。*(2)* 对于每个 $i \in [k]_0$ 和 $m \in \mathbb{N}$，都存在一个 *(*i*,* F^k*, B)*-一致可表示运算 $I_i\colon \mathcal{O}^{(m)}F^k,B \to \mathcal{O}^{(m)}F^k,B$，满足 $I_i(f)(X) = f(X)$，对于所有满足 $\mathrm{rk}(X) \leq i$ 的 $X \in F^{m\times k}$。

证明。我们首先对 $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ 使用归纳法证明 (1)。对于基础步骤 $k = 0$，由 $f(X) = f(0)$ 可知该命题显然成立。（此外，仔细阅读 [Fio20] 也可以观察到 $k = 1$。）

现在考虑归纳步骤 $k-1 \to k$。为简洁起见，记作 $l = k+1$。我们的目标是证明 $\mathcal{O}^{(l)}_{F^k,B}$ 由 k 元子式一致生成。根据归纳假设，存在一个 $(k-1, \mathbf{F}^{k-1}, \mathbf{B})$-一致可表示运算

$$J(f)(Y) = \sum_{\substack{M\in \mathbf{F}^{l\times l} \\ \mathrm{rk}(M)\leq k-1}} \alpha_M f(MY)$$

使得，对于所有 $f \in \mathcal{O}^{(l)}_{F^{k-1},B}$ 和 $Y \in \mathbf{F}^{l\times(k-1)}$，$J(f)(Y) = f(Y)$。注意，这个表示公式还在 $g \in \mathcal{O}^{(l)}_{F^k,B}$ 上诱导出一个 $(k-1, \mathbf{F}^k, \mathbf{B})$-一致可表示运算。接下来，设 $X \in \mathbf{F}^{l\times k}$ 是一个秩为 $\leq k-1$ 的矩阵；因此它可以分解为 $X = YU$，其中 $Y \in \mathbf{F}^{l\times(k-1)}$ 和 $U \in \mathbf{F}^{(k-1)\times k}$。若对于一个函数 $g \in \mathcal{O}^{(l)}_{F^k,B}$，我们通过 $g_U(Y) = g(YU)$ 定义 $g_U\colon F^{l\times(k-1)} \to B$，则可得

$$J(g)(X) = J(g)(YU) = J(g_U)(Y) = g_U(Y) = g(YU) = g(X).$$

因此，在秩为 $\leq k-1$ 的矩阵上， $J(g)$ 与 g 一致。接下来，回顾一下，我们假设存在一个 $X_0 \in \mathbf{F}^{l\times k}$ ，使得 δ_{X_0} 由 k 元子式生成。引理 37 (2) 表明，存在一个定义在 $\mathcal{O}^{(l)}_{F^k}$, B 上的运算 J_k ，它可以由 k 元子式表示，并且对于所有满足 $\mathrm{supp}(g) \subseteq \{X \mid \mathrm{rk}(X) = k\}$ 的函数 $g \in \mathcal{O}^{(l)}_{F^k,B}$ ，都有 $J_k(g) = g$。由此可知，对于每个 $g \in \mathcal{O}^{(l)}_{F^k,B}$:

$$g = J(g) + J_k(g - J(g)) = J(g) + J_k(g) - J_kJ(g).$$

由于 J_k 和 J 都可以表示为 k元子式，因此得证。

接下来证明 (2)。对于 $m \leq i$，令 $I_i(f) = f$，命题显然成立。因此，设 $m > i$。由 (1) 可知， $\mathcal{O}^{(m)}_{\mathbf{F}^i,\mathbf{B}}$ 由 i元子式一致生成，因此存在一个表示公式

$$I_i(f)(Y) = \sum_{\substack{M\in\mathbf{F}^{m\times m}\\ \mathrm{rk}(M)\leq i}} \alpha_M f(MY),$$

使得对于所有 $Y \in \mathbf{F}^{m\times i}$， $I_i(f)(Y) = f(Y)$。自然地， I_i 也在 $\mathcal{O}^{(m)}_{\mathbf{F}^k,\mathbf{B}}$上诱导一个运算，且该运算可以由 i元子式表示。

每个秩至多为 i 的矩阵 $X \in \mathbf{F}^{m\times k}$都可以写成 $X = YU$，其中 $Y \in \mathbf{F}^{m\times i}, U \in \mathbf{F}^{i\times k}$。如果我们再次对每个 $g \in \mathcal{O}^{(m)}_{k\,\mathbf{F},\mathbf{B}}$定义 g_U: $F^{m\times i} \to B$，使其满足 $g_U(Y) = g(YU)$，则得到

$$I_i(g)(X) = I_i(g)(YU) = I_i(g_U)(Y) = g_U(Y) = g(YU) = f(X).$$

因此， I_i确实满足 $I_i(f)(X) = f(X)$，对所有秩为 $\leq i$ 的 $X \in \mathbf{F}^{m\times k}$ 皆如此。 □

4.2. 生成特征函数。 根据引理 38，为证明主要结果，我们只需证明：对于每个 $k \in \mathbb{N}$，存在一个秩为 k 的矩阵 $X_0 \in \mathbf{F}^{(k+1)\times k}$ ，使得只要 $|F|$ 在 $\mathbf{R}$ 中可逆，就有 $\delta_{X_0} \in \langle \delta_{\mathrm{Id}_k} \rangle_{\mathbf{F}^k,\mathbf{R}}$。

因此，在本子小节中，我们固定以下记号：

- $\mathbf{F}$ 表示一个固定的有限域
- $k \in \mathbb{N}$ 是一个固定的自然数
- $\mathbf{R}$ 是一个正则模，其中 $|F|$ 可逆。
- $X_0 \in \mathbf{F}^{(k+1)\times k}$ 是一个秩为 k的固定矩阵，例如

$$X_0 = \begin{bmatrix} \mathrm{Id}_k \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{F}^{(k+1)\times k}.$$

我们的目标是证明：对于每一个秩为$\mathrm{rk}(M) = k$的 $M \in F^{(k+1)\times k}$ ，都存在系数 $\alpha_M \in R$ ，使得 $\delta_{X_0}(X) = \sum_{\mathrm{rk}(M)=k} \alpha_M \delta_{\mathrm{Id}_k}(MX)$。（注意，我们只需考虑满秩 k的系数矩阵 $M \in \mathbf{F}^{k\times(k+1)}$，否则 $\delta_{\mathrm{Id}_k}(MX)$等于0。）函数 $X \mapsto \delta_{\mathrm{Id}_k}(MX)$仅在方程 $MX = \mathrm{Id}_k$的解集上取值为1。这引出了如下定义和引理：

定义39. 对于每一个满足$\mathrm{rk}(X) = k$ 的矩阵 $X \in \mathbf{F}^{(k+1)\times k}$ ，以及每一个向量$\mathbf{a} \in \mathbf{F}^{k+1} \setminus \mathcal{C}(X)$, 我们定义 $\theta(X,\mathbf{a}) = \{X + \mathbf{a}\mathbf{u}^T \mid \mathbf{u} \in \mathbf{F}^k\}$。我们将每一个形如 $\theta(X, \mathbf{a})$的集合称为一个 θ-空间。

引理 40. *(1)* 设 $M \in \mathbf{F}^{k\times(k+1)}$ 满足 $\mathrm{rk}(M) = k$。那么存在一个 θ-空间 V_M ，使得 $MX = \mathrm{Id}_k$ 当且仅当 $X \in V_M$。

(2) 反过来，对于每个 θ-空间 V，存在一个矩阵 $M_V \in \mathbf{F}^{k\times(k+1)}$ 满足 $\mathrm{rk}(M_V) = k$，使得 $M_V X = \mathrm{Id}_k$ 当且仅当 $X \in V$。

证明。我们从 (1) 开始。由于 M 满秩，$\mathbf{x} \mapsto M\mathbf{x}$ 是从 $\mathbf{F}^{k+1}$ 到 $\mathbf{F}^k$ 的满射。因此，存在一个矩阵 Y，使得 $MY = \mathrm{Id}_k$。此外，核 $\ker(M)$ 的维数为 1，因此由单个向量 $\mathbf{a} \neq 0$ 生成。由此可知，齐次方程 $MY = 0$ 的解空间由所有形如 $\mathbf{a}\mathbf{u}^T$ 的矩阵组成，其中 $\mathbf{u} \in F^k$。因此，$V_M = \theta(Y, \mathbf{a})$ 是线性方程组 $MX = \mathrm{Id}_k$ 的解空间。此外，假设 $\mathbf{a} \in \mathcal{C}(Y)$，即存在某个 $\mathbf{b} \neq 0$ 使得 $\mathbf{a} = Y\mathbf{b}$，则这将意味着 $0 = M\mathbf{a} = MY\mathbf{b} = \mathrm{Id}_k\,\mathbf{b} = \mathbf{b} \neq 0$，这就产生了矛盾。因此，$V_M$ 确实是一个 θ-空间。

