arXiv:2602.04038v1 [math.AG] 3 Feb 2026

割线簇的霍奇理论

´Qianyu Chen、Bradley Dirks、Sebastian Olano 和 Debaditya Raychaudhury

Abstract. 我们研究光滑射影簇 Y 的直线割线簇以及光滑射影曲线的高阶割线簇的局部上同调模。我们证明，第一种情形中的局部上同调缺陷与 Y 的本原上同调有关，而第二种情形中的局部上同调缺陷为 0。

作为应用，我们计算它们的（交叉）Hodge-Lyubeznik 数、奇异上同调上的混合霍奇结构、交叉上同调上的纯霍奇结构、局部上同调模上的霍奇滤过生成层级，以及它们的**有理数域**-因子化缺陷。作为副产品，我们通过去除限制性的正性假设，重新得到并改进了文献中的若干结果。

Contents

1. 引言.2

2. 预备知识 .12

2.1. 混合层 .12 2.2. 霍奇滤过与霍奇理论奇点不变量 .16 2.3. 霍奇指标定理的猜想性特征类版本 . . . . . 21 2.4. 曲线的割线簇与高阶割线簇的几何. . . . . 21 2.5. 经典上同调计算 .25

3. 一般结果.29

3.1. 局部上同调缺陷及相关不变量 .30 3.2. 对奇点不变量的应用， $c(X)$ 和 HRH(X) .32 3.3. 应用于计算 Hodge-Lyubeznik 数 .34

4. 割线簇的上同调与奇点 .38

4.1. 奇点不变量与 Hodge-Lyubeznik 数.38 4.2. 局部上同调上霍奇滤过的生成层级 .42 4.3. 交叉上同调.44 4.4. 奇异上同调 .49 4.5. **有理数域**-因子化的缺陷 .57

5. 曲线的高阶割线簇的上同调与奇点. 62

5.1. 局部上同调缺陷及相关不变量 .62 5.2. 局部上同调上霍奇滤过的生成层级 .80

2020 *Mathematics Subject Classification.* 14B05, 14J17。Q.C. 部分获得了美国国家科学基金会 DMS-1952399 号资助、西蒙斯合作项目“簇的模空间”资助以及 AMS-Simons 差旅资助。B.D. 部分获得了美国国家科学基金会 DMS-1926686 号资助和 NSF-MSPRF 资助 DMS-2303070。D.R. 部分获得了 AMS-Simons 差旅资助。

5.3. Hodge-Lyubeznik 数 .81 5.4. **有理数域**-因子化缺陷 .83 5.5. 奇异上同调 .85

6. 开放问题.97
参考文献.98

1. Introduction

给定一个光滑射影簇 $Y \subseteq \mathbf{P}^N$，其 k-割线簇按定义是 k-割线（$k-1$）平面并集的闭包。割线簇——我们所说的割线簇是指直线割线簇（即 2-割线簇）和高阶割线簇——在研究光滑射影簇嵌入射影空间时自然出现，并且长期以来一直引起几何学家的兴趣。对它们的研究可以追溯到经典射影几何，在那里，关于维数、缺陷性和定义方程的问题早已处于核心地位（见 [Sev01、Zak81]）。后来，研究重点转向描述它们的定义方程和合志，以及它们的奇点 [CC10、CR06、ENP20、Rai12、SV11、Ver01、Ver08、Ver09]。

在这一经典图景的基础上，近期的研究更多聚焦于这些簇的奇点。例如，Ullery 在 [Ull16],中证明了割线簇的正规性，而 Ein–Niu–Park 在 [ENP20], 中对曲线的高阶割线簇也得到了这一结论；后续文章则从霍奇理论视角研究割线簇的奇点。具体而言，这些研究涉及 Du Bois 奇点和有理奇点，以及它们的高阶对应概念 [CS18，ORS24]。文献 [OR24], 进一步分析了割线簇的局部上同调模，而本文则对其中若干结果加以改进和推广。

在这一背景下，局部上同调模是很自然的研究对象，因为割线簇自带一个嵌入到射影空间中的映射。这些 $\mathcal{D}$-模还具有混合霍奇模的附加结构；研究它们等价于研究其对偶，即簇上的常值霍奇模。这是我们研究任意维光滑射影簇的割线簇以及光滑射影曲线的高阶割线簇的霍奇理论时所采用的主要霍奇理论工具，稍作推广即可应用。

我们将对嵌入射影簇作一个温和的正性条件假设，以开展我们的研究。我们强调，除非另有明确说明，我们的正性假设在下文所述的精确意义上是“最小的”。特别是，这使我们能够通过大幅削弱现有文献中的正性假设，改进其中的若干结果。此外，与 [CDO25], 一样，我们的主要结果在 Saito ASai91,Sai01] 所定义的任意 -混合层理论中仍然成立（关于混合层的细节，见小节 2.1；关于“子域 C上的（高阶）割线簇”的定义，见小节 **2.4.3**）。不过，在引言中，我们更倾向于使用混合霍奇模的语言，在复数域 $\mathbf{C}$ 上进行讨论。

直线割线簇。 对于割线簇，设定如下：设 Y 是一个正维光滑射影簇， L 是 Y 上的一个非常丰线丛，它通过完全线性系给出嵌入 $\iota\colon Y \hookrightarrow \mathbf{P}^N$，并设 Σ 为其割线簇。我们假设 L 是 3-非常丰的，这意味着每个长度为

4 的零维子概形对 L的截面施加独立条件。这是使 Σ 不具缺陷（即具有预期维数 $2\dim Y+1$）的“最小”正性条件；此外，在这种情况下，我们有一个对 Σ 奇点的显式对数消解，记作

$$t:\mathbf{P}\to\Sigma$$

我们将在小节2.4.1中回顾其构造。

我们旨在计算在 [PS25] 中引入的局部上同调缺陷对数典范缺陷(Σ)（相应地，其变体对数典范缺陷$^{\mathrm{gen}}(\Sigma)$、对数典范缺陷$^{>0}_{\mathrm{gen}}(\Sigma)$在 [DOR25、CDO25]中引入），这一不变量衡量 Σ 距离成为上同调完全交（以下将该条件简记为CCI）有多远，并完整描述所有局部上同调模上的权滤过 $W_\bullet$。我们进一步旨在描述 Σ的非有理光滑轨迹 Σ_{nRS}，它正是 Σ不能成为有理同调流形之处，而有理同调流形是一个被广泛研究的拓扑概念。已知（例如参见 [PP24]），Σ 未能成为有理同调流形的精确度量编码于所谓的有理同调流形缺陷对象 $\mathcal{K}^\bullet_\Sigma$（亦称“多重点复形”和“比较复形”）之中，我们也将描述这一对象。

我们引入一些记号。令 $\mathrm{V}^k_{\mathrm{prim}}$（分别地，$\mathrm{V}^k$）表示 Y 上的霍奇结构变分，使得其在 y 上的纤维为 $H^k_{\mathrm{prim}}(\mathrm{Bl}_y(Y))$（分别地，$H^k(\mathrm{Bl}_y(Y))$）；其中，本原上同调是相对于第 3 节中所述的适当极化定义的。众所周知，$\mathrm{Bl}_y(Y)$的本原上同调与 Y 的本原上同调基本相同（参见[GH78, HW17,Voi02]），但在 H^2处例外，此处总存在一个新的非零本原类（精确陈述见引理 2.34）。令 $i_\Sigma\colon \Sigma\hookrightarrow\mathrm{P}^N$ 为由$\iota\colon Y\hookrightarrow\mathrm{P}^N$确定的嵌入，其中 $q=N-\dim\Sigma=N-(2\dim Y+1)$。在此情形下，我们有以下由 [CDO25] 的主定理推出的结果（参见推论 3.2）。

定理 A $(=$ 定理 4.1$)$。假设 L 是 *3*-非常丰的，且 $\Sigma\neq\mathbf{P}^N$。那么

(1) $$\mathrm{lcdef}(\Sigma)=\mathrm{lcdef}_{\mathrm{gen}}(\Sigma)=\mathrm{lcdef}^{>0}_{\mathrm{gen}}(\Sigma)=\begin{cases}\dim Y-1 & \dim Y\geq 2,\ H^1(Y,\mathcal{O}_Y)\neq 0\\ \dim Y-2 & \dim Y\geq 2,\ H^1(Y,\mathcal{O}_Y)=0\\ 0 & \dim Y=1\end{cases}.$$

(2) $\Sigma_{\mathrm{nCCI}}=Y$ 如果 Σ 不是 *CCI*。此外，$\Sigma_{\mathrm{nRS}}=Y$ 如果 Σ 不是有理同调流形（即，$Y\neq\mathbf{P}^1$, 见下文 *(5)*）。

(3) 对所有 $0<j\leq$对数典范缺陷(Σ)，我们都有一个权为维数$\Sigma+j+1$的纯霍奇模同构：

$$\mathcal{H}^{q+j}_\Sigma(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N})\cong\iota_*\mathbf{V}^{\dim Y-j}_{\mathrm{prim}}(-q-j-1).$$

(4) $\mathrm{Gr}^W_k\mathcal{H}^q_\Sigma(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N})$ 仅在 $k\in\{N+q,N+q+1\}$ 时可能非零，此时它们由下式给出：

$$\mathrm{Gr}^W_k\mathcal{H}^q_\Sigma(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N})\cong\begin{cases}\iota_*\mathbf{V}^{\dim Y}_{\mathrm{prim}}(-q-1) & k=N+q+1\\ i_{\Sigma*}\mathrm{IC}^H_\Sigma & k=N+q\end{cases}.$$

此外，交叉复形$^H_\Sigma$ 属于一个短正合列

$$0\to\mathrm{IC}^H_\Sigma\to\mathcal{H}^0t_*\mathbf{Q}^H_{\mathbf{P}}[\dim\Sigma]\to i_*\mathbf{V}^{\dim Y+1}\to 0$$

其中 $t\colon\ \mathbf{P}\to\Sigma$ 是割线簇的标准奇点消解。

(5) RHM 缺陷对象 $\mathcal{K}_\Sigma^\bullet$ 是一个纯复形，并且我们在D^b(混合霍奇模(Σ)) 中有如下分解：

$$\mathcal{K}_\Sigma^\bullet \cong \bigoplus_{\ell=0}^{\dim Y-1} i_* \mathbf{V}_{\mathrm{prim}}^{\dim Y-\ell}[\ell].$$

特别是，

- Σ 是有理同调流形，当且仅当 $Y \cong \mathbf{P}^1$。
- 若 $Y \ncong \mathbf{P}_1$，则$\mathcal{K}_\Sigma^\bullet$ 是一个权为维数 $\Sigma - 1$的纯复形。

注 1.1 (定理 4.1). 若维数 $Y = 1$，上述第 (4) 部分可简化为

$$\mathrm{Gr}_k^W \mathcal{H}_\Sigma^q(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}) \cong \begin{cases} \iota_*(H^1(Y) \boxtimes \mathbf{Q}_Y^H[1])(-1) & k = N+q+1 \\ i_{\Sigma *}\mathrm{IC}_\Sigma^H & k = N+q \end{cases}$$

此外，IC_Σ^H 属于一个短正合列

$$0 \to \mathrm{IC}_\Sigma^H \to \mathcal{H}^0 t_* \mathbf{Q}_{\mathbf{P}}^H[\dim \Sigma] \to i_* \mathbf{Q}_Y^H[1](-1) \to 0.$$

参见 a 亦 定理 I 以了解关于曲线的高阶割线簇的类似陈述 .

注 1.2。 我们还记下以下事实：

a）对数典范缺陷（Σ）的值在定理 A（1）中所述，已在 [OR24，定理 A]中于更严格的正性假设下得到证明。b）上述某些陈述关于曲线的割线簇与高阶割线簇的类似结果出现在 [Bro26，定理 2.15]中。如前所述，我们在定理 I中更详细地讨论曲线情形。

我们现在转向不变量 c（Σ）（相应地，HRH（Σ）），它在 [CDO25]（相应地， [DOR25，PP24]）中被引入。该不变量给出了 Σ 接近于 CCI（相应地，有理同调流形）程度的数值度量。它等于 ∞当且仅当 Σ是 CCI（相应地，有理同调流形）。如 [CDO25，DOR25], 中所述，对上述局部上同调模上的滤过的了解使我们能够计算这些不变量。这些概念是如下条件的霍奇理论弱化：**有理数域**$_\Sigma[\dim \Sigma]$ 为中间延拓的（相应地，简单迷向），精确的定义与性质见小节2.2。我们的结果如下：

推论 **论 B** （= 推论4.4）。 假设 L 是 *3*-非常丰，且 $\Sigma \neq \mathbf{P}^N$。那么我们有 *:*

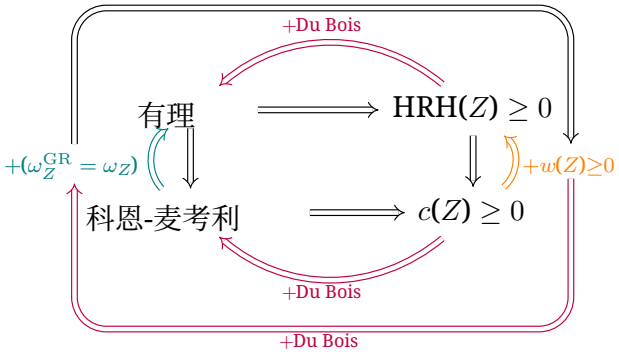
(1)
$$c(\Sigma) = \begin{cases} \infty & \dim Y = 1;\ \textit{or } \dim Y = 2 \textit{ and } H^1(Y, \mathcal{O}_Y) = 0, \\ 0 & \dim Y \geq 3 \textit{ and } H^i(Y, \mathcal{O}_Y) = 0 \textit{ for all } 0 < i < \dim Y, \\ -1 & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

In particular, $c(\Sigma) \geq 0$ *if and only if* $H^i(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ *for all* $0 < i < \dim Y$.

(2)
$$\mathrm{HRH}(\Sigma) = \begin{cases} \infty & Y \cong \mathbf{P}^1, \\ 0 & \dim Y \geq 2 \textit{ and } H^i(Y, \mathcal{O}_Y) = 0 \textit{ for all } i > 0, \\ -1 & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

In particular, $\mathrm{HRH}(\Sigma) \geq 0$ *if and only if* $H^i(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ *for all* $i > 0$.

对于任意簇 Z，上述不变量 $c(Z)$ 和 HRH(*Z*) 与 Z的其他奇点性质密切相关，例如杜布瓦条件和有理奇点条件。这些性质之间的主要蕴含关系总结在下图中：



在上文中，ω_Z^{GR}是Grauert-Riemenschneider层（见小节2.2 的细节）。参见定义2.23中 w（Z）的定义，以及命题2.25中对其的刻画。

在 [CS18], 中，对于割线簇，在一项严格的正性假设下分析了图表左侧出现的奇点不变量；已有研究表明，该假设蕴含杜布瓦条件（[CS18，命题 4。4]表明，仅有 3-很丰性是不够的）。这项工作通过证明右侧不变量的类似结论无需除 3-很丰性之外的任何正性假设，阐明了正性在上述文献 中的作用：

注 1.3. 推论 B和注4.5 结合上述图表可得：

*A*假设 L 是 *3*-非常丰且 $\Sigma \neq \mathbf{P}^N$。若 Σ 具有杜布瓦奇点，则：

当且仅当对所有 $0 < i <$ 维数Y，• Σ 是科恩-麦考利的。
当且仅当对所有 $i > 0$，• Σ 具有有理奇点。
当且仅当 $H^{\text{维数}Y}(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$，• $\omega_{\mathrm{GR}\Sigma} = \omega_\Sigma$。

上述结果分别得出了 [CS18 中讨论定理 1 后所导出的关于科恩–麦考利性的推论。3], [CS18，推论 1。5] 以及 [CS18，定理 1。4] 事实上，上述“当且仅当”陈述已在同上的正性假设下得到证明，而该假设已被证明蕴含杜布瓦条件。

注 1.4. 推论 B(2) 已在 [DOR25，例 1311] 中，在更强的正性假设下得到证明。有理正规曲线的割线簇（以及更高阶割线簇）是有理同调流形这一事实也由 Brogan 证明 [Bro26]。

我们描述另外两个相关的不变量。对于 $y \in \Sigma$，有由 Garc´ıa L´opez 和 Sabbah [GLS25]定义的*Hodge-Lyubeznik* 数 $\lambda^{u,\ v}_{r\ s}(\mathcal{O}_{\Sigma,\ y})$，其中 u，v，r，$s \in$ **整数环**。这些数可视为 $y \in Y$ 处奇点的局部度量，并通过局部上同调模上的滤过来定义。按照 [CDO25]，，我们在小节 2.2 中给出这些数的另一种等价且内禀的定义。在相交*Hodge-Lyubeznik*数I$\lambda^{u,\ v}_{r\ }(\mathcal{O}_{\Sigma,\ y})$也由上述文献中 引入。（相交）Hodge-Lyubeznik 数只有在 $y \in \Sigma_{\mathrm{nRS}}$ 时才有意义，我们将在下文计算它们：

推论 C (= 推论 4.6)**.** 假设 L 是 *3*-非常丰的，且 $\Sigma \neq \mathbf{P}^N$。进一步假设$\Sigma_{\mathrm{nRS}} \neq \emptyset$ （等价地 $Y \ncong \mathbf{P}^1$, 从而 $\Sigma_{\mathrm{nRS}} = Y$ 由 定理 *A*）。设 $y \in Y \subseteq \Sigma$。则：

(1) 对于 维数$Y + 2 \leq s <$维数 Σ，我们有等式

$$\lambda^{u,v}_{\dim \Sigma, s}(\mathcal{O}_{\Sigma,y}) = \begin{cases} h^{-v,-u}_{\mathrm{prim}}(Y) & u + v = \dim Y + 1 - s \ \textit{and}\ (u,v) \neq (-1,-1) \\ 1 + h^{1,1}_{\mathrm{prim}}(Y) & s = \dim Y + 3 \ \textit{and}\ (u,v) = (-1,-1) \end{cases}$$

对于这样的 s，所有其他数都为零。

(2) 对于 $s = \text{维数 } \Sigma$，*Hodge-Lyubeznik* 数 $\lambda^{u,v}_{r,\dim\Sigma}(\mathcal{O}_{\Sigma,y})$ 仅在 $r \geq \text{维数}\, Y + 2$ 时可能非零；在这种情况下，我们有等式

$$\lambda^{u,v}_{r,\dim\Sigma}(\mathcal{O}_{\Sigma,y}) = \begin{cases} h^{-v,-u}_{\text{prim}}(Y) & u+v = r-\dim\Sigma, (u,v) \neq (-1,-1), \dim Y \geq 2 \\ 1 + h^{1,1}_{\text{prim}}(Y) & r = \dim\Sigma - 2, (u,v) = (-1,-1), \dim Y \geq 2 \\ 1 & r = 3, (u,v) = (0,0), \dim Y = 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}.$$

(3) 相交*Hodge-Lyubeznik*数仅在 $r \geq$维数$Y+1$ 时可能非零；在这种情况下，它们由下式给出：

$$\mathrm{I}\lambda^{u,v}_{r}(\mathcal{O}_{\Sigma,y}) = \begin{cases} h^{-v,-u}_{\text{prim}}(Y) & u+v = r-\dim\Sigma, (u,v) \neq (-1,-1), \dim Y \geq 2 \\ 1 + h^{1,1}_{\text{prim}}(Y) & r = \dim\Sigma - 2, (u,v) = (-1,-1), \dim Y \geq 2 \\ h^1(Y,\mathcal{O}_Y) & (u,v) \in \{(-1,0),(0,-1)\}, r = 2, \dim Y = 1 \\ 1 & r = 3, (u,v) = (0,0), \dim Y = 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}.$$

Hodge-Lyubeznik 数和相交霍奇-柳贝兹尼克数完全确定$c(\Sigma)$ 以及 HRH(Σ)，依据 [CDO25、定理 A 和定理B]，，因此 推论 C 可用于推出推论 B。

我们还计算了嵌入 $i_\Sigma\colon \Sigma \hookrightarrow \mathbf{P}^N$ 的局部上同调模上霍奇滤过的生成层级。回顾一下，对于 $(\mathcal{M}, F)$ 这一光滑簇 Y 上的滤过左 $\mathcal{D}_Y$-模，我们称 $F_\bullet\mathcal{M}$ 在层级 k 生成，当且仅当

$$F_j\mathcal{D}_Y \cdot F_k\mathcal{M} = F_{k+j}\mathcal{M} \text{ for all } j \geq 0.$$

对于混合霍奇模上的霍奇滤过，这样的 k 总是存在。我们用 gl$(\mathcal{M}, F)$ 表示满足条件的最小 k。

按照惯例，对霍奇结构使用递减 Hodge 过滤，定义

$$\mu^\ell_{\text{prim}}(Y) = \inf\left\{\{p \mid \mathrm{Gr}^p_F H^\ell_{\text{prim}}(Y) \neq 0\} \cup \{\infty\}\right\}$$

（这里我们加上“$\cup\{\infty\}$”，以确保当模为零时，生成层级为 $-\infty$ 。）如前所述，我们令 q 表示嵌入 $i_\Sigma\colon \Sigma \hookrightarrow \mathbf{P}^N$的余维。那么我们有以下结论：

C推论 D (= 推论 4.8)。 假设 L 是 *3*-非常丰，且 $\Sigma \neq \mathbf{P}^N$。那么：

(1) If $\dim Y \geq 2$ *and* $0 < j \leq \mathrm{lcdef}(\Sigma)$, *there are equalities*

$$\mathrm{gl}(\mathcal{H}^{q+j}_\Sigma(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}), F) = \begin{cases} \dim Y - j - \mu^{\dim Y - j}_{\text{prim}}(Y) & j \neq \dim Y - 2 \\ 2 & j = \dim Y - 2, H^2(Y,\mathcal{O}_Y) \neq 0 \\ 1 & j = \dim Y - 2, H^2(Y,\mathcal{O}_Y) = 0 \end{cases}.$$

$$(2)\ \mathrm{gl}(\mathrm{Gr}^W_{N+q+1}\mathcal{H}^q_\Sigma(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}), F) = \begin{cases} \dim Y - \mu^{\dim Y}_{\text{prim}}(Y) & \dim Y \geq 3 \\ 2 & \dim Y = 2, H^2(Y,\mathcal{O}_Y) \neq 0 \\ 1 & \dim Y = 2, H^2(Y,\mathcal{O}_Y) = 0 \\ 1 & \dim Y = 1, H^1(Y,\mathcal{O}_Y) \neq 0 \\ -\infty & otherwise\ (i.e.,\ Y \cong \mathbf{P}^1) \end{cases}.$$

(3) 对于任意维数的 Y，我们有 $\mathrm{gl}(\mathcal{H}^q_\Sigma(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N})\ F) \leq$ 维数 Y。

(4) 假设 L 满足$(Q$ $\flat)$-性质（定义 2.32），对于某个 $0 \leq p \leq$ 维数$Y-1$。那么

(a) $\mathrm{gl}(\mathrm{IC}^H_\Sigma(-q)\ F) \leq$ 维数$Y-p-1$。

(b) 假设 L满足$(Q'_{\dim Y-1})$-性质。那么gl(交叉复形$^H_\Sigma(-q)\ F) = 0$并且

$$\mathrm{gl}(\mathcal{H}^q_\Sigma(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}), F) = \begin{cases} \max\left\{0, \dim Y - \mu^{\dim Y}_{\mathrm{prim}}(Y)\right\} & \dim Y \geq 3 \\ 2 & \dim Y = 2, H^2(Y, \mathcal{O}_Y) \neq 0 \\ 1 & \dim Y = 2, H^2(Y, \mathcal{O}_Y) = 0 \cdot \\ 1 & \dim Y = 1, H^1(Y, \mathcal{O}_Y) \neq 0 \\ 0 & otherwise\ (i.e.,\ Y \cong \mathbf{P}^1) \end{cases}$$

为了证明推论 D(3)，我们使用一个关于交叉复形霍奇模生成层级的一般界，见下文的 引理 2.19 。

注 1.5。容易看出，推论 D 恢复了在 $\mathcal{H}^{\mathrm{lcd}(\mathbf{P}^N,\Sigma}$ 上关于 $\mathrm{gl}(\Sigma(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N})\ F)$ 的结果，该结果由 [OR24, 定理 A] 在 $\mathrm{lcdef}(\Sigma) \geq 1$ 时计算得到；并放宽了 L 的 *loc. cit.* 中的正性假设（此处 $\mathrm{lcd}(\mathbf{P}^N, \Sigma) = q + \mathrm{lcdef}(\Sigma)$）。

现在我们转向经典拓扑不变量，具体来说是奇异上同调和 Goresky– MacPherson 的交叉上同调。前者带有混合霍奇结构，而后者是纯的。我们先计算割线簇的交叉上同调：

定理 E (= 定理 4.10)。假设 L 是 *3*-非常丰的，且 $\Sigma \neq \mathbf{P}^N$。那么对所有$j \leq 2$维数 $Y+1 =$维数 Σ，我们都有以下纯权 j 霍奇结构之间的（非典范）同构：

$$\mathrm{IH}^j(\Sigma) \cong \bigoplus_{\ell=1}^{\dim Y-1} H^{j-2\ell}(Y)(-\ell) \oplus \bigoplus_{\ell=\lceil \frac{j}{2} \rceil+1}^{\min\{j,\dim Y\}} \left(H^\ell_{\mathrm{prim}}(Y) \otimes H^{j-\ell}(Y)\right) \oplus \mathcal{Q}_j,$$

其中，$\mathcal{Q}_j$ 取决于 j 模4 的类，具体如下：

$$\mathcal{Q}_j = \begin{cases} H^k(Y) \otimes H^{k+1}(Y) & if\ j = 2k+1\ is\ odd; \\ \bigwedge^2 H^{2k-1}(Y)(-1) \oplus \mathrm{Sym}^2 H^{2k}(Y) & if\ j = 4k; \\ \mathrm{Sym}^2 H^{k-1}(Y)(-1) \oplus \bigwedge^2 H^k(Y) & if\ j = 2k\ with\ k\ odd. \end{cases}$$

注 1.6。上述结果恢复了 [Bro26，定理 2。12] 当 Y 是曲线时（详情见注 4.9 ），但我们注意到，Brogan 的结果也适用于曲线的高阶割线簇。

我们还可以研究割线簇的奇异上同调。为方便记号，在下面的公式中，我们用 P_ℓ 表示 $H^\ell_{\mathrm{prim}}(Y)$。

定理 F (= 定理4.12)。假设 L 是*3*-非常丰且 $\Sigma \neq \mathbf{P}^N$。则对所有 $j > 0$，我们有 $\mathrm{Gr}^W_w H^j(\Sigma) = 0$ 对所有 $w \notin \{j-1, j\}$，并且我们有混合霍奇结构的（非典范）同构

$$\bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} \mathrm{Gr}^W_{j-1} H^j(\Sigma) \cong \bigoplus_{\substack{\ell\ odd \\ a \leq \dim Y - \ell}} \mathrm{Sym}^2 P_\ell(-a) \oplus \bigoplus_{\substack{0<\ell\ even \\ a \leq \dim Y - \ell}} \bigwedge^2 P_\ell(-a) \oplus \bigoplus_{\substack{0<\ell_1<\ell_2 \\ a \leq \dim Y - \ell_2}} P_{\ell_1} \otimes P_{\ell_2}(-a),$$

and

$$\bigoplus_{j\in\mathbf{Z}}\mathrm{Gr}_j^W H^j(\Sigma)\cong\left(\bigoplus_j\bigoplus_{k=1}^{\dim Y-1}H^{j-2-2k}(Y)(-k-1)\right)\oplus\bigoplus_{0\le a\le 2\dim Y+1}\mathbf{Q}^H(-a)$$
$$\oplus\bigoplus_{\substack{\ell_1<\ell_2\\ a\le\dim Y-\ell_2}}P_{\ell_1}\otimes P_{\ell_2}(\ell_1-\dim Y-a-1)$$
$$\oplus\bigoplus_{\substack{0<\ell\ even\\ \dim Y-\ell<a\le 2(\dim Y-\ell)+1}}\mathrm{Sym}^2P_\ell(-a)\oplus\bigoplus_{\substack{\ell\ odd\\ \dim Y-\ell<a\le 2(\dim Y-\ell)+1}}\bigwedge^2 P_\ell(-a).$$

注 1.7. 上述结果将 Brogan [Bro26] 关于曲线的割线簇的公式推广到了任意维数簇的情形。

正如近期工作所确立的，[PP25], 人们可以利用正规射影簇 X 的奇异上同调与交上同调来研究**有理数域**-因子化性，或者更精确地说其**有理数域**-因子化性缺陷 $\sigma(X)$，其定义如下：

$$\sigma(X):=\dim_{\mathbf{Q}}\frac{\mathrm{Div}_{\mathbf{Q}}(X)}{\mathrm{CDiv}_{\mathbf{Q}}(X)}.$$

在上述内容中，我们有

$$\mathrm{Div}_{\mathbf{Q}}(X):=\mathrm{Div}(X)\otimes\mathbf{Q}\text{ and }\mathrm{CDiv}_{\mathbf{Q}}(X):=\mathrm{CDiv}(X)\otimes\mathbf{Q}$$

其中，Div(X) 是 X 上 Weil除子的自由阿贝尔群，而 CDiv(X) 是由 Cartier 类生成的子群。我们有满射循环类态射

$$\mathrm{cl}_{\mathbf{Q}}:\mathrm{Div}_{\mathbf{Q}}(\Sigma)\to\mathrm{IH}^2(\Sigma,\mathbf{Q})\cap\mathrm{IH}^{1,1}(\Sigma)$$

其核为 $\mathrm{Alg}^1_{\mathbf{Q}}(X)$。当且仅当 $\sigma(X)=0$ 是 X 有理数域**Q**-因子化的。类似地，给定 $x\in X$，可以定义局部解析**有理数域***Q*-因子化缺陷 $\sigma^{\mathrm{an}}(X;\ x)$ X 在 x ([Kaw88，PP25]) 处。对于割线簇，利用 定理 A和定理 E，得到：