对于（2），设 $Y \in \mathbf{F}^{(k+1)\times k}$，且 $\in \mathbf{F}^{(k+1)} \setminus \mathcal{C}(Y)$ 满足 $V = \theta(Y, \mathbf{a})$。令 $\mathbf{n} \in \mathbf{F}^{k+1}$ 为 $\ker(Y^T)$ 的一个生成元。然后，与（1）中一样，我们可以看出，存在一个矩阵 $M_0 \in \mathbf{F}^{k\times(k+1)}$，使得 $MY = \mathrm{Id}_k$ 成立，当且仅当对于某个 $\mathbf{m} \in \mathbf{F}^k$，有 $M = M_0 + \mathbf{m}\mathbf{n}^T$。由于 $\mathbf{a} \notin \mathcal{C}(Y)$，我们有 $\mathbf{n}^T\mathbf{a} \neq 0$。于是，令 $\mathbf{m}_V = -(\mathbf{n}^T\mathbf{a})^{-1}M_0\mathbf{a}$，且令 $M_V = M_0 + \mathbf{m}_V\mathbf{n}^T$。根据定义，$M_V\mathbf{a} = 0$，因此 M_V 确实就是我们要找的矩阵。□

我们将使用以下记号：

定义 41。对于一个 θ-空间 V，令 $\delta_V\colon \mathbf{F}^{k+1} \times k$ 表示由 $\delta_V(X) = 1$ if $X \in V$ 且 $\delta_V(X) = 0$ otherwise 给出的函数。注意，根据引理 40 $\delta_V(X) = \delta_{\mathrm{Id}_k}(MX)$，对于某个秩为 k 的矩阵$M \in \mathbf{F}^{k\times(k+1)}$。

根据定义，每个 θ-空间都是$\mathbf{F}^{(k+1)\times k}$ 中的一个维数为 k 的仿射子空间。然而，从另一种意义上说，θ-空间表现出某些“类似直线”的性质，以下观察说明了这一点：

引理 42。设 $X_1, X_2 \in \mathbf{F}^{(k+1)\times k}$，并设 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbf{F}^{k+1}$，其中 $\mathbf{a}_1 \notin \mathcal{C}(X_1)$ 且 $\mathbf{a}_2 \notin \mathcal{C}(X_2)$。

(1) 要么 $|\theta(X_1, \mathbf{a}_1) \cap \theta(X_2, \mathbf{a}_2)| \leq 1$，要么 $\theta(X_1, \mathbf{a}_1) = \theta(X_2, \mathbf{a}_2)$。*(2)* 对于 $X_1 \neq X_2$，至多存在一个同时包含 X_1 和 X_2 的 θ-空间。*(3)* θ-空间的所有元素的秩均为 k。

证明。对于 (1)，注意，对每个 $Y \in \theta(X, \mathbf{a})$，$\theta(X, \mathbf{a}) = \theta(Y, \mathbf{a})$ 都成立。因此，若存在 X 属于 $\theta(X_1, \mathbf{a}_1) \cap \theta(X_2, \mathbf{a}_2)$，则不失一般性，我们可以假设 $X = X_1 = X_2$。于是容易看出，若 $\mathbf{a}_1$ 和 $\mathbf{a}_2$ 共线，则 $\theta(X_1, \mathbf{a}_1) = \theta(X_2, \mathbf{a}_2)$；否则 $\theta(X_1, \mathbf{a}_1) \cap \theta(X_2, \mathbf{a}_2) = \{X\}$。

对于（2），令$\mathbf{a} \in \mathbf{F}^{k+1}$。则当且仅当对某个$\mathbf{u} \neq 0$有 $X_2 \in \theta(X_1, \mathbf{a})$ iff $X_1 - X_2 = \mathbf{a}\mathbf{u}^T$。特别地，这只有在 $\mathrm{rk}(X_1 - X_2) = 1$时才可能发生。因此，$\mathbf{a} \in \mathcal{C}(X_1 - X_2)$ 除了乘以一个标量这一点外，由 $X_1 - X_2$ 唯一确定。

为说明（3），考虑一个空间 $\theta(X, \mathbf{a})$，并令 $\mathbf{u} \in \mathbf{F}^k$。我们证明，$X + \mathbf{a}\mathbf{u}^T$ 的列是线性无关的。为此，考虑一个向量 $\mathbf{b} \in \mathbf{F}^k$，使得 $(X + \mathbf{a}\mathbf{u}^T)\mathbf{b} = 0$。如果 $\mathbf{u}^T\mathbf{b} \neq 0$，那么 $\mathbf{a} = -X(\mathbf{u}^T\mathbf{b})^{-1}\mathbf{b}$，这与 $\mathbf{a} \notin \mathcal{C}(X)$ 的假设矛盾。这就只剩下 $\mathbf{u}^T\mathbf{b} = 0$ 的情形，从而 $X\mathbf{b} = 0$。由于 $\mathrm{rk}(X) = k$，这意味着 $\mathbf{b} = 0$，证毕。□

在以下定义中，我们将引入一种特定形式的 θ-空间，它们将在本节主要结果的证明中发挥关键作用。

定义 43。设 $n \leq k$，且 $A \in \mathbf{F}^{(k+1)\times n}, U \in \mathbf{F}^{n\times k}$ 是秩为 n 的矩阵。那么，对于$0 \leq j \leq n$，令 $X_j := X_0 + \sum_{i=1}^{j} \mathbf{a}_i\mathbf{u}_i^T$，其中 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbf{F}^{k+1}$ 表示A的列，$\mathbf{u}_1^T, \ldots, \mathbf{u}_n^T \in \mathbf{F}^k$ 表示 U 的行。若秩分解 $AU = X_n - X_0$*(n-)*可容许，则称其为可容许的，条件是

(1) $\mathbf{a}_{i+1} \notin \mathcal{C}(X_i)$ 对所有 $0 \le i \le n-1$ 均成立；(2) $\mathbf{a}_{i+2} \in \mathcal{C}(X_0) \cap \mathcal{C}(X_1) \cap \cdots \cap \mathcal{C}(X_i)$，对所有 $0 \le i \le n-2$ 均成立。

我们称 $X \in \mathbf{F}^{(k+1)\times k}$ 为类型 n，如果 $X = X_0 + AU$ 对于某个 n-容许乘积 AU 成立，并称 $X = X_0 + AU$ 为 X 的*(n-)*可容许表示。我们用 $\mathfrak{T}_n$ 表示类型为 n 的矩阵集合，并且 $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_0 \cup \mathfrak{T}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{T}_k$。

定义44. 我们称一个 θ-空间 $\theta(X,\mathbf{a}) = \{X + \mathbf{a}\mathbf{u}^T \mid \mathbf{u} \in \mathbf{F}^k\}$ 为类型 n，如果 $X \in \mathfrak{T}_n$ 具有可容许表示 $X = X_0 + AU$，并且$\mathbf{a} \in \mathcal{C}(X_0) \cap \mathcal{C}(X_1) \ldots \cap \mathcal{C}(X_{n-1}) \setminus \mathcal{C}(X_n)$。我们用 Θ_n 表示所有类型为 n 的 θ-空间的集合，并令 $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1 \cup \cdots \cup \Theta_k$。

矩阵 X 或 θ-空间 $\theta(X, \mathbf{a})$ 的类型不依赖于可容许表示 $AU = X - X_0$ 的具体选择。证明需要以下引理:

引理 45. 设 $X \in \mathfrak{T}_n$，并设 $X = X_0 + AU = X_0 + \tilde{A}\tilde{U}$ 是它的两个可容许表示。此外，设 $X_i = X_0 + \sum_{j=1}^{i} \mathbf{a}_j\mathbf{u}_j^T$，且 $\tilde{X}_i = X_0 + \sum_{j=1}^{i} \tilde{\mathbf{a}}_j\tilde{\mathbf{u}}_j^T$，其中 $i \in [n]_0$。那么：

(1) $\mathcal{C}(X_0) \cap \mathcal{C}(X_1) \cap \ldots \cap \mathcal{C}(X_i) = \mathcal{C}(X_0) \cap \mathcal{C}(X_1) \cap \ldots \cap \mathcal{C}(X_i)$ 对每个 $i \in [n]_0$ 都成立。*(2)* 存在一个下三角矩阵 $T \in \mathbf{F}^{n\times n}$，满足 $A = \tilde{A}T^{-1}$ 和 $U = T\tilde{U}$。

证明。由于 $AU = \tilde{A}\tilde{U}$ 是 $X - X_0$ 的两个秩分解，我们已知存在一个可逆矩阵 $T = (t_{ij})_{i,\,j=1}^{n}$ 满足 $A = \tilde{A}T$ 且 $U = T^{-1}\tilde{U}$。

对于 $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$，设 $\mathbf{n}_i$，$\tilde{\mathbf{n}}_i$ 表示满足 $\langle \mathbf{n}_i \rangle = \mathcal{C}(X_i)^{\perp} = \ker(X_i^T)$ 且$\tilde{\mathbf{n}}_i = \mathcal{C}(\tilde{X}_i)^{\perp} = \ker(\tilde{X}_i^T)$ 的向量。我们将对 $i = 0,1,2,\ldots,n$ 使用归纳法证明

(a) $\langle \mathbf{n}_0, \ldots, \mathbf{n}_i \rangle = \langle \tilde{\mathbf{n}}_0, \ldots, \tilde{\mathbf{n}}_i \rangle$。

(b) $\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1} \rangle = \langle \tilde{\mathbf{u}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{u}}_i, \tilde{\mathbf{u}}_{i+1} \rangle$.

考察正交空间可知，(a) 等价于 $\mathcal{C}(X_0) \cap \mathcal{C}(X_1) \cap \ldots \cap \mathcal{C}(X_i) = \mathcal{C}(\tilde{X}_0) \cap \mathcal{C}(\tilde{X}_1) \cap \ldots \cap \mathcal{C}(\tilde{X}_i)$。此外，若对于每个 $l \le i+1$，$\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_l \rangle = \langle \tilde{\mathbf{u}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{u}}_l \rangle$ 成立，则 $TU = U$ 意味着，对于所有满足 $i+1 \ge l > j$ 的 l, j，$t_{lj} = 0$；换言之，T 的前 $i+1$ 行呈下三角矩阵的形式。因此，如果我们证明 $i = 0, 1, \ldots, n$ 满足 (a) 和 (b)，就完成了证明。

我们先证明 $i = 0$ 满足 (a) 和 (b)。根据 X_0 注意到 $\mathbf{n}_0^T\mathbf{a}_i \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_i \notin \mathcal{C}(X_0) \Leftrightarrow i = 1$。这意味着 $\mathbf{n}_0^T X = \mathbf{n}_0^T(X_0 + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_j\mathbf{u}_j^T) = \mathbf{n}_0^T\mathbf{a}_1\mathbf{u}_1^T$。对称地，我们得到 $\mathbf{n}_0^T X = \mathbf{n}_0^T\tilde{\mathbf{a}}_1\tilde{\mathbf{u}}_1^T$。因此 $\tilde{\mathbf{u}}_1 = (\mathbf{n}_0^T\mathbf{a}_1)^{-1}(\mathbf{n}_0^T\mathbf{a}_1)\mathbf{u}_1$，，由此完成了基础步骤的证明。

接下来，我们证明归纳步骤 $1, \ldots, i-1 \to i$。我们从 (a) 开始。根据归纳假设 $\langle \mathbf{n}_0, \ldots, \mathbf{n}_{i-1} \rangle = \langle \tilde{\mathbf{n}}_0, \ldots, \tilde{\mathbf{n}}_{i-1} \rangle$，因此，只需证明 $\tilde{\mathbf{n}}_i \in \langle \mathbf{n}_0, \ldots, \mathbf{n}_{i-1}, \mathbf{n}_i \rangle$。这等价于找到系数 $r_0, \ldots, r_{i-1}$，使得方程 $(\mathbf{n}_i + \sum_{j=0}^{i-1} r_j\mathbf{n}_j)^T\tilde{X}_i = 0$ 成立。

根据归纳假设，我们知道 T 在其前 i 行上具有下三角矩阵的形状。回想 $A = \tilde{A}T$，因此 $\tilde{\mathbf{a}}_j = \sum_{l \ge j} t_{lj}\mathbf{a}_l$ 对每一个 $j \le i$成立。对 $j < i$，这意味着$\mathbf{n}_j^T\tilde{\mathbf{a}}_{j+1} = t_{j+1,j+1}\mathbf{n}_j^T\mathbf{a}_{j+1} \neq 0$。对所有 $j+1 < l \le i$，这进一步意味着$\mathbf{n}_j^T\tilde{\mathbf{a}}_l = 0$成立。由这两个观察，对每一个 $j < i$，我们得到

$$\mathbf{n}_j^T\tilde{X}_i = \mathbf{n}_j^T(\tilde{X}_j + \sum_{k>j} \tilde{\mathbf{a}}_k\tilde{\mathbf{u}}_k^T) = c_j\mathbf{u}_{j+1}^T, \text{ where } c_j = t_{j+1,j+1}\mathbf{n}_j^T\mathbf{a}_{j+1} \neq 0. \tag{14}$$

另一方面，请注意

$$\mathbf{n}_i^T\tilde{X}_i = \mathbf{n}_i^T(\tilde{X}_i - X_i) = \mathbf{n}_i^T(\sum_{j\le i} \tilde{\mathbf{a}}_j\tilde{\mathbf{u}}_j^T - \mathbf{a}_j\mathbf{u}_j^T) \in \langle \mathbf{u}_1^T, \ldots, \mathbf{u}_j^T \rangle. \tag{15}$$

后者由 $\langle \tilde{\mathbf{u}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{u}}_j \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_j \rangle$ 得出，这由归纳假设成立。因此，存在系数 $d_1, \ldots, d_n$，使得 $\mathbf{n}_i^T \tilde{X}_i = \sum_{j \le i} d_j \mathbf{u}_j$。由此我们得出，$(\mathbf{n}_i + \sum_{j=0}^{i-1} r_j \mathbf{n}_j)^T \tilde{X}_i = 0$ 等价于方程

$$\sum_{j=1}^{i} d_j \mathbf{u}_j^T + \sum_{j=0}^{i-1} r_j c_j \mathbf{u}_{j+1}^T = \sum_{j=0}^{i-1} (d_{j-1} + r_j c_j) \mathbf{u}_{j+1}^T = 0 \tag{16}$$

方程（16）的解为 $r_j = -d_{j-1} c_j^{-1}$，其中 $j = 0$，……，$i-1$（回忆一下，根据（14），c_j 可逆）。因此 $\tilde{\mathbf{n}}_i \in \langle \mathbf{n}_0, \ldots\ldots, \mathbf{n}_{i-1}, \mathbf{n}_i \rangle$，证毕。

为了证明（b），我们再次利用这一点：可以将 $\tilde{\mathbf{n}}_i$ 写成线性组合 $\tilde{\mathbf{n}}_i = \sum_{j=0}^{i} r_j \mathbf{n}_j$（其中 $r_i = 1$）。两边乘以 X，得到 $\tilde{\mathbf{n}}_i^T X = \sum_{j=0}^{i} r_j \mathbf{n}_j^T X = \sum_{j=0}^{i} r_j (\mathbf{n}_j^T \mathbf{a}_{j+1}) \mathbf{u}_{j+1}^T$。另一方面，显然 $\tilde{\mathbf{n}}_i^T X = (\mathbf{n}_i^T \tilde{\mathbf{a}}_{i+1}) \tilde{\mathbf{u}}_{i+1}^T$ 也成立。由于 $\mathbf{n}_i^T \tilde{\mathbf{a}}_{i+1} \neq 0$，这意味着 $\tilde{\mathbf{u}}_{j+1} \in \langle \mathbf{u}_1, \ldots\ldots, \mathbf{u}_{i+1} \rangle$。由于 $\tilde{\mathbf{u}}_{j+1} \notin \langle \tilde{\mathbf{u}}_1, \ldots \tilde{\mathbf{u}}_i \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \ldots\ldots, \mathbf{u}_i \rangle$，这意味着 $\langle \tilde{\mathbf{u}}_1, \ldots \tilde{\mathbf{u}}_{i+1} \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \ldots\ldots, \mathbf{u}_{i+1} \rangle$，证毕。

Sinc对于所有 $i = 0, 1, \ldots, n$，条目 (a)、(b) 均成立，至此完成该引理的证明 . □

根据引理 45(1)，我们知道定义44中可容许方向 $\mathbf{a}$ 的集合 $\mathcal{C}(X_0) \cap \mathcal{C}(X_1) \ldots \cap \mathcal{C}(X_{n-1}) \setminus \mathcal{C}(X_n)$ 不依赖于 $X = X_0 + AU$ 的具体表示。此外，我们得到如下结论：

引理 46. 设 $X \in \mathfrak{T}_n$ 具有表示 $X = X_0 + AU$，设 $\mathbf{u}_1^T, \ldots, \mathbf{u}_n^T$ 为 U 的行，并设 $\theta(X, \mathbf{a}) \in \Theta_n$。则

(1) 若 $\mathbf{u} \notin \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle$，则 $X + \mathbf{a}\mathbf{u}^T \in \mathfrak{T}_{n+1}$；

(2) 若 $\mathbf{u} \in \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle$，则 $X + \mathbf{a}\mathbf{u}^T \in \mathfrak{T}_n$。

证明。(1) 直接由 $\mathfrak{T}_{n+1}$ 的定义得出。对于 (2)，注意到如果 $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} r_i \mathbf{u}_i$，那么 $X + \mathbf{a}\mathbf{u}^T = X_0 + \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{a}_i + r_i \mathbf{a}) \mathbf{u}_i^T$，这是 $X + \mathbf{a}\mathbf{u}^T$ 的一个 n-可容许表示。□

由前一个引理可知，如果 $\mathbf{F}$ 是阶为 q 的域，那么 θ-空间由类型为 n 的 q^n 矩阵和类型为 $n+1$ 的 $q^k - q^n$ 矩阵组成。另一方面，以下结论也成立：

引理 47。 设 $q = |\mathbf{F}|$，并设 $X \in \mathfrak{T}_n$，其中 $1 \le n \le k$。那么

(1) X 恰好属于一个类型为 $n-1$ 的 θ-空间；

(2) X 恰好属于 n 类型的 q^{k-n} θ 个空间；*(3)* X 不属于任何类型为 $j \neq n-1$ 的 θ- 空间，n。

证明。设 $X = X_0 + AU$ 是 X 的一个可容许表示。于是 $X = X_{n-1} + \mathbf{a}_n \mathbf{u}_n^T$，其中 $X_{n-1} = X_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{a}_i \mathbf{u}_i^T$。特别地，$X \in \theta(X_{n-1}, \mathbf{a}_n)$ 是一个类型 $n-1$ 的 θ-空间。接下来，假设 X 属于某个其他类型 $n-1$ 的 θ-空间。这意味着存在 $X = X_0 + AU$ 的另一个可容许表示 $\tilde{\tilde{\quad}}$，且 $\theta = \theta(X_{n-1}, \tilde{\mathbf{a}}_n)$。由引理 45，我们知道表示在乘以下三角矩阵 T 的意义下是唯一的。特别地，$\langle \tilde{\mathbf{a}}_n \rangle = \langle \mathbf{a}_n \rangle$。但这又意味着 $\theta(X_{n-1}, \mathbf{a}_n) = \theta(X, \mathbf{a}_n) = \theta(X, \tilde{\mathbf{a}}_n) = \theta(X_{n-1}, \mathbf{a}_n)$，从而完成了(1)的证明。