推论 G (= 推论 4.17)**.** 假设 L 是 *3*-非常丰的，且 $\Sigma\neq\mathbf{P}^N$。进一步假设Σ是正规的。那么：

(1) $\sigma(\Sigma)<\infty$ 当且仅当 $\mathrm{Alg}^1_{\mathbf{Q}}(\Sigma)\subseteq\mathrm{CDiv}_{\mathbf{Q}}(\Sigma)$ 当且仅当 $H^1(Y,\mathcal{O}_Y)=0$。 *(2)* $\sigma(\Sigma)$ 的值为

$$\sigma(\Sigma)=\begin{cases}\infty & H^1(Y,\mathcal{O}_Y)\neq 0\\ h^{1,1}_{\mathbf{Q}}(Y) & \dim Y\ge 2\ \ and\ \ H^1(Y,\mathcal{O}_Y)=0\\ 0 & \dim Y=1\ \ and\ \ H^1(Y,\mathcal{O}_Y)=0\,(i.e.\ Y\cong\mathbf{P}^1)\end{cases}.$$

(3) 以下各项等价：

(a) Σ *is locally analytically* $\mathbf{Q}$*-factorial,*
(b) Σ *is* $\mathbf{Q}$*-factorial,*
(c) the restriction of the cycle class map to Cartier classes

$$\mathrm{cl}^{\mathrm{res}}_{\mathbf{Q}}:\mathrm{CDiv}_{\mathbf{Q}}(\Sigma)\to\mathrm{IH}^2(\Sigma,\mathbf{Q})\cap\mathrm{IH}^{1,1}(\Sigma)$$

is surjective,
(d) $(Y,L)\cong(\mathbf{P}^1,\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(d))$ *with* $d\ge 4$.
Moreover, Σ *is never factorial.*

(4) 此外，假设 维数$Y \geq 2$ 且 L 满足 (U_2)-性质（定义 *2.32*）。那么$\sigma^{\mathrm{an}}(\Sigma;\ y) < \infty$ 对任意（等价地，对所有） $y \in Y$当且仅当 $H^1(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$，此时，对于 $y \in Y$ 我们有

$$\sigma^{\mathrm{an}}(\Sigma; y) \leq h^2(Y) = 2h^2(Y, \mathcal{O}_Y) + h^{1,1}(Y)$$

当 H^2（$Y, \mathcal{O}_Y$） $= 0$ 时等号成立。

结合推论 B、推论 D 和推论 G，我们可以立即得到有理正规曲线的割线簇的多种等价刻画，并将其汇总如下：推论 4.19 。

注 1.8. 有理正规曲线的次数为 ≥ 4 的割线簇是**有理数域**-因子化，这一事实也见于 [KPW25，引言],上述内容证明了逆命题。

为展示我们结果的适用范围，我们在$\mathbf{P}^2$ 的例 4.20中明确描述其割线簇的上同调和奇点不变量。

上述若干结果基于这样一个事实：变分 $\mathbf{V}^j$ 和$\mathbf{V}^j{}_{\mathrm{prim}}$ 具有平凡的单值化，我们将在下文的引理 4.2 中证明这一点。现在让我们强调这一结果的另一个重要推论。

任意紧复代数簇 X 都配备了交叉上同调 *Hirzebruch* 类$\mathrm{IT}_{y*}(X)$ 以及 *Goresky-MacPherson* L 类 $L_*(X$，其细节将在小节 2.3中回顾。人们在 [BSY10] 中提出猜想，认为霍奇指标定理的特征类版本应当成立，这相当于断言

$$\mathrm{IT}_{1*}(X) = L_*(X).$$

在同上引文。，这个猜想被归于 Cappell-Shaneson，我们证明如下 ：

定理 H (=定理 4.3)。如果L 是 *3*-非常丰的，割线簇满足 *Cappell-Shaneson* 猜想。

在**有理数域**-同调流形的情形，Cappell-Shaneson 猜想已在[dBPS22，定理 2]中被证明。割线簇若不是**有理数域**-同调流形，则与之相去甚远（见上文推论 B ）。在 [AMS25，例 1. 8], Aligholi-Maxim-Sch¨urmann 指出，Cappell-Shaneson 猜想对曲线的高阶割线簇也成立（以及许多其他例子），下面我们将讨论这一点。

曲线的高阶割线簇。 这里我们的假设如下：设 $C \hookrightarrow \mathbf{P}^N$是由一个（$2k-1$）-非常 ample 线丛$L$ 给出的光滑射影曲线的嵌入，其中 $k \geq 2$，这仅意味着任意长度为 $2k$ 的零维子概形对 L的截面施加独立条件。我们令 σ_k 表示 k阶割线簇。与前文一样，这是使 σ_k 不具有缺陷的最弱正性假设；此外，借助 Bertram 的 σ_k Terracini 递归[Ber92] ，我们得到了2.4.2小节中回顾的 σ_k 奇点消解的显式构造。我们还令 $q_k = N - \dim \sigma_k = N - (2k-1)$。

我们的第一个主要结果给出了局部上同调模的类似描述：

定理 I (= 定理 5.1)。 设 L 是 $(2k-1)$-非常 *ample*，并假设 $\sigma_k \neq \mathbf{P}^N$ 对某个$k \geq 2$成立。那么：

(1) **有理数域**$_{\sigma_k}[2k-1]$ 是中间延拓的（等价地，对数典范缺陷$(\sigma_k) = 0$） 。

(2) 我们有同构

$$\mathrm{Gr}^W_{2k-1-\ell}\mathbf{Q}^H_{\sigma_k}[2k-1] = \mathrm{Sym}^\ell(H^1(C)) \boxtimes \mathrm{IC}_{\sigma_{k-\ell}}$$

反之亦然

$$\mathrm{Gr}^W_{N+q_k+\ell}\mathcal{H}^{q_k}_{\sigma_k}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}) \cong \mathrm{Sym}^\ell(H^1(C)) \boxtimes \mathrm{IC}_{\sigma_{k-\ell}}(-q_k-\ell).$$

注 1.9。 在上述定理的假设下，我们看到，如果 σ_k 具有杜布瓦奇点，那么它就是科恩-麦考利的。这一点在 [ENP20，定理 1.2(1)]中得到证明，其所用的正性假设已被证明蕴含杜布瓦条件。（他们还证明了算术 科恩–麦考利性。）

利用 定理 I 中推导出的局部上同调描述，我们可以给出 $\mathcal{H}^{q_k}_{\sigma_k}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N})$ 上霍奇滤过的生成级别的上界。

推论 J (= 推论 5.20)。 假设 L 是 $(2k-1)$-非常丰，且 $\sigma_k \neq \mathbf{P}^N$ 其中$k \geq 2$。那么有

$$\mathrm{gl}(\mathcal{H}^{q_k}_{\sigma_k}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}, F)) \leq k-1,$$

因此，对于该对的任意对数消解 $f\colon(\widetilde{P}, E) \to \mathbf{P}^N$，（$\mathbf{P}^N, \sigma_k$），我们有

$$R^{q_k-1+i}f_*\Omega^{N-i}_{\widetilde{P}}(\log E) = 0 \ \textit{for all}\ i \geq k.$$

上述推论中的最后一条陈述是以下结果的推论： [MP22，定理 10。2]。

我们还能够计算曲线σ_k的高阶割线簇 C的 Hodge-Lyubeznik 数。由于 **有理数域** $_{\sigma_k}[2k-1]$ 总是根据定理 I为中间延拓的，通常的 Hodge-Lyubeznik 数并无意义。若$C \cong \mathbf{P}^1$, , 则 σ_k 是一个有理同调流形，因此在这种情况下，即使是相交Hodge-Lyubeznik数也没有意义。下面计算曲线亏格为正时的相交Hodge-Lyubeznik数:

定理 K (=定理 5.21)。 假设 C 是亏格为 $g > 0$ 的光滑射影曲线，且 L是一个$(2k-1)$-非常 ***ample*** 线丛，使得 $\sigma_k \neq \mathbf{P}^N$ 其中 $k \geq 2$。设 $x \in U_a = \sigma_a \setminus \sigma_{a-1}$，其中 $a \leq k-1$。那么，相交霍奇-柳贝兹尼克数$\mathrm{I}\lambda^r_{p,\ q}(\mathcal{O}_{\sigma_k,\ x})$ 只有在 $r \in [k+a-1, 2k-1]$ 时才可能非零，此时有

$$\mathrm{I}\lambda^r_{p,q}(\mathcal{O}_{\sigma_k,x}) = \begin{cases} \binom{g}{-p}\binom{g}{-q} & -p-q = 2k-1-r, p \in [-(2k-1-r), 0] \\ 0 & otherwise \end{cases}.$$

我们利用上述结果推出如下结论:

推论 L (= 推论 5.25)**.** 设 L 是 $(2k-1)$-非常丰，并假设 $\sigma_k \neq \mathbf{P}^N$ 对某个 $k \geq 2$。则下列条件等价:

(1) $C \cong \mathbf{P}^1$,*(2)* σ_ℓ 对某个（等价地对所有） $2 \leq \ell \leq k$是有理同调流形。

此外，假设 σ_k 是正规的。则上述任一条件与下列任一条件等价:

(3) σ_ℓ 对某个（等价地，对所有） $2 \leq \ell \leq k$具有有限的**有理数域**-因子化缺陷，*(4)* σ_ℓ 对某个（等价地，对所有） $2 \leq \ell \leq k$是**有理数域**-因子化的，*(5)* σ_ℓ 在某个（等价地，对所有） $2 \leq \ell \leq k$处的每一点 $y \in \sigma_l$ 都具有有限的局部解析**有理数域**-因子化缺陷，*(6)* σ_ℓ 对某个（等价地，对所有） $2 \leq \ell \leq k$都是局部解析**有理数域**-因子化的。

我们使用定理 定理 I 以及权重谱序列，来计算曲线高阶割线簇的奇异上同调。

定理 M (= 定理 5.37)。 假设 L 是 $(2k-1)$-非常丰，其中 $k \geq 2$ 且 $\sigma_k \neq \mathbf{P}^N$。对于 $0 \leq j \leq 4k-2$，有如下结论：

- 若 $w \leq k$，则

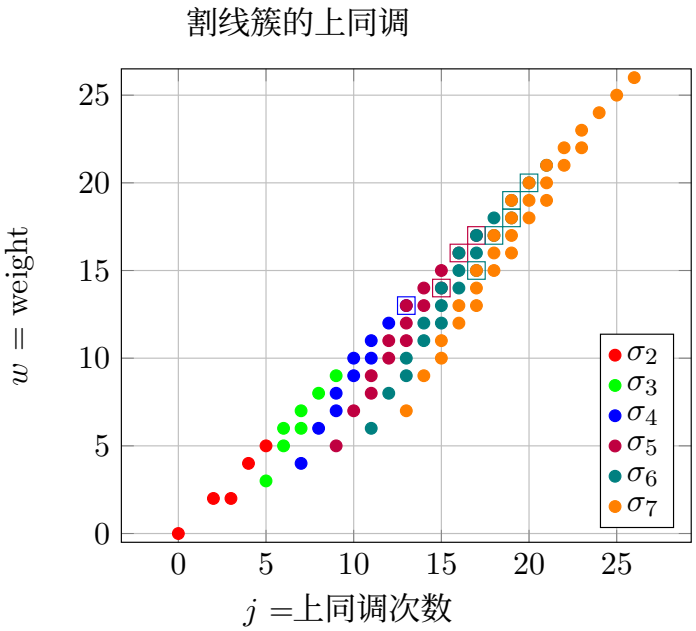
$$\mathrm{Gr}_w^W H^j_{\mathcal{M}}(\sigma_k) = \begin{cases} A^{\mathcal{M}}(-\frac{w}{2}) & j = w \text{ is even} \\ \mathrm{Sym}^k(H^1_{\mathcal{M}}(C)) & (w,j) = (k, 2k-1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

- 若 $w \geq k+1$，则

$$\mathrm{Gr}_w^W H^j_{\mathcal{M}}(\sigma_k) = \begin{cases} A^{\mathcal{M}}(-\frac{w}{2}) & j = w \text{ is even}, \ w \notin [3k-2, 4k-3] \\ A^{\mathcal{M}}(-\frac{w}{2}) \oplus \mathbf{S}_{1^{4k-w-2}}(2k-j-1) & j = w \text{ is even}, \ 3k-2 \leq w \leq 4k-3 \\ \mathbf{S}_{1^{4k-w-2}}(2k-j-1) & j = w \text{ is odd}, \ 3k-2 \leq w \leq 4k-3 \\ \mathbf{S}_{j-w+1,1^{2w+4k-3j-3}}(2k-j-1) & w \in [\frac{3}{2}j - 2k + \frac{3}{2}, 2j-3k+2], \ j > w \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

在上文中，$\mathbf{S}_\lambda$ 表示作用于 $H^1(C)$ 上、对应于分拆λ的舒尔函子。对于上文，当 $k = 3$时，我们还给出另一种证明，详见第 5 节。

下图展示了哪些上同调次数中存在非零权分量。某点周围的方框表示该处与另一割线簇的上同调存在重叠（由方框的颜色标示）。我们省略了偶上同调最高权中 $A^{\mathcal{M}}$ 因子的平凡重叠所对应的方框。



提纲。 在第 2 节中，我们回顾 Saito 理论中混合霍奇模与混合层的重要结果和定义。在此我们还回顾 [DOR25] 与 [CDO25] 的主要结果和定义。在接下来的第 3 节中，我们证明一个一般性结果

并研究其对 $c(X)$、$\mathrm{HRH}(X)$ 以及 Hodge-Lyubeznik 数的影响。第 4 节将这一一般结果应用于光滑射影簇 Y 的直线割线簇；该簇以适当的正方式嵌入射影空间。我们在本节证明 定理 A– 定理 H。最后，第 5 节讨论曲线的高阶割线簇。我们在本节证明 定理 I– 定理 M。

致谢。 我们感谢 Bhargav Bhatt、Daniel Brogan、Hyunsuk Kim、Laurent¸iu Maxim、Mircea Mustaţ˘a、Jinhyung Park、Sung Gi Park、Mihnea Popa、Christian Schnell、Rosie Shen、Lei Song、Sridhar Venkatesh、Duc Vo 以及 Jakub Witaszek 就本工作进行的多次讨论。

2. Preliminaries

在本节中，我们回顾混合霍奇模理论、混合层以及割线簇几何的相关方面。我们将不加回顾地使用代数 $\mathcal{D}$-模的基本理论（参见 [HTT08]）。

2.1. **混合层**。 Morihiko Saito 的混合霍奇模理论 [Sai88，Sai90] 给出了一套类似于 ℓ-进可构造层上那些权（对于特征为 p 的簇，利用弗罗贝尼乌斯算子的特征值 [Del80，BBDG83]）的权理论，用于复代数簇上的某些可构造复形。例如，任何可容许的 **有理数域**上混合霍奇结构的变异，都在 Saito 理论中定义一个对象。

对于任意复代数簇 X，存在一个定义在 X上的混合霍奇模阿贝尔范畴 $\mathrm{MHM}(X)$。这些阿贝尔范畴的导出范畴满足六函子形式体系：我们有函子 $\mathbf{D}$ $\otimes$，并且对于任意 $f\colon X_1 \to X_2$，我们有 f_*，$f_!$，f^*，$f^!$，它们满足熟知的相容性（例如伴随和基变换）。存在一个到可构造有理数域$\mathbf{Q}$-复形的遗忘函子，而这些函子与相应的$\mathbf{Q}$-可构造层次上的函子一致。由六函子可知，任何具有几何来源的对象都可通过 Saito 理论赋予混合霍奇模结构。

此后不久，Saito 定义了“混合层理论” [Sai91, Sai01],的一般概念，这是对 Beilinson 关于混合动机层的猜想性理论 [Be˘i87]所需某些性质的公理化。设 k 是一个可嵌入 C 的特征为 0 的域（我们固定一个这样的嵌入 $k \hookrightarrow \mathbf{C}$），并设 A 是 R 的一个子域。令 $\mathcal{V}$ 表示所有 k-簇构成的范畴。定义在 $\mathcal{V}$ 上的 A-混合层理论，是指对每个 $X \in \mathcal{V}$，关联一个A-线性阿贝尔范畴 $\mathcal{M}(X)$，并配备遗忘函子 $\mathrm{For}\colon \mathcal{M}(X) \to \mathrm{Perv}(X^{\mathrm{an}}_{\mathbf{C}}, A)$，其中$X_{\mathbf{C}} = X \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(\mathbf{C})$，而$(-)^{\mathrm{an}}$ 表示相应的复解析空间，且满足以下性质：

(1) 函子 For 是忠实且正合的，(2) $\mathrm{For}(M)$ 是 k-可构造且准幺幂的，(3) 每个 $M \in \mathcal{M}(X)$ 都存在有限递增的权滤过 $W_\bullet M$，使得 $\mathcal{M}(X)$ 中的每个态射都相对于 $W_\bullet$ 严格相容，(4) 对所有 $i \in$**整数环**，相关分次项 $\mathrm{Gr}^W_i M$ 均为半单的，

并满足六函子形式体系的一些基本相容性 [Sai91，（1.2）—（1.6）]。文献同上的主要内容是证明，这些相容性以及倾斜层上的六函子形式体系，足以说明任何 A-混合层理论都满足完整的六函子形式体系，并且在此形式体系中，权具有预期的性质。

我们用 $\mathcal{M}(X)^{\mathrm{go}}$ 表示几何来源对象构成的全子范畴：它是对上同调函子 $\mathcal{H}^i f_*(-)$ $\mathcal{H}^i f_!(-)$ $\mathcal{H}^i g^*(-)$ $\mathcal{H}^i g^!(-)$ 保持稳定的最小全子范畴，其中 $f\colon Z \to X$ 和 $g\colon X \to Y$ 是 k-簇之间的态射；该范畴对取子商（包括同构）保持稳定，并且满足 $A^{\mathcal{M}} \in \mathcal{M}(\mathrm{Spec}(k))^{\mathrm{go}}$。对于任意的 A-混合层理论$\mathcal{M}(-)$，我们得到一个 A-混合层子理论 $\mathcal{M}(-)^{\mathrm{go}}$。

例 2.1。Saito 给出了许多有趣的例子 [Sai91，例 1.8]，超越了 MHM(X, A) 的范畴。我们最感兴趣的例子是 [Sai91，例 1.8(iii)]：假设k 是一个数域，并令 $k \subseteq \mathbf{C}$ 为 k 在 $\mathbf{C}$ 中的代数闭包。令 $X = X \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(k)$，并对任意素数 ℓ，考虑 G-等变的 $\mathbf{Q}_\ell$-中间延拓 ´étale 层范畴 $\mathrm{Perv}_G(X, \mathbf{Q}_\ell)$，其中 $G = \mathrm{Gal}(k/k)$。它带有典范比较函子

$$\mathrm{Perv}_G(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell) \to \mathrm{Perv}(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{Q}_\ell).$$

我们有由 MHM($X_{\mathbf{C}}$，**有理数域**) 与 $\mathrm{Perv}_G(X$，**有理数域**$_\ell)$ 在 Perv($X_{\mathbf{C}}$，**有理数域**$_\ell$) 上的纤维积给出的**有理数域**-混合层理论。G-等变的**有理数域**$_\ell$-中间延拓层也应当具有有限滤过 $W_\bullet$，并且这些滤过与比较映射下混合霍奇模上的 $W_\bullet$ 相容。

也可以考虑 [Sai91，例 1.8(v)] 通过改变所有可能的嵌入 $k \hookrightarrow$ **曲线 C**，改变代数闭包的嵌入 $k \hookrightarrow$ **曲线 C** 并改变 ℓ。最后，在上述任一情形中，都可以考虑由几何起源对象定义的子理论，这是值得牢记的主要例子。

遗忘函子在导出范畴上诱导出相应的函子：

$$D^b(\mathcal{M}(X)) \to D^b_{\mathrm{cons}}(X, A).$$

它们不再是忠实函子，但它们是保守的：对象 $M^\bullet \in D^b(\mathcal{M}(X))$ 为 0，当且仅当 For($M^\bullet$) $= 0$。此外，我们有

$$\mathrm{For} \circ \mathcal{H}^j = {}^p\mathcal{H}^j \circ \mathrm{For} \text{ for all } j \in \mathbf{Z}.$$

我们将对象 $M^\bullet \in D^b(\mathcal{M}(X))$ 的支集 定义为 For($M^\bullet$) 的支集。根据 k-可构造性的假设，Supp($M^\bullet$) 是 X 的一个 k-子簇。

我们称对象 M 为权为 w 的纯对象，如果 $\mathrm{Gr}_i^W M \neq 0$蕴含 $i = w$，因此可见，纯对象是半单的。我们用 $\mathcal{M}(X,\ w)$ 和 $\mathcal{M}(X,\ w)^{\mathrm{go}}$ 表示权为 w的对象构成的满子范畴。

例 2.2. 在任意 A-混合层理论中，我们都有如下泰特扭曲函子：令 $A(-1) = \mathcal{H}^2\kappa_* A^{\mathcal{M}}_{\mathbf{P}^1}$，其中 $\kappa\colon \mathbf{P}^1_k \to \mathrm{Spec}(k)$ 是结构态射。定义 $A(1) = \mathbf{D}^{\mathrm{Spec(k)}}(A(-1))$，并通过对 $A(1)$ 取张量积（当 $n > 0$ or$A(-1)$（当 $n < 0$）），递归定义 $A(n)$。

然后，通过等同 $X \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(k) \cong X$，我们定义

$$M(k) = M \boxtimes A^{\mathcal{M}}(k) \text{ for any } M \in \mathcal{M}(X), k \in \mathbf{Z}.$$

如果 M 是权为 w 的纯对象，那么 $M(k)$ 是权为 $w - 2k$ 的纯对象。

例 2.3. 在任意 $X \in \mathcal{M}(X)$ 上，我们都有常值层 $A^{\mathcal{M}}_X = \kappa^*(A)$，其中 $\kappa\colon X \to$Spec(k) 是结构态射。我们有 For($A^{\mathcal{M}}_X$) $= A_X$。

若 X 光滑且等维，则 $A_X^{\mathcal{M}}[\text{维数 } X] \in \mathcal{M}(X)$ 是权为 $\dim X$ 的纯对象，并且我们有同构 [Sai91，命题 4.3]:

$$\mathbf{D}_X(A_X^{\mathcal{M}}[\dim X]) \cong A_X^{\mathcal{M}}[\dim X](\dim X). \tag{1}$$

注 2.4。正如符号所示，倾向于使用霍奇模的读者可以通过将 A 替换为**有理数域**，并将符号 $\mathcal{M}$ 替换为 H，来阅读本文中的论证和结果。

例 2.5。与混合霍奇模的情形一样，[Sai90, (4.5.9)], 我们可以将 $\mathcal{H}^{\dim X}A_X^{\mathcal{M}}$ 的最高权与交叉复形对应起来：若 U 是 X 的最大光滑开子集，且 X 具有纯维数 $\dim j$： $U \to X$，则有

$$\mathrm{Gr}^W_{\dim X}\mathcal{H}^{\dim X}A_X^{\mathcal{M}} = j_{!*}(A_U^{\mathcal{M}}[\dim X]) = \mathrm{IC}_{X'}^{\mathcal{M}},$$

其中 $X' \subseteq X$ 是 U 的闭包；或者说，它是 X 的最大维数不可约分支之并。这里 $j_{!*}(-) = \mathrm{Im}(\mathcal{H}^0 j_!(-) \to \mathcal{H}^0 j_*(-))$ 按照标准方式通过六函子定义。因此，函子 $j_{!*}(-)$ 与对偶交换。结合同构 (1)（应用于光滑等维簇 U），我们得出

$$\mathbf{D}_X(\mathrm{IC}_{X'}^{\mathcal{M}}) \cong \mathrm{IC}_{X'}^{\mathcal{M}}(\dim X). \tag{2}$$

若 X 是等维的，我们考虑态射 $A_X^{\mathcal{M}}[\dim X] \to$ 交叉复形$_X^{\mathcal{M}}$。通过对该态射取对偶（并进行泰特扭曲），我们得到典范态射

$$\psi_X \colon A_X^{\mathcal{M}}[\dim X] \to \mathbf{D}_X(A_X^{\mathcal{M}}[\dim X])(-\dim X).$$

我们为该态射的目标赋予一个名称：

$$\mathbf{D}_X^{\mathcal{M}} = \mathbf{D}_X(A_X^{\mathcal{M}}[\dim X])(-\dim X),$$

它满足以下拉回规则：对于任意态射 $f\colon X \to Y$，有

$$f^!(\mathbf{D}_Y^H) = \mathbf{D}_X^H(\dim X - \dim Y)[\dim X - \dim Y]. \tag{3}$$

任意 A-混合层理论都满足关于六函子的权形式体系。具体而言，若一个对象 $M^\bullet \in D^b(\mathcal{M}(X))$ 是权为 $\geq w$（分别为 权为 $\leq w$）的混合对象，当 $\mathrm{Gr}^W_{i+j}\mathcal{H}^i M^\bullet \neq 0$ 蕴含 $j \geq w$（分别蕴含 $j \leq w$）时。这样的对象称为权为 w 的纯对象，若它是权为 $\geq w$ 和权为 $\leq w$ 的混合对象。纯对象总能在导出范畴中分解（非典范地）：若 $M^\bullet$ 是权为 w 的纯对象，则存在一个同构（[Sai91，命题 6.8]）

$$M^\bullet \cong \bigoplus_{i\in\mathbf{Z}} \mathcal{H}^i M^\bullet[-i] \text{ in } D^b(\mathcal{M}(X)). \tag{4}$$

定理 2.6 ([Sai91, 定理 6.7])。设 $f\colon X \to Y$ 和 $g\colon Z \to X$ 是 k-簇之间的态射。

若 $M^\bullet \in D^b(\mathcal{M}(X))$ 是权为 $\geq w$（分别是权为 $\leq w$）的混合对象，那么 $f_*M^\bullet, g^!M^\bullet$（分别是 $f_!M^\bullet, g^*M^\bullet$）也如此。

特别地，若 f 是真（因此 $f_! \cong f_*$），且 $M^\bullet$ 是权为 w 的纯对象，那么 $f_!M^\bullet = f_*M^\bullet$ 也是如此。

定理 2.6 蕴含：在任何关于 A-混合层的理论中，分解定理的类似结果成立：

命题 2.7 （[Sai91，命题 6.9]）。设 $f\colon X \to Y$ 是 k-簇的真态射，并设 $M^\bullet \in D^b(\mathcal{M}(X))$ 为权 w 的纯层。则

$$f_*M^\bullet \cong \bigoplus_{i\in\mathbf{Z}} \mathcal{H}^i f_*M^\bullet[-i].$$

事实上，如果我们只考虑几何起源对象（这对我们的情形已足够）和射影态射，那么相对硬 Lefschetz 定理成立。

定理 2.8 ([Sai91, 命题 7。4]). 设 $f\colon X \to Y$ 是一个 k-簇之间的射影态射，并设 $\ell \in H^2(X_{\mathbf{C}}, A)$ 是一个 f-相对丰沛线丛的第一陈类。那么对于$M \in \mathcal{M}(X,w)^{\mathrm{go}}$ 和 $j>0$，我们有一个同构

$$\ell^j\colon \mathcal{H}^{-j}f_*M \cong \mathcal{H}^j f_*M(j) \ in\ \mathcal{M}(Y, w-j)$$

根据其应　用 $\mathrm{For}(-)$，这与相应的 A-中间延拓的倾斜层之间的同构一致　　.

形式上，这意味着，对几何起源的纯对象作射影推前时，存在 Lefschetz 分解。采用 定理 2.8的记号，对 $j\geq 0$，我们定义：

$$(\mathcal{H}^{-j}f_*M)_{\mathrm{prim}} = \ker(\ell^{j+1}\colon \mathcal{H}^{-j}f_*M \to \mathcal{H}^{j+2}f_*M).$$

推论 2.9. 沿用定理 *2.8*的设定，我们对所有Lefschetz 分解都有 $j\geq 0$:

$$\mathcal{H}^{-j}f_*M \cong \bigoplus_{a\geq 0} (\mathcal{H}^{-j-2a}f_*M)_{\mathrm{prim}}(-a)$$
$$\mathcal{H}^{j}f_*M \cong \bigoplus_{a\geq 0} (\mathcal{H}^{-j-2a}f_*M)_{\mathrm{prim}}(-j-a).$$

最后，设 X 是一个等维的 k-簇， $\kappa\colon X \to \mathrm{pt}$ 为结构态射。我们将 X 的 $\mathcal{M}$-上同调定义为

$$H^j_{\mathcal{M}}(X) = \mathcal{H}^j\kappa_* A^{\mathcal{M}}_X,\ H^j_{\mathcal{M},c}(X) = \mathcal{H}^j\kappa_! A^{\mathcal{M}}_X,$$

并将 X 的交叉上同调定义为

$$\mathrm{IH}^{j+\dim X}_{\mathcal{M}}(X) = \mathcal{H}^j\kappa_*\mathrm{IC}^{\mathcal{M}}_X,\ \mathrm{IH}^{j+\dim X}_{\mathcal{M},c}(X) = \mathcal{H}^j\kappa_!\mathrm{IC}^{\mathcal{M}}_X.$$

后者通过同构（′2）满足庞加莱对偶性:

$$\mathrm{IH}^{\dim X+j}_{\mathcal{M}}(X)^\vee \cong \mathrm{IH}^{\dim X-j}_{\mathcal{M},c}(X)(-j).$$

若 X 是射影的，则交叉上同调也满足硬 Lefschetz 定理：设 $\ell \in H^2(X,\ A)$ 为一个丰沛线丛的第一陈类。那么对所有 $j>0$，都有同构

$$\ell^j\colon \mathrm{IH}^{\dim X-j}_{\mathcal{M}}(X) \cong \mathrm{IH}^{\dim X+j}_{\mathcal{M}}(X)(j).$$

此外，定义

$$\mathrm{IH}^{\dim X-j}_{\mathcal{M},\mathrm{prim}}(X) = \ker(\ell^{j+1}\colon \mathrm{IH}^{\dim X-j}_{\mathcal{M}}(X) \to \mathrm{IH}^{\dim X+j+2}_{\mathcal{M}}(X)),$$

于是，对于所有 $j\geq 0$，我们都有 Lefschetz 分解:

$$\mathrm{IH}^{\dim X-j}_{\mathcal{M}}(X) = \bigoplus_{a\geq 0} \mathrm{IH}^{\dim X-j-2a}_{\mathcal{M}}(X)(-a),$$
$$\mathrm{IH}^{\dim X+j}_{\mathcal{M}}(X) = \bigoplus_{a\geq 0} \mathrm{IH}^{\dim X-j-2a}_{\mathcal{M}}(X)(-j-a).$$

2.2. **霍奇滤过与霍奇理论奇点不变量**。对于奇点的应用，我们将取 $k=$**曲线 C** $A=$**有理数域** 以及 $\mathcal{M}(X)$ $=$混合霍奇模$(X,$ **有理数域**$)$。我们提醒读者注意这一设定中的一些重要结果。

在光滑簇 Z 上，混合霍奇模由以下数据组成：$((\mathcal{M},\ F,\ W),\ (\mathcal{K},\ W)\ \alpha)$，其中 $(\mathcal{M},\ F,\ W)$ 是一个双滤过左 $\mathcal{D}_Z$-模（$F_\bullet\mathcal{M}$ 是一个良好的“霍奇”滤过，与微分算子的阶滤子相容；$W_\bullet\mathcal{M}$ 是一个由子 $\mathcal{D}_Z$-模构成的有限“权”滤过），$(\mathcal{K},\ W)$ 是 Z^{an} 上一个有限滤过的 **有理数域**-层，并且

$$\alpha\colon \mathrm{DR}_Z(\mathcal{M},W)\to(\mathcal{K},W)\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{C}$$

是 **曲线 C**-层之间的滤过同构。这些数据须满足许多条件，此处不予说明。

例2.10。 回顾一下，在光滑簇 Z 上， $\mathcal{D}_Z$-模的德拉姆复形 定义为

$$\mathrm{DR}_Z(\mathcal{M})=[\mathcal{M}\xrightarrow{\nabla}\Omega_Z^1\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{M}\xrightarrow{\nabla}\ldots\xrightarrow{\nabla}\omega_Z\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{M}],$$

其上同调次数为 $-\dim\ Z$，.....，0，其中 ∇ 是由 $\mathcal{D}_Z$-模结构定义的联络。若 $(\mathcal{M},\ F)$ 带有滤过，则可得到一个滤过

$$F_p\mathrm{DR}_Z(\mathcal{M})=[F_p\mathcal{M}\xrightarrow{\nabla}\Omega_Z^1\otimes_{\mathcal{O}}F_{p+1}\mathcal{M}\xrightarrow{\nabla}\ldots\xrightarrow{\nabla}\omega_Z\otimes F_{p+\dim Z}\mathcal{M}],$$

其中，根据莱布尼茨法则，微分不是 $\mathcal{O}_Z$-线性的。然而，若考察伴随分次复形 $\mathrm{Gr}_p^F\mathrm{DR}_Z(\mathcal{M})$，则微分是 $\mathcal{O}_Z$-线性的，且每一项都是 $\mathcal{O}_Z$-相干的，这意味着我们有

$$\mathrm{Gr}_p^F\mathrm{DR}_Z(\mathcal{M})\in D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_Z).$$

利用光滑簇中的局部嵌入，我们可以在任意复簇 X 上定义混合霍奇模范畴。对于任意 $M\in$MHM(X)，都有定义良好的对象 $\mathrm{Gr}_p^F\mathrm{DR}(M)\ \in D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_X)$。

引理2.11 ([Sai88, 第 2 节。3])。 设 $f\colon X\to Y$是复代数簇之间的一个真态射。那么，对于任意 $M\in D^b$(混合霍奇模$(X))$ 以及 $p\in$**整数环**，存在一个自然同构

$$Rf_*\mathrm{Gr}_p^F\mathrm{DR}_X(M)\cong\mathrm{Gr}_p^F\mathrm{DR}_Y(f_*M).$$

注 2.12。 代数簇上的纯霍奇模按定义是可极化的：若M 是权 w 的纯对象，则存在一个同构

$$\mathbf{D}(M)\cong M(w).$$

我们在上文的同构 (1) 和同构 (2) 中见过类似的现象。

如上所述，可容许混合霍奇结构变分给出了光滑簇 Z 上混合霍奇模的例子。特别地，任意纯可极化霍奇结构变分（VHS）都会给出一个纯霍奇模，尽管其权会发生平移：若$\mathbf{V}$ 是权为 w 的纯可极化 VHS，那么将其视为霍奇模时，它是一个权为 $w+\dim Z$ 的纯霍奇模。

此外，如上所述，混合霍奇模的（导出）范畴满足六函子形式体系。我们将用到对偶、推前和拉回函子。

例 2.13. 我们通过一个较易理解的例子来说明拉回函子。下面我们还会多次用到这一结果。

设$\mathbf{V}$ 是光滑簇Z 上的权为 w 的纯可极化霍奇结构变分（确定一个权为 $w+\dim Z$的纯可极化霍奇模，仍以同一符号表示）。

若 $x\in Z$ 是一点，且闭嵌入 $\iota_x\colon \{x\}\to Z$，则

$$\iota_x^*\mathbf{V}\in D^b(\mathrm{MHS})$$

实际上只有一个非消失的上同调： $\mathcal{H}^{-\text{维数}\,Z}\iota_x^*\mathbf{V}\cong\mathbf{V}_x$，即 x 处霍奇结构变分的纤维。

为了计算 $\iota_x^!\mathbf{V}$，我们写作

$$\iota_x^!\mathbf{V}=\mathbf{D}\iota_x^*\mathbf{D}(\mathbf{V}),$$

根据可极化性，这与下式同构：

$$\mathbf{D}(\iota_x^*\mathbf{V}(w+\dim Z))=\mathbf{D}(\mathbf{V}_x[\dim Z])(-w-\dim Z),$$

最后，再取一次对偶（利用霍奇结构 $\mathbf{V}_x$ 的可极化性），得到

$$\iota_x^!\mathbf{V}\cong\mathbf{V}_x(-\dim Z)[-\dim Z].$$

稍后我们将用到以下标准结果。霍奇滤过指标中平移 $+\dim Z$，源于伴随分次德拉姆复形的指标编排；这是因为我们使用的是滤过左 $\mathcal{D}_Z$-模。

引理 2.14。设 $(\mathcal{M},F)$ 是光滑簇 Z 上的一个滤过 $\mathcal{D}_Z$-模。那么 $F_{k+\dim Z}\mathcal{M}=0$ 当且仅当对所有 $p\le k$，都有 $\mathrm{Gr}_p^F\mathrm{DR}_Z(\mathcal{M})=0$。

例 2.15。作为如何计算 $\mathrm{Gr}_p^F\mathrm{DR}(\mathcal{M})$ 的示例，我们再一次考察光滑簇 Y 上的一个（可能是混合的）霍奇结构变分 $\mathbf{V}$。此外，我们假设$\mathbf{V}$ 具有平凡的单值化，因此

$$\mathbf{V}\cong H\boxtimes\mathbf{Q}_Y^H[\dim Y]$$

对于某个混合霍奇结构 H。鉴于下文的引理 4.2，这个例子很有意义。

本质上根据定义，我们有一个同构

$$\mathrm{Gr}_i^F\mathrm{DR}(\mathbf{V})\cong\bigoplus_{a+b=i}\mathrm{Gr}_a^FH\boxtimes\mathrm{Gr}_b^F\mathrm{DR}(\mathbf{Q}_Y^H[\dim Y])\cong\bigoplus_b\mathrm{Gr}_{i-b}^FH\boxtimes\Omega_Y^{-b}[\dim Y+b],$$

因此，若取 $\mathcal{H}^{-\ell}(-)$，便得到

$$\mathcal{H}^{-\ell}\mathrm{Gr}_b^F\mathrm{DR}(\mathbf{Q}_Y^H[\dim Y])\cong\mathrm{Gr}_{i+\dim Y-\ell}^FH\boxtimes\Omega_Y^{\dim Y-\ell}. \tag{5}$$

事实上，对于任意形如 $H\boxtimes M$ 的对象，其中 M 是定义在 Y 上的混合霍奇模，我们有公式（[DOR25，（6.15）]）

$$\mathrm{Gr}_i^F\mathrm{DR}(H\boxtimes M)=\bigoplus_{a+b=i}\mathrm{Gr}_a^FH\boxtimes\mathrm{Gr}_b^F\mathrm{DR}(M). \tag{6}$$

对象$\mathbf{D}_X^H$ 与局部上同调密切相关，以下标准引理说明了这一点。

引理 2.16 ([CDO25, 引理 2.3])。设 $i\colon X\to Y$ 是余维为纯数 c的闭嵌入，其中 Y 是光滑的。那么存在一个自然同构，将底层为混合霍奇模的双滤过 $\mathcal{D}_Y$-模

$$i_*\mathcal{H}^j\mathbf{D}_X^H(-c)\cong(\mathcal{H}_X^{c+j}(\mathcal{O}_Y),F,W),$$

其中右侧的对象是结构层 $\mathcal{O}_Y$ 沿着 X的局部上同调双滤过 $\mathcal{D}_Y$-模。

光滑簇 Y 上混合霍奇模所对应的滤过（左） $\mathcal{D}_Y$-模（$\mathcal{M}$, F）上的霍奇滤过相对于微分算子的阶滤子是良好的，这意味着存在某个 k 使得

$$F_{k+j}\mathcal{M} = F_j\mathcal{D}_Y \cdot F_k\mathcal{M} \text{ for all } j \geq 0.$$

定义 2.17。我们将（$\mathcal{M}$, F）的生成层级定义为

$$\mathrm{gl}(\mathcal{M}, F) = \min\{k \mid F_{k+j}\mathcal{M} = F_j\mathcal{D}_Y \cdot F_k\mathcal{M} \text{ for all } j \geq 0\},$$

这与 [Sai09] 中的定义相差一个 p（$\mathcal{M}$） $=$ 最小$\{p \mid F_p\mathcal{M} \neq 0\}$。

生成层级衡量模（$\mathcal{M}$, F）上霍奇滤过的复杂程度。给出生成层级的界，有助于在某些情形下论证消失，参见 [MP22，推论 11。6]。

生成层级有如下标准公式：

引理 2.18 ([MP22, 引理 10.1])。 设 $(\mathcal{M}, F)$ 是一个滤过的左 $\mathcal{D}_Y$-模。则

$$\mathrm{gl}(\mathcal{M}, F) = \max\{k \mid \mathcal{H}^0\mathrm{Gr}^F_{k-\dim Y}\mathrm{DR}(\mathcal{M}) \neq 0\}.$$

分解定理给出了以下关于交叉复形 IC_X 的生成层级的简单上界，该上界以奇点消解为依据。

引理 2.19。 设 $i\colon X \to Y$ 是一个纯余维为 c 的闭嵌入，且 Y 光滑。~设 $f\colon \widetilde{X} \to X$ 是一个奇点消解。则

$$\mathcal{H}^0\mathrm{Gr}^F_{q-\dim Y}\mathrm{DR}(i_*\mathrm{IC}_X) = 0 \text{ for all } q > \max\{\ell \mid R^\ell f_*\Omega^{\dim X-\ell}_{\widetilde{X}} \neq 0\} + c.$$

特别地，若 $\eta = \max\{\text{维数 } f^{-1}(p) \mid p \in X\}$，则对所有 $q > \eta + c$，消失均成立，并且我们得到 $\mathrm{gl}(i_*\text{交叉复形}_X(-c)\ F) \leq \eta$。

证明。 根据分解定理，交叉复形 IC^H_X是在导出范畴中 f_***有理数域**$^H_{\widetilde{X}}$[维数 X] 的一个直和项。因此，所述消失可由 f_***有理数域**$^H_{\widetilde{X}}$[维数 X]的相同消失推出。由引理2.11，我们有如下同构

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^0\mathrm{Gr}^F_{q-\dim Y}\mathrm{DR}f_*\mathbf{Q}^H_{\widetilde{X}}[\dim X] &= \mathcal{H}^0Rf_*\mathrm{Gr}^F_{q-\dim Y}\mathrm{DR}(\mathbf{Q}^H_{\widetilde{X}}[\dim X]) \\ &= R^{q-c}f_*\Omega^{\dim X-(q-c)}_{\widetilde{X}},\end{aligned}$$

这就证明了第一个断言。

由 f 的射影性以及 Ω 的凝聚性$^{\dim X-(q-c)}_{\widetilde{X}}$，根据 [Har77，推论 III.11[2]]，我们得知这种消失对于 $q - c > \eta$是自动成立的。最后一个断言随即由此消失直接得出。 □

我们提醒读者注意与等维簇Z相关的两个奇点不变量，它们定义于 [DOR25、CDO25]。它们是对以下性质的霍奇理论弱化：$\mathbf{Q}_Z$[维数 Z] 是一个（半单）中间延拓的层。回顾一下，Z称为有理同调流形 （RHM），如果自然态射

$$\mathbf{Q}_Z[\dim Z] \to \mathrm{IC}_Z$$

是一个拟同构。换言之，若 $K_Z^\bullet \in D_c^b(\mathbf{Q}_Z)$ 是该态射的移位锥（在 *RHM* 缺陷对象 中称为 [PP24]，我们沿用其术语），则给出正合三角

$$K_Z^\bullet \to \mathbf{Q}_Z[\dim Z] \to \mathrm{IC}_Z \xrightarrow{+1},$$

那么 Z 是 RHM 当且仅当 $K_Z^\bullet = 0$。我们也将 $K_Z^\bullet$ 记作混合霍奇模 $D^b(\mathrm{MHM}(Z))$ 的导出范畴中的锥。根据定义，$\mathbf{Q}_Z[\text{维数 } Z]$ 是一个层，当且仅当 ${}^p\tau^{<0}\mathbf{Q}_Z[\text{维数 } Z] = 0$，此时我们称 Z 是上同调完全交 (CCI)。

霍奇模理论不要求这些对象消失，而是允许我们考虑仅满足部分消失条件的簇。

定义 2.20。设 Z 是一个等维簇。令

$$c(Z) = \sup\{k \mid \mathrm{Gr}_{-p}^F \mathrm{DR}(\tau^{<0}\mathbf{Q}_Z^H[\dim Z]) = 0 \text{ for all } p \le k\},$$

and

$$\mathrm{HRH}(Z) = \sup\{k \mid \mathrm{Gr}_{-p}^F \mathrm{DR}(\mathcal{K}_Z^\bullet) = 0 \text{ for all } p \le k\}.$$

由于 $\tau^{<0}\mathbf{Q}_Z^H[\text{维数 } Z] = \tau^{<0}\mathcal{K}_Z^\bullet$，不难看出 $\mathrm{HRH}(Z) \le c(Z)$。条件 $\mathrm{HRH}(Z) \ge k$ 等价于 D_k 关于 [PP24]的条件。

许多例子都满足部分消失条件（[DOR25，第 E 节], [CDO25]），并且该条件蕴含了一些理想的性质，现总结如下。

命题 2.21. 设 Z 是一个等维簇。那么

(1) $\mathrm{HRH}(Z) \ge k$ 当且仅当对所有 $x \in Z$，x 处的局部上同调满足 $F^{\text{维数}-k}H^\bullet_{\{x\}}(Z) = 0$ 对于 $\bullet \le 2$ 维数 Z 成立，而对于 $\bullet = 2$ 维数 Z，则满足**曲线 C**。

(2) 若 $\mathrm{HRH}(Z) \ge k$，则对所有 $j \in$ **整数环**，自然映射

$$F^{\dim Z-k}H^{\dim Z-j}(Z) \to F^k(H_c^{\dim Z+j}(Z)^\vee)$$

是一个同构。

(3) $c(Z) \ge k$ 当且仅当对所有 $p \le k$，深度 $\Omega_Z^p \ge$ 维数 $Z - p$。

将 $k = +\infty$应用于上述结果，我们分别得到 Brion 对有理同调流形的刻画 [Bri99], 有理同调流形满足庞加莱对偶这一事实，以及 Mustaţă-Popa 关于 [MP22, 推论 12.6]CCI 簇的结果。

注 2.22。若 Z 具有 LCI 奇点，则它具有 k-有理奇点，当且仅当它具有 k-杜布瓦奇点且 $\mathrm{HRH}(Z) \ge k$。当然，在此情形下，$c(Z) = +\infty$。

定义2.23。设 $i\colon Z \to Y$ 是一个纯余维为 c的闭嵌入，其中 Y 是光滑的。我们定义不变量

$$w(Z) := \max\{k \ge 0 \mid F_pW_{\dim Y+c}\mathcal{H}_Z^c(\mathcal{O}_Y) = F_p\mathcal{H}_Z^c(\mathcal{O}_Y) \text{ for all } p \le k\}$$

约定若上述集合为空，则 $w(Z) = -1$。

根据 [DOR25，定理B]，我们有等式 $\mathrm{HRH}(Z) =$ 最小值 $\{c(Z)\ w(Z)\}$。

注 2.24。不变量 w 与闭嵌入的选取无关。事实上，由 引理 2.16，我们可得

$$w(Z) = \sup\{k \mid \mathrm{Gr}_{-p}^F \mathrm{DR}(\mathcal{H}^0\mathcal{K}_Z^\bullet) = 0 \text{ for all } p \le k\}.$$

我们称正规簇 Z 为弱有理，如果层 ω_Z^{GR}是自反的，或者等价地，它与 $\omega_Z = \mathcal{H}^{-\text{维数}}{}^Z\omega_Z^\bullet$一致，其中 $\omega_Z^\bullet$是对偶化复形。这里 ω_Z^{GR}是˜Grauert-Riemenschneider层，其定义为 $f_*\omega_{\tilde{Z}}$，其中 $f\colon Z \to Z$ 是一个消解。下一个结果通过局部上同调上的滤过刻画性质 $\omega_Z^{GR} = \omega_Z$。回忆一下，“Ext”滤过 $E_\bullet\mathcal{H}_Z^q(\mathcal{O}_X)$ 是利用 Ext 描述定义的：

$$\mathcal{H}_Z^q(\mathcal{O}_X) = \varinjlim_p \mathcal{E}xt^q(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Z^{p+1}, \mathcal{O}_X),$$

其中 $\mathcal{J}_Z$ 是 X中 Z 的理想层，滤过定义为

$$E_\bullet\mathcal{H}_Z^q(\mathcal{O}_X) = \mathrm{Im}\left[\mathcal{E}xt^q(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Z^{\bullet+1}, \mathcal{O}_X) \to \mathcal{H}_Z^q(\mathcal{O}_X)\right].$$

命题2.25。设 Z 是一个等维簇，且 $i\colon Z \to Y$ 嵌入到一个光滑的 n维簇 Y中。记余维为 c。那么，$\omega_Z^{GR} = \omega_Z$ 当且仅当

$$F_0W_{n+c}\mathcal{H}_Z^c(\mathcal{O}_Y) = E_0\mathcal{H}^c(\mathcal{O}_Y). \tag{7}$$

特别 殊地，若 Z 具有杜布瓦奇点，则 $\omega_Z^{GR} = \omega_Z$ 当且仅当 $w(Z) \geq 0$.

证明。我们有 $\mathrm{gr}_{-n}^F\mathrm{DR}(W_{n+c}\mathcal{H}_Z^c(\mathcal{O}_Y)) = F_0W_{n+c}\mathcal{H}_Z^c(\mathcal{O}_Y)\otimes\omega_Y \cong \omega_Z^{\mathrm{GR}}$ [KS21，命题 8。2]此外，根据 Grothendieck对偶，我们有

$$\mathcal{R}\mathcal{H}om(i_*\mathcal{O}_Z, \omega_Y[n]) \cong \mathcal{R}\mathcal{H}om(\mathcal{O}_Z, \omega_Z^\bullet) \cong \omega_Z^\bullet.$$

因此，$E_0\mathcal{H}^c(\mathcal{O}_Y)\otimes\omega_Y = \mathcal{E}xt^c(\mathcal{O}_Z, \omega_Y) \cong \mathcal{H}^{-\dim Z}(\omega_Z^\bullet) = \omega_Z$（见 [MP22，注记 7.9]关于第一个等式）。这意味着 $\omega_Z^{\mathrm{GR}} = \omega_Z$ 当且仅当 $F_0W_{n+c}\mathcal{H}_Z^c(\mathcal{O}_Y) = E_0\mathcal{H}^c(\mathcal{O}_Y)$。

最后一个断言直接由 [MP22，定理 C]。 □

正如引言中所述，$c(Z)$ 与 HRH(Z) 也可以通过 *Hodge-Lyubeznik* 数 和 相交*Hodge-Lyubeznik* 数来计算，我们在此回顾其定义。给定 $z \in Z$与 p，q，r，$s \in$**整数环**，前者定义为

$$\lambda_{r,s}^{p,q}(\mathcal{O}_{Z,z}) := \dim_{\mathbf{C}}\mathrm{Gr}_{-p}^F\mathrm{Gr}_{p+q}^W\mathcal{H}_z^r(\mathcal{H}^{\dim Z-s}\mathbf{D}_Z^H(\dim Z))$$

where $\mathcal{H}_z^r(-) := \mathcal{H}^r i_z^!(-)$ 且 $i_z\colon \{z\} \to Z$ 是包含。后者定义为

$$\mathrm{I}\lambda_r^{p,q}(\mathcal{O}_{Z,z}) := \dim_{\mathbf{C}}\mathrm{Gr}_{-p}^F\mathrm{Gr}_{p+q}^W\mathcal{H}_z^r\mathrm{IC}_Z(\dim Z).$$

我们参阅 [GLS25，CDO25] 以了解这些概念的细节。事实上，通过对偶，我们也可以使用常值层将这些不变量计算为

$$\lambda_{r,s}^{p,q}(\mathcal{O}_{Z,z}) := \dim_{\mathbf{C}}\mathrm{Gr}_p^F\mathrm{Gr}_{-p-q}^W\mathcal{H}_z^{-r}(\mathcal{H}^{s-\dim Z}\mathbf{Q}_Z^H[\dim Z])$$

and

$$\mathrm{I}\lambda_r^{p,q}(\mathcal{O}_{Z,z}) := \dim_{\mathbf{C}}\mathrm{Gr}_p^F\mathrm{Gr}_{-p-q}^W\mathcal{H}_z^{-r}\mathrm{IC}_Z.$$

这些数也刻画了 $w(Z)$。事实上，下面结论的证明可直接由 [CDO25，定理B的证明]得出：

定理2.26。设 Z 是一个等维簇。那么

$$w(Z) = \sup\left\{k \mid \lambda_{r,\dim Z}^{p,q}(\mathcal{O}_{Z,z}) = \mathrm{I}\lambda_r^{p,q}(\mathcal{O}_{Z,z}) \text{ for all } z \in Z,\, q, r \in \mathbf{Z},\, p \geq -k\right\}$$

约定：如果上述集合为空，则为 $w(Z) = -1$ 。

2.3. **霍奇指标定理的猜想性特征类版本**。设 X 是一个紧致复纯维代数簇。我们有如下图表：

$$
\begin{array}{ccccc}
K_0(\mathrm{Var}/X) & \xrightarrow{\chi_{\mathrm{Hdg}}} & K_0(\mathrm{MHM}(X)) & \xrightarrow{\mathrm{MHT}_{y_*}} & H_*(X)\otimes \mathbf{Q}[y^{\pm 1}] \\
& \searrow^{\mathrm{sd}_*} & \downarrow \mathrm{Pol} & & \downarrow y=1 \\
& & \Omega_{\mathbf{R}}(X) & \xrightarrow{L_*} & H_*(X)\otimes \mathbf{Q}
\end{array} \tag{8}
$$

其中， $H_*(X)$ 是偶次同调 $H_{2*}(X;\mathbf{Z})$。在上图中， $K_0(\mathrm{Var}/X)$ 是代数簇在 X 上的相对格罗滕迪克群，即由态射 $[Y \to X]$ 的同构类生成的自由阿贝尔群关于如下“剪刀关系”所得的商：

$$[Y \to X] = [Z \hookrightarrow Y \to X] + [Y \setminus Z \hookrightarrow Y \to X]$$

对于闭子簇 $Z \subset Y$。群 $K_0(\mathrm{Var}/X)$ 由类 $[Y \to X]$生成，其中 Y 在 X上是光滑、纯维且真。映射 χ_{Hdg} 定义为

$$\chi_{\mathrm{Hdg}}([f : Y \to X]) = [f_! \mathbf{Q}_Y^H].$$

类似地， $K_0(\mathrm{MHM}(X))$ 是 X上的混合霍奇模的格罗滕迪克群。有关其他对象及所涉及映射的详细信息，请参阅 [AMS25] 。这里我们只回顾两个关键定义：

- 交叉上同调赫尔维茨类 X 定义为
$$\mathrm{IT}_{y_*}(X) := \mathrm{MHT}_{y_*}(\mathrm{IC}_X^H[-\dim X]) \in H_*(X)\otimes \mathbf{Q}[y^{\pm 1}].$$
- 该*Goresky-MacPherson* L 类的 X 由下式给出
$$L_*(X) := L_*([\mathrm{IC}_X]) = (L_* \circ \mathrm{Pol})(\mathrm{IC}_X^H[-\dim X]) \in H_*(X)\otimes \mathbf{Q}.$$

现在，图表（8）的外方框根据 [BSY10], 交换，且同一图表的左三角根据 [FdBPS25]交换。内方框的交换性预计不成立，但按照猜想，将交叉复形$_X^H[-$ 维数 $X] \in K_0$（混合霍奇模（X））映射的两种方式应产生相同的结果：

猜想 2.27 （霍奇指标定理的特征类版本）。 设 X 为一个紧的纯维复代数簇。则 L_*（X） $=\mathrm{IT}_{1*}$（X）。

上述猜想被归于 Cappell 与 Shaneson，见 [BSY10，注 54]。我们指出如下：

注 2.28。 由图表（8）的外方框与左三角的交换性显然可知，上述猜想对 X 成立，如果交叉复形 $_X^H[-$ 维数 $X]$ 位于 χ_{Hdg}的像中。

我们将利用上述注2.27 来证明关于割线簇的猜想。

2.4. **曲线的割线簇与高阶割线簇的几何**。 除非另有说明（即在小节2.4.3之前），本小节中我们假设 $k =$**曲线 C**。

设 Y 是一个光滑射影簇，且 L 是其上的一个非常 ample 线丛。我们将用到以下正性概念：

定义 2.29。 对于整数 $k \geq 1$，光滑射影簇 Y 上的线丛 L 是k-非常丰的，如果求值映射

$$H^0(Y, L) \to H^0(Y, L \otimes \mathcal{O}_\xi)$$

对于任意长度为 $k+1$ 的零维子概形 $\xi \subseteq Y$ 都是满射。

对于 $k=1$，这就恢复了通常的很丰性概念。

2.4.1. 直线割线簇。 由于 Y 光滑，长度为 2 的子概形的希尔伯特概形 $\mathrm{Hilb}^2(Y)$ 是光滑的。我们可以考虑泛长度二子概形：

$$\Phi = \{(\xi, y) \mid y \in \mathrm{supp}(\xi)\} \subseteq \mathrm{Hilb}^2(Y) \times Y,$$

through 据此我们可以通过公式定义 $\mathrm{Hilb}^2(Y)$ 上 L 的割线丛

$$E_L = p_{1*}(p^*(L))$$

其中 $p_1\colon \Phi \to \mathrm{Hilb}^2(Y)$ 和 $p\colon \Phi \to Y$ 是自然投影。

注 2.30. 簇 Φ 可以识别为爆破

$$b : \mathrm{Bl}_\Delta(Y \times Y) \to Y \times Y$$

沿对角线 $\Delta \subseteq Y \times Y$。在此等同下，态射 $p_1\colon \Phi \to \mathrm{Hilb}^2(Y)$ 是自然 $\mathfrak{S}_2$-作用的商（与 $\mathrm{Hilb}^2(Y)$ 等同于沿对角线爆破 $\mathrm{Sym}^2(Y)$ 相容）。此外，映射 $p\colon \Phi \to Y$可分解为

$$\pi_2 \circ b\colon \Phi \to Y \times Y \to Y.$$

由于 L非常丰 非常丰， E_L 全局生成，因此求值映射诱导出一个态射

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(E_L) \to \mathbf{P}(H^0(Y, L))$$

其像记为 Σ ，称为由 L 所确定的嵌入对应的 Y 的直线割线簇。从现在起，我们始终假设 L 是 3-非常丰，且 $\Sigma \neq \mathrm{P}(H^0(Y, L))$（众所周知，若 L 是 3-非常丰，则 $\Sigma = \mathrm{P}(H^0(L))$ 当且仅当 $(X, L) \cong (\mathrm{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(3))$ ）。在对 L 作出这一 3- 很丰性假设后，可知 Σ 是不可约的，维数为 $2\dim Y + 1$，且 $\Sigma_{\mathrm{sing}} = Y$（例如参见 [ORS24, 命题 2.2]）。

我们有如下图表 [Ver01] （见 [Ull16、OR24、ORS24]）

(9)
$$\begin{array}{ccccccc} F_y := \mathrm{Bl}_y Y & \longrightarrow & \Phi & \longrightarrow & \mathbf{P} & & \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle t} & \searrow^{\beta} & \\ \{y\} & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{i} & \Sigma & \xrightarrow{i_\Sigma} & \mathbf{P}^N \\ & & & & & \overset{\iota}{\searrow} & \end{array}$$

其中包含笛卡尔方块和满射竖直映射（水平映射为嵌入）， Φ 和$\mathbf{P}$ 是光滑的，态射 p 是光滑的，而对于任意 y，纤维 $F_y := p^{-1}(y)$在 $y \in Y$上的纤维可自然地识别为 Y在 $y \in Y$处的爆破 $\mathrm{Bl}_y(Y)$。事实上，t 可识别为沿 Y对 Σ 的爆破，其例外除子为 Φ。特别地，t 在 $\Sigma \setminus Y$ 上是同构，换言之，它是 Σ的强对数消解。

令 $\ell = \mathcal{O}(1)$ 表示将 t 视为爆破时得到的相对丰沛线丛（不要与来自射影丛 $\mathbf{P}(E_L)$ 结构的典范丛 $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$ 混淆）。注意，$-\Phi(\ell|_\Phi \cong \mathcal{O}_\Phi)$ 是嵌入 $\Phi \to \mathbf{P}$ 的余法丛。取 $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-\Phi)$ 为$\mathbf{P}$ 上的相对丰沛丛（之所以相对丰沛，是因为它在正倍数意义下与$\mathbf{P}$ 表示为某个爆破时表达式中的 $\mathcal{O}(1)$ 相同，而该爆破作用于一个

上的相干理想层 Σ）。根据 [Ull16，引理 2 的证明。3] (另见 [OR24，(2.6)])，由此可知

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-\Phi)|_{p^{-1}(y)} = \mathcal{N}^{\vee}_{\Phi/\mathbf{P}}|_{p^{-1}(y)} \cong b_y^*(L)(-2E_y)$$

其中，E_y 是爆破 b_y: Bl$_y(Y) \to Y$的例外除子。由相对丰性，我们刚刚论证了以下内容[1]:

引理 2.31。设 L 在光滑射影簇 Y上是3-非常丰的。则 $b_y^*(L)(-2E_y)$是 Bl$_y(Y)$ 上的丰沛线丛，对所有 $y \in Y$均成立。（换言之，*3*-非常丰线丛的塞什德里常数满足 $\epsilon(Y, L, y) \geq 2$。）

我们定义一种更强的 L 正性性质，它将对我们的一些结果有所助益:

定义 2.32。设 L 是 Y上的 3-very ample线丛。给定 $y \in Y$，令 $\mathcal{J}_y$ 为 $y \in Y$的理想层。

- 给定 $0 \leq p \leq \dim Y - 1$，若对所有 $y \in Y$都有：则称 L 满足（Q'_p）-性质 。

$$H^{\dim Y-k}(\Omega^k_{F_y} \otimes (b_y^*(jL)(-2jE_y))) = 0 \text{ for all } j \geq 1, 0 \leq k \leq p.$$

- 给定 $p \geq 1$, L 称为满足 (U_p)-性质 ，如果对所有 $y \in Y$，都有:

$$H^k(b_y^*(jL)(-2jE_y)) = 0 \text{ for all } j \geq 1, 1 \leq k \leq p.$$

注意，(Q'_p)-性质（分别地，(U_p)-性质）明显弱于 (Q_p)-性质（分别地，(Q_0)-性质）。后者曾用于 [CS18、OR24、ORS24、Ull16]，并在这些文献中研究了 Σ 的奇点，针对各种 p。

我们需要以下消失结果:

命题 2.33. </style}如果 满足某个 维数 $Y - 1$下的(Q'_p)-性质，那么

$$R^{\dim Y-k}t_*\Omega^{\dim Y+k+1}_{\mathbf{P}}(\log \Phi)(-\Phi) = 0 \textit{ for all } 0 \leq k \leq p.$$

证明. 我们沿用 [ORS24，命题 4 的证明3]。根据 [ORS24，断言 4.5、4.7]，，只需验证

$H^{\dim Y-k}(\Omega^q_\Phi|_{F_y} \otimes (b_y^*(jL)(-2jE_y)) = 0$对所有 $y \in Y$，$j \geq 1$且 $q \in \{$维数 $Y + k$，维数 $Y + k + 1\}$.