对于（2），我们只需计算满足 $\langle \mathbf{a} \rangle$ 的可容许方向的数量，使得 $\theta(X, \mathbf{a})$ 是类型为 n 的集合。注意，$\mathcal{C}(X_0) \cap \mathcal{C}(X_1) \cap \ldots \cap \mathcal{C}(X_{n-1})$ 是一个维数为 $k-n+1$ 的空间，因此

$$|\mathcal{C}(X_0) \cap \mathcal{C}(X_1) \cap \ldots \cap \mathcal{C}(X_{n-1}) \setminus \mathcal{C}(X_n)| = q^{k-n+1} - q^{k-n} = q^{k-n}(q-1).$$

因此 , up to 与某个非零标量相乘后，$\mathbf{a}$ 有 q^{k-n} 种不同的选择。

(3) 显然可由以下事实得出：每个类型为 n 的空间只包含类型为 n 或 $n+1$ 的矩阵，即引理 46。□

现在我们可以证明本小节的主要结果：

定理 48. 设 $k \in \mathbb{N}$，设 $\mathbf{F}$ 为一个阶为 q 的有限域，设 $\mathbf{R}$ 为一个正则模，其中 q 可逆。设 $X_0 \in \mathbf{F}^{(k+1)\times k}$ 的秩为 $\mathrm{rk}(X_0) = k$，并设 Θ_n，其中 $n \in [k]_0$ 如定义 *43* 所述。那么

$$\delta_{X_0}(X) = \sum_{n=0}^{k} (-1)^n q^{\binom{n}{2}-(1+n)k} \sum_{V\in\Theta_n} \delta_V(X).$$

因此，δ_{X_0} 属于由 δ_{Id_k} 生成的$(\mathbf{F}^k, \mathbf{R})$-克隆子。这进一步意味着，$\delta_{X_0}$ 由其 k 元 $(\mathbf{F}^k,\mathbf{B})$-子式生成。

证明。 假设存在一些系数 $\alpha_0, \dots, \alpha_k$，使得

$$\delta_{X_0}(X) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \sum_{V\in\Theta_i} \delta_V(X)$$

对每个 $X \in \mathbf{F}^{k\times(k+1)}$ 都成立。

若 $X \notin \mathfrak{T}$，则此方程显然成立，因为此时所有函数的取值均为 0。若 $X = X_0$，即 X 为 0 型，则得到方程 $1 = q^k\alpha_0$。根据引理 47，在某个类型为 i 、对应于 $k \geq i > 0$ 的矩阵处求值，可得方程 $\alpha_{i-1} + q^{k-i}\alpha_i = 0$。根据假设，$q$ 在 $\mathbf{R}$ 中可逆，因此这些方程等价于 $\alpha_0 = q^{-k}$ 和 $\alpha_i = -\alpha_{i-1}q^{i-k}$，其中 $i \in [k]$。现在很容易看出，这个方程组的解为 $\alpha_i = (-1)^i q^{\frac{i(i+1)}{2}-(1+i)k}$。由于每个$\delta_V$都是 δ_{Id_k} 的一个 $(\mathbf{F}^k, \mathbf{R})$-小算子（见定义 41），且 $\delta_{\mathrm{Id}_k}(X) = \delta_{X_0}(X_0X)$，证明至此完成。

□

4.3. **总结**。 现在我们总结主要结果的证明，并讨论一些直接推论。

定理49。 设$\mathbf{F}$ 为有限域， $k \in \mathbb{N}$，并设$\mathbf{B}$ 为一个$\mathbf{R}$-模，且 $|F|$ 在$\mathbf{R}$中可逆。则$\mathcal{O}_{\mathbf{F}^k,\ \mathbf{B}}$ 由 k-元($\mathbf{F}^k$、$\mathbf{B}$)-子式一致生成。

证明。对于每个 $j \in [k]$，我们选取某个矩阵 $Z_j \in \mathbf{F}^{(j+1)\times j}$，使得 $\mathbf{rk}(Z_j) = j$。于是，定理 48 蕴含 δ_{Z_j} 也由 j-元（$\mathbf{F}^j$，$\mathbf{R}$）-子式生成。引理 38 (1) 进而蕴含，对于每个$\mathbf{R}$-模$\mathbf{B}$，$\mathcal{O}_{\mathbf{F}^k,\ \mathbf{B}}$ 由 k-元（$\mathbf{F}^k$，$\mathbf{B}$）-子式一致生成。□

As i由定理 49 和推论 20 可立即得到以下结果：

推论 50。 设$\mathbf{F}^k$ 为有限域$\mathbf{F}$ 上的 k-维向量空间，并设$\mathbf{B}$为忠实$\mathbf{R}$-模，且 $|F|$ 在$\mathbf{R}$中可逆。则从$\mathbf{F}^k$ 到$\mathbf{B}$ 的每个克隆子 $\mathcal{C}$ 都由其 k-元部分生成，即$\mathcal{C} = \langle \mathcal{C}^{(k)} \rangle_{\mathbf{F}^k,\ \mathbf{B}}$。

特别地，如果$\mathbf{B}$是有限集，我们可以证明以下结果：

推论 51. 设$\mathbf{F}^k$ 是有限域$\mathbf{F}$ 上的 k维向量空间，并设$\mathbf{B}$ 是一个互素阶的有限模。则

(1) 从$\mathbf{F}^k$ 到$\mathbf{B}$的克隆子只有有限多个。*(2)* 从$\mathbf{F}^k$ 到$\mathbf{B}$ 的每个克隆子都由一个至多 $|F|^{k\times k}$元关系有限相关。

证明。 不失一般性，我们可以假设$\mathbf{B}$ 是一个忠实的$\mathbf{R}$-模。那么， $|F|$在$\mathbf{R}$ 中可逆，当且仅当$\mathbf{B}$ 的阶与其互素。推论的结论由推论 50、20 和 23 直接得出。□

结合我们的结果与 [MW24]，我们能够证明以下命题，它对应于最一般的情形，在该情形下猜想 1 现已得到解决：

推论 52。 设$\mathbf{A} = \mathbf{F}_1^{k_1} \times \cdots \times \mathbf{F}_n^{k_n} \times \mathbf{D}$ 为$\mathbf{F}_1 \times \cdots \times \mathbf{F}_n \times \mathbf{R}$-模，其中所有$\mathbf{F}_i$均为有限域，且$\mathbf{D}$是有限分配$\mathbf{R}$-模。设 l 为$\mathbf{R}$的 *Jacobson* 根的幂零度，并令 $k = \max(k_1, \ldots, k_n, l)$。此外，设$\mathbf{B}$ 为一个$\mathbf{S}$-模，且 $|A|$ 在$\mathbf{S}$中可逆。那么

(1) 从 $\mathbf{A}$到 $\mathbf{B}$ 的每个克隆子都由其 k 元部分生成。*(2)* 若 $\mathbf{B}$ 是有限的，则从 $\mathbf{A}$ 到 $\mathbf{B}$ 的克隆子只有有限多个。

证明。 注意，源代数的克隆可以分解为各个单因子的克隆。因此，该陈述可由定理49、定理 26 和命题 21 得出。□

特别地，猜想 1 对于推论 52 中那类模 $\mathbf{A}$ 成立。根据引理 27，对于多项式等价代数之间的克隆子，也可以得出一个关于元数 $k+1$的类似结论。

4.4. 从 $\mathbf{F}^k$ 到 $\mathbf{B}$ 的克隆子格的描述。 接下来，我们旨在进一步细化推论 50，从而明确描述从 $\mathbf{F}^k$ 到 $\mathbf{B}$的克隆子格。根据推论 50，这等价于对 $\mathbf{B}^{F^{k\times k}}$ 中在与矩阵复合 $F^{k\times k}$下保持不变的子模进行分类。我们将在定理 55 中完成这一工作，并使用以下记号：

定义 53。 设$\mathbf{F}$ 是一个有限域，且$\mathbf{B}$ 是一个$\mathbf{R}$-模。则

- $\mathbf{R}[\mathrm{GL}_i(\mathbf{F})]$ 是 $\mathrm{GL}_i(\mathbf{F})$ 上的$\mathbf{R}$群环。其元素记作形式和 $\sum_{M\in \mathrm{GL}_i(\mathbf{F})} \alpha_M M$，其中 $\alpha_M \in R$。

- 对于每个 $1 \leq i \leq k \in \mathbb{N}$，记 $\mathbf{M}_{i,k}(\mathbf{F},\mathbf{B})$ 为全体函数 $f\colon \{X \in \mathbf{F}^{i\times k} \mid \mathrm{rk}(X) = i\} \to \mathbf{B}$ 所构成的$\mathbf{R}[\mathrm{GL}_i(\mathbf{F})]$-模。群环通过如下作用自然地作用于该集合

$$(\sum_{M\in \mathrm{GL}_i(\mathbf{F})} \alpha_M M) f(X) = \sum_{M\in \mathrm{GL}_i(\mathbf{F})} \alpha_M f(MX).$$