正如 [ORS24，主张 4 的证明中，8]我们考虑滤过

$$F^0 = \Omega^q_\Phi|_{F_y} \supseteq F^1 \supseteq \cdots \supseteq F^q \supseteq F^{q+1} = 0 \text{ with } F^l/F^{l+1} \cong \bigwedge^l \mathcal{N}^*_{F_y/\Phi} \otimes \Omega^{q-l}_{F_y}.$$

由于 $\mathcal{N}^*_{F_y/\Phi} \cong \mathcal{O}^{\oplus \text{维数}_{F_y}\ Y}$，我们有 $F^l/F^{l+1} = 0$对所有 $l >$维数Y.证明的其余部分与 [ORS24中的断言 4 相同。8] 只要使用上述观察和中野消失定理（得益于引理 2.31）。□

[1]引理 2.31 表明条件 [OR24，定义 1.4(2)] 和 [ORS24，定义 3.1($Q2$)] 是冗余的。

2.4.2. 曲线的高阶割线簇。 设 C 为一条光滑射影曲线。我们考虑光滑簇 $\mathrm{Sym}^k C = C^{(k)}$ 对所有 $k \geq 1$。我们有 $\mathfrak{S}_k$-商映射

$$C^{\times k} \to C^{(k)},$$

因此，通过拉回，上同调满足

$$H^\bullet(C^{(k)}) = H^\bullet(C^{\times k})^{\mathfrak{S}_k},$$

其中 $\mathfrak{S}_k$ 在上同调上的作用带有符号。简而言之，我们有

$$H^j(C^{(k)}) = \mathrm{Gr}_j^W \mathrm{Sym}^k H^\bullet(C),$$

其中 $\mathrm{Sym}^k(-)$ 是在超向量空间范畴中取的（对奇数次项带符号，对偶数次项不带符号）。更多详情见下文第 2.5 小节。

我们有 泛除子 $\mathcal{D}_k = \{(p+Q, p) \mid Q \in C^{(k-1)}\} \subseteq C^{(k)} \times C$。它可以视为一个关联簇，类似于上文的 Φ 。我们将与 L相关联的第 k 个割线丛 定义为

$$E_L^{(k)} = p_{1*}(p_2^*(L)),$$

其中 $p_1 \colon \mathcal{D}_k \to C^{(k)}$ ， $p_2 \colon \mathcal{D}_k \to C$ 是投影（为简化记号，我们省略投影对 k 的依赖）。

我们定义空间 $B^k = \mathbf{P}(E_L^{(k)})$，它是 $C^{(k)}$ 上的一个 $k-1$ 阶 $\mathbf{P}$ 丛。截面的取值确定了一个态射 $B^k \to \mathbf{P}(H^0(C, L))$，该态射的像是曲线 C 的第 k 割线簇（它对应于嵌入 $C \hookrightarrow \mathbf{P}(H^0(C, L))$）。

对于任意整数 a, b ，我们都有加法映射（这些映射对这些整数的依赖关系将从上下文中明了）

$$a \colon C^{(a)} \times C^{(b)} \to C^{(a+b)}, \ (x, y) \mapsto x + y,$$

这些映射又诱导出割线丛的笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} C^{(a)} \times B^b & \xrightarrow{\alpha} & B^{a+b} \\ \downarrow & & \downarrow \\ C^{(a)} \times C^{(b)} & \xrightarrow{a} & C^{(a+b)} \end{array}$$

满足各种相容性。对我们而言，最重要的是以下两个性质 [Ber92,Bro26]: 这些图表

$$\begin{array}{ccc} C^{(a)} \times B^b & \longrightarrow & B^b \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow \\ B^{a+b} & \longrightarrow & \mathbf{P}(H^0(C, L)) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C^{(a)} \times C^{(b)} \times B^c & \xrightarrow{a \times \mathrm{id}} & C^{(a+b)} \times B^c \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \times \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ C^{(a)} \times B^{b+c} & \xrightarrow{\alpha} & B^{a+b+c} \end{array}$$

是交换的。

按照 [Bro26], , 我们对任意 $k \geq m \geq 1$ 定义簇 $Z_m^k = \alpha(C^{(k-m)} \times B^m) \subseteq B^k$。按照 [Ber92], , 这些簇称为相对割线簇。割线簇的几何结构极其丰富。如果 L 是 $(2k-1)$-非常丰的，且 $\sigma_k \neq \mathbf{P}(H^0(C, L))$，那么 $\sigma_{\ell-1} = \sigma_{\ell,\mathrm{sing}}$ 对所有 $\ell \leq k$ 均成立。此外，映射 $p \colon B^\ell \to \sigma_\ell$ 是一个奇点消解，并且在 $U_\ell = \sigma_\ell \setminus \sigma_{\ell-1}$ 上是同构。

对于所有 $1 \leq m \leq \ell \leq k$，定义态射 $C^{(\ell-m)} \times B^m \to Z_m^\ell$ 也是一个奇点消解，它在 $Z_{m-1}^\ell \subseteq Z_m^\ell$ 的补集上是同构。开子集

位于补集 $Z_m^\ell \setminus Z_{m-1}^\ell$ 上方（且与之同构）的子集是 $C^{(\ell-m)} \times U_m$。对于任意这样的配对，我们有如下笛卡尔图表

$$\begin{array}{ccc} Z_m^\ell & \longrightarrow & B^\ell \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sigma_m & \longrightarrow & \sigma_\ell \end{array} . \tag{10}$$

因此，我们有分层 $\sigma_\ell = \bigsqcup_{i\le\ell} \sigma_i$ 和 $Z_m^\ell = \bigsqcup_{i\le m} C^{(\ell-i)} \times U_i$，它们对笛卡尔图（10）中的左侧垂直态射进行分层。

2.4.3. 子域上的（高阶）割线簇 曲线 C。 设 k 是一个可嵌入**曲线 C**的域。在混合层理论的定义中，我们可以处理定义在此类基域上的簇。这里我们说明在这种情形下“（高阶）割线簇”的含义。

设 Y 是定义在 k上的光滑射影簇，并假设其几何不可约（等价地，几何连通）。割线簇的经典定义不适用于这种情形。例如，如果 Y 没有 k-点，那么就无法明确地定义“经过两个 k-点的 k-直线簇”。

此处所采取的观点是通过割线丛构造来定义割线簇。以下关于改变基域的相容性陈述对这一构造至关重要：对于一个在 Y上带有向量丛 $\mathcal{E}$ 的 k-簇 Y，我们有自然同构：

$$\mathbf{P}(\mathcal{E} \times_k \mathbf{C}) \cong \mathbf{P}(\mathcal{E}) \times_k \mathbf{C},$$

$$\mathrm{Hilb}^2(Y \times_k \mathbf{C}) \cong \mathrm{Hilb}^2(Y) \times_k \mathbf{C},$$

$$\mathrm{Sym}^\ell(Y \times_k \mathbf{C}) \cong \mathrm{Sym}^\ell(Y) \times_k \mathbf{C},$$

同样地，对于 k-簇的任意态射 $f\colon X \to Y$，我们有

$$\mathrm{Im}(f \times_k \mathbf{C}) \cong \mathrm{Im}(f) \times_k \mathbf{C}.$$

因此，如果我们通过把 L （嵌入的非常 ample 线丛）拉回到 $Y \times \mathrm{Hilb}^2(Y)$中的泛长度二子概形（相应地， $C \times$对称幂$^\ell(C)$中的泛除子）来定义割线丛。

然后我们将所得丛推前至$\mathrm{Hilb}^2(Y)$（相应地，对称幂$^\ell(C)$），从而可以取射影丛。这给出了定义在 k上的$\mathbf{P}$（相应地， B^ℓ），以及定义在 k上的态射$\mathbf{P} \to \mathbf{P}(H^0(Y, L))$（相应地， $B^\ell \to \mathbf{P}(H^0(C, L))$）。

我们将 Y 的割线簇（相应地， C的第 ℓ次割线簇）定义为该态射的像。若我们从 k 基变换到**曲线 C**，则所得簇是 $Y \times_k$**曲线 C** （相应地， $C \times_k$**曲线 C**）的割线簇（相应地，第 ℓ次割线簇）。

2.5. 经典上同调计算。 我们提醒读者一些关于复代数簇上几何运算的众所周知的上同调计算。我们解释它们向任意混合层理论范畴的扩张。

2.5.1. 射影丛的上同调。 设 Y 是**曲线 C** 上的光滑射影簇，带有秩为 r 的向量丛 $\mathcal{E}$ 。关于射影丛$\mathbf{P}(\mathcal{E})$ 的上同调，我们有如下众所周知的公式，由

$$H^j(\mathbf{P}(\mathcal{E})) = \bigoplus_{i=0}^{r-1} H^{j-2i}(Y)\xi^i,$$

其中 $\xi = c_1(\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1))$是相对超平面类。这给出了权 j的纯霍奇结构之间的同构

$$H^j(\mathbf{P}(\mathcal{E})) \cong \bigoplus_{i=0}^{r-1} H^{j-2i}(Y)(-i).$$

事实上，我们有一个典范分裂

$$\pi_* A^{\mathcal{M}}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})} = \bigoplus_{i=0}^{r-1} A^{\mathcal{M}}_Y[-2i](-i)$$

在 $D^b(\mathcal{M}(Y))$中。确实，对于任意 $0 \leq i \leq r-1$ ，我们有一个态射

$$A^{\mathcal{M}}_Y[-2i](-i) \to \pi_* A^{\mathcal{M}}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}[-2i](-i) \xrightarrow{\xi^i} \pi_* A^{\mathcal{M}}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})},$$

其中第一个箭头由 π^*， π_*的伴随定义。取直和后，我们得到一个态射

$$\bigoplus_{i=0}^{r-1} A^{\mathcal{M}}_Y[-2i](-i) \to \pi_* A^{\mathcal{M}}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})},$$

因此，只需证明锥为零。这可以在底层A-复形的层面上完成。此外，这等价于证明对所有 $y \in Y$，将 i_y^* 应用于该锥所得结果均为 0；这由射影空间的 A-上同调的标准公式显然可得。因此，我们得到 $\mathcal{M}_{\mathrm{cons}}(\mathrm{Spec}(k))$中权为 j 的纯对象之间的一个同构：

$$H^j_{\mathcal{M}}(\mathbf{P}(\mathcal{E})) = \bigoplus_{i=0}^{r-1} H^{j-2i}_{\mathcal{M}}(Y)(-i).$$

2.5.2. 光滑簇的爆破上同调。 设 $Z \subseteq Y$ 是光滑射影簇 Y中的余维为 c的光滑子簇，令 π: $\mathrm{Bl}_Z(Y) \to Y$ 表示沿着 Z 对 Y 进行的爆破。我们有

$$H^j(\mathrm{Bl}_Z(Y)) = H^j(Y) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{c-1} H^{j-2i}(Z)e^i \right),$$

其中 e 是例外除子 E_Z的类。这给出了纯霍奇结构之间的一个同构

$$H^j(\mathrm{Bl}_Z(Y)) = H^j(Y) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{c-1} H^{j-2i}(Z)(-i) \right).$$

运用与上文类似的论证，我们可以写成

$$\pi_* A^{\mathcal{M}}_{\mathrm{Bl}_Z(Y)} = A^{\mathcal{M}}_Y \oplus \bigoplus_{i=1}^{c-1} A^{\mathcal{M}}_Z[-2i](-i),$$

因此，我们得到 $\mathcal{M}_{\mathrm{cons}}(\mathrm{Spec}(k))$中纯对象的分解：

$$H^j_{\mathcal{M}}(\mathrm{Bl}_Z(Y)) = H^j_{\mathcal{M}}(Y) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{c-1} H^{j-2i}_{\mathcal{M}}(Z)(-i) \right).$$

我们需要分析将 Z 取为一点时爆破的本原上同调：**引理 2.34.** *Bl()* 的上同调环 满足以下性质：

(1) 对所有 k，我们有

$$H^k(\mathrm{Bl}_y(Y)) = b_y^*(H^k(Y)) \oplus \begin{cases} \mathbf{Q}e^{\frac{k}{2}} & k \in 2\mathbf{Z} \cap [2, 2\dim(Y) - 2] \\ 0 & otherwise \end{cases},$$

其中 $e = c_1(E_y)$。

(2) 杯积由以下事实确定： $b_y^*(-)$ 与杯积可交换：

$$e \cup b_y^*(-) = 0, \ and \ e^i \cup e^j = \begin{cases} e^{i+j} & i + j < \dim Y \\ (-1)^{\dim Y} & i + j = \dim Y \end{cases}.$$

(3) 设 L 是 Y 上的非常 *ample* 线丛。对于 $k \leq$ 维Y，我们有如下等式：

$$H^k_{\mathrm{prim}}(\mathrm{Bl}_y(Y)) = \begin{cases} b_y^*(H^k_{\mathrm{prim}}(Y)) & k \neq 2 \\ b_y^*(H^2_{\mathrm{prim}}(Y)) \oplus (\mathbf{Q} \cdot c_1(L) + 2(\frac{1}{2}L)^{\dim Y} e) & k = 2 \end{cases},$$

其中，在Bl$y(Y)$ 上，本原类由与 $b_y^*(c_1(L)) - 2e$作杯积确定；而在 Y 上，它们由与 $c_1(L)$ 作杯积确定。

证明。 前两个结论是标准结果（参见 [GH78，第 4]章。）关于第三点，注意到当 k 为奇数时，结论显然成立。

为简化记号，在余下的论证中，我们用 $\dim Y - k$ 代替 k，并假设 $\dim Y - k$ 为偶数。

记 $\dim Y - k = 2m$，并考虑 $H^{\dim Y - k}$(Bl$y(Y)$) 中的本原元素 $b_y^*(\eta) + \alpha e^m$，其中 $\alpha \in$属于 **有理数域**。那么

$$\begin{aligned} 0 =& (b_y^*(c_1(L)) - 2e)^{k+1} \cup (b_y^*(\eta) + \alpha e^m) \\ =& \begin{cases} b_y^*(c_1(L)^{k+1} \cup \eta) + (-2)^{k+1}\alpha e^{m+k+1} & m + k + 1 < \dim Y \\ b_y^*(c_1(L)^{k+1} \cup \eta) + (-2)^{k+1}\alpha e^{m+k+1} & m + k + 1 = \dim Y \end{cases}. \end{aligned}$$

注意到 $m + k + 1 = d$ 推出 $2m + 2k + 2 = 2d$。根据定义， $2m = \dim Y - k$，因此得到 $\dim Y + k + 2 = 2\dim Y$，所以在这种情况下 $k = \dim Y - 2$。

在第一种情况下，由于上同调的描述是一个直和，我们得到 $b_y^*(c_1(L)^{k+1} \cup \eta) = 0$ 且 $-2)^{k+1}\alpha = 0$。因此， $\eta \in H^{\dim Y - k}$本原 (Y) 且 $\alpha = 0$。

在第二种情况下，我们得到

$$b_y^*(c_1(L)^{\dim Y - 1} \cup \eta) + (-2)^{\dim Y - 1}\alpha(-1)^{\dim Y} = 0,$$

其中 $\eta \in H^2(Y) =$ **有理数域** $\cdot c_1(L) \oplus H^2_{\mathrm{prim}}(Y)$。我们可以忽略属于本原上同调的部分，因为根据定义，它与 $c_1(L)^{\dim Y - 1}$ 的杯积为零。因此，对于某个 $\beta \in$**有理数域**，我们可以假设$\eta = \beta c_1(L)$。我们得到等式

$$\beta L^{\dim Y} + (-2)^{\dim Y - 1}\alpha(-1)^{\dim Y} = 0,$$

因此， α由 β通过公式 $\alpha = 2(\frac{1}{2}L)^{\dim Y}\beta$确定。 – □

2.5.3. 两点*Hilbert*概形的上同调。设 Y 是一个光滑复射影簇，并考虑 $\mathrm{Hilb}^2(Y)$。研究这个空间的上同调计算有两种方法。如上所述，$\mathrm{Hilb}^2(Y)$是 $\Phi = \mathrm{Bl}_\Delta(Y\times Y)$关于自然$\mathfrak{S}_2$-作用的商。因此我们有

$$H^j(\mathrm{Hilb}^2(Y)) = H^j(\Phi)^{\mathfrak{S}_2}.$$

由于对角线 Δ 是 $\mathfrak{S}_2$-不变的，利用上文对 $\mathrm{Bl}_\Delta(Y\times Y)$ 上同调的描述，我们得出

$$H^j(\mathrm{Hilb}^2(Y)) = H^j(\Phi)^{\mathfrak{S}_2} = H^j(Y\times Y)^{\mathfrak{S}_2} \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{\dim Y-1} H^{j-2i}(Y)e^i\right)$$

$$\cong H^j(\mathrm{Sym}^2(Y)) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{\dim Y-1} H^{j-2i}(Y)(-i)\right)$$

其中 $e = c_1(E_\Delta)$是爆破上的例外除子类。

我们还可以从另一种方式看待这一点（遵循 [Tot16]中的计算）：我们有消解图

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}(T^*Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hilb}^2(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & \mathrm{Sym}^2(Y) \end{array},$$

这导出长正合列

$$\cdots \to H^j(\mathrm{Sym}^2(Y)) \to H^j(Y)\oplus H^j(\mathrm{Hilb}^2(Y)) \to H^j(\mathbf{P}(T^*Y)) \to \ldots.$$

由于这四个空间的上同调都是纯的（因为 $\mathrm{Sym}^2(Y)$ 是射影有理同调流形），这个长正合列分解为短正合列。因此，我们得到（由可极化性可知是分裂的）短正合列

$$0 \to H^j(\mathrm{Sym}^2(Y)) \to H^j(Y)\oplus H^j(\mathrm{Hilb}^2(Y)) \to H^j(\mathbf{P}(T^*Y)) \to 0.$$

由这个短正合列的分裂以及上面对$\mathbf{P}(T^*Y)$的上同调计算，我们得出

$$H^j(\mathrm{Hilb}^2(Y)) \cong H^j(\mathrm{Sym}^2(Y)) \oplus \bigoplus_{i=1}^{\dim Y-1} H^{j-2i}(Y)(-i).$$

显然，这种分解在任何混合层理论中也成立。

2.5.4. 某些对称积的上同调。 设 C 是定义在**曲线 C**上的光滑射影曲线。回顾一下，构造 $\mathrm{Sym}^k C = C^{(k)}$ 对于 C的高阶割线簇的消解至关重要。这些空间的上同调早已由 MacDonald 经典地研究清楚[Mac62]。由于 $C^{(k)}$ 是 $\mathfrak{S}_k$的 $C^{\times k}$商，因此可得

$$H^j(C^{(k)}) = H^j(C^{\times k})^{\mathfrak{S}_k}$$

其中 $\mathfrak{S}_k$ 在上同调上的作用带有符号。用超向量空间的语言来表达这个不变子空间是最简单的方式，我们写作

$$H^\bullet(C) = H^\bullet_{\mathrm{even}}(C) \oplus H^\bullet_{\mathrm{odd}}(C).$$

于是我们有

$$H^j(C^{(k)}) = \mathrm{Gr}_j^W \mathrm{Sym}^k H^\bullet(C),$$

其中，对称幂是在超向量空间范畴中取的。具体来说，它在偶部上作用为通常的对称幂，在奇部上则作用为外幂。由此可得，对于所有 $0 \le j \le 2k$，我们有

$$H^j(C^{(k)}) \cong \bigoplus_{\max\{0,j-k\} \le i \le \lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \bigwedge^{j-2i} H^1(C)(-i). \tag{11}$$

这里我们利用了这样一个事实： $H^\bullet_{\mathrm{even}}(C) = \textbf{有理数域}^H \oplus \textbf{有理数域}^H(-1)$，因此其对称幂与一个泰特扭曲一致。

这一讨论对任意光滑射影簇 Y 都成立，只是在高维情形下，偶部和奇部会更加复杂。这里我们说明 $\mathrm{Sym}^2(Y)$ 在 $\dim Y \ge 2$ 时的结果。此时 $H^\bullet(Y) = H^\bullet_{\mathrm{even}}(Y) \oplus H^\bullet_{\mathrm{odd}}(Y)$，并且

$$H^j(\mathrm{Sym}^2(Y)) = \mathrm{Gr}_j^W \mathrm{Sym}^2 H^\bullet(C),$$

其中

$$\mathrm{Sym}^2(H^\bullet(C)) \cong \bigoplus_{i<j} H^i(Y) \otimes H^j(Y) \oplus \bigoplus_i \mathrm{Sym}^2(H^{2i}(Y)) \oplus \bigoplus_i \bigwedge^2 H^{2i+1}(Y). \tag{12}$$

这些分解在任何混合层理论中也都成立。为了定义对称幂，我们有如下结果：

注 2.35。 事实上，在一种与施加于底层 A-向量空间的张量运算相一致的混合层理论中，可以进行任意张量运算（例如 Schur 函子），其构造见 [Sai91，引理 5.1 的证明，(1.5.5)]。相关讨论见 [MSS11], ，该结果并非显而易见。

3. General Results

这里我们回顾 [CDO25] 的设定和主要结果。我们仍在一种A-混合层理论中工作，并考虑 k-簇之间的态射，其中 A 是 $\mathbf{R}$ 的子域，而 k 是**曲线 C**的子域。

本节中，我们始终使用如下笛卡尔方

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Z} & \longrightarrow & \widetilde{X} \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Z & \xrightarrow{\ i\ } & X \end{array}$$

它具有以下性质：

(1) f 是射影的，且 $f_{\mathbf{C}}$ 在 $X_{\mathbf{C}} \setminus Z_{\mathbf{C}}$上是同构， ~ ~(2) $X_{\mathbf{C}}$， $Z_{\mathbf{C}}$ 是连通有理同调流形， ~(3) ℓ 是 $X_{\mathbf{C}}$上的 f-相对丰沛线丛。

本节余下部分中，我们固定使用以下记号：

$$n = \dim X = \dim \widetilde{X}, d_Z = \dim Z, d_{\widetilde{Z}} = \dim \widetilde{Z}, c_Z = n - d_Z, c_{\widetilde{Z}} = n - d_{\widetilde{Z}}.$$

映射 p 的相对维数为 $d = c_Z - c_{\widetilde{Z}}$，我们假设该维数严格为正，等价地说， $c_Z \geq 2$。

由于 $\widetilde{Z}$是有理同调流形，直接像 $p_* A^{\mathcal{M}}_{\widetilde{Z}}[d_{\widetilde{Z}}]$ 是权为 $d_{\widetilde{Z}}$ 的纯复形，并根据上述定理 2.8 满足 Lefschetz 同构与 Lefschetz 分解。

For 记号方便起见，我们定义 $\delta = c_{\widetilde{Z}} - 1$ （最清楚的情形是对于 $\delta = 0$，此时 Z 是一个除子，位于 X中）。 [CDO25]的主要结果如下：

定理 3.1 （[CDO25，定理 3.4]）。 在上述设定下，对所有 $0 < j < c_Z - 1$，我们有权为 $n - j - 1$的纯对象的同构：

$$\mathcal{H}^{-j} A^{\mathcal{M}}_X[n] \cong \begin{cases} \bigoplus_{r=0}^{\delta} i_*(\mathcal{H}^{\delta-j-2r} p_* A^{\mathcal{M}}_{\widetilde{Z}}[d_{\widetilde{Z}}])_{\mathrm{prim}}(-r) & \delta \leq j \\ \bigoplus_{r=0}^{j} i_*(\mathcal{H}^{j-\delta-2r} p_* A^{\mathcal{M}}_{\widetilde{Z}}[d_{\widetilde{Z}}])_{\mathrm{prim}}(j-\delta-r) & \delta > j \end{cases}$$

以及一个同构

$$W_{n-1}\mathcal{H}^0 A^{\mathcal{M}}_X[n] = \mathrm{Gr}^W_{n-1}\mathcal{H}^0 A^{\mathcal{M}}_X[n] \cong i_*(\mathcal{H}^{-\delta} p_* A^{\mathcal{M}}_{\widetilde{Z}}[d_{\widetilde{Z}}])_{\mathrm{prim}}(-\delta).$$

对偶地, 对于所有 $0 < j < c_Z - 1$ 权为 $n + j +$ 的纯对象的同构，我们有 1:

$$\mathcal{H}^j \mathbf{D}^{\mathcal{M}}_X \cong \begin{cases} \bigoplus_{r=0}^{\delta} i_*(\mathcal{H}^{\delta-j-2r} p_* A^{\mathcal{M}}_{\widetilde{Z}}[d_{\widetilde{Z}}])_{\mathrm{prim}}(-j-r-1) & \delta \leq j \\ \bigoplus_{r=0}^{j} i_*(\mathcal{H}^{j-\delta-2r} p_* A^{\mathcal{M}}_{\widetilde{Z}}[d_{\widetilde{Z}}])_{\mathrm{prim}}(-\delta-r-1) & \delta > j \end{cases}$$

以及一个同构

$$\mathcal{H}^0 \mathbf{D}^{\mathcal{M}}_X / \mathrm{IC}^{\mathcal{M}}_X = \mathrm{Gr}^W_{n+1}\mathcal{H}^0 \mathbf{D}^{\mathcal{M}}_X \cong i_*(\mathcal{H}^{-\delta} p_* A^{\mathcal{M}}_{\widetilde{Z}}[d_{\widetilde{Z}}])_{\mathrm{prim}}(-\delta-1).$$

3.1. 局部上同调缺陷及相关不变量。 在本节的其余部分，我们将讨论限定在以下情形：映射 $p\colon Z \to Z$ 是光滑簇之间的光滑态射，且它们的维数均为正。我们记 $p^{-1}(x) = \mathcal{F}_x$ 为在 x 上的纤维，它是一个维数为 $d = c_Z - c_{\widetilde{Z}}$ 的光滑簇。

在此假设下，对于所有 $j \in$**整数环**，$\mathcal{H}^j p_* A^{\mathcal{M}}_{\widetilde{Z}}[d_{\widetilde{Z}}]$ 是 $\mathcal{M}(Z)$ 中权为 $d_{\widetilde{Z}} + j$ 的光滑纯对象，我们将其记为 $\mathbf{V}^{d+j}_{\mathcal{M}}$。其底层的 A-中间延拓的层是（平移后的）局部系统 $\mathbf{V}^{d+j}$，其在 x 上的纤维是奇异上同调 $H^{d+j}(\mathcal{F}_x, A)$。下文中，我们在（原始）奇异上同调的记号中省略这个 A。

采用此记号，对于 $j \geq 0$，我们有 $(\mathcal{H}^{-j} p_* A^{\mathcal{M}}_{\widetilde{Z}}[d_{\widetilde{Z}}])_{\mathrm{prim}}$ 是本原类的子对象 $\mathbf{V}^{d-j}_{\mathcal{M}}$，prim 其在 $x \in Z$ 上的纤维为

$$H^{d-j}_{\mathcal{M},\mathrm{prim}}(\mathcal{F}_x) = \ker(c_1(\ell|_{\mathcal{F}_x})^{j+1} \colon H^{d-j}_{\mathcal{M}}(\mathcal{F}_x) \to H^{d+j+2}_{\mathcal{M}}(\mathcal{F}_x)).$$

推论 3.2。 假设如上， $p\colon \ Z \to Z$ 是正维光滑簇之间的一个光滑（具有几何连通纤维）态射，并且 $X_{\mathbf{C}}$ 是一个连通有理同调流形。那么

(1) $\mathrm{lcdef}(X) = \mathrm{lcdef}_{\mathrm{gen}}(X) = \mathrm{lcdef}^{>0}_{\mathrm{gen}}(X) \leq c_Z - 2.$

(2) 对所有 $0 < j \leq c_Z - 2$，我们在 $\mathcal{M}(X)$中有一个权为 $n+j+1$的纯对象同构：

$$\mathcal{H}^{-j}\mathcal{K}^{\bullet}_{\mathcal{M},X}(-j-1) \cong \mathcal{H}^{j}\mathbf{D}^{\mathcal{M}}_{X} \cong \begin{cases} \bigoplus_{a=0}^{\delta} i_*\mathbf{V}^{d-(j-\delta+2a)}_{\mathcal{M},\mathrm{prim}}(-a-j-1) & j \geq \delta \\ \bigoplus_{a=0}^{j} i_*\mathbf{V}^{d-(\delta-j+2a)}_{\mathcal{M},\mathrm{prim}}(-a-\delta-1) & j < \delta \end{cases}.$$

(3) 我们有 $\mathrm{Gr}^W_i\mathcal{H}^0\mathbf{D}^{\mathcal{M}}_X \neq 0 \implies i \in [n, n+1]$，一个同构

$$\mathcal{H}^0\mathcal{K}^{\bullet}_{\mathcal{M},X}(-1) \cong \mathrm{Gr}^W_{n+1}\mathcal{H}^0\mathbf{D}^{\mathcal{M}}_X \cong i_*\mathbf{V}^{d-\delta}_{\mathcal{M},\mathrm{prim}}(-\delta-1)$$