我们进一步定义 $\mathbf{M}_{0,k}(\mathbf{F},\mathbf{B}) = \mathbf{B}$ （作为$\mathbf{R}$-模）。

为证明定理 55，我们首先证明以下关于 $(\mathbf{F}^k,\mathbf{B})$-克隆子的刻画 s:

命题 54。 设$\mathbf{F}^k$ 是有限域$\mathbf{F}$ 上的 k维向量空间，且$\mathbf{B}$ 是一个$\mathbf{R}$-模，其中 $|F|$ 在$\mathbf{R}$中可逆。

那么，对于所有指标 $0 \leq i \leq k \leq m$，以及每个满秩$\mathbf{F}^{m\times i}$ 矩阵 $A \in$ ，都有一个$\mathbf{R}$-线性嵌入 $L_A\colon \mathbf{M}_{i,k}(\mathbf{F}, \mathbf{B}) \to \mathcal{O}^{(m)}_{\mathbf{F}^k,\mathbf{B}}$，使得

(1) $L_A(f)(AU) = f(U)$ 若 $\mathrm{rk}(U) = i$，*(2)* $L_A(f)(X) = 0$ 若 $\mathrm{rk}(X) \leq i$ 且 $\mathcal{C}(X) \neq \mathcal{C}(A)$，*(3)* $L_{TA}(f)(TX) = L_A(f)(X)$ 对所有 $T \in \mathrm{GL}_m(\mathbf{F})$，

(4) $L_A(f)(X)$ *可在时间* $O(m^3)$ *内计算，(5)* $\mathcal{C}$ *是一个* (F^k, B)*-克隆子，当且仅当对于每个* $i \in [k]_0$*，原像* L_A^{-1} *(C) 都是* $M_{i,k}(F,B)$ *的* $R[GL_i(F)]$*-子模，且只依赖于* $i = rk(A)$*。*

证明。回想一下，根据定理 48 和引理 37 (2)，存在运算 $I_0, I_1, \ldots, I_k$ on$\mathcal{O}^{(m)}$ F^k,B，使得 I_i 是 $(i, \mathrm{F}^k, \mathrm{B})$- 一致可表示，且 $I_i(f)(X) = X$ 对所有秩为 $\mathrm{rk}(X) \leq i$ 的矩阵均成立。特别地，这意味着对于任意矩阵$X_0 \in \mathrm{F}^{m\times k}$ 且 $i = n = \mathrm{rk}(X_0)$，引理 36 的假设均成立。因此，对于每个维数为 $\dim(H) \leq k$ 的 $H \leq \mathrm{F}^m$，引理 36 表明存在一个运算 $J_H(f)(X) = \sum_{\mathcal{C}(M)=H} \alpha_M f(MX)$，使得对于所有支撑包含于 $\{X \mid \mathrm{rk}(X) \geq i\}$ 的 f，若 $\mathcal{C}(X) = H$，则有 $J_H(f)(X) = f(X)$；若 $\mathcal{C}(X) \neq H$ 且 $\mathrm{rk}(X) \leq i$，则有 $J_H(f)(X) = 0$。不失一般性，我们还可以假设，对于每个 $T \in \mathrm{GL}_m(\mathrm{F})$，均有 $J_{T(H)}(f)(X) = \sum_{\mathcal{C}(M)=H} \alpha_M f(TMT^{-1}X)$（参见引理 37 (1) 的证明）。

接下来我们定义运算 L_A。注意，映射 $f \mapsto L'_A(f) = L_A(f)|_{\{X|\mathrm{rk}(X)\leq i\}}$已由 (1) 和 (2) 唯一确定，并且是从 $\mathrm{M}_{i,k}(\mathrm{F},\mathrm{B})$ 到模 $\{f\colon \{X \in \mathrm{F}^{m\times m} \mid \mathrm{rk}(X) \leq i\} \to \mathrm{B}\}$ 的 R-线性映射。根据其定义，$J_H(f)$ 仅依赖于 f 到矩阵 X（满足 $\mathcal{C}(X) \leq H$，因而秩为 $\leq \dim(H)$）的限制。因此，$L_A(f) = J_{\mathcal{C}(A)}(L'_A(f))$ 是良定义的。由此定义直接可得，(1) 和 (2) 成立。性质 (3) 由 $L'_{TA}(f)(TX) = L'_A(f)(X)$ 以及 $J_{T(\mathcal{C}(A))}(f)(X) = \sum_{\mathcal{C}(M)=A} \alpha_M f(TMT^{-1}X)$ 得出。

为了解释 (4)，注意到（固定 k 和 $f \in \mathrm{M}_{i,k}(\mathrm{F}, \mathrm{B})$ 后），我们可以通过检查 X 是否有秩分解 $X = AU$ 来计算 $L'_A(f)(X)$（这可以在 $O(m^3)$ 时间内完成）。要计算 $L_H(f)(X) = \sum_{\mathcal{C}(M)=H} \alpha_M L'_A(f)(MX)$，需要计算矩阵乘积$MX$（其计算时间同样受 $O(m^3)$ 限制），并对每个满足$\mathcal{C}(M) = H$的 M计算 $L'_A(f)(MX)$。由于 F 中满足 $\mathcal{C}(M) = H$ 的矩阵 $M \in {}^{m\times i}$ 的数量不依赖于 m，证明得证。

接下来我们证明 (4)。设 $\mathcal{C}$ 是一个 $(\mathbf{F}^k,\mathbf{B})$-克隆子，且 $m \geq k$。

我们首先注意到，每个 $f \in \mathcal{C}^{(m)}$ 都可以分解为和 $f = \sum_{i=0}^{k} K_i(f)$，其中 $K_0(f) = I_0(f)$，且 $K_i(f) = I_i(f - K_{i-1}(f))$。根据定义，对于每个 $i \in [k]_0$，我们有 K_i 是 $(i, \mathrm{F}^k, \mathrm{B})$-一致可表示，$K_i(f)(X) = 0$ 对 $\mathrm{rk}(X) \leq i-1$ 成立。定义 $\mathrm{C}_i = \{K_i(f) \mid f \in \mathcal{C}^{(m)}\}$；显然，$\mathcal{C}^{(m)}$（作为一个 R-模）分解为 $\mathrm{C}0, \ldots, \mathrm{C}_k$ 的直和。注意，C_i 中的函数已由它们在秩 i 矩阵上的取值确定。事实上，C_i 可以刻画为所有由其 i 元子式生成且满足 $f(X) = 0$（当 $\mathrm{rk}(X) < i$ 时）的 $f \in \mathcal{C}^{(m)}$ 的集合（因为对于这类函数，$K_i(f) = f$）。

此外，我们还可以将每个 C_i 分解为 R-模 $\mathrm{C}_H = \{J_H(f) \mid f \in \mathrm{C}_i\}$的直和，其中 J_H按上述方式定义。根据构造，每个函数 $J_H(f) \in \mathrm{C}_H$都完全由其在列空间 H的矩阵上的限制确定。另一方面，C_H 也可以刻画为所有由其 i元子式生成，且满足以下条件的 $f \in \mathcal{C}^{(m)}$：若 $\mathcal{C}(X) \neq H$ 且 $\mathrm{rk}(X) \leq i$，则 $f(X) = 0$。对于任意满足 $\mathcal{C}(A) = H$ 的 A，L_H 的像仅包含此类函数。因此，若 $\mathcal{C}(A) = H$，则 $L_A^{-1}(\mathcal{C}^{(m)}) = L_A^{-1}(\mathrm{C}_H)$。

接下来注意，对于任意 $T \in \mathrm{GL}_m(\mathrm{F})$，由 $I_T(f)(X) = f(TX)$ 定义的映射 $I_T\colon \mathcal{O}^{(m)}\,\mathrm{F}^m,\mathrm{B} \to \mathcal{O}^{(m)}\,\mathrm{F}^m,\mathrm{B}$ 是从 C_H到 $\mathrm{C}_{T(H)}$ 的同构。由性质 (3) 可得 $L_{TA}(f) = L_A(I_T(f))$，因此对于每个 $T \in \mathrm{GL}_m(\mathrm{F})$，都有 $L_A^{-1}(\mathcal{C}^{(m)}) = L_{TA}^{-1}(\mathcal{C}^{(m)})$。换言之，$L_A^{-1}(\mathcal{C}^{(m)})$ 仅取决于 $i = \mathrm{rk}(A)$。只需考虑将 $\mathcal{C}(A)$ 作为集合保持不变的映射 $T \in \mathrm{GL}_m(\mathrm{F})$，便可看出 $L_A^{-1}(\mathcal{C}^{(m)})$ 甚至是一个 $\mathrm{R}[\mathrm{GL}_i(\mathrm{F})]$-模。于是，$I_T$ 是 C_H 的一个自同构，

使得 $I_T(f)$ 仅取决于 T对 H 的限制。换言之，$\mathbf{C}_H$是$\mathbf{R}[\mathrm{GL}(H)] = \mathbf{R}[\mathrm{GL}_i(\mathbf{F})]$, 上的模，它的同构副本 L_A^{-1} $(\mathbf{C}_H)$ 也是如此。