以及 $D^b(\mathcal{M}(X))$ 中的一个同构

$$f_*A^{\mathcal{M}}_{\widetilde{X}}[n] \cong \mathrm{IC}^{\mathcal{M}}_X \oplus i_*\mathbf{V}^{c_Z}_{\mathcal{M}} \oplus \left(\bigoplus_{\ell=1}^{d-c_{\widetilde{Z}}} \left(i_*\mathbf{V}^{c_Z+\ell}_{\mathcal{M}}[-\ell] \oplus i_*\mathbf{V}^{c_Z+\ell}_{\mathcal{M}}(\ell)[\ell]\right)\right).$$

(4) 若 X 不是有理同调流形，则 *RHM* 缺陷对象 $\mathcal{K}^{\bullet}_{\mathcal{M},\ X}$ 是一个权为 $n-1$ 的纯复形。

证明。我们证明关于局部上同调缺陷的断言。只需证明该断言对底层的 A-倾斜层成立，因此我们在记号中省略 $\mathcal{M}$。考虑三角

$$A_X[n] \to f_*A_{\widetilde{X}}[n] \to i_*S' \xrightarrow{+1},$$

根据对 f 的假设，我们知道锥支撑于 $Z \subseteq X$。若对此应用 i^*，则得到

$$A_Z[n] \to p_*A_{\widetilde{Z}}[d_{\widetilde{Z}}][c_{\widetilde{Z}}] \to S' \xrightarrow{+1}.$$

考察上同调的长正合列，可得满射

$$\mathcal{H}^{-j-1}i_*S' \to \mathcal{H}^{-j}A_X[n]$$

因此，只需证明对所有 $j \leq -c_Z$，$\mathcal{H}^j i_*S'$ 消失。

用上述记号，我们有如下等同

$$\mathcal{H}^j(p_*A_{\widetilde{Z}}[d_{\widetilde{Z}}][c_{\widetilde{Z}}]) = \mathbf{V}^{c_Z+j},$$

对 $j < -c_Z$，它消失。由上同调的长正合列，我们有

$$0 \to \mathcal{H}^{-c_Z-1}S' \to A_Z[d_Z] \to \mathbf{V}^0 \to \mathcal{H}^{-c_Z}S' \to 0,$$

由于我们假设$\mathcal{F}_x$, C 是连通的，因此中间的映射是同构。于是，对所有 $j \leq -c_Z$，$\mathcal{H}^j S' = 0$，正如所需。

$\mathbf{D}^{\mathcal{M}}_X$和 $\mathbf{Gr}^W_{n+1}\mathcal{H}^0\mathbf{D}^{\mathcal{M}}_X$的等同可由定理 3.1立即得到。

现在我们证明 $f_*A^{\mathcal{M}}_{\widetilde{X}}[n]$ 的描述，这是分解定理的推论。事实上，我们有

$$f_*A^{\mathcal{M}}_{\widetilde{X}}[n] \cong \bigoplus_{j\in\mathbf{Z}} \mathcal{H}^j f_*A^{\mathcal{M}}_{\widetilde{X}}[n][-j].$$

采用上述记号，并利用 $A^{\mathcal{M}}_X[n] \in D^{\leq 0}(\mathcal{M}(X))$ 这一事实，我们看到对于 $j > 0$，自然映射

$$\mathcal{H}^j f_*A^{\mathcal{M}}_{\widetilde{X}}[n] \to i_*\mathcal{H}^j S'$$

是一个同构。此外，根据上述讨论，右侧可以认同为$i_*\mathcal{H}^{c_{\widetilde{Z}}+j}p_*A^{\mathcal{M}}_{\widetilde{Z}}[d_{\widetilde{Z}}]$。因此，对于 $j>0$，我们有如下同构：

$$\mathcal{H}^j f_* A^{\mathcal{M}}_{\widetilde{X}}[n] \cong i_*\mathbf{V}^{c_Z+j}_{\mathcal{M}},$$

并且对于 $j=0$，我们有

$$\mathcal{H}^0 f_* A^{\mathcal{M}}_{\widetilde{X}}[n] \cong \mathrm{IC}^{\mathcal{M}}_X \oplus i_*\mathbf{V}^{c_Z}_{\mathcal{M}}.$$

对于负次数的上同调模，我们可以使用 Lefschetz 同构：对于 $j>0$，我们有同构

$$\mathcal{H}^{-j} f_* A^{\mathcal{M}}_{\widetilde{X}}[n] \cong i_*\mathbf{V}^{c_Z+j}_{\mathcal{M}}(j).$$

通过简单计算可知，映射 f 的半小性缺陷等于 $\max\{0, d-c_{\widetilde{Z}}\}$，因此得到直和上的界。

最后一个断言由纯复形的定义直接得出。 □

3.2. 奇点不变量的应用， $c(X)$ **以及** HRH(X)。 我们沿用~上一小节中的记号，特别是，设定保持不变，且假设 $p\colon Z\to Z$ 是正维光滑簇之间的光滑态射。

我们先来看一个关于交叉上同调的简单应用。

定理 3.3. 对于所有的 $j\in$**整数环**，都有以下同构：

$$H^j_{\mathcal{M}}(\widetilde{X}) \cong \mathrm{IH}^j_{\mathcal{M}}(X) \oplus \left(\bigoplus_{\ell=0}^{d-c_{\widetilde{Z}}} H^{j-n-\ell}_{\mathcal{M}}(\mathbf{V}^{c_Z+\ell}_{\mathcal{M}})\right) \oplus \left(\bigoplus_{\ell=0}^{d-c_{\widetilde{Z}}-1} H^{j-c_Z-c_{\widetilde{Z}}-\ell}_{\mathcal{M}}(\mathbf{V}^{\ell}_{\mathcal{M}})(-c_{\widetilde{Z}})\right).$$

$$H^j_{\mathcal{M},c}(\widetilde{X}) \cong \mathrm{IH}^j_{\mathcal{M},c}(X) \oplus \left(\bigoplus_{\ell=0}^{d-c_{\widetilde{Z}}} H^{j-n-\ell}_{\mathcal{M},c}(\mathbf{V}^{c_Z+\ell}_{\mathcal{M}})\right) \oplus \left(\bigoplus_{\ell=0}^{d-c_{\widetilde{Z}}-1} H^{j-c_Z-c_{\widetilde{Z}}-\ell}_{\mathcal{M},c}(\mathbf{V}^{\ell}_{\mathcal{M}})(-c_{\widetilde{Z}})\right).$$

证明。 回顾一下，推论 3.2 给出了如下分解

$$f_* A^{\mathcal{M}}_{\widetilde{X}}[\dim \widetilde{X}] \cong \mathrm{IC}^{\mathcal{M}}_X \oplus i_*\mathbf{V}^{c_Z}_{\mathcal{M}} \oplus \left(\bigoplus_{\ell=1}^{d-c_{\widetilde{Z}}} \left(i_*\mathbf{V}^{c_Z+\ell}_{\mathcal{M}}[-\ell] \oplus i_*\mathbf{V}^{c_Z+\ell}_{\mathcal{M}}(\ell)[\ell]\right)\right).$$

我们希望将泰特扭转项改写如下：首先，我们将 ℓ 替换为 $d_Z-c_{\widetilde{Z}}-\ell$，得到

$$\bigoplus_{\ell=1}^{d-c_{\widetilde{Z}}} i_*\mathbf{V}^{c_Z+\ell}_{\mathcal{M}}(\ell)[\ell] = \bigoplus_{\ell=0}^{d-c_{\widetilde{Z}}-1} i_*\mathbf{V}^{d+(d_Z-\ell)}_{\mathcal{M}}(d_Z-c_{\widetilde{Z}}-\ell)[d_Z-c_{\widetilde{Z}}-\ell].$$

接下来可以对这些纤维应用硬 Lefschetz 定理，它指出

$$\mathbf{V}^{d+(d_Z-\ell)}_{\mathcal{M}} \cong \mathbf{V}^{d-(d_Z-\ell)}_{\mathcal{M}}(\ell-d_Z),$$

因此我们得到

$$\bigoplus_{\ell=0}^{d-c_{\widetilde{Z}}-1} i_*\mathbf{V}^{d+(d_Z-\ell)}_{\mathcal{M}}(d_Z-c_{\widetilde{Z}}-\ell)[d_Z-c_{\widetilde{Z}}-\ell] \cong \bigoplus_{\ell=1}^{d-c_{\widetilde{Z}}-1} i_*\mathbf{V}^{d-(d_Z-\ell)}_{\mathcal{M}}(-c_{\widetilde{Z}})[d_Z-c_{\widetilde{Z}}-\ell].$$

因此，如果 $a\colon X \to \mathrm{Spec}(k)$ 是结构映射，则对该同构的两边应用 $\mathcal{H}^{j-n}a_*(-)$（分别地，$\mathcal{H}^{j-n}a_!(-)$，利用 f 是射影的），结论便随之成立。□

对于其余的奇点不变量，我们取 $k =$ **曲线 C** $A =$ **有理数域** 和 $\mathcal{M}(X) =$ 混合霍奇模$(X,$ **有理数域**$)$。许多论证与 [CDO25]中的论证完全相同。下面给出的证明将说明如何将此陈述化归为一个可完全按照同上的方式证明的陈述。

推论 3.4. 以下结论成立：

(1) 若 $\delta > 0$ 和 $d > 1$ 或 $\delta > 1$ 和 $d = 1$，则 $c(X) \leq 0$；等式成立当且仅当存在某个（因而任意） $x \in Z$，使得

$$F^{d-b}H^{d-b}(\mathcal{F}_x) = 0 \ for\ 0 \leq b \leq d-1.$$

(2) 若 $\delta = d = 1$，则 $c(X) \geq 0$ 当且仅当 X 是 *CCI*，当且仅当存在某个（因而任意） $x \in Z$，使得

$$H^1(\mathcal{F}_x) = 0.$$

(3) 若 $\delta = 0$，则有 $c(X) \geq k$ 当且仅当存在某个（因而任意） $x \in Z$，使得

$$F^{d-b-k}H^{d-b}_{\mathrm{prim}}(\mathcal{F}_x) = 0 \ for\ all\ 0 < b < d.$$

证明。 根据定义， $c(X) \geq k$ 当且仅当

$$\mathrm{Gr}^F_{p-n}\mathrm{DR}_X(\mathcal{H}^j\mathbf{D}^H_X) = 0$$

对所有 $p \leq k$ 和 $j > 0$均成立。

利用 定理 3.1 的结果，我们可以将这些条件改写为：有 $c(X) \geq k$ 当且仅当对所有 $p \leq k$，消失成立

$$\mathrm{Gr}^F_{p+a+j+1-n}\mathrm{DR}\left(\bigoplus_{a=0}^{\delta} i_*\mathbf{V}^{d-(j-\delta+2a)}_{\mathrm{prim}}\right) = 0 \text{ for all } \delta \leq j \leq c_Z - 2,$$

$$\mathrm{Gr}^F_{p+a+\delta+1-n}\mathrm{DR}\left(\bigoplus_{a=0}^{j} i_*\mathbf{V}^{d-(\delta-j+2a)}_{\mathrm{prim}}\right) = 0 \text{ for all } 0 < j < \delta.$$

利用 i_* 与 DR 可交换这一事实，我们可以将其改写为要求对所有$p \leq k$，消失成立

$$\bigoplus_{a=0}^{\delta} \mathrm{Gr}^F_{p+a+j+1-n}\mathrm{DR}_Z(\mathbf{V}^{d-(j-\delta+2a)}_{\mathrm{prim}}) = 0 \text{ for all } \delta \leq j \leq c_Z - 2,$$

$$\bigoplus_{a=0}^{j} \mathrm{Gr}^F_{p+a+\delta+1-n}\mathrm{DR}_Z(\mathbf{V}^{d-(\delta-j+2a)}_{\mathrm{prim}}) = 0 \text{ for all } 0 < j < \delta.$$

现在，由于每个直和项都是光滑簇上的霍奇模，这些条件还等价于（利用 引理 2.14 以及 $d_Z - n = -c_Z$这一事实）：

$$F_{k+a+j+1-c_Z}\mathbf{V}^{d-(j-\delta+2a)}_{\mathrm{prim}} = 0 \text{ for all } 0 \leq a \leq \delta \leq j \leq c_Z - 2,$$

$$F_{k+a+\delta+1-c_Z}\mathbf{V}^{d-(\delta-j+2a)}_{\mathrm{prim}} = 0 \text{ for all } 0 \leq a \leq j < \delta,$$

其中我们只考虑$0 < j \leq c_Z - 2$。

现在，由于这是霍奇结构变分，消失等价于任意给定纤维的同一消失。通过改写以遵循霍奇结构采用递减 Hodge 过滤的惯例，我们看到 $c(X) \geq k$ 等价于某个（因而也等价于任意一个） $x \in Z$的消失：

$$F^{c_Z-k-a-j-1}H^{d-(j-\delta+2a)}_{\mathrm{prim}}(\mathcal{F}_x) = 0 \text{ for all } 0 \leq a \leq \delta \leq j \leq c_Z - 2,$$

$$F^{c_Z-k-a-\delta-1}H^{d-(\delta-j+2a)}_{\mathrm{prim}}(\mathcal{F}_x) = 0 \text{ for all } 0 \leq a \leq j < \delta,$$

这里再次只考虑 $0 < j \leq c_Z - 2$。此时，证明与 [CDO25，推论 37], 的证明完全相同，唯一的区别在于 c_Z 取代了 n。□

推论 3.5。在上述设定下，以下结论成立：

(1) 若 $\delta > 0$，则 $c(X) \geq 0$ 等价于 $\mathrm{HRH}(X) = 0$。*(2)* 若 $\delta = 0$，则当且仅当 $c(X) \geq k$ 时，$\mathrm{HRH}(X) \geq k$ 成立；此外，对于某个（因而对于任意） $x \in Z$，有

$$F^{d-k}H^d_{\mathrm{prim}}(\mathcal{F}_x) = 0.$$

证明。簇 X 满足 $\mathrm{HRH}(X) \geq k$，如果 $c(X) \geq k$，并且此外，

$$\mathrm{Gr}^F_{p-n}\mathrm{DR}_X(\mathcal{H}^0\mathbf{D}^H_X/\mathrm{IC}^H_X) = 0$$

对所有 $p \leq k$。根据定理 3.1，这等价于

$$\mathrm{Gr}^F_{p-n}\mathrm{DR}(i_*\mathbf{V}^{d-\delta}_{\mathrm{prim}}(-\delta-1)) = 0 \text{ for all } p \leq k,$$

或者用与上述类似的推理，

$$F_{k+\delta+1-c_Z}\mathbf{V}^{d-\delta}_{\mathrm{prim}} = 0,$$

这等价于

$$F^{c_Z-k-\delta-1}H^{d-\delta}_{\mathrm{prim}}(\mathcal{F}_x) = F^{d-k}H^{d-\delta}_{\mathrm{prim}}(\mathcal{F}_x) = 0$$

对于某个e（因此任意） $x \in Z$。此时，证明与 [CDO25，推论 3.8类似]. □

3.3. 关于计算 Hodge-Lyubeznik 数的应用。 我们沿用前两个小节中的记号。接下来我们的目标是计算 $\lambda^{p,q}_{r,s}(\mathcal{O}_{X,x})$，其中点为$x \in X$。注意，(交) Hodge-Lyubeznik 数只有对点 $x \in X_{\mathrm{nRS}}$ 才有意义。因此假设 $X_{\mathrm{nRS}} \neq \emptyset$，此时 $X_{\mathrm{nRS}} = Z$。

定理 3.6。 设 $x \in Z$。则以下陈述成立：

(1) If $s < n$, then we have that $\lambda^{p,q}_{r,s}(\mathcal{O}_{X,x})$ is non-zero only for

$$r = d_Z \text{ and } p + q = -s + 1 + d_Z,$$

在这种情况下，我们有等式

$$\lambda^{p,q}_{d_Z,s}(\mathcal{O}_{X,x}) = \begin{cases} \sum_{a=0}^{\delta} h^{-q-a,-p-a}_{\mathrm{prim}}(\mathcal{F}_x) & n-s \geq \delta \\ \sum_{a=0}^{n-s} h^{n-s-\delta-q-a,n-s-\delta-p-a}_{\mathrm{prim}}(\mathcal{F}_x) & n-s < \delta \end{cases}.$$

(2) 对于 $s = n$，我们有 $\lambda^{p,q}_{r,n}(\mathcal{O}_{X,x}) = 0$ 对于 $r \leq d_Z + 1$。对于 $r \geq d_Z + 2$，我们有

$$\lambda^{p,q}_{r,n}(\mathcal{O}_{X,x}) = \mathrm{I}\lambda^{p,q}_r(\mathcal{O}_{X,x}).$$

(3) 相交*Hodge-Lyubeznik*数仅在以下情况下非零

$$r \geq d_Z + 1 \ \textit{and}\ p+q = r-n,$$

并由下式给出：

$$\mathrm{I}\lambda_r^{p,q}(\mathcal{O}_{X,x}) = \begin{cases} \sum_{a=0}^{\delta} h_{\mathrm{prim}}^{-q-a,-p-a}(\mathcal{F}_x) & r - d_Z > \delta \\ \sum_{a=0}^{r-d_Z-1} h_{\mathrm{prim}}^{d-a+p,d-a+q}(\mathcal{F}_x) & r - d_Z \leq \delta \end{cases}.$$

证明。令 $x \in Z$ 并设 $i_x\colon \{x\} \to X$ 和 $\iota_x\colon \{x\} \to Z$ 为嵌入。首先，对于 $s < n$，我们可以使用 推论 3.2。我们有

$$\begin{aligned} i_x^! \mathcal{H}^{n-s}\mathbf{D}_X^H(n) &\cong \begin{cases} \bigoplus_{a=0}^{\delta} i_x^! i_* \mathbf{V}_{\mathrm{prim}}^{d-(n-s-\delta+2a)}(s-a-1) & n-s \geq \delta \\ \bigoplus_{a=0}^{n-s} i_x^! i_* \mathbf{V}_{\mathrm{prim}}^{d-(\delta-n+s+2a)}(n-\delta-a-1) & n-s < \delta \end{cases} \\ &= \begin{cases} \bigoplus_{a=0}^{\delta} \iota_x^! \mathbf{V}_{\mathrm{prim}}^{d-(n-s-\delta+2a)}(s-a-1) & n-s \geq \delta \\ \bigoplus_{a=0}^{n-s} \iota_x^! \mathbf{V}_{\mathrm{prim}}^{d-(\delta-n+s+2a)}(n-\delta-a-1) & n-s < \delta \end{cases} \end{aligned}$$

它仅在 $0 < n-s \leq c_Z - 2$ 时非零。因此，我们只需考虑 $d_Z + 2 \leq s < n$。根据例 2.13，这与下式同构

$$\begin{cases} \bigoplus_{a=0}^{\delta} H_{\mathrm{prim}}^{d-(n-s-\delta+2a)}(\mathcal{F}_x)(s-a-1-d_Z)[-d_Z] & n-s \geq \delta \\ \bigoplus_{a=0}^{n-s} H_{\mathrm{prim}}^{d-(\delta-n+s+2a)}(\mathcal{F}_x)(c_Z-\delta-a-1)[-d_Z] & n-s < \delta \end{cases}$$

因此我们看到，对于 $s < n$，λ^p 消失，$r_{s,}^{\ q}(\mathcal{O}_{X,\ x}) = 0$，除非 $r = d_Z$。如果 $r = d_Z$，我们得到

$$\begin{aligned} \lambda_{d_Z,s}^{p,q}(\mathcal{O}_{X,x}) &= \begin{cases} \sum_{a=0}^{\delta} \dim_{\mathbf{C}} \mathrm{Gr}_{-p}^F \mathrm{Gr}_{p+q}^W H_{\mathrm{prim}}^{d-(n-s-\delta+2a)}(\mathcal{F}_x)(s-a-1-d_Z) & n-s \geq \delta \\ \sum_{a=0}^{n-s} \dim_{\mathbf{C}} \mathrm{Gr}_{-p}^F \mathrm{Gr}_{p+q}^W H_{\mathrm{prim}}^{d-(\delta-n+s+2a)}(\mathcal{F}_x)(c_Z-\delta-a-1) & n-s < \delta \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sum_{a=0}^{\delta} \dim_{\mathbf{C}} \mathrm{Gr}_{d_Z+a+1-s-p}^F \mathrm{Gr}_{p+q+2(s-a-1-d_Z)}^W H_{\mathrm{prim}}^{d-(n-s-\delta+2a)}(\mathcal{F}_x) & n-s \geq \delta \\ \sum_{a=0}^{n-s} \dim_{\mathbf{C}} \mathrm{Gr}_{a+\delta+1-c_Z-p}^F \mathrm{Gr}_{p+q+2(c_Z-\delta-a-1)}^W H_{\mathrm{prim}}^{d-(\delta-n+s+2a)}(\mathcal{F}_x) & n-s < \delta \end{cases} \end{aligned}$$

根据纯性，它仅在以下情况下非零：

$$\begin{cases} p+q+2(s-a-1-d_Z) = d-(n-s-\delta+2a) & n-s \geq \delta \\ p+q+2(c_Z-\delta-a-1) = d-(\delta-n+s+2a) & n-s < \delta \end{cases}, \tag{13}$$

在这两种情况下，都可以轻松化简为 $p+q = -s+1+d_Z$。

在第一种情况下，我们可以将霍奇滤过的指标写为 $d_Z + a + 1 - s - p = q + a$。在第二种情况下，我们可以将指标写为 $a+\delta+1-c_Z-p = a+q+s+\delta-n$。

要用霍奇双分次重写该表达式，我们首先必须将这些指标取负，然后计算另一个指标（使用等式 (13)）：在第一种情况下，

$$d-(n-s-\delta+2a)+(q+a)=-p-a$$

而在第二种情况下，

$$d-(\delta-n+s+2a)+a+q+s+\delta-n=n-s-\delta-a-p.$$

综上，对于 $s<n$，$\lambda^{p,\,q}_{d_Z,\,s}(\mathcal{O}_{X,\,x})$ 只有在$p+q=-s+1+d_Z$时才可能非零，而在这种情况下，它等于

$$\begin{cases}\sum_{a=0}^{\delta} h^{-q-a,-p-a}_{\mathrm{prim}}(\mathcal{F}_x) & n-s\geq\delta\\ \sum_{a=0}^{n-s} h^{n-s-\delta-q-a,n-s-\delta-p-a}_{\mathrm{prim}}(\mathcal{F}_x) & n-s<\delta\end{cases}.$$

对于 $s=n$，我们希望计算

$$\lambda^{p,q}_{r,n}(\mathcal{O}_{X,x})=\dim_{\mathbf{C}}\mathrm{Gr}^F_{-p}\mathrm{Gr}^W_{p+q}\mathcal{H}^r_x(\mathcal{H}^0\mathbf{D}^H_X(n)),$$

这可以分两步完成。事实上，我们有短正合列

$$0\to\mathrm{IC}^H_X\to\mathcal{H}^0\mathbf{D}^H_X\to i_*\mathbf{V}^{d-\delta}_{\mathrm{prim}}(-\delta-1)\to 0,$$

对此应用 $i^!_{x^\circ}$。由于 $\mathbf{V}^{d-\delta}_{\mathrm{prim}}(-\delta-1)$ 是霍奇结构变分，根据例 2.13 可知

$$i^!_x i_*\mathbf{V}^{d-\delta}_{\mathrm{prim}}(-\delta-1)=\iota^!_x\mathbf{V}^{d-\delta}_{\mathrm{prim}}(-\delta-1)\cong H^{d-\delta}_{\mathrm{prim}}(\mathcal{F}_x)(-\delta-d_Z-1)[-d_Z].$$

因此我们得到正合列

(14) $0\to\mathcal{H}^{d_Z}_x$交叉复形$^H_X\to\mathcal{H}^{d_Z}_x\mathcal{H}^0\mathbf{D}^H_X\to H^{d-\delta}{}_{\mathrm{prim}}(\mathcal{F}_x)(-\delta-d_Z-1)\to\mathcal{H}^{d_Z+1}_x$交叉复形$^H_X\to\mathcal{H}^{d_Z+1}_x\mathcal{H}^0\mathbf{D}^H_X\to 0$,我们将其作 n 泰特扭曲，并且得到同构

$$\mathcal{H}^j_x\mathrm{IC}^H_X(n)\cong\mathcal{H}^j_x\mathcal{H}^0\mathbf{D}^H_X(n)\text{ for all }j\notin\{d_Z,d_Z+1\}. \tag{15}$$

根据定理 3.1，我们有

$$f_*\mathbf{Q}^H_{\widetilde{X}}[n]\simeq\mathrm{IC}^H_X\oplus i_*\mathbf{V}^{c_Z}\oplus\bigoplus_{\ell>0}\left(i_*\mathbf{V}^{c_Z+\ell}[-\ell]\oplus i_*\mathbf{V}^{c_Z+\ell}(\ell)[\ell]\right).$$

结合基变换，应用 i^*_x 分解可得：

$$a_*\mathbf{Q}_{\mathcal{F}_x}[n]\simeq i^*_x\mathrm{IC}^H_X\oplus\iota^*_x\mathbf{V}^{c_Z}\oplus\bigoplus_{\ell>0}\left(\iota^*_x\mathbf{V}^{c_Z+\ell}[-\ell]\oplus\iota^*_x\mathbf{V}^{c_Z+\ell}(\ell)[\ell]\right).$$

取上同调可得

$$H^{n+j}(\mathcal{F}_x)\simeq\mathcal{H}^j i^*_x\mathrm{IC}^H_X\oplus\mathcal{H}^j\iota^*_x\mathbf{V}^{c_Z}\oplus\bigoplus_{\ell>0}\left(\mathcal{H}^{j-\ell}\iota^*_x\mathbf{V}^{c_Z+\ell}\oplus\mathcal{H}^{j+\ell}\iota^*_x\mathbf{V}^{c_Z+\ell}(\ell)\right).$$

对于固定的 j，由 例 2.13 同构

$$H^{n+j}(\mathcal{F}_x)\simeq\begin{cases}\mathcal{H}^j i^*_x\mathrm{IC}^H_X\oplus H^{n+j}(\mathcal{F}_x) & j>-d_Z\\ \mathcal{H}^j i^*_x\mathrm{IC}^H_X\oplus H^{c_Z-d_Z-j}(\mathcal{F}_x)(-d_Z-j) & j<-d_Z\\ \mathcal{H}^{-d_Z} i^*_x\mathrm{IC}^H_X\oplus H^{c_Z}(\mathcal{F}_x) & j=-d_Z\end{cases}$$

我们得出消失的结论

$$\mathcal{H}^j i_x^* \mathrm{IC}_X^H = 0 \text{ for all } j \geq -d_Z.$$

我们关注 $i_x^!$交叉复形$_X^H$，因此必须取对偶。根据纯可极化性，这只需追踪一些泰特扭曲。

由此得出，对所有 $j \leq d_Z$，都有 $\mathcal{H}^j \imath_x^!$交叉复形$_X^H = 0$，并且对所有 $j < -d_Z$，我们都有一个同构

$$H^{n+j}(\mathcal{F}_x)(n+j) \cong \mathcal{H}^{-j} i_x^! \mathrm{IC}_X^H(n) \oplus H^{c_Z - d_Z - j}(\mathcal{F}_x)(c_Z),$$

或者，将 j 取负后，我们得到 $j > d_Z$ 的同构：

$$H^{n-j}(\mathcal{F}_x)(n-j) \cong \mathcal{H}^{j} i_x^! \mathrm{IC}_X^H(n) \oplus H^{c_Z - d_Z + j}(\mathcal{F}_x)(c_Z).$$

如果我们将 $j = d_Z + k$ 写成某个 $k > 0$，那么就得到

$$H^{c_Z - k}(\mathcal{F}_x)(c_Z - k) \cong \mathcal{H}^{d_Z+k} i_x^! \mathrm{IC}_X^H(n) \oplus H^{c_Z + k}(\mathcal{F}_x)(c_Z),$$

根据硬 Lefschetz 定理，我们有满射：

$$c_1(\ell_x)^k \colon H^{c_Z - k}(\mathcal{F}_x)(c_Z - k) \to H^{c_Z + k}(\mathcal{F}_x)(c_Z),$$

从而我们得到一个等同

$$\mathcal{H}^{d_Z+k} i_x^! \mathrm{IC}_X^H(n) \cong \ker \left(c_1(\ell_x)^k \colon H^{c_Z - k}(\mathcal{F}_x) \to H^{c_Z + k}(\mathcal{F}_x)(k) \right) (c_Z - k). \tag{16}$$

通过写作 $c_Z - k = d + \delta - (k-1)$，我们得到 Lefschetz 分解

$$H^{c_Z - k}(\mathcal{F}_x) = \begin{cases} \bigoplus_{a \geq 0} H^{d-(k-1-\delta+2a)}_{\mathrm{prim}}(\mathcal{F}_x)(-a) & k - 1 \geq \delta \\ \bigoplus_{a \geq 0} H^{d-(\delta-k+2a+1)}_{\mathrm{prim}}(\mathcal{F}_x)(k-a-\delta-1) & k - 1 < \delta \end{cases}$$

这使我们可以将等式（16）改写为

$$\mathcal{H}^{d_Z+k} i_x^! \mathrm{IC}_X^H(n) \cong \begin{cases} \bigoplus_{a=0}^{\delta} H^{d-((k-1)-\delta+2a)}_{\mathrm{prim}}(\mathcal{F}_x)(c_Z - k - a) & k > \delta \\ \bigoplus_{a=0}^{k-1} H^{d-(\delta-k+2a+1)}_{\mathrm{prim}}(\mathcal{F}_x)(c_Z - a - \delta - 1) & k \leq \delta \end{cases}. \tag{17}$$

总之，我们有

$$\mathcal{H}^r i_x^! \mathrm{IC}_X^H(n) = \begin{cases} 0 & r \leq d_Z \\ \bigoplus_{a=0}^{\delta} H^{d-(r-d_Z-1-\delta+2a)}_{\mathrm{prim}}(\mathcal{F}_x)(n-r-a) & r - d_Z > \delta \\ \bigoplus_{a=0}^{r-d_Z-1} H^{d-(\delta-r+d_Z+2a+1)}_{\mathrm{prim}}(\mathcal{F}_x)(c_Z - a - \delta - 1) & 0 < r - d_Z \leq \delta \end{cases}.$$

利用对 $r = d_Z$ 的这一计算，$d_Z + 1$我们得到正合列（这只是对正合列（14）的重新表述）

$$0 \to \mathcal{H}_x^{d_Z} \mathcal{H}^0 \mathbf{D}_X^H \to H^{d-\delta}_{\mathrm{prim}}(\mathcal{F}_x)(-\delta - d_Z - 1) \to H^{d-\delta}_{\mathrm{prim}}(\mathcal{F}_x)(-\delta - d_Z - 1) \to \mathcal{H}_x^{d_Z+1} \mathcal{H}^0 \mathbf{D}_X^H \to 0.$$

断言 3.7. 我们有 $\mathcal{H}_x^{d_Z} \mathcal{H}^0$**曲线** $\mathbf{C}_X^H = \mathcal{H}_x^{d_Z+1} \mathcal{H}^0$**曲线** $\mathbf{C}_X^H = 0$。

证明。 为说明这一点，注意到通过比较上述正合列中的维数，只需证明 $\mathcal{H}_x^{d_Z+1}\mathcal{H}^0$**曲线** $\mathbf{C}_X = 0$。为此，考虑谱序列

$$E_2^{p,q} = \mathcal{H}_x^p\mathcal{H}^q\mathbf{D}_X^H \implies \mathcal{H}_x^{p+q}\mathbf{D}_X^H.$$

根据同构（3），我们看到 $\mathcal{H}_x^{p+q}\mathbf{D}_X^H = 0$ 除非 $p+q = n$。因此 $E^{p,q}_\infty = 0$ 对所有 $p+q \neq n$均成立。

另一方面，根据我们上面证明的内容，有 $E^{p,q}_2 = 0$ 除非 $q > 0$ 且$p = d_Z$，或者 $q = 0$ 且 $p \geq d_Z$。于是很容易看出

$$E_2^{d_Z+1,0} = E_\infty^{d_Z+1,0}.$$

由于我们假设 $c_Z \geq 2$，因此有 $d_Z + 1 \neq n$，从而得到消失$\mathcal{H}_x^{d_Z+1}\mathcal{H}^0\mathbf{D}_X^H = E^{d_Z+1,0}_2 = E^{d_Z+1,0}_\infty = 0$。□

对于 $r \geq d_Z + 2$，我们可以像在 $s < n$ 情形中那样进行同样的分析，从而看到$\lambda^{p,q}_{n,r}(\mathcal{O}_{X,x}) \neq 0$ 当且仅当 $p+q = r-n$。我们也可以像上面一样用 Hodge 双分次来改写，不过这里省略这一计算，因为它与上面的计算相同。证明至此完成。□

4. Cohomology and Singularities of Secant Varieties

设 Y 是一个光滑射影簇， L 是其上的 3-very ample线丛，该线丛在 Y 上定义了一个嵌入 $Y \subseteq \mathbf{P}^N$。回顾一下，在这种情况下，我们有如下图表

$$\begin{array}{ccc} \Phi & \longrightarrow & \mathbf{P} \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle t} \\ Y & \xrightarrow{\ i\ } & \Sigma \end{array}, \tag{18}$$

其中 $\mathbf{P} \to \Sigma$ 可识别为沿 Y 对 Σ 进行爆破所得的簇，且这是一个对数消解。我们假设 $\Sigma \neq \mathbf{P}^N$，在这种情况下，我们有 $\Sigma_{\mathrm{sing}} = Y$。还需回顾，$\dim \Sigma = 2\dim Y + 1$。我们沿用小节 2.4.1 中的记号。

4.1. **奇点不变量与 Hodge-Lyubeznik 数**。 爆破图表表明，我们完全了解高阶上同调模 $\mathcal{H}^j\mathbf{D}_\Sigma^{\mathcal{M}}and\mathrm{Gr}^W_{n+1}\mathcal{H}^0\mathbf{D}_\Sigma^{\mathcal{M}}$。下文通过 引理 2.16 证明引言中的 定理 A （取 $k =$**曲线** $\mathbf{C}$ 和 $\mathcal{M}(-) = \mathrm{MHM}(-,$**有理数域**$)$）。

定理 4.1。 在上述设定下，我们有如下结论：

- 假设 $\dim Y \geq 2$，则 *(1)* $\mathit{lcdef}(\Sigma) = \mathit{lcdefgen}(\Sigma) = \mathit{lcdef}^{>0}\mathit{gen}(\Sigma) \in \{\dim Y - 2, \dim Y - 1\}$。我们有 $\mathit{lcdef}(\Sigma) = \dim Y - 1$ 当且仅当 $H^1(Y, \mathcal{O}_Y) \neq 0$。*(2)* Σ*nRS* $= Y$，当 Σ 不是 *CCI* 时，它等于 Σ*nCCI*。*(3)* 对所有 $j > 0$，我们有一个 $\mathcal{M}(\Sigma)$ 中权为 $\dim\Sigma + j + 1$ 的纯对象的同构：*(4)* 我们有 $\mathit{Gr}_i^W\mathcal{H}^0D_\Sigma^{\mathcal{M}} \neq 0 \implies i \in [\dim\Sigma, \dim\Sigma + 1]$，一个同构

$$\mathcal{H}^j\mathbf{D}_\Sigma^{\mathcal{M}} \cong i_*\mathbf{V}^{\dim Y - j}_{\mathcal{M},\mathrm{prim}}(-j-1).$$

$$\mathrm{Gr}^W_{\dim\Sigma+1}\mathcal{H}^0\mathbf{D}_\Sigma^{\mathcal{M}} \cong i_*\mathbf{V}^{\dim Y}_{\mathcal{M},\mathrm{prim}}(-1),$$

以及一个短正合列

$$0 \to \mathrm{IC}_{\Sigma}^{\mathcal{M}} \to \mathcal{H}^0 f_* A_{\mathbf{P}}^{\mathcal{M}}[\dim \Sigma] \to i_* \mathbf{V}_{\mathcal{M}}^{\dim Y+1} \to 0.$$

- 若 Y 是曲线 C，则
  (1) 对数典范缺陷(Σ) $=$ 对数典范缺陷$_{\mathrm{gen}}(\Sigma)$ $=$对数典范缺陷$_{\mathrm{gen}}^{>0}(\Sigma) = 0$。

  (2) 我们有 $\mathrm{Gr}_i^W \mathcal{H}^0 \mathbf{D}_{\Sigma}^{\mathcal{M}} \neq 0 \implies i \in [3,4]$，这是一个同构

  $$\mathrm{Gr}_4^W \mathcal{H}^0 \mathbf{D}_{\Sigma}^{\mathcal{M}} \cong i_*(H^1_{\mathcal{M}}(Y) \boxtimes A_Y^{\mathcal{M}}[1])(-1),$$

  以及一个短正合列

  $$0 \to \mathrm{IC}_{\Sigma}^{\mathcal{M}} \to \mathcal{H}^0 f_* A_{\mathbf{P}}^{\mathcal{M}}[3] \to i_* A_Y^{\mathcal{M}}[1](-1) \to 0.$$

  (3) Σ 是有理同调流形，当且仅当 $Y \cong \mathbf{P}^1$。

证明。 所有结论都由以下等同得出： $\mathcal{H}^j \mathbf{D}_{\Sigma}^{\mathcal{M}}$与族的本原上同调 $\{\mathrm{Bl}_y(Y)\}_{y\in Y}$，随后再由 引理 2.34得出。

对于该等同，我们使用 推论 3.2。

计算 lcdef(Σ) 时，我们使用同构 $\mathcal{H}^j \mathbf{D}_{\Sigma}^{\mathcal{M}} \cong i_* \mathbf{V}_{\mathcal{M}}^{\dim Y - j}$，本原 $(-j-1)$，它仅在 $j \leq$ 维数 $Y-1$时非零。

$j =$ 维 $Y-1$ 对应于 $\mathbf{V}^1_{\mathcal{M},\mathrm{prim}}(-$ 维 $Y)$。由于 H^1 总是本原的，其底层有理数局部系统为 $\{H^1(\mathrm{Bl}_y(Y),$ 有理数域 $)\}_{y\in Y}$。由引理 2.34，我们有等同 $H^1(\mathrm{Bl}_y(Y),$ 有理数域 $) \cong b_y^*(H^1(Y,$ 有理数域 $))$。因此得到所述等价关系。

若 $H^1(Y) = 0$ 且维数 $Y \geq 2$，则 lcdef$(\Sigma) \leq$的维数为$Y-2$。然而，我们总有$\mathcal{H}^{\dim Y-2}\mathbf{D}_{\Sigma}^{\mathcal{M}} \neq 0$。事实上，其底层的 **有理数域**-局部系统为 $\{H^2_{\mathrm{prim}}(\mathrm{Bl}_y(Y),$ **有理数域**$)\}_{y\in Y}$。如引理 2.34所示，它总是非零。

现在，对于 Y 一条曲线，注意$\mathbf{V}^2_{\mathcal{M}}$ 具有取常值$H^2(Y,$ **有理数域**$)$的底层局部系统。这不过是**有理数域**$_Y[1]$。类似地，$\mathbf{V}^1_{\mathcal{M}}$ 具有取常值 $H^1(Y)$的底层**有理数域**-局部系统，由 $H^1(Y)$ $\boxtimes$ **有理数域**$_Y[1]$ 给出。由于对数典范缺陷$(\Sigma) = 0$，我们看到 Σ 是有理同调流形，当且仅当 $\mathrm{Gr}_4^W \mathcal{H}^0 \mathbf{D}_{\Sigma}^{\mathcal{M}} = 0$，当且仅当 $H^1_{\mathcal{M}}(Y) = 0$，按定义这等价于 Y 的亏格为0。□

从现在起，假设 $k =$ **曲线 C** 且 $\mathcal{M}(-) =$ 混合霍奇模$(-,$ **有理数域**$)$。我们对族 p再作一点观察： $\Phi \to Y$。

引理 4.2. *For*任意 $k \in$**整数环**，局部系统

$$\mathbf{V}^k \ and \ \mathbf{V}^k_{\mathrm{prim}}$$

具有平凡单值化。

证明。 只需证明该断言对 $\mathbf{V}^k$成立即可，因为 $\mathbf{V}^k_{\mathrm{prim}}$ 是一个子局部系统。为此，我们使用全局不变循环定理 [Del71，4.1。1]（另见围绕[dCM09，定理 1.2。4]的阐述），该定理表明限制映射的像

$$H^k(\Phi) \to H^k(p^{-1}(y))$$

是纤维的单值化不变部分。照例，我们将 $\Phi \cong \mathrm{Bl}_{\Delta}(Y \times Y)$ 和$p^{-1}(y) \cong \mathrm{Bl}_y(Y)$ 视为相同。我们需要证明限制映射是满射。

根据小节 2.5，我们有

$$H^k(\Phi) \cong b^* H^k(Y \times Y) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{\dim Y - 1} H^{k-2i}(Y) E^i \right),$$

$$H^k(\mathrm{Bl}_y(Y)) \cong b_y^* H^k(Y) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{\dim Y - 1} H^{k-2i}(\{y\}) e^i \right),$$

其中，$E = c_1(\mathcal{O}(E_\Delta))$ 是爆破$\Phi \to Y \times Y$的例外除子的第一陈类；类似地，$e = c_1(\mathcal{O}(E_y))$ 是爆破 $\mathrm{Bl}_y(Y)$ 的例外除子的第一陈类。

我们有 K¨unneth 公式

$$H^k(Y \times Y) \cong \bigoplus_{i=0}^{k} \pi_1^* H^i(Y) \otimes \pi_2^* H^{k-i}(Y),$$

特别地，我们有 $b^* \pi_1^* H^k(Y) \subseteq H^k(\Phi)$。若对其应用 i_y^*，则可利用 $\pi_1 \circ b \circ i_y$: $\mathrm{Bl}_y(Y) \times \{y\} \to Y$ 可识别为 b_y: $\mathrm{Bl}_y(Y) \to Y$，因此可见 $b_y^* H^k(Y)$ 包含在限制映射 i_y^* 的像中。若 $k \notin 2\mathbf{Z} \cap [2, 2\dim Y - 2]$，这就证明了所需的满射性。

假设 $k = 2i$ 且 $1 \le i \le$ 维数$Y - 1$。因此，给定 $e^i \alpha \in e^i \cdot H^{k-2i}(\{y\}) = e^i \cdot$ **有理数域**，我们看到

$$E^i \cdot \alpha \in E^i \cdot H^{k-2i}(Y) = E^i \cdot H^0(Y) = E^i \cdot \mathbf{Q}$$

限制到 $e^i \alpha$，根据陈类在 i_y^* 下的自然性，以及与纤维 Bl 相交$_y(Y)$ 和 E_Δ 得到 E_y (参见类似论证 [OR24，命题 6 的证明。4])。□

定理 4.3 (=定理 H)。 若L 是 *3*-非常丰的，则割线簇满足 *Cappell-Shaneson* 猜想。

证明。 由推论 3.2(3) 可知

$$t_* \mathbf{Q}_{\mathbf{P}}^H [2 \dim Y + 1] \cong \mathrm{IC}_\Sigma^H \oplus i_* \mathbf{V}^{\dim Y + 1} \oplus \left(\bigoplus_{\ell=1}^{\dim Y - 1} \left(i_* \mathbf{V}^{\dim Y + 1 + \ell}[-\ell] \oplus i_* \mathbf{V}^{\dim Y + 1 + \ell}(\ell)[\ell] \right) \right).$$

现在，[AMS25，推论 4。11] 表明，若交叉复形 $\mathrm{IC}_\Sigma^H[-$ 维数 $\Sigma]$ 属于由 Image(K_0(MHM(pt))-子模生成的χ_{Hdg})，则该猜想对 Σ成立。因此，由上述分解和引理 4.2可得该断言。□

推论 4.4 (= 推论 B)。 假设 L 是 *3*-非常丰的，且 $\Sigma \neq \mathbf{P}^N$。那么我们有：

(1) $$c(\Sigma) = \begin{cases} \infty & \dim Y = 1; \text{ or } \dim Y = 2 \text{ and } H^1(Y, \mathcal{O}_Y) = 0, \\ 0 & \dim Y \ge 3 \text{ and } H^i(Y, \mathcal{O}_Y) = 0 \text{ for all } 0 < i < \dim Y, \\ -1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

In particular, $c(\Sigma) \ge 0$ *if and only if* $H^i(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ *for all* $0 < i < \dim Y$.

(2) $$\mathrm{HRH}(\Sigma) = \begin{cases} \infty & Y \cong \mathbf{P}^1, \\ 0 & \dim Y \ge 2 \text{ and } H^i(Y, \mathcal{O}_Y) = 0 \text{ for all } i > 0, \\ -1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

In particular, $\mathrm{HRH}(\Sigma) \ge 0$ *if and only if* $H^i(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ *for all* $i > 0$.

证明。我们利用这样一个事实：纤维 $p^{-1}(y)$ 可以与 $\mathrm{Bl}_Y(Y)$ 等同。

如上所述，条件 $c(\Sigma) \geq k$ 等价于 $F^{\text{维数}Y-k-j}H^{n-j}_{\text{本原}}(\mathrm{Bl}_Y(Y)) = 0$ 对所有 $j > 0$。对于 $j \neq$ 维数 $Y-2$，根据上面的引理 2.34，这等价于 $F^{\text{维数}Y-k-j}H^{\dim Y-j}_{\text{本原}}(Y) = 0$。

对于 $j =$ 维数 $Y-2$，非零元素 $c_1(L)+2(\frac{1}{2}L)^{\dim Y}e$ 属于 $H^{1,1}_{\text{本原}}$，因此属于 $F^1H^2_{\text{prim}}$。所以 $c(\Sigma) < 1$。

注意，霍奇钻石每一行最外侧的项自动是本原的，因此 $c(\Sigma) = 0$ 的条件等价于 $H^{\dim Y-j,0}(Y) = 0$ 对所有 $0 < j <$ 维数 Y 均成立。

假设 $c(\Sigma) = 0$，则根据上述相同的推理，$\mathrm{HRH}(Y) \geq 0$ 的条件等价于消失 $H^{\dim Y,0}(Y) = 0$。

□

注 4.5. 利用 推论 3.4中的计算，还可以证明，当 L 是 3-非常丰且 $\Sigma \neq \mathbf{P}^N$ 时，我们有

$$w(\Sigma) = \begin{cases} \dim Y - 1 - \mu^{\dim Y}_{\text{prim}}(Y) & H^{\dim Y}_{\text{prim}}(Y) \neq 0 \\ \infty & \dim Y \neq 2 \text{ and } H^{\dim Y}_{\text{prim}}(Y) = 0 \\ 0 & \dim Y = 2 \text{ and } H^2_{\text{prim}}(Y) = 0 \end{cases}.$$

特别地，$w(\Sigma) \geq 0$ 当且仅当 $H^{\dim Y}(\mathcal{O}_Y) = 0$。如引言中所述，这改进了 [CS18，定理 1。4]。

最后，我们给出 Hodge-Lyubeznik 数的计算：

推论 4.6 (= 推论 C)。假设 L 是 3-非常丰且 $\Sigma \neq \mathbf{P}^N$。进一步假设$\Sigma_{\mathrm{nRS}} \neq \emptyset$ (等价地 $Y \ncong \mathbf{P}^1$，，由此 $\Sigma_{\mathrm{nRS}} = Y$ 根据 定理 A)。令 $y \in Y \subseteq \Sigma$。则：

(1) 对于 维数$Y + 2 \leq s <$ 维数 Σ，我们有如下等式

$$\lambda^{u,v}_{\dim \Sigma, s}(\mathcal{O}_{\Sigma,y}) = \begin{cases} h^{-v,-u}_{\text{prim}}(Y) & u + v = \dim Y + 1 - s \text{ and } (u,v) \neq (-1,-1) \\ 1 + h^{1,1}_{\text{prim}}(Y) & s = \dim Y + 3 \text{ and } (u,v) = (-1,-1) \end{cases}$$

对于此类 s，其他所有数均为零。

(2) 对于 $s =$ 维数 Σ，*Hodge-Lyubeznik* 数 $\lambda^{u,v}_{r,\text{维数}\Sigma}(\mathcal{O}_{\Sigma,y})$ 可能非零的情形仅为 $r \geq$ 维数$Y + 2$，此时我们有如下等式

$$\lambda^{u,v}_{r,\dim \Sigma}(\mathcal{O}_{\Sigma,y}) = \begin{cases} h^{-v,-u}_{\text{prim}}(Y) & u + v = r - \dim \Sigma, (u,v) \neq (-1,-1), \dim Y \geq 2 \\ 1 + h^{1,1}_{\text{prim}}(Y) & r = \dim \Sigma - 2, (u,v) = (-1,-1), \dim Y \geq 2 \\ 1 & r = 3, (u,v) = (0,0), \dim Y = 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}.$$

(3) 相交*Hodge-Lyubeznik*数可能非零的情形仅为 $r \geq$维数$Y + 1$，此时它们由下式给出：

$$\mathrm{I}\lambda^{u,v}_{r}(\mathcal{O}_{\Sigma,y}) = \begin{cases} h^{-v,-u}_{\text{prim}}(Y) & u + v = r - \dim \Sigma, (u,v) \neq (-1,-1), \dim Y \geq 2 \\ 1 + h^{1,1}_{\text{prim}}(Y) & r = \dim \Sigma - 2, (u,v) = (-1,-1), \dim Y \geq 2 \\ h^1(Y, \mathcal{O}_Y) & (u,v) \in \{(-1,0),(0,-1)\}, r = 2, \dim Y = 1 \\ 1 & r = 3, (u,v) = (0,0), \dim Y = 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}.$$

证明。上述陈述直接由定理 3.6得出。与 Y 的本原上同调的关系由引理 2.34得出。□

4.2. 局部上同调上霍奇滤过的生成层级。我们在此给出 $\mathrm{gl}(\mathcal{H}^j_\Sigma(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N})\ F)$ 的计算，其中 $Y \hookrightarrow \mathbf{P}^N$ 是由 L 确定的嵌入。至此，我们继续假设 $k =$ **曲线 C** 与 $\mathcal{M}(-) =$ 混合霍奇模$(-,$ **有理数域**$)$。我们需要下述

断言 4.7。 $R^i p_* \Omega^{2\dim Y+1-i}_\Phi = \text{维数} \bigoplus_{l=0}^{Y-1} \mathrm{Gr}_F^{\dim Y+1+l-i} H^{\dim Y+l+1}(\mathrm{Bl}_y Y) \otimes \Omega_Y^{\dim Y-l}$。

证明。 应用射影态射 p 的分解定理： $\Phi \to Y$ 可知

$$p_* \mathbf{Q}_\Phi^H[2\dim Y] = \bigoplus_{l=-\dim Y}^{\dim Y} \mathbf{V}^{\dim Y+l}[-l].$$

对 $\mathcal{H}^1 \mathrm{Gr}^F_{-(2\dim Y+1-i)}$两边应用 DR，并使用 引理 4.2，得到

$$\begin{aligned} R^i p_* \Omega^{2\dim Y+1-i}_\Phi &= \bigoplus_{l=-\dim Y}^{\dim Y} \mathcal{H}^{-(l-1)} \mathrm{Gr}^F_{-(2\dim Y+1-i)} \mathrm{DR}(\mathbf{V}^{\dim Y+l}) \\ &= \bigoplus_{l=1}^{\dim Y} \mathcal{H}^{-(l-1)} \mathrm{Gr}^F_{-(2\dim Y+1-i)} \mathrm{DR}(\mathbf{V}^{\dim Y+l}) \\ &= \bigoplus_{l=1}^{\dim Y} \mathrm{Gr}^F_{-(\dim Y-i+l)} H^{\dim Y+l}(\mathrm{Bl}_y Y) \otimes \Omega_Y^{\dim Y-l+1} \\ &= \bigoplus_{l=0}^{\dim Y-1} \mathrm{Gr}_F^{\dim Y+1+l-i} H^{\dim Y+l+1}(\mathrm{Bl}_y Y) \otimes \Omega_Y^{\dim Y-l}. \end{aligned}$$

以上完成了断言的证明。 □

C推论 4.8 （= 推论 D）。 假设 L 是 *3*-非常丰的，且 $\Sigma \neq \mathbf{P}^N$。则：

(1) 若 维数$Y \geq 2$ 且 $0 < j \leq$ 对数典范缺陷(Σ)，则有以下等式

$$\mathrm{gl}(\mathcal{H}^{q+j}_\Sigma(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}), F) = \begin{cases} \dim Y - j - \mu_{\mathrm{prim}}^{\dim Y - j}(Y) & j \neq \dim Y - 2 \\ 2 & j = \dim Y - 2, H^2(Y, \mathcal{O}_Y) \neq 0 \\ 1 & j = \dim Y - 2, H^2(Y, \mathcal{O}_Y) = 0 \end{cases}.$$

(2) $$\mathrm{gl}(\mathrm{Gr}^W_{N+q+1} \mathcal{H}^q_\Sigma(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}), F) = \begin{cases} \dim Y - \mu_{\mathrm{prim}}^{\dim Y}(Y) & \dim Y \geq 3 \\ 2 & \dim Y = 2, H^2(Y, \mathcal{O}_Y) \neq 0 \\ 1 & \dim Y = 2, H^2(Y, \mathcal{O}_Y) = 0 \\ 1 & \dim Y = 1, H^1(Y, \mathcal{O}_Y) \neq 0 \\ -\infty & \textit{otherwise } (\textit{i.e., } Y \cong \mathbf{P}^1) \end{cases}.$$

(3) F或对于任意元素，我们有$\mathrm{gl}(\mathcal{H}^q_\Sigma(\Omega_{\mathbf{P}^N}\ F) \leq \dim Y$。

(4) 假设 L 满足 (Q'_p)-性质 （定义 *2.32*），其中 $0 \leq p \leq$ 维数$Y - 1$。那么 *(a)* $\mathrm{gl}($交叉复形$^H_\Sigma(-q)\ F) \leq$ 维数 $Y - p - 1$。

(b) 假设 L 满足 $(Q'_{\dim Y-1})$性质。那么 $\mathrm{gl}(\mathrm{IC}^H_\Sigma(-q)\ F) = 0$且

$$\mathrm{gl}(\mathcal{H}^q_\Sigma(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}), F) = \begin{cases} \max\left\{0, \dim Y - \mu_{\mathrm{prim}}^{\dim Y}(Y)\right\} & \dim Y \geq 3 \\ 2 & \dim Y = 2, H^2(Y, \mathcal{O}_Y) \neq 0 \\ 1 & \dim Y = 2, H^2(Y, \mathcal{O}_Y) = 0 \\ 1 & \dim Y = 1, H^1(Y, \mathcal{O}_Y) \neq 0 \\ 0 & \textit{otherwise } (\textit{i.e., } Y \cong \mathbf{P}^1) \end{cases}.$$

证明。与 引理 2.18中一样，只需计算 $\mathcal{H}^0\mathrm{Gr}_{i-N}^F\mathrm{DR}(-)$。回顾一下，$q = N -$(2 维数 $Y+1$) 表示 Σ 在 $\mathbf{P}^N$中的余维。由 引理 2.16给出的同构为

$$(\mathcal{H}_\Sigma^{q+j}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}), F, W) \cong i_{\Sigma *}\mathcal{H}^j\mathbf{D}_\Sigma^H(-q),$$

其中 $i_\Sigma\colon \Sigma \to \mathbf{P}^N$ 是闭嵌入。

对于 $j>0$，根据 定理 A 可知

$$(\mathcal{H}_\Sigma^{q+j}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}), F) \cong \iota_*\mathbf{V}_{\mathrm{prim}}^{\dim Y-j}(-q-j-1),$$

and

$$(\mathrm{Gr}_{N+q+1}^W\mathcal{H}_\Sigma^q(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}), F) \cong \iota_*\mathbf{V}_{\mathrm{prim}}^{\dim Y}(-q-1),$$

其中 $\iota\colon Y \to \mathbf{P}^N$ 是闭嵌入。

根据 引理 4.2，右侧的局部系统具有平凡的单值化，因此我们得到同构

$$(\mathcal{H}_\Sigma^{q+j}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}), F) \cong \iota_*(H_{\mathrm{prim}}^{\dim Y-j}(\mathrm{Bl}_y(Y)) \boxtimes \mathbf{Q}_Y^H[\dim Y])(-q-j-1) \text{ for } j>0,$$

and

$$(\mathrm{Gr}_{N+q+1}^W\mathcal{H}_\Sigma^q(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}), F) \cong \iota_*(H_{\mathrm{prim}}^{\dim Y}(\mathrm{Bl}_y(Y)) \boxtimes \mathbf{Q}_Y^H[\dim Y])(-q-1).$$

取 $\ell=0$ 同构（5）中的同构，并将霍奇结构上的霍奇滤过改为递减滤过，同时计入泰特扭曲，我们得到同构

$$\mathcal{H}^0\mathrm{Gr}_{i-N}^F\mathrm{DR}(\mathcal{H}_\Sigma^{q+j}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N})\ F) \cong \mathrm{Gr}_F^{N-\dim Y-i-q-j-1}H^{\dim Y-j}_{\text{原始}}(\mathrm{Bl}_y(Y)) \otimes \Omega_Y^{\dim Y} \text{对于 } j>0,$$

$$\mathcal{H}^0\mathrm{Gr}_{i-N}^F\mathrm{DR}(\mathrm{Gr}_{N+q+1}^W\mathcal{H}_\Sigma^q(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N})\ F) \cong \mathrm{Gr}_F^{N-\dim Y-i-q-1}H_{\mathrm{prim}}^{\dim Y}(\mathrm{Bl}_y(Y)) \otimes \Omega_Y^{\dim Y}.$$

现在，$N-$维数$Y-q-1=$维数Y，因此可以将其改写为

$$\mathcal{H}^0\mathrm{Gr}_{i-N}^F\mathrm{DR}(\mathcal{H}_\Sigma^{q+j}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}), F) \cong \mathrm{Gr}_F^{\dim Y-i-j}H_{\mathrm{prim}}^{\dim Y-j}(\mathrm{Bl}_y(Y)) \otimes \Omega_Y^{\dim Y} \text{ for } j>0,$$

$$\mathcal{H}^0\mathrm{Gr}_{i-N}^F\mathrm{DR}(\mathrm{Gr}_{N+q+1}^W\mathcal{H}_\Sigma^q(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}), F) \cong \mathrm{Gr}_F^{\dim Y-i}H_{\mathrm{prim}}^{\dim Y}(\mathrm{Bl}_y(Y)) \otimes \Omega_Y^{\dim Y}.$$

现在，引理 2.18给出

$$\mathrm{gl}(\mathcal{H}_\Sigma^{q+j}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}), F) = \dim Y - j - \mu_{\mathrm{prim}}^{\dim Y-j}(\mathrm{Bl}_y(Y)) \text{ for } j>0,$$

$$\mathrm{gl}(\mathrm{Gr}_{N+q+1}^W\mathcal{H}_\Sigma^q(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}), F) = \dim Y - \mu_{\mathrm{prim}}^{\dim Y}(\mathrm{Bl}_y(Y)).$$

根据引理 2.34，我们看到当维数 $Y \geq 2$ (当对数典范缺陷$(\Sigma) \geq 1$)

$$\mu_{\mathrm{prim}}^\ell(\mathrm{Bl}_y(Y)) = \begin{cases} \mu_{\mathrm{prim}}^\ell(Y) & \ell \neq 2 \\ 0 & \ell=2, \quad H^2(Y,\mathcal{O}_Y) \neq 0 \\ 1 & \ell=2, \quad H^2(Y,\mathcal{O}_Y)=0 \end{cases},$$

由此得到公式 (1) 和 (2)，见推论 D。

为给出 $\mathrm{gl}(\mathcal{H}_\Sigma^q(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N})\ F)$ 的界，我们利用i_*交叉复形$H_\Sigma^H(-q) = W_{N+q}\mathcal{H}_\Sigma^q(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N})$ 的生成层级的界，该界来自引理 2.19。这表明

$$\mathrm{gl}(W_{N+q}\mathcal{H}_\Sigma^q(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}), F) \leq \dim Y,$$

由于 $t\colon \mathbf{P} \to \Sigma$的纤维的最大维数为 $\dim\ Y$。

最后，对短正合列应用 $\mathrm{Gr}_{i-N}^F\mathrm{DR}(-)$

$$0 \to i_*\mathrm{IC}_\Sigma(-q) \to \mathcal{H}_\Sigma^q(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}) \to \mathrm{Gr}_{N+q+1}^W\mathcal{H}_\Sigma^q(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}) \to 0,$$