反之，对于每个 $i \in [k]$，令 $\mathbf{D}_i$ 为 $\mathbf{R}[\mathrm{GL}_i(\mathbf{F})]$-$\mathbf{M}_{i,\ k}(\mathbf{F},\ \mathbf{B})$ 的子模。令 $\mathbf{D}$ 为 $\{L_A(\mathbf{D}_i) \mid i \in [k],\ \mathrm{rk}(A) = i\}$ 的线性闭包。接下来需要证明，$\mathbf{D}$ 是某个 m 元克隆子的部分。（于是，根据定理49，且 $m > k$ 我们就完成了证明。）

我们已经知道 D 是一个 R-模。因此，我们只需证明它对从内部与矩阵复合封闭。设 $f \in \mathbf{D}_i$、$A \in \mathbf{F}^{m\times i}$，其中 $\mathrm{rk}(A) = i$且 $M \in \mathbf{F}^{m\times m}$。于是，我们需要证明 $L_A(f)(MX) \in \mathbf{D}$。若 $\mathrm{rk}(MA) < i$，则根据 L_H 的定义，我们得到 $L_H(f)(MX) = 0$，因此结论成立。否则 $\mathrm{rk}(MA) = i$，这意味着存在一个线性变换 $T \in \mathrm{GL}_m(\mathbf{F})$，使得 $MA = TA$。于是，根据性质（3），我们得到 $L_A(f)(MX) = L_A(f)(TX) = L_{T^{-1}A}(f)(X)$，它同样属于 D。证明完毕。□

定理 55。 从 $\mathbf{F}^k$ 到 $\mathbf{B}$ 的克隆子格与 $\prod_{i=0}^{k} \mathrm{Sub}(\mathbf{M}_{i,k}(\mathbf{F},\mathbf{B}))$同构。

此外，对于 $j \le k$，子格 $\prod_{i=0}^{j} \mathrm{Sub}(\mathbf{M}_{i,k}(\mathbf{F},\mathbf{B}))$ 对应于由其 j 元小算子生成的函数所构成的克隆子。

证明。设 $m = k$，并设 $(A_H)_{H\le \mathbf{F}^k}$是一个矩阵族，使得 $\mathcal{C}(A_H) = H$，且 $A_H \in \mathbf{F}^{k\times \dim(H)}$。由命题 54 (3)，映射 $L\colon \prod_{i=0}^{j} \mathrm{Sub}(\mathbf{M}_{i,k}(\mathbf{F},\mathbf{B})) \to \mathcal{P}(\mathcal{O}^{(k)}_{\mathbf{F}^k,\mathbf{B}})$ 定义为 $L(\mathbf{C}_0,\mathbf{C}_1,\dots,\mathbf{C}_K) = \sum_{H\le \mathbf{F}^K} L_{A_H}(\mathbf{C}^{\dim(H)})$，是从 $\prod_{i=0}^{j} \mathrm{Sub}(\mathbf{M}_{i,k}(\mathbf{F},\mathbf{B}))$ 到克隆子的 k元部分的格同构。由定理49，得证。

要证明第二个结论，注意到根据命题 54 的证明，$\mathcal{C}$ 由j元小算子生成，当且仅当 $L_A^{-1}(\mathcal{C}) = \{0\}$ 对某个 $A \in \mathbf{F}^{m\times i}$ 成立，当且仅当 $i > j$。□

我们指出，在 $k = 1$且$\mathbf{B}$ 是域这一特殊情形下，对克隆子格的这一描述已在 [Fio20]中得到（事实上，还可以计算出更明确的描述，因为此时$\mathbf{M}_{1,1}(\mathbf{F},\mathbf{B}) = \mathbf{B}[\mathbf{F}^*]$ 是一个循环模）。

5. 子幂成员问题

本节讨论二幂零 Mal'cev 代数$\mathbf{A}$的子幂成员问题。正如 [FM87，第 7], 章中所指出的，对每个中心列为 $\mathbf{1}_A > \mu > \mathbf{0}_A$的二幂零 Mal'cev 代数，都可以关联两个仿射代数$\mathbf{U} = \mathbf{A}/\mu$和$\mathbf{L} = \mu/\Delta_{\mu,\mathbf{1}_A}$，使得$\mathbf{A}$ 同构于中心扩张（也称为圈积）$\mathbf{U} \otimes \mathbf{L}$，其定义域为 $U \times L$，其基本运算具有如下形式

$$f^{\mathbf{U}\otimes\mathbf{L}}\left(\begin{bmatrix}u_1\\ l_1\end{bmatrix},\dots,\begin{bmatrix}u_n\\ l_n\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f^{\mathbf{U}}(u_1,\dots,u_n) \\ f^{\mathbf{L}}(l_1,\dots,l_n) + \hat{f}(u_1,\dots,u_n)\end{bmatrix},$$

ˆ对于某个 $f\colon\ U^n \to L$。事实上，此时所有项运算也都可以表示为上述形式。

基于这一表示，我们定义其差分克隆子 $\mathrm{Diff}(\mathbf{U}\otimes\mathbf{L})$，即由项 t, s 所对应的差 $t - s$构成的集合，其中 $t^{\mathbf{U}} = s^{\mathbf{U}}$ 且 $t^{\mathbf{L}} = s^{\mathbf{L}}$。正如 [Kom24],$\mathcal{C}$ = 所证明的，$\mathrm{Diff}(\mathbf{U}\otimes\mathbf{L})$ 确实是一个从$\mathbf{U}$ 到$\mathbf{L}$ 的克隆子，并扩展了某个常数 0；而子幂成员问题 $\mathrm{SMP}(\mathbf{U}\otimes\mathbf{L})$ 可在多项式时间内归约到以下问题：

CompRep($\mathcal{C}$) 输入：元组 $\mathbf{a}_1$、.....、$\mathbf{a}_m \in A^n$输出：$\{f(\mathbf{a}_1$、.....、$\mathbf{a}_m) \mid f \in \mathcal{C}^{(m)}\} \le \mathbf{B}^n$ 的一个生成集。

这里 $f(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n)$ 是逐分量计算的。我们将证明以下结论 :

命题 56。 设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 之间的克隆子，其中 $\mathbf{A}$ 与有限维向量空间 $\mathbf{F}^k$ 多项式等价，且 $\mathbf{B}$ 是一个互素模。则 $\mathrm{CompRep}(\mathcal{C})$ 可在多项式时间内求解。

证明。首先假设 $\mathbf{A} = \mathbf{F}^k$。根据命题 54（5），我们知道，对于所有 $i \in [k]_0$，存在子模 $\mathbf{C}_i \leq \mathbf{M}_{i,k}(\mathbf{F}, \mathbf{B})$，使得 $\mathcal{C}^{(m)}$ 由 $\{L_A(f) \mid A \in \mathbf{F}^{m\times i}, \mathrm{rk}(A) = i, f \in \mathbf{C}_i\}$ 生成。事实上，若对于每个维数为 $\dim(H) \leq k$ 的 $H \leq \mathbf{F}^m$，记 $A_H \in \mathbf{F}^{\dim(H)\times m}$ 为一个满足 $\mathcal{C}(A_H) = H$ 的矩阵，则命题 54 蕴含，$f \in \mathcal{C}^{(m)}$ 可以唯一地写成 $f = \sum_{H\leq \mathbf{F}^k, \dim(H)=i} L_{A_H}(f_H)$ 的形式，其中某个 $f_H \in \mathbf{C}_i$。

现在我们考虑 $\mathrm{CompRep}(\mathcal{C})$ 的一个实例。利用已建立的矩阵记号，对于给定的输入矩阵 $X_1,\dots,X_n \in \mathbf{F}^{m\times k}$，任务是计算模 $\{(f(X_1)\ f(X_2)\dots,f(X_n)) \mid f \in \mathcal{C}^m\} \leq \mathbf{B}$ 的一个生成集。

设 $\mathfrak{H} = \{H \leq \mathbf{F}^m \mid H \leq \mathcal{C}(X_i), \text{对某个 } i \in [n]\}$。注意，$\mathfrak{H}$ 的大小关于 n 是线性的。通过对每一个这样的空间 $H \in \mathfrak{H}$ 选取一个基，我们可以在时间 $O(|A|^k \cdot n) = O(n)$ 内如上枚举矩阵 $(A_H)_{H\in\mathfrak{H}}$。

由命题 54 的 (1)-(3)（以及分解 $f = \sum_{H\leq\mathbf{F}^k,\dim(H)=i} L_{A_H}(f_H)$，对 $f \in \mathcal{C}^{(m)}$）可知，对所有 $f, g \in \mathcal{C}^{(m)}$，方程 $f(X_i) = g(X_i)$ 成立，当且仅当对所有满足 $H \subseteq \mathcal{C}(X_i)$ 的 H 都有 $L_{A_H}(f_H) = L_{A_H}(g_H)$。因此 $\{(f(X_1)\ f(X_2)\dots,f(X_n)) \mid f \in \mathcal{C}^m\}$由

$$\{(g(X_1), g(X_2), \dots, g(X_n)) \mid H \in \mathfrak{H}, g = L_{A_H}(g_H), g_H \in \mathbf{M}_{\dim(H),k}(\mathbf{F}, \mathbf{B})\}.$$

根据命题 54 (4)，计算 $L_{A_H}(g_H)(X_i)$ 可在 $O(m^3)$ 时间内完成。因此，$\mathrm{CompRep}(\mathcal{C})$ 可在多项式时间 $O(nm^3)$ 内求解