（这里我们用到了定理 A 的结果，该结果指出，$\mathcal{H}^q_\Sigma(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N})$ 上的权滤过仅在 $N+q$ 和 $N+q+1$处发生跳跃），我们得到正合列

$$\mathcal{H}^0\mathrm{Gr}^F_{i-N}\mathrm{DR}(i_*\mathrm{IC}^H_\Sigma(-q)) \to \mathcal{H}^0\mathrm{Gr}^F_{i-N}\mathrm{DR}(\mathcal{H}^q_\Sigma(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N})) \to \mathrm{Gr}^F_{i-N}\mathrm{DR}(\mathrm{Gr}^W_{N+q+1}\mathcal{H}^q_\Sigma(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N})) \to 0. \tag{19}$$

根据刚才的讨论，当 $i >$ 维 Y时，最左端项为零；又由于 $\mu^{\dim Y}_{\mathrm{prim}}(\mathrm{Bl}_y(Y))$ 非负，我们看到当 $i >$ 维 Y时，最右端项也为零。这表明 $\mathrm{gl}(\mathcal{H}^q_\Sigma(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N})\ F) \le$ 维 Y，如所声称的那样。这就证明了 (3)。

现在假设 L 满足某个 (Q'_p) 性质，其中 $0 \le p \le$ 维 $Y-1$。根据 命题 2.33，我们有

$$R^i t_*\Omega^{2\dim Y+1-i}_{\mathbf{P}}(\log\Phi)(-\Phi) = 0 \text{ for all } i \ge \dim Y - p.$$

因此，正合列

$$0 \to \Omega^{2\dim Y+1-i}_{\mathbf{P}}(\log\Phi)(-\Phi) \to \Omega^{2\dim Y+1-i}_{\mathbf{P}} \to \Omega^{2\dim Y+1-i}_{\Phi} \to 0$$

表明

$$R^i t_*\Omega^{2\dim Y+1-i}_{\mathbf{P}} \cong R^i p_*\Omega^{2\dim Y+1-i}_{\Phi} \text{ for } i \ge \dim Y - p. \tag{20}$$

再次回顾推论 3.2中的 (3)，可知

$$t_*\mathbf{Q}^H_{\mathbf{P}}[2\dim Y+1] \cong \mathrm{IC}^H_\Sigma \oplus i_*\mathbf{V}^{\dim Y+1} \oplus \left(\bigoplus_{\ell=1}^{\dim Y-1}\left(i_*\mathbf{V}^{\dim Y+1+\ell}[-\ell] \oplus i_*\mathbf{V}^{\dim Y+1+\ell}(\ell)[\ell]\right)\right).$$

对两边取 $\mathcal{H}^0\mathrm{Gr}^F_{i-N}\mathrm{DR}$（并考虑泰特扭曲及重新编号），我们得到

$$R^i t_*\Omega^{2\dim Y+1-i}_{\mathbf{P}} \cong \mathcal{H}^0\mathrm{Gr}^F_{i-N}\mathrm{DR}(\mathrm{IC}^H_\Sigma(-q)) \oplus \left(\bigoplus_{l=0}^{\dim Y-1} \mathrm{Gr}_F^{\dim Y+1+l-i} H^{\dim Y+l+1}(\mathrm{Bl}_y Y) \otimes \Omega^{\dim Y-l}_Y\right).$$

应用（20）和断言 4.7，我们得出结论（因为最右边的直和项和左边都是局部自由的）

$$\mathcal{H}^0\mathrm{Gr}^F_{i-N}\mathrm{DR}(\mathrm{IC}^H_\Sigma(-q)) = 0 \text{ for } i > \dim Y - p - 1$$

于是断言 (4)(a) 得证。因此，由正合列（19）及前面的部分，(4)(b) 立即得证。□

4.3. **交叉上同调**。下面我们计算Σ的交叉上同调。请注意，我们的计算适用于任意混合层范畴，尽管 定理 E是针对霍奇结构表述的。因此，本节中我们考虑一种混合层理论$\mathcal{M}(-)$，其定义在 k 上，并令 A 为 $\mathbf{R}$ 的子域。

利用 $\mathbf{P}$ 是一个 $\mathbf{P}^1$-丛，底空间为 $\mathrm{Hilb}^2(Y$，由小节 2.5

$$H^i_{\mathcal{M}}(\mathbf{P}) \cong H^i_{\mathcal{M}}(\mathrm{Hilb}^2(Y)) \oplus H^{i-2}_{\mathcal{M}}(\mathrm{Hilb}^2(Y))(-1)$$

它进一步分解为

$$\begin{aligned} H^i_{\mathcal{M}}(\mathbf{P}) \cong\ & H^i_{\mathcal{M}}(\mathrm{Sym}^2(Y)) \oplus H^{i-2}_{\mathcal{M}}(\mathrm{Sym}^2(Y))(-1) \\ & \oplus \left(\bigoplus_{0<\ell\le\lfloor\frac{i}{2}\rfloor} H^{i-2\ell}_{\mathcal{M}}(Y)(-\ell)\right) \oplus \left(\bigoplus_{0<\ell<\lfloor\frac{i}{2}\rfloor} H^{i-2(\ell+1)}_{\mathcal{M}}(Y)(-\ell-1)\right). \end{aligned} \tag{21}$$

根据同构（12）

$$H^{2k+1}_{\mathcal{M}}(\mathrm{Sym}^2(Y)) \cong \bigoplus_{i\le k} H^i_{\mathcal{M}}(Y)\otimes H^{2k+1-i}_{\mathcal{M}}(Y)$$

$$H^{4k}_{\mathcal{M}}(\mathrm{Sym}^2(Y)) \cong \left(\bigoplus_{i<2k} H^i_{\mathcal{M}}(Y)\otimes H^{4k-i}_{\mathcal{M}}(Y)\right)\oplus \mathrm{Sym}^2(H^{2k}_{\mathcal{M}}(Y))$$

且当 k 为奇数时，我们有

$$H^{2k}_{\mathcal{M}}(\mathrm{Sym}^2(Y)) \cong \left(\bigoplus_{i<k} H^i_{\mathcal{M}}(Y)\otimes H^{2k-i}_{\mathcal{M}}(Y)\right)\oplus \bigwedge^2 H^k_{\mathcal{M}}(Y).$$

利用引理 4.2 和定理 3.3，我们可以从引言中的定理 E 推出结论。在给出证明之前，我们先注意以下几点：

注4.9。定理 E 还原了 [Bro26] 关于曲线的 2-割线簇的计算。事实上，若 $\dim Y = 1$，则对任意 $j \le 3$，公式可简化为

$$\mathrm{IH}^j(\Sigma) = \left(\bigoplus_{\ell=\lceil \frac{j}{2}\rceil+1}^{\min\{j,\dim Y\}} H^\ell_{\mathrm{prim}}(Y)\otimes H^{j-\ell}(Y)\right)\oplus \mathcal{Q}_j,$$

其中 $\mathcal{Q}_j$ 取决于 j 的类模 4。然而，第一个直和恒为 0：对于 $j=0$，这显然成立；对于 $j\ge 1$，我们有 $\lceil \frac{j}{2}\rceil \ge 1$，但此时区间 $[\lceil \frac{j}{2}\rceil+1, 1]$ 为空。

若 $j=2k+1$ 为奇数且 $k=0$，则 $\mathcal{Q}_j = H^k(Y)\otimes H^{k+1}(Y)$。若 $j=4k$ 对于 $k=0$ 或 $k=1$成立，则 $\mathcal{Q}_j =$ 对称幂$^2H^{2k}(Y) =$ **有理数域** $^H(-2k)$。最后，若 $j=2$，则 $\mathcal{Q}_j =$ 对称幂$^2H^0(Y)(-1) \oplus \bigwedge^2 H^1(Y)$。

回顾定理 E在引言中的表述：

定理 4.10 (= 定理 E)。 假设 L 是 *3*-非常丰的，并且 $\Sigma \neq \mathbf{P}^N$。那么对于所有$j \le 2\dim Y+1 = \dim \Sigma$，我们有以下纯权$j$ 霍奇结构的（非典范）同构：

$$\mathrm{IH}^j(\Sigma) \cong \bigoplus_{\ell=1}^{\dim Y-1} H^{j-2\ell}(Y)(-\ell) \oplus \bigoplus_{\ell=\lceil \frac{j}{2}\rceil+1}^{\min\{j,\dim Y\}} \left(H^\ell_{\mathrm{prim}}(Y)\otimes H^{j-\ell}(Y)\right)\oplus \mathcal{Q}_j,$$

其中 $\mathcal{Q}_j$ 取决于 j 模4 的类，如下所示：

$$\mathcal{Q}_j = \begin{cases} H^k(Y)\otimes H^{k+1}(Y) & \text{if } j=2k+1 \text{ is odd;}\\ \bigwedge^2 H^{2k-1}(Y)(-1)\oplus \mathrm{Sym}^2 H^{2k}(Y) & \text{if } j=4k;\\ \mathrm{Sym}^2 H^{k-1}(Y)(-1)\oplus \bigwedge^2 H^k(Y) & \text{if } j=2k \text{ with } k \text{ odd.}\end{cases}$$

证明。 由（21），我们得到一种关于 $H^j_{\mathcal{M}}(\mathbf{P})$ 的描述，它用到了 $\mathrm{Sym}^2(Y)$ 的上同调以及 Y 的上同调。

通过分解定理，我们可以得到另一个涉及 IH 的描述$^j_{\mathcal{M}}(\Sigma)$。事实上，根据定理 3.3，我们有

$$H^j_{\mathcal{M}}(\mathbf{P}) \cong \mathrm{IH}^j_{\mathcal{M}}(\Sigma)\oplus\left(\bigoplus_{\ell=0}^{\dim Y-1} H^{j-\dim\Sigma-\ell}_{\mathcal{M}}(\mathbf{V}^{\dim Y+1+\ell})\right)\oplus\left(\bigoplus_{\ell=0}^{\dim Y-2} H^{j-\dim Y-2-\ell}_{\mathcal{M}}(\mathbf{V}^\ell)(-1)\right).$$

根据权为 j 的纯霍奇结构范畴的半单性，只需比较

$$\left(\bigoplus_{\ell=0}^{\dim Y-1} H_{\mathcal{M}}^{j-\dim\Sigma-\ell}(\mathbf{V}^{\dim Y+1+\ell})\right)\oplus\left(\bigoplus_{\ell=0}^{\dim Y-2} H_{\mathcal{M}}^{j-\dim Y-2-\ell}(\mathbf{V}^{\ell})(-1)\right)$$

根据 $H^j_{\mathcal{M}}(\mathbf{P})$21中的描述。为此，我们必须计算局部系统$\mathbf{V}^\ell$的上同调。

根据引理 4.2，我们有同构

$$\mathbf{V}^k\cong\begin{cases}\left(H^k_{\mathcal{M}}(Y)\otimes A_Y^{\mathcal{M}}\right)\oplus A_Y^{\mathcal{M}}(-\frac{k}{2}) & k\in 2\mathbf{Z}\cap[2,2\dim(Y)-2]\\ H^k_{\mathcal{M}}(Y)\otimes A_Y^{\mathcal{M}} & \text{otherwise}\end{cases},$$

因此，对于 $\ell\geq 0$，我们有同构（下文的“情形 1a”表示 $\dim Y+\ell+1\in$2整数环 $\cap[\dim\ Y+1,\ 2\dim\ Y-2]$）

$$H_{\mathcal{M}}^{j-\dim\Sigma-\ell}(\mathbf{V}^{\dim Y+1+\ell})=\begin{cases}\left(H_{\mathcal{M}}^{\dim Y+1+\ell}(Y)\otimes H_{\mathcal{M}}^{j-\ell-\dim Y-1}(Y)\right)\oplus H_{\mathcal{M}}^{j-\ell-\dim Y-1}(Y)(\underline{^{-\ell-\dim Y-1}_{2}}\text{曲线 C} & \text{情形 1a}\\ H_{\mathcal{M}}^{\dim Y+1+\ell}(Y)\otimes H_{\mathcal{M}}^{j-\ell-\dim Y-1}(Y)\text{不} & \text{然}\end{cases}$$

且（其中“情形 1b”表示 $\ell\in$2整数环 $\cap[2,$维数 $Y-1]$）

$$H_{\mathcal{M}}^{j-\dim Y-2-\ell}(\mathbf{V}^{\ell})=\begin{cases}\left(H^{\ell}_{\mathcal{M}}(Y)\otimes H^{j-2-\ell}_{\mathcal{M}}(Y)\right)\oplus H^{j-2-\ell}_{\mathcal{M}}(Y)(-\frac{\ell}{2}) & \text{Case 1b}\\ H^{\ell}_{\mathcal{M}}(Y)\otimes H^{j-2-\ell}_{\mathcal{M}}(Y) & \text{otherwise}\end{cases}.$$

我们先处理特殊情形：对于第一个直和，我们有

$$\bigoplus_{\dim Y+\ell\in(2\mathbf{Z}+1)\cap[\dim Y,2\dim Y-3]} H_{\mathcal{M}}^{j-\ell-\dim Y-1}(Y)\left(\frac{-\ell-\dim Y-1}{2}\right),$$

因此，如果我们写作 $\dim Y+\ell=2k+1$，则可得

$$\bigoplus_{k=\lceil\frac{\dim Y-1}{2}\rceil}^{\dim Y-2} H_{\mathcal{M}}^{j-(2k+1)-1}(Y)\left(\frac{-(2k+1)-1}{2}\right)=\bigoplus_{k=\lceil\frac{\dim Y-1}{2}\rceil}^{\dim Y-2} H_{\mathcal{M}}^{j-2(k+1)}(Y)\,(-k-1)\,.$$

在第二个直和中，我们有（其中等式可通过令 $\ell=2k$ ）

$$\bigoplus_{\ell\in 2\mathbf{Z}\cap[2,\dim Y-1)} H_{\mathcal{M}}^{j-2-\ell}(Y)\left(\frac{-\ell}{2}\right)=\bigoplus_{k\in[1,\lfloor\frac{\dim Y-1}{2}\rfloor)} H_{\mathcal{M}}^{j-2(k+1)}(Y)\,(-k)\,.$$

因此，当我们取两项的直和（在第二个直和上施加 (-1) 的泰特扭曲）时，得到

$$\bigoplus_{k=1}^{\dim Y-2} H_{\mathcal{M}}^{j-2(k+1)}(Y)(-k-1).$$

这个直和正是使用$H^j_{\mathcal{M}}$（$\mathbf{P}$）21）时描述中出现的直和之一，因此我们可以将其从两种描述中删除。

我们最终的目标是比较

$$\left(\bigoplus_{\ell=0}^{\dim Y-1} H_{\mathcal{M}}^{\dim Y+1+\ell}(Y)\otimes H_{\mathcal{M}}^{j-\dim Y-1-\ell}(Y)\right)\oplus\left(\bigoplus_{\ell=0}^{\dim Y-2} H^{\ell}_{\mathcal{M}}(Y)\otimes H^{j-2-\ell}_{\mathcal{M}}(Y)(-1)\right)$$

with

$$H^j_{\mathcal{M}}(\mathrm{Sym}^2(Y)) \oplus H^{j-2}_{\mathcal{M}}(\mathrm{Sym}^2(Y))(-1) \oplus \left(\bigoplus_{0<\ell\le\lfloor \frac{i}{2}\rfloor} H^{i-2\ell}_{\mathcal{M}}(Y)(-\ell) \right),$$

不过实际上，我们只需与 $H^j_{\mathcal{M}}$(对称幂$^2(Y)$) $\oplus H^{j-2}_{\mathcal{M}}$ (对称幂$^2(Y)$)(-1) 进行比较。

此时，我们将按照定理陈述分为三种情形。

情形 1： $j = 2k+1$。那么直和

$$\bigoplus_{\ell=0}^{\dim Y-1} H^{\dim Y+1+\ell}_{\mathcal{M}}(Y) \otimes H^{j-\dim Y-1-\ell}_{\mathcal{M}}(Y) = \bigoplus_{\ell=\dim Y+1}^{2\dim Y} H^{\ell}_{\mathcal{M}}(Y) \otimes H^{j-\ell}_{\mathcal{M}}(Y)$$

是最简单的。事实上，我们有

$$H^j_{\mathcal{M}}(\mathrm{Sym}^2(Y)) = \bigoplus_{i=k+1}^{2k+1} H^i_{\mathcal{M}}(Y) \otimes H^{2k+1-i}_{\mathcal{M}}(Y),$$

因此，去掉所关注的直和后，剩下

$$\bigoplus_{i=k+1}^{\min\{j,\dim Y\}} H^i_{\mathcal{M}}(Y) \otimes H^{2k+1-i}_{\mathcal{M}}(Y).$$

类似地，为了处理直和

$$\bigoplus_{\ell=0}^{\dim Y-2} H^{\ell}_{\mathcal{M}}(Y) \otimes H^{j-2-\ell}_{\mathcal{M}}(Y)(-1),$$

我们可以考虑 $H^{j-2}_{\mathcal{M}}$ (Sym$^2(Y)$)(-1) $= H^{2(k-1)+1}_{\mathcal{M}}$ (Sym$^2(Y)$)(-1)。如上所述，这等于

$$\bigoplus_{i\le k-1} H^i_{\mathcal{M}}(Y) \otimes H^{2k-1-i}_{\mathcal{M}}(Y)(-1),$$

因此，我们需要比较

$$\bigoplus_{\ell=k}^{\dim Y-2} H^{\ell}_{\mathcal{M}}(Y) \otimes H^{2k-1-\ell}_{\mathcal{M}}(Y)(-1) \text{ with } \bigoplus_{i=k+1}^{\min\{j,\dim Y\}} H^i_{\mathcal{M}}(Y) \otimes H^{2k+1-i}_{\mathcal{M}}(Y).$$

由于 $\ell \le \dim Y - 2$，我们有 Lefschetz 分解

$$H^{\ell+2}_{\mathcal{M}}(Y) = H^{\ell+2}_{\mathcal{M},\mathrm{prim}}(Y) \oplus H^{\ell}_{\mathcal{M}}(Y)(-1),$$

因此我们看到，我们感兴趣的直和是以下对象的一个直和项

$$\bigoplus_{\ell=k}^{\dim Y-2} H^{\ell+2}_{\mathcal{M}}(Y) \otimes H^{2k-1-\ell}_{\mathcal{M}}(Y) = \bigoplus_{\ell=k+2}^{\dim Y} H^{\ell}_{\mathcal{M}}(Y) \otimes H^{2k+1-\ell}_{\mathcal{M}}(Y),$$

最后，我们可以将其约去，从而得到定理陈述中的描述。**情形 2：** $j = 4k$。那么直和

$$\bigoplus_{\ell=0}^{\dim Y-1} H^{\dim Y+1+\ell}_{\mathcal{M}}(Y) \otimes H^{j-\dim Y-1-\ell}_{\mathcal{M}}(Y) = \bigoplus_{\ell=\dim Y+1}^{2\dim Y} H^{\ell}_{\mathcal{M}}(Y) \otimes H^{j-\ell}_{\mathcal{M}}(Y)$$

再次成为 $H^j_{\mathcal{M}}(\mathrm{Sym}^2(Y))$ 的一个直和项。事实上，我们有

$$H^j_{\mathcal{M}}(\mathrm{Sym}^2(Y)) = \left(\bigoplus_{i=2k+1}^{4k} H^i_{\mathcal{M}}(Y) \otimes H^{4k-i}_{\mathcal{M}}(Y) \right) \oplus \mathrm{Sym}^2 H^{2k}_{\mathcal{M}}(Y),$$

因此，移除该直和并忽略 $\mathrm{Sym}^2 H^{2k}_{\mathcal{M}}(Y)$ 后，我们剩下

$$\bigoplus_{i=2k+1}^{\min\{j,\dim Y\}} H^i_{\mathcal{M}}(Y) \otimes H^{4k-i}_{\mathcal{M}}(Y).$$

同样地，为了处理直和

$$\bigoplus_{\ell=0}^{\dim Y-2} H^\ell_{\mathcal{M}}(Y) \otimes H^{j-2-\ell}_{\mathcal{M}}(Y)(-1),$$

我们可以考虑 $H^{j-2}_{\mathcal{M}}(\mathrm{Sym}^2(Y))(-1) = H^{2(2k-1)}_{\mathcal{M}}(\mathrm{Sym}^2(Y))(-1)$。上文已经看到，这等于

$$\left(\bigoplus_{i<2k-1} H^i_{\mathcal{M}}(Y) \otimes H^{4k-2-i}_{\mathcal{M}}(Y)(-1) \right) \oplus \bigwedge^2 H^{2k-1}_{\mathcal{M}}(Y).$$

正如定理陈述所提示的，我们将忽略 $\bigwedge^2 H^{2k-1}_{\mathcal{M}}(Y)$，并约去我们所关注的直和中的第一个直和，因此需要比较

$$\bigoplus_{\ell=2k-1}^{\dim Y-2} H^\ell_{\mathcal{M}}(Y) \otimes H^{4k-2-\ell}_{\mathcal{M}}(Y)(-1) \text{ with } \bigoplus_{i=2k+1}^{\min\{j,\dim Y\}} H^i_{\mathcal{M}}(Y) \otimes H^{4k-i}_{\mathcal{M}}(Y).$$

由于 $\ell \leq \dim Y - 2$，我们有 Lefschetz 分解

$$H^{\ell+2}_{\mathcal{M}}(Y) = H^{\ell+2}_{\mathcal{M},\mathrm{prim}}(Y) \oplus H^\ell_{\mathcal{M}}(Y)(-1),$$

and，因此我们看到，我们感兴趣的直和是.....的一个直和项

$$\bigoplus_{\ell=2k-1}^{\dim Y-2} H^{\ell+2}_{\mathcal{M}}(Y) \otimes H^{4k-2-\ell}_{\mathcal{M}}(Y) = \bigoplus_{\ell=2k+1}^{\dim Y} H^\ell_{\mathcal{M}}(Y) \otimes H^{4k-\ell}_{\mathcal{M}}(Y),$$

and 最后我们可以将其消去，从而得到定理陈述中的描述 .

情形 3： $j = 2k$ **且** k **为奇数**。然后，如上所述，我们首先去掉直和

$$\bigoplus_{\ell=0}^{\dim Y-1} H^{\dim Y+1+\ell}_{\mathcal{M}}(Y) \otimes H^{j-\dim Y-1-\ell}_{\mathcal{M}}(Y)$$

从 $H^j_{\mathcal{M}}(\text{对称幂}^2(Y))$ 中。事实上，我们有

$$H^j_{\mathcal{M}}(\mathrm{Sym}^2(Y)) = \bigoplus_{i=k+1}^{2k} H^i_{\mathcal{M}}(Y) \otimes H^{2k-i}_{\mathcal{M}}(Y) \otimes \bigwedge^2 H^k_{\mathcal{M}}(Y),$$

因此，去掉前面提到的直和并忽略 $\bigwedge^2 H^k_{\mathcal{M}}(Y)$ 后，我们得到

$$\bigoplus_{i=2k+1}^{\min\{j,\dim Y\}} H^i_{\mathcal{M}}(Y) \otimes H^{2k-i}_{\mathcal{M}}(Y).$$

类似地，为了处理直和

$$\bigoplus_{\ell=0}^{\dim Y-2} H^{\ell}_{\mathcal{M}}(Y)\otimes H^{j-2-\ell}_{\mathcal{M}}(Y)(-1),$$

我们可以考虑 $H^{j-2}_{\mathcal{M}}(\mathrm{Sym}^2(Y))(-1) = H^{2(k-1)}_{\mathcal{M}}(\mathrm{Sym}^2(Y))(-1)$。上文已经看到，这等于

$$\bigoplus_{i<k-1} H^{i}_{\mathcal{M}}(Y)\otimes H^{2(k-1)-i}_{\mathcal{M}}(Y)(-1)\oplus \mathrm{Sym}^2 H^{k-1}_{\mathcal{M}}(Y)(-1),$$

因此我们需要比较

$$\bigoplus_{\ell=k-1}^{\dim Y-2} H^{\ell}_{\mathcal{M}}(Y)\otimes H^{2k-\ell}_{\mathcal{M}}(Y)(-1) \text{ with } \bigoplus_{i=2k+1}^{\min\{j,\dim Y\}} H^{i}_{\mathcal{M}}(Y)\otimes H^{2k-i}_{\mathcal{M}}(Y).$$

由于 $\ell \le \dim Y-2$，我们有 Lefschetz 分解

$$H^{\ell+2}_{\mathcal{M}}(Y) = H^{\ell+2}_{\mathcal{M},\mathrm{prim}}(Y)\oplus H^{\ell}_{\mathcal{M}}(Y)(-1),$$

因此我们看到，我们感兴趣的直和是以下对象的一个直和项

$$\bigoplus_{\ell=k-1}^{\dim Y-2} H^{\ell+2}_{\mathcal{M}}(Y)\otimes H^{2(k-1)-\ell}_{\mathcal{M}}(Y) = \bigoplus_{\ell=k+1}^{\dim Y} H^{\ell}_{\mathcal{M}}(Y)\otimes H^{2k-\ell}_{\mathcal{M}}(Y),$$

and 最后，我们可以将其约去，从而得到定理陈述中的描述 . □

注 4.11。 按照 $\mathcal{M}(-)$ 中例 2.1的设定，我们看到 定理 E 陈述中的同构实际上是 G =伽罗瓦群(k/k)-表示的同构。

4.4. **奇异上同调**。 现在我们来计算 Σ与具有 3-非常丰线丛的光滑射影簇 Y 相关联的直线割线簇的奇异上同调L。我们沿用第 4 节前几个小节中的记号，并回顾图表：

$$\begin{array}{ccccccc} F_y := \mathrm{Bl}_y Y & \longrightarrow & \Phi & \longrightarrow & \mathbf{P} & & \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle t} & \searrow{\scriptstyle \beta} & \\ \{y\} & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{i} & \Sigma & \xrightarrow{i_\Sigma} & \mathbf{P}^N \end{array} \qquad \iota : Y \to \mathbf{P}^N$$

定理4.12 (= 定理 F)。 假设 L 是 *3*-非常丰的，且 $\Sigma \neq \mathbf{P}^N$。那么，对所有 $j>0$，都有 $\mathrm{Gr}^W_w H^j(\Sigma) = 0$ 对所有 $w \notin \{j-1, j\}$，并且存在混合霍奇结构的（非典范）同构

$$\bigoplus_{j\in\mathbf{Z}} \mathrm{Gr}^W_{j-1} H^j(\Sigma) \cong \bigoplus_{\substack{\ell \text{ odd}\\ a\le \dim Y-\ell}} \mathrm{Sym}^2 P_\ell(-a) \oplus \bigoplus_{\substack{0<\ell \text{ even}\\ a\le \dim Y-\ell}} \bigwedge^2 P_\ell(-a) \oplus \bigoplus_{\substack{0<\ell_1<\ell_2\\ a\le \dim Y-\ell_2}} P_{\ell_1}\otimes P_{\ell_2}(-a),$$

and

$$\bigoplus_{j\in\mathbf{Z}} \mathrm{Gr}_j^W H^j(\Sigma) \cong \left(\bigoplus_j \bigoplus_{k=1}^{\dim Y-1} H^{j-2-2k}(Y)(-k-1)\right) \oplus \bigoplus_{0\le a\le 2\dim Y+1} \mathbf{Q}^H(-a)$$
$$\oplus \bigoplus_{\substack{\ell_1<\ell_2\\ a\le \dim Y-\ell_2}} P_{\ell_1}\otimes P_{\ell_2}(\ell_1-\dim Y-a-1)$$
$$\oplus \bigoplus_{\substack{0<\ell \text{ even}\\ \dim Y-\ell<a\le 2(\dim Y-\ell)+1}} \mathrm{Sym}^2 P_\ell(-a) \oplus \bigoplus_{\substack{\ell \text{ odd}\\ \dim Y-\ell<a\le 2(\dim Y-\ell)+1}} \bigwedge^2 P_\ell(-a).$$

证明。 图表中间的笛卡尔方给出一个正合三角（[PS08，推论 A.14]）：

$$H^\bullet_{\mathcal{M}}(\Sigma) \to H^\bullet_{\mathcal{M}}(Y)\oplus H^\bullet_{\mathcal{M}}(\mathbf{P}) \to H^\bullet_{\mathcal{M}}(\Phi) \xrightarrow{+1}.$$

注意，包含映射 $\Phi\to\mathbf{P}$ 与向下映射到 Hilb 的映射交换$^2(Y)$ [Ull16，(1.4)]。因此，利用分解

$$H^\bullet_{\mathcal{M}}(\mathbf{P}) = H^\bullet_{\mathcal{M}}(\mathrm{Hilb}^2(Y))\oplus H^{\bullet-2}_{\mathcal{M}}(\mathrm{Hilb}^2(Y))\xi,$$

to 要理解限制 $H^\bullet_{\mathcal{M}}(\mathbf{P})\to H^\bullet_{\mathcal{M}}(\Phi)$，只需理解映射 p

$$H^\bullet_{\mathcal{M}}(\mathrm{Hilb}^2(Y))\to H^\bullet_{\mathcal{M}}(\Phi)$$

以及超平面类 ξ 映射到何处。第一个映射很容易：正如小节2.5中所述，它是一个 $\mathfrak{S}_2$-商映射，因此，在上同调上的映射对应于包含 $\mathfrak{S}_2$-不变量。

对于重言类 ξ，注意映射 β： $\mathbf{P}\to\mathbf{P}^N$满足 $\beta^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}(1)=\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$[Ull16，第 7]页。因此，限制到 Φ 上等同于从 $\mathbf{P}^N$拉回。但我们可以先拉回到 $Y\subseteq\mathbf{P}^N$，然后再沿着 $\Phi\to Y$ 拉回。根据定义， $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}(1)|_Y = L$。因此，如果我们记

$$H^\bullet_{\mathcal{M}}(\Phi) = b^*H^\bullet_{\mathcal{M}}(Y\times Y)\oplus\left(\bigoplus_{k=1}^{\dim Y-1} H^{\bullet-2k}_{\mathcal{M}}(\Delta)E^k\right),$$

其中 $\Delta\subseteq Y\times Y$ 是对角线（胀开的中心）， $E=[E_\Delta]$ 是胀开态射 b: $\Phi\to Y\times Y$ 的例外除子的类，则

$$\xi\mapsto b^*\pi_2^*c_1(L),$$

不含例外部分。此外，根据上文对 $H^\bullet_{\mathcal{M}}(\Phi)$ 的描述，我们看到$\mathfrak{S}_2$-不变量部分为

$$H^\bullet_{\mathcal{M}}(Y\times Y)^{\mathfrak{S}_2}\oplus\left(\bigoplus_{k=1}^{\dim Y-1} H^{\bullet-2k}_{\mathcal{M}}(\Delta)E^k\right),$$