如果 $\mathbf{A}$ 只是与 $\mathbf{F}^k$ 多项式等价，那么我们仍然知道（参见引理 27），它包含项 $x +^y z = x - y + z$, $-^y(x) = y - x + y$ 和 $(r^y)_{r\in\mathbf{F}}$，满足 $r^y(x) = rx + (1-r)y$，使得代数 $\mathbf{A}^y = (A, +^y, y, -^y, (r^y)_{r\in\mathbf{F}})$ 在将 y 代入任意常数时，都与 $\mathbf{F}^k$ 同构。正如引理 27 (1) 中所指出的，将 $\mathbf{F}^k$ 和 $\mathbf{B}$ 中运算的 k 元小算子一致生成，可提升为将 $\mathbf{A}$ 到 $\mathbf{B}$ 中运算的 $k+1$ 元小算子一致生成。引理 36 中的一致可表示运算以及命题 54 的证明中也有类似结论。证明留给读者。沿用 $\mathbf{A} = \mathbf{F}^k$ 的相同论证，我们可得 $\mathrm{CompRep}(\mathcal{C})$ 可在多项式时间 $O(nm^3)$ 内求解。□

定理 57。 设 $\mathbf{A} = \mathbf{U} \otimes \mathbf{L}$ 是有限语言中的有限二幂零 *Mal'cev* 代数，且 $\mathbf{U}$ 与某个向量空间多项式等价。则 $\mathrm{SMP}(\mathbf{A})$ 可在多项式时间内求解。

证明。根据 [Kom24，定理 10], $\mathrm{SMP}(\mathbf{U} \otimes \mathbf{L})$ 可在多项式时间内归约为 $\mathrm{CompRep}(\mathcal{C})$，其中 $\mathcal{C} = \mathrm{Diff}(\mathbf{U}, \mathbf{L})$ 是从 $\mathbf{U}$ 到 $\mathbf{L}$ 的克隆子，并通过常数 0 扩展。特别地，$\mathcal{C}$ 是从 $\mathbf{U}$ 到阿贝尔群 $\mathbf{L}' = (L, +, 0, -)$ 的克隆子。若 $\mathbf{L}'$ 与 $\mathbf{U}$ 的阶互素，则由命题 56 可得结论。否则，注意到 $\mathbf{L}'$ 可直接分解为 $\mathbf{L}' = \mathbf{L}'_1 \times \mathbf{L}'_2$，使得 $\mathbf{L}'_1$ 与 $\mathbf{U}$ 互素，且 $\mathbf{L}'_2$ 的大小为 p^n，其中素数 p 是 $\mathbf{U}$ 的特征。此外，$\mathrm{Clo}(\mathbf{L}')$ 包含一元映射 π_1 和 π_2，它们分别投影到 $\mathbf{L}'_1$ 和 $\mathbf{L}'_2$。

因此，每个 $f \in \mathcal{C}$ 也可以分解为 $f = \pi_1 f + \pi_2 f$，其中 $\pi_1 f$ 来自一个（$\mathbf{U}$，$\mathbf{L}'_1$）-克隆子 $\mathcal{C}_1$，而 $\pi_2 f$ 来自一个（$\mathbf{U}$，$\mathbf{L}'_2$）-克隆子 $\mathcal{C}_2$。我们可以根据命题 56 在多项式时间内求解 $\mathrm{CompRep}(\mathcal{C}_1)$

。此外，可以看出（类似于证明超幂零 Mal'cev 代数的子代数成员问题可在多项式时间内求解的过程，见 [May12]），CompRep($\mathcal{C}_2$)也可以在多项式时间内求解。更确切地说，由于 $\mathbf{A}$ 具有有限签名，我们可以推得存在一个常数 $C \in \mathbb{N}$，使得每个 $f(x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{C}_2$ 都可以写成若干函数 $f_I \in \mathcal{C}_2$ 之和，其中 $I \subseteq [m]$ 和 $|I| \leq C$，且 f_I 仅依赖于坐标 I（见 [KKK24，定理 6.1] 的证明）。这意味着，只需在输入处计算所有本质坐标为 I、$|I| \leq C$ 的运算 $f_I \in \mathcal{C}$，即可在时间 $O(nm^C)$ 内求解 CompRep($\mathcal{C}_2$)。证明细节留给读者。由此可知，SMP($\mathbf{A}$)属于 P。□

6. Sharp lower bounds for the full clonoid

本节中，我们给出一个初等下界，说明一般情况下有限模之间的全 clonoid 所需生成元的数量。

定理 58。 设$\mathbf{A}$ 是有限的$\mathbf{R}_A$-模，且$\mathbf{B}$ 是有限的$\mathbf{R}_B$-模。假设全 *clonoid* $\mathcal{O}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$ 由 m个 m-元函数生成。那么 $m \geq \log |A| \log |R_A|$。

证明。 设 G 是$\mathbf{B}$ 的一个基数最小的生成集。那么，对每个 $n \in \mathbb{N}$，令$G_n \subseteq \mathcal{O}^{(n)}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$ 由所有形如 $\delta^g_{\mathbf{a}}(X)$的函数组成，其中 $\delta^g_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) = g \in G$，而 $\delta^g_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = 0$ 则在其他情况下成立，其中$\mathbf{a} \in \mathbf{A}^n$。注意， G_n 是$\mathbf{R}_B$-模$\mathbf{B}^{\mathbf{A}^n}$ 的一个基数最小的生成集$c \cdot |A|^n$。

现在，假设对于 $n \geq m$, $\mathcal{O}^{(n)}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$ 属于由 $\mathcal{O}^{(m)}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$ 生成的克隆子（或等价地，G_m），并且$\mathbf{R}_A$ 是一个右模。那么， $\mathcal{O}^{(n)}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$ 必定等于所有函数 $g(M(x_1, \ldots, x_n)^t)$的线性闭包，其中 M是$\mathbf{R}_A$上的一个 $m \times n$-矩阵，且 $g \in \mathcal{O}^{(m)}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$。这类函数至多有 $|G_m||R_A|^{mn}$ 个。由 $|G_n|$ 的最小性可得

$$|G_m||R_A|^{mn} = c|A|^m|R_A|^{mn} \geq c|A|^n = |G_n|.$$

对第二个不等式取对数，得到：

$$m \geq \frac{n \log |A|}{\log |A| + n \log |R_A|}. \tag{17}$$

由于式 (17) 对每个 $n \geq m$ 都成立，我们得到 $m \geq$对数 $|A|$ 对数 $|R_A|$。 □

我们指出，对于向量空间 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$， [Van25], 已经指出了这一点，并证明在互素情形下，k 元函数足以生成全 clonoid。（不过请注意，这也可以由命题 54 (5) 推出。）

7. Conclusion

本文研究了有限模之间的克隆子。我们证明，从有限维向量空间 $\mathbf{A}$ 到互素模 $\mathbf{B}$的克隆子只有有限多个，这也与猜想 1 一致。

我们的证明（并且，正如我们在第 3 节中所论证的， [MW24]中分配模$\mathbf{A}$的结果亦然）利用了如下事实：从 A 到 B 的运算由($\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$)-子式一致生成。可以预期，同一方法适用于猜想 1范围内的所有情形。因此，我们也猜想下述陈述为真：

猜想59. 设$\mathbf{A}$ 为一个有限阿贝尔 p-群，并设$\mathbf{R}$ 为一个环（视为正则$\mathbf{R}$-模），使得 p 在$\mathbf{R}$中可逆。则存在一个 $k \in \mathbb{N}$，使得$\mathcal{O}_{\mathbf{A},\mathbf{R}}$ 由 k元$(\mathbf{A},\mathbf{R})$-子式一致生成。

注意，根据命题 21，猜想59意味着，对于所有满足 $|A|$ 在 $\mathbf{R}$ 中可逆的阿贝尔群 $\mathbf{A}$，同一结论都成立。任何模显然都以阿贝尔群为其约化，因此我们还可得出同一结论对模 $\mathbf{A}$ 也成立。最后，根据推论 35，猜想59进一步意味着，对于某个 k，对每个 $\mathbf{R}$-模 $\mathbf{B}$，$\mathcal{O}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$ 都由 k 元的（$\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$）小算子一致生成。特别地，这意味着猜想59蕴含猜想 1。

如果我们只考虑阿贝尔 p-群 $\mathbf{A}$，那么定理49涵盖了所有初等阿贝尔群 $\mathbf{A} = \mathbb{Z}_p^n$，而 [MW24] 涵盖了所有循环群 $\mathbf{A} = \mathbb{Z}_{p^n}$。因此，最简单的开放问题如下：

问题60. 猜想59对 $\mathbf{A} = \mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_p$ 是否成立，其中 p 是素数?

关于这个问题（以及一般的猜想 1）的任何进展，很可能都取决于将 [MW24] 和相关论文中讨论的一致可表示运算结合起来。请注意，定理 58 和 [MW24, 引理 5.1] 都只给出了生成子式元数的下界 $k \geq 2$。

在子幂成员问题的背景下，第二作者在[Kom24], 中猜想，所有有限二幂零 Mal'cev 代数$\mathbf{A}$的子代数成员问题$\mathbf{A}$ 均可在多项式时间内求解。我们在第5节中的结果证实了这一点适用于这样的情形：$\mathbf{A}/\mu$ 关于某个中心同余 μ 的商与一个向量空间多项式等价。基于 [MW24], 中的结果，我们希望也能对$\mathbf{A}/\mu$ 与一个分配模多项式等价的情形给出肯定答案。这引出了以下问题：

问题 61. 对于每个$\mathbf{A}$ 与有限分配模多项式等价、且$\mathbf{B}$与一个模多项式等价的 $(\mathbf{A},\mathbf{B})$-克隆子 $\mathcal{C}$, CompRep($\mathcal{C}$) 是否属于 P?

本文未讨论任何有关等式理论的问题。然而，正如 [May24] 和 [KM26], 第 3 节所举例说明的，可以从相应差分克隆群的有限公理化推导出 2-幂零代数的有限基结果。因此，最后我们提出：

问题 62。设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 为有限模，且 $\mathbf{C} = \langle F \rangle_{\mathbf{A},\ \mathbf{B}}$ 为有限生成克隆群。$\mathcal{C}$（或者更准确地说，由 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 和 F 构成的多类代数）是否总是具有有限等式基?

鉴于 [May24] 和 [KM26] 中的例子，自然可以预期，一致可表示运算（或者更准确地说，定义这些运算的公式）在回答问题 62 时也会发挥核心作用。

References

[AM07] Erhard Aichinger 和 Peter Mayr。群阶为 pq 的多项式克隆。 *Acta Mathematica Hungarica* 114 3 267 285, 2007 0 1007 10474 006 0530 , ( ): – . doi: . /s - - -x. [AM16] Erhard Aichinger 和 Peter Mayr。有限生成等式类。*Journal of Pure and Applied Algebra* 220 8 2816 2827, 2016 10 1016 2016 01 001 , ( ): – . doi: . /j.jpaa. . . . [BBKO21] Libor Barto、Jakub Bul´ın、Andrei Krokhin 和 Jakub Opr˘sal。承诺约束满足的代数方法。 *Journal of the ACM (JACM)*, 68(4):1–66, 2021. doi:10.1145/3457606. [BKW17] Libor Barto、Andrei Krokhin 和 Ross Willard。多态性及其应用。载于 Andrei Krokhin 和 Stanislav Živný 编，*The Constraint Satisfaction Problem: Complexity and Approximability* 7 *Dagstuhl Follow-Ups* 1 44 ¨ ，第 卷，页码 – 。达格斯图尔城堡 – 莱布尼茨信息学中心

德国达格斯图尔，2017。网址：https://drops.dagstuhl.de/entities/document/ 10.4230/DFU.Vol7.15301.1, doi:10.4230/DFU.Vol7.15301.1。[BMS19] Andrei Bulatov、Peter Mayr 和 ´Agnes Szendrei。含立方项的有限代数的子幂成员问题。 *Logical Methods in Computer Science*, 15:11:1–11:48, 2019. doi:10.23638/LMCS-15(1:11)2019。[BR14] Sudipto Banerjee 和 Anindya Roy。 *Linear Algebra and Matrix Analysis for Statistics*。CRC统计科学丛书。CRC出版社，2014。doi:10.1201/b17040。[BS81] Stanley Burris 和 Hanamantagouda P. Sankappanavar。 *A Course in Universal Algebra*，第78卷。施普林格，1981。[Bul17] Andrei A. Bulatov。非均匀约束满足问题的二分定理。载于 *Proceedings of the 58th Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)* 319 330 2017 10 1109 ，页码 – 。I EEE, 。doi: . / FOCS.2017.37。[CF09] Miguel Couceiro 和 Stephan Foldes。对与克隆的复合封闭的函数类和关系约束。 *Discussiones Mathematicae - General Algebra and Applications*, 29(2):109– 121, 2009. doi:10.7151/dmgaa.1153。[CL24] Miguel Couceiro 和 Erkko Lehtonen。布尔函数类相对于线性函数克隆的稳定性。 *Order*, 41(1):15–64, 2024. doi:10.1007/s11083-022-09596-5。[Fio20] Stefano Fioravanti。互素阶有限域之间有限元函数的闭集。*Universalis* 81 4 623 638, 2020 10 1007 00012 020 00683 5 *Algebra* , ( ): – . doi: . /s - - - 。[Fio21a] Stefano Fioravanti。互素阶有限域的乘积之间有限元函数的闭集。 *Algebra Universalis*, 82:1–12, 2021. doi:10.1007/s00012-021-00748-z。[Fio21b] Stefano Fioravanti。无平方阿贝尔群的扩张。 *International Journal of Algebra and Computation* 31 04 623 638, 2021 10 1142 0218196721500302 , ( ): – . doi: . /S 。[FM87] Ralph Freese 和 Ralph McKenzie。 *Commutator theory for congruence modular varieties*，第125卷。CUP Archive，1987。[HM88] David Hobby 和 Ralph McKenzie。 *The structure of finite algebras*，第76卷。美国数学会，1988。[IMM+10] Paweł Idziak、Petar Markovi´c、Ralph McKenzie、Matthew Valeriote 和 Ross Willard。由少子幂代数带来的可处理性与可学习性。 *SIAM Journal on Computing*, 39 7 3023 3037, 2010 10 1137 090775646 ( ): – 。doi: . / 。[KKK24] Piotr Kawałek、Michael Kompatscher 和 Jacek Krzaczkowski。2-幂零代数中的电路等价。载于 *41st International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 2024)* 289 *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)* 45 1 45 17 ，第 卷，页码 : – : 。达格斯图尔城堡 – 莱布尼茨信息学中心，2024。doi:10.4230/LIPIcs.STACS.2024.45。¨KM26] Michael Kompatscher 和 Peter Mayr。每个有限幂零卢普都有一个超幂零卢普作为约化。 *Results in Mathematics*, 81(1):21, 2026. doi:10.1007/s00025-025-02568-2。[Kom24] Michael Kompatscher。2-幂零代数的子幂成员问题。载于 *41st Inter-national Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 2024)*，第289卷 *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*，页码46:1–46:17。达格斯图尔城堡—莱布尼茨信息学中心，2024。doi:10.4230/LIPIcs.STACS.2024.46。[Kre19] Sebastian Kreinecker。素数阶群上的闭函数集。 *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing* 33 1 2 51 74, 2019 , (-): – 。[Leh24] Erkko Lehtonen。多数封闭的布尔函数仆从。 *Algebra Universalis*, 85(1):6, 2024. doi:10.1007/s00012-023-00835-3。[Leh25] Erkko Lehtonen。近一致性封闭的布尔函数仆从。 *Algebra Universalis*, 86(1):1– 51, 2025. doi:10.1007/s00012-024-00872-6。[Leh26] Erkko Lehtonen。具有单调或判别源克隆的布尔函数克隆子。*Algebra universalis*, 87(1):4, 2026. doi:10.1007/s00012-025-00909-4。[LN10] Erkko Lehtonen 和 Jaroslav Neˇsetˇril。相对于团函数和超图同态的布尔函数子式。 *European Journal of Combinatorics*, 31(8):1981–1995, 2010. doi: 10.1016/j.ejc.2010.05.007。[LS09] Erkko Lehtonen 和 ´Agnes Szendrei。相对于判别克隆的运算等价性。 *Discrete Mathematics*, 309(4):673–685, 2009. doi:10.1016/j.disc.2008.01.003。[May12] Peter Mayr。Mal'cev代数的子幂成员问题。*Algebra and Computation* 22 07 1250075, 2012 10 1142 0218196712500750 *International Journal of* , ( ): 。doi: . /S 。

[May24] Peter Mayr。Vaughan-lee 的大小为 12 *Algebra universalis* 85 1 2, 的幂零卢普具有有限基。, 2024 10 1007 00012 023 00832 6 (): 。doi: 。/s - - - 。[MW24] Peter Mayr 与 Patrick Wynne。模之间的克隆子。 *International Journal of Algebra and Computation* 34 04 543 570, 2024 10 1142 021819672450022 , (): –。doi: 。/SX。[Pip02] Nicholas Pippenger。有限函数的子式的伽罗瓦理论。 *Discrete Mathematics*，254(1- 3):405–419，2002。doi:10.1016/S0012-365X(01)00297-7。[Pos41] Emil L. Post。 *The Two-Valued Iterative Systems of Mathematical Logic* 5 *Annals of* , 卷。普林斯顿大学出版社, 。[Spa19] Athena Sparks。关于克隆体的数量。 *Algebra Universalis*，80(4):53，2019。doi:10.1007/s00012-019-0629-x。[Sze86] ´Agnes Szendrei。 *Clones in universal algebra*。S´eminaire de Math´ematiques Superieures Montr´eal：出版物。Presses de l'Universit´e de Montr´eal，1986。[Van25] Jan Vanˇeˇcek。有限维向量空间之间的克隆子，2025。学士论文，查理大学，数学与物理学院。[Zhu17] Dmitriy Zhuk。CSP 二分猜想的一个证明。载于 *Proceedings of the 58th Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)* 331 342 2017 10 1109 2017 , 第 – 页。IEEE, 。doi: 。/FOCS. . 38。[Zhu20] Dmitriy Zhuk。CSP 二分猜想的证明。 *Journal of the ACM (JACM)* 67 5 1 78, , (): –。doi: 。/。2020 10 1145 3402029

Department of Algebra, Charles University, Praha, Czechia
Email address: stefano.fioravanti66@gmail.com

Department of Algebra, Charles University, Praha, Czechia
Email address: kompatscher@karlin.mff.cuni.cz

Siena, Italy*Email address*:
bernardo.rossi96@gmail.com