由于 Δ 是 $\mathfrak{S}_2$-不变的（每个点都是不动点），这给出了对$H^\bullet_{\mathcal{M}}(\mathrm{Hilb}^2(Y))$的另一种计算。

我们看到，映射 $H^\bullet_{\mathcal{M}}(\mathrm{Hilb}^2(Y))\to H^\bullet(\mathbf{P})\to H^\bullet_{\mathcal{M}}(\Phi)$ 覆盖了整个直和

$$\bigoplus_{k=1}^{\dim Y-1} H^{\bullet-2k}_{\mathcal{M}}(\Delta)E^k,$$

因此， $H^{\bullet-2}_{\mathcal{M}}(\mathrm{Hilb}^2(Y))\xi$ 中相应的直和必然对核有所贡献。

现在聚焦于剩余的项，我们有

$$\left(H^0_{\mathcal{M}}(Y)\otimes H^\bullet_{\mathcal{M}}(Y)\right)\oplus H^\bullet_{\mathcal{M}}(Y\times Y)^{\mathfrak{S}_2}\oplus H^{\bullet-2}_{\mathcal{M}}(Y\times Y)^{\mathfrak{S}_2}\pi_2^*(c_1(L))\to H^\bullet_{\mathcal{M}}(Y\times Y),$$

其中，在第一项中我们纳入了 $H^0_{\mathcal{M}}(Y)$ 部分，以清楚地说明 $H^\bullet_{\mathcal{M}}(Y)$ 在 K¨unneth 分解下如何映射；我们还用它在拉回映射下所映到的类重写了 ξ 。

我们首先对中间的对象取商，可以将其视为（带符号的）对称张量。回想一下， $\mathfrak{S}_2$-作用的定义方式是：非平凡置换作用于 $v_1\otimes v_2$ （其中 $v_i\in H^{d_i}(Y,\ A)$）时，结果为 $(-1)^{d_1d_2}v_2\otimes v_1$。这样，对称张量就是形如 $v_1\otimes v_2+(-1)^{d_1d_2}v_2\otimes v_1$ 的元素之和。

因此，我们可以将 $H^\bullet(Y\times Y,\ A)$ 分解为对称张量与反对称张量的直和。给定任意简单张量 $v_1\otimes v_2$，这相当于写成

$$v_1\otimes v_2=\left(\frac{v_1\otimes v_2+(-1)^{d_1d_2+1}v_2\otimes v_1}{2}\right)+\left(\frac{v_1\otimes v_2+(-1)^{d_1d_2}v_2\otimes v_1}{2}\right),$$

因此，右侧的第一个直和项是反对称张量，第二个直和项是对称张量。当我们将 $H^\bullet(Y\times Y)$ 除以 $H^\bullet(Y\times Y)^{\mathfrak{S}_2}$ 取商时，这等价于将简单张量 $v\otimes w$ 投影到该表达式中的第一个直和项。

我们研究 $H^0(Y)\otimes H^\bullet(Y)$ 到该商的诱导态射。它将

$$1\otimes v\to\frac{1\otimes v-v\otimes 1}{2},$$

因为 $\mathbf{1}$ 始终具有偶数次。这是单射的，但 $\bullet=0$ 除外。

最后，我们研究从 $H^{\bullet-2}(Y\times Y,A)^{\mathfrak{S}_2}\pi_2^*(c_1(L))$ 到以下商的态射：该商通过同时除去 $\mathfrak{S}_2$-不变量以及 $H^0(Y,A)\otimes H^\bullet(Y,A)$ 的像而得到。我们考虑一个对称张量 $v_1\otimes v_2+(-1)^{d_1d_2}v_2\otimes v_1$，随后将其与 $\pi_2^*(c_1(L))$ 作杯积，得到元素

$$v_1\otimes(v_2c_1(L))+(-1)^{d_1d_2}v_2\otimes(v_1c_1(L)).$$

By t取到商的投影后，我们看到对称张量映射为

$$\begin{aligned}(22)\qquad &\frac{v_1\otimes v_2c_1(L)+(-1)^{d_1d_2+1}(v_2c_1(L))\otimes v_1}{2}+(-1)^{d_1d_2}\frac{v_2\otimes v_1c_1(L)+(-1)^{d_1d_2+1}(v_1c_1(L))\otimes v_2}{2}\\ &=\frac{v_1\otimes v_2c_1(L)+(-1)^{d_1d_2+1}(v_2c_1(L))\otimes v_1}{2}-\frac{(v_1c_1(L))\otimes v_2+(-1)^{d_1d_2+1}v_2\otimes v_1c_1(L)}{2},\end{aligned}$$

这一点事先并不显而易见。

我们引入以下记号：反对称张量 $v_1\otimes v_2+(-1)^{d_1d_2+1}v_2\otimes v_1$记作 $v_1\widetilde{\wedge}v_2$，对称张量记作 $v_1\widetilde{\otimes}v_2$。

于是，该态射可以改写为

$$v_1\widetilde{\otimes}v_2\mapsto v_1\widetilde{\wedge}v_2c_1(L)-v_1c_1(L)\widetilde{\wedge}v_2,$$

~ ~并且我们记住，反对称张量还满足 $1\wedge v=v\wedge 1=0$。暂且，我们对所有 $\bullet$取直和，在讨论的最后，我们将再次聚焦于加权分量。

根据 Lefschetz 分解，我们知道任意反对称张量都可以表示为形如 $v_1c_1(L)^{a_1}\widetilde{\wedge}v_2c_1(L)^{a_2}$ 的项，其中 $v_i\in H^{\ell_i}_{\mathrm{prim}}(Y,A)$ 且 $a_i\le\dim\ Y-\ell_i$。在我们的

商中，我们还可以将这些进一步化为

$$v_1 \widetilde{\wedge} v_2 c_1(L)^{a_1+a_2} = v_1 c_1(L)^{a_1+a_2} \widetilde{\wedge} v_2,$$

此时，如果 ℓ_1 或 ℓ_2 为 0，或者 $a_1 + a_2 > \dim Y - \max\{\ell_1, \ell_2\}$，那么这个类就是 0。

因此，我们看到该商由反对称张量 $v_1 \widetilde{\wedge} v_2 c_1(L)^a$ with $v_i \in H^{\ell_i}_{\mathrm{prim}}(Y,\ A)$、$\ell_2 \geq \ell_1 > 0$ 和 $a \leq \dim\ Y - \ell_2$ 张成。我们看到对角项有一些有趣的表现：令 $v \in H^{\ell}_{\mathrm{prim}}(Y,\ A)$，其中 ℓ 为偶数且 $a \in$ **整数环**，并考虑以下关系

$$v \widetilde{\wedge} v c_1(L)^a = -(v c_1(L)^a \widetilde{\wedge} v) = -v \widetilde{\wedge} v c_1(L)^a$$

这表明偶数项的表现如同外幂，正如预期。

既然我们已经确定了态射在底层 A-向量空间上的表现，现在可以回到混合层系数。

因此，如果 $\ell_1 = \ell_2 = \ell$，我们得到如下形式的一项

$$\begin{cases} \mathrm{Sym}^2 H^{\ell}_{\mathcal{M},\mathrm{prim}}(Y)(-a) & \ell \text{ odd} \\ \bigwedge^2 H^{\ell}_{\mathcal{M},\mathrm{prim}}(Y)(-a) & \ell \text{ even} \end{cases},$$

对所有 $a \leq \dim Y - \ell$，以及对 $\ell_2 > \ell_1$，我们得到一个形如 $H^{\ell_1}_{\mathcal{M},\text{本原}}(Y) \otimes H^{\ell_2}_{\mathcal{M},\text{本原}}(Y)(-a)$ 的项，对所有 $a \leq \dim Y - \ell_2$。

类似的论证对于核更为困难。然而，在余核已确定的情况下，我们可以通过半单性来理解核。为方便起见，令 $P_\ell = H^{\ell}_{\mathcal{M},\mathrm{prim}}(Y)$。

事实上，我们可以将反对称张量模 $H^0_{\mathcal{M}}(Y) \otimes H^{\bullet}_{\mathcal{M}}(Y)$ 的目标空间（即陪域）改写为

$$\left(\bigoplus_{0<i<j} H^i_{\mathcal{M}}(Y) \otimes H^j_{\mathcal{M}}(Y) \right) \oplus \left(\bigoplus_{m \geq 0} \bigwedge^2 H^{2m}_{\mathcal{M}}(Y) \oplus \mathrm{Sym}^2 H^{2m+1}_{\mathcal{M}}(Y) \right),$$

并且我们可以利用本原部分将其改写为以下各项的直和：

$$\bigoplus_{\substack{0<\ell_1+2a_1<\ell_2+2a_2 \\ a_i \leq \dim Y - \ell_i}} P_{\ell_1} \otimes P_{\ell_2}(-a_1 - a_2) \tag{23}$$

$$\oplus \bigoplus_{\substack{\ell_1<\ell_2 \\ \ell_1+2a_1=\ell_2+2a_2 \\ a_i \leq \dim Y - \ell_i}} P_{\ell_1} \otimes P_{\ell_2}(-a_1 - a_2) \tag{24}$$

$$\bigoplus_{\substack{\ell \text{ even} \\ a \leq \dim Y - \ell}} \bigwedge^2 P_\ell(-2a) \oplus \bigoplus_{\substack{\ell \text{ odd} \\ a \leq \dim Y - \ell}} \mathrm{Sym}^2 P_\ell(-2a). \tag{25}$$

我们将利用张量积的对称性来改写此式，使得 $\ell_1 \leq \ell_2$ 在每个直和项中成立，这样也就允许不等式 $\ell_1 + 2a_1 > \ell_2 + 2a_2$ 对于 $\ell_1 < \ell_2$ 成立。由于直和式（24）处理了等式成立的情况，这意味着我们可以改写为

不对 ℓ_1+2a_1 与 ℓ_2+2a_2 作任何限制。唯一的条件是 $\ell_1,\ a_1$ 不同时为零，且 $a_i \le$ 维数 $Y-\ell_i$。结果为

$$\bigoplus_{\substack{\ell_1<\ell_2\\ \ell_1+a_1\neq 0\\ a_i\le \dim Y-\ell_i}} P_{\ell_1}\otimes P_{\ell_2}(-a_1-a_2) = \bigoplus_{\substack{0<\ell_1<\ell_2\\ a\le \dim Y-\ell_2}} P_{\ell_1}\otimes P_{\ell_2}(-a)\oplus \bigoplus_{\substack{\ell_1<\ell_2\\ a_1>0\\ a_i\le \dim Y-\ell_i}} P_{\ell_1}\otimes P_{\ell_2}(-a_1-a_2) \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\bigoplus_{\substack{a_1<a_2\\ \ell+a_1\neq 0\\ a_2\le \dim Y-\ell}} P_\ell\otimes P_\ell(-a_1-a_2) = &\bigoplus_{\substack{\ell \text{ odd}\\ 0<a\le \dim Y-\ell}} \operatorname{Sym}^2 P_\ell(-a)\oplus \bigoplus_{\substack{\ell \text{ odd}\\ 0<a\le \dim Y-\ell}} \bigwedge^2 P_\ell(-a)\\ &\oplus \bigoplus_{\substack{0<\ell \text{ even}\\ 0<a\le \dim Y-\ell}} \operatorname{Sym}^2 P_\ell(-a)\\ &\oplus \bigoplus_{\substack{0<\ell \text{ even}\\ 0<a\le \dim Y-\ell}} \bigwedge^2 P_\ell(-a)\\ &\oplus \bigoplus_{\substack{0<a_1<a_2\\ a_2\le \dim Y-\ell}} P_\ell\otimes P_\ell(-a_1-a_2)\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\bigoplus_{\substack{\ell \text{ even}\\ a\le \dim Y-\ell}} \bigwedge^2 P_\ell(-2a)\oplus \bigoplus_{\substack{\ell \text{ odd}\\ a\le \dim Y-\ell}} \operatorname{Sym}^2 P_\ell(-2a) = &\bigwedge^2 P_0 \oplus \bigoplus_{\substack{0<\ell \text{ even}\\ 0\le \dim Y-\ell}} \bigwedge^2 P_\ell\\ &\oplus \bigoplus_{\substack{\ell \text{ even}\\ 0<a\le \dim Y-\ell}} \bigwedge^2 P_\ell(-2a)\\ &\oplus \bigoplus_{\substack{\ell \text{ odd}\\ 0\le \dim Y-\ell}} \operatorname{Sym}^2 P_\ell\\ &\oplus \bigoplus_{\substack{\ell \text{ odd}\\ 0<a\le \dim Y-\ell}} \operatorname{Sym}^2 P_\ell(-2a)\end{aligned} \tag{28}$$

余核已经按我们希望的形式写成以下各项的直和：

$$\bigoplus_{\substack{\ell \text{ odd}\\ a\le \dim Y-\ell}} \operatorname{Sym}^2 P_\ell(-a) = \bigoplus_{\substack{\ell \text{ odd}\\ 0\le \dim Y-\ell}} \operatorname{Sym}^2 P_\ell \oplus \bigoplus_{\substack{\ell \text{ odd}\\ 0<a\le \dim Y-\ell}} \operatorname{Sym}^2 P_\ell(-a) \tag{29}$$

$$\bigoplus_{\substack{0<\ell \text{ even}\\ a\le \dim Y-\ell}} \bigwedge^2 P_\ell(-a) = \bigoplus_{\substack{0<\ell \text{ even}\\ 0\le \dim Y-\ell}} \bigwedge^2 P_\ell \oplus \bigoplus_{\substack{0<\ell \text{ even}\\ 0<a\le \dim Y-\ell}} \bigwedge^2 P_\ell(-a) \tag{30}$$

$$\bigoplus_{\substack{0<\ell_1<\ell_2\\ a\le \dim Y-\ell_2}} P_{\ell_1}\otimes P_{\ell_2}(-a). \tag{31}$$

对于定义域，对称张量空间（由于类 ξ 而由 (-1) 扭曲）为

$$\left(\bigoplus_{i<j} H^i_{\mathcal{M}}(Y)\otimes H^j_{\mathcal{M}}(Y)\oplus\bigoplus_{m\geq 0}\mathrm{Sym}^2 H^{2m}_{\mathcal{M}}(Y)\oplus\bigwedge^2 H^{2m+1}_{\mathcal{M}}(Y)\right)(-1)$$

类似地，我们利用本原部分（以及张量对称性）来表示

$$\bigoplus_{\substack{\ell_1<\ell_2\\ a_i\leq\dim Y-\ell_i}} P_{\ell_1}\otimes P_{\ell_2}(-a_1-a_2-1) \tag{32}$$

$$\bigoplus_{\substack{a_1<a_2\\ a_2\leq\dim Y-\ell}} P_{\ell}\otimes P_{\ell}(-a_1-a_2-1) \tag{33}$$

$$\bigoplus_{\substack{\ell \text{ even}\\ a\leq\dim Y-\ell}} \mathrm{Sym}^2 P_{\ell}(-2a-1)\oplus\bigoplus_{\substack{\ell \text{ odd}\\ a\leq\dim Y-\ell}}\bigwedge^2 P_{\ell}(-2a-1). \tag{34}$$

现在我们继续进行消去：在陪域中消去余核后，我们得到

$$\bigoplus_{\substack{\ell_1<\ell_2\\ a_1>0\\ a_i\leq\dim Y-\ell_i}} P_{\ell_1}\otimes P_{\ell_2}(-a_1-a_2) \tag{35}$$

$$\bigoplus_{\substack{0<a_1<a_2\\ a_2\leq\dim Y-\ell}} P_{\ell}\otimes P_{\ell}(-a_1-a_2) \tag{36}$$

$$\bigoplus_{\substack{\ell \text{ even}\\ 0<a\leq\dim Y-\ell}}\bigwedge^2 P_{\ell}(-2a)\oplus\bigoplus_{\substack{\ell \text{ odd}\\ 0<a\leq\dim Y-\ell}}\mathrm{Sym}^2 P_{\ell}(-2a). \tag{37}$$

$$\bigoplus_{\substack{\ell \text{ odd}\\ 0<a\leq\dim Y-\ell}}\bigwedge^2 P_{\ell}(-a)\oplus\bigoplus_{\substack{0<\ell \text{ even}\\ 0<a\leq\dim Y-\ell}}\mathrm{Sym}^2 P_{\ell}(-a). \tag{38}$$

为了消去这一项，我们先关注（37）。取 $a'_1=a-1, a'_2=a$，它们出现在（33）中。对其取商后，我们得到

$$\bigoplus_{\substack{\ell_1<\ell_2\\ a_i\leq\dim Y-\ell_i}} P_{\ell_1}\otimes P_{\ell_2}(-a_1-a_2-1) \tag{39}$$

$$\bigoplus_{\substack{a_1<a_2-1\\ a_2\leq\dim Y-\ell}} P_{\ell}\otimes P_{\ell}(-a_1-a_2-1) \tag{40}$$

$$\bigoplus_{\substack{\ell \text{ even}\\ a\leq\dim Y-\ell}} \mathrm{Sym}^2 P_{\ell}(-2a-1)\oplus\bigoplus_{\substack{\ell \text{ odd}\\ a\leq\dim Y-\ell}}\bigwedge^2 P_{\ell}(-2a-1). \tag{41}$$

$$\bigoplus_{\substack{\ell \text{ even}\\ 0<a\le \dim Y-\ell}} \operatorname{Sym}^2 P_\ell(-2a) \oplus \bigoplus_{\substack{\ell \text{ odd}\\ 0<a\le \dim Y-\ell}} \bigwedge^2 P_\ell(-2a). \tag{42}$$

并且我们可以将最后两个直和合并如下：

$$\bigoplus_{\substack{\ell \text{ even}\\ 0<a\le 2(\dim Y-\ell)+1}} \operatorname{Sym}^2 P_\ell(-a) \oplus \bigoplus_{\substack{\ell \text{ odd}\\ 0<a\le 2(\dim Y-\ell)+1}} \bigwedge^2 P_\ell(-a). \tag{43}$$

我们现在想消去的空间是以下各项的直和：

$$\bigoplus_{\substack{\ell_1<\ell_2\\ a_1>0\\ a_i\le \dim Y-\ell_i}} P_{\ell_1}\otimes P_{\ell_2}(-a_1-a_2) \tag{44}$$

$$\bigoplus_{\substack{0<a_1<a_2\\ a_2\le \dim Y-\ell}} P_\ell \otimes P_\ell(-a_1-a_2) \tag{45}$$

$$\bigoplus_{\substack{\ell \text{ odd}\\ 0<a\le \dim Y-\ell}} \bigwedge^2 P_\ell(-a) \oplus \bigoplus_{\substack{0<\ell \text{ even}\\ 0<a\le \dim Y-\ell}} \operatorname{Sym}^2 P_\ell(-a). \tag{46}$$

容易看出，和式（46）从（43）中消去，因此这些空间现在是

$$\bigoplus_{\substack{\ell_1<\ell_2\\ a_i\le \dim Y-\ell_i}} P_{\ell_1}\otimes P_{\ell_2}(-a_1-a_2-1) \tag{47}$$

$$\bigoplus_{\substack{a_1<a_2-1\\ a_2\le \dim Y-\ell}} P_\ell \otimes P_\ell(-a_1-a_2-1) \tag{48}$$

$$\bigoplus_{\substack{0<\ell \text{ even}\\ \dim Y-\ell<a\le 2(\dim Y-\ell)+1}} \operatorname{Sym}^2 P_\ell(-a) \oplus \bigoplus_{\substack{\ell \text{ odd}\\ \dim Y-\ell<a\le 2(\dim Y-\ell)+1}} \bigwedge^2 P_\ell(-a). \tag{49}$$

$$\bigoplus_{0<a\le 2\dim Y+1} \operatorname{Sym}^2 P_0(-a), \tag{50}$$

我们将在下文将其改写为 $\bigoplus_{0<a\le 2\dim Y+1} A^{[1]}(-a)$。

我们希望从中消去空间

$$\bigoplus_{\substack{\ell_1<\ell_2\\ a_1>0\\ a_i\le \dim Y-\ell_i}} P_{\ell_1}\otimes P_{\ell_2}(-a_1-a_2) \tag{51}$$

$$\bigoplus_{\substack{0<a_1<a_2\\ a_2\le \dim Y-\ell}} P_\ell \otimes P_\ell(-a_1-a_2) \tag{52}$$

通过将 $(\ell_1, \ell_2, a_1, a_2)$ 映射到 $(\ell_1, \ell_2, a_1 - 1, a_2)$，并类似地将 (ℓ, a_1, a_2) 映射到 $\mapsto(\ell, a_1 - 1, a_2)$，即可轻松消去这些项。唯一无法通过这种方式消去的项，是那些满足 $a_1 = \dim Y - \ell_1$ 的项。注意，在 (48) 中不可能出现 $a_1 = \dim Y - \ell$，因为那样 $a_1 < a_2 - 1$ 就会推出 $\dim Y - \ell < a_2$，与 a_2 的选择相矛盾。

因此，最终结果为

$$\bigoplus_{\substack{\ell_1<\ell_2\\ a\le \dim Y-\ell_2}} P_{\ell_1}\otimes P_{\ell_2}(\ell_1-\dim Y-a-1)$$

$$\bigoplus_{\substack{0<\ell \text{ even}\\ \dim Y-\ell<a\le 2(\dim Y-\ell)+1}} \mathrm{Sym}^2 P_\ell(-a)\oplus \bigoplus_{\substack{\ell \text{ odd}\\ \dim Y-\ell<a\le 2(\dim Y-\ell)+1}} \bigwedge^2 P_\ell(-a)$$

$$\bigoplus_{0<a\le 2\dim Y+1} A^{\mathcal{M}}(-a).$$

回顾一下，我们曾论证，对于每个 $\bullet$，直和 $\bigoplus_{k=1}^{\dim Y-1} H^{\bullet-2-2k}_{\mathcal{M}}(Y)(-1-k)$ 都对核有贡献；类似地，$H^0_{\mathcal{M}}(Y)\otimes H^0_{\mathcal{M}}(Y)$ 也属于核，因此我们得到了定理陈述中所述的 Σ 的奇异上同调的完整描述。□

注 4.13。如 $\mathcal{M}(-)$ 中一样进行处理例 2.1，我们看到，定理 F 陈述中的同构实际上是一个 $G =$伽罗瓦群(k/k)-表示的同构。因此，（Gr 上的）W奇异上同调上的伽罗瓦表示 Σ 完全由 Y决定。

下面我们将明确写出低维情形下的这个公式。

例 4.14. 当 $\dim Y = 1$ 时，我们看到所有上同调都是纯的，不过 $H^3(\Sigma)$ 是权为 2 的纯的。我们有

$$\begin{aligned}
H^0(\Sigma) &= \mathbf{Q}^H\\
H^1(\Sigma) &= 0\\
H^2(\Sigma) &= \mathbf{Q}^H(-1)\\
H^3(\Sigma) &= \mathrm{Gr}^W_2 H^3(\Sigma) = \mathrm{Sym}^2 H^1(Y)\\
H^4(\Sigma) &= \mathbf{Q}^H(-2)\oplus \bigwedge^2 H^1(Y)(-1)\\
H^5(\Sigma) &= H^1(Y)(-2)\\
H^6(\Sigma) &= \mathbf{Q}^H(-3).
\end{aligned}$$

这与公式 [Bro26]。

例 4.15. 设 $\dim Y = 2$。根据公式，我们看到 $H^\bullet(\Sigma)$ 是纯的，除了 $\bullet \in \{3,4,5\}$。我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Gr}^W_2 H^3(\Sigma) &= H^3(\Sigma) = \mathrm{Sym}^2 H^1(Y),\\
\mathrm{Gr}^W_3 H^4(\Sigma) &= H^1(Y)\otimes H^2_{\mathrm{prim}}(Y),\\
\mathrm{Gr}^W_4 H^4(\Sigma) &= \mathbf{Q}^H(-2)\oplus \mathbf{Q}^H(-2)\\
\mathrm{Gr}^W_4 H^5(\Sigma) &= \mathrm{Sym}^2 H^1(Y)(-1)\oplus \bigwedge^2 H^2_{\mathrm{prim}}(Y).\\
\mathrm{Gr}^W_5 H^5(\Sigma) &= H^1(Y)(-2),
\end{aligned}$$

其余部分为： g y

$$H^0(\Sigma) = \mathbf{Q}^H,$$
$$H^1(\Sigma) = 0,$$
$$H^2(\Sigma) = \mathbf{Q}^H(-1),$$
$$H^6(\Sigma) = \mathbf{Q}^H(-3) \oplus H^2(Y)(-2) \oplus \mathrm{Sym}^2 H^2_{\mathrm{prim}}(Y)(-1) \oplus \bigwedge^2 H^1(Y)(-2),$$
$$H^7(\Sigma) = H^3(Y)(-2) \oplus H^2_{\mathrm{prim}}(Y) \otimes H^1(Y)(-2) \oplus H^1(Y)(-3)$$
$$H^8(\Sigma) = \mathbf{Q}^H(-4)^{\oplus 2} \oplus H^2_{\mathrm{prim}}(Y)(-3) \oplus \bigwedge^2 H^1(Y)(-3),$$
$$H^9(\Sigma) = H^1(Y)(-4)$$
$$H^{10}(\Sigma) = \mathbf{Q}^H(-5).$$

4.5. **Q-阶乘性缺陷**。 我们可以运用交与奇异上同调的计算，借助 **Q**-因子化缺陷 $\sigma(\Sigma)$，使用 [PP25] 来研究它。本小节中，假设 $k =$ **曲线 C** 和 $A = \mathbf{Q}$。

首先，我们需要下面这个简单的引理：

引理 4.16. 设 V 是一个非零的可极化纯**有理数域**-霍奇结构，权为1。则交

$$\bigwedge^2 V_{\mathbf{Q}} \cap \left(\bigwedge^2 V \right)^{(1,1)}$$

包含 V 的任意极化，因此非零。

证明。 根据定义，权 1**有理数域**-霍奇结构 V 上的极化是一个斜对称双线性形式 S: $V_{\mathbf{Q}} \otimes_{\mathbf{Q}} V_{\mathbf{Q}} \to$ **有理数域**，其向**曲线 C** 的扩张满足

$$S(V^{p,q}, V^{p',q'}) = 0 \text{ unless } p = p',\ q = q', \tag{53}$$

以及某种正性条件。

换言之，根据斜对称性， S 确定了 $\bigwedge^2 V_{\mathbf{Q}}$ 中的一个元素，使得将其视为 $\bigwedge^2 V$中的元素时，由于消失（53），它没有（2，0）或（0，2）部分，正如所需。□

现在我们可以证明

推论 4.17 （= 推论 G）。假设 L 是 *3*-非常丰的，并且 $\Sigma \neq \mathbf{P}^N$。进一步假设Σ是正规的。则：

(1) σ（Σ） $< \infty$ 当且仅当 $\mathrm{Alg}^1_{\mathbf{Q}}$（Σ） $\subseteq \mathrm{CDiv}_{\mathbf{Q}}$（Σ）当且仅当 H^1（Y， $\mathcal{O}_Y$） $= 0$。

（*2*） σ（Σ）的值为

$$\sigma(\Sigma) = \begin{cases} \infty & H^1(Y, \mathcal{O}_Y) \neq 0 \\ h^{1,1}_{\mathbf{Q}}(Y) & \dim Y \geq 2 \ \textit{and}\ H^1(Y, \mathcal{O}_Y) = 0 \\ 0 & \dim Y = 1 \ \textit{and}\ H^1(Y, \mathcal{O}_Y) = 0 \,(\textit{i.e. } Y \cong \mathbf{P}^1) \end{cases}.$$

（*3*）以下各项等价：

(a) Σ在局部解析意义下是**有理数域**-因子化的；*(b)* Σ是**有理数域**-因子化的，

(c) 循环类映射在*Cartier* 类上的限制

$$\mathrm{cl}_{\mathbf{Q}}^{\mathrm{res}} : \mathrm{CDiv}_{\mathbf{Q}}(\Sigma) \to \mathrm{IH}^2(\Sigma, \mathbf{Q}) \cap \mathrm{IH}^{1,1}(\Sigma)$$

是满射，

(d) $(Y, L) \cong (\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(d))$ 其中 $d \geq 4$。

此外， Σ 绝不是因子化的。

(4) 此外，假设 维数$Y \geq 2$ 且 L 满足 (U_2)-性质（定义 *2.32*）。那么$\sigma^{\mathrm{an}}(\Sigma;\ y) < \infty$ 对于任意（等价地，对于所有） $y \in Y$当且仅当 $H^1(Y,\ \mathcal{O}_Y) = 0$，在这种情况下，对于 $y \in Y$ 我们有

$$\sigma^{\mathrm{an}}(\Sigma; y) \leq h^2(Y) = 2h^2(Y, \mathcal{O}_Y) + h^{1,1}(Y)$$

其中，当 $H^2(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ 时取等号。

证明。 在下文中，我们均定理 F而不再另行说明。

(1) 根据 [PP25，定理 A]，有理数域$\mathbf{Q}$-因子化缺陷有限，当且仅当 $\mathrm{Alg}^1_{\mathbf{Q}}(\Sigma) \subseteq \mathrm{CDiv}_{\mathbf{Q}}(\Sigma)$；这又当且仅当 $h^1(\Sigma) = h^{2\,\text{维数}\,\Sigma-1}(\Sigma)$。根据我们对奇异上同调的计算，很容易看出 $h^1(\Sigma) = 0$。

现在我们必须计算 $H^{2\dim\Sigma-1}(\Sigma) = H^{4\,\text{维数}\,Y+1}(\Sigma)$。

我们先计算 $\mathrm{Gr}^W_{4\dim Y} H^{4\dim Y+1}(\Sigma)$。若以下直和

$$\left(\bigoplus_{\substack{\ell \text{ odd} \\ a \leq \dim Y - \ell}} \mathrm{Sym}^2 P_\ell(-a) \right) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{0<\ell \text{ even} \\ a \leq \dim Y - \ell}} \bigwedge^2 P_\ell(-a) \right)$$

对其有贡献，那么我们必须有

$$2\ell + 2a = 4\dim Y \implies \ell + a = 2\dim Y.$$

但根据假设， $a \leq \dim Y - \ell$，因此

$$2\dim Y - \ell \leq \dim Y - \ell \implies \dim Y \leq 0$$

这就构成了矛盾。这表明，来自 $\mathrm{Gr}^W_{4\,\text{维数}\,Y} H^{4\dim Y+1}(\Sigma)$ 的唯一可能贡献来自以下内容

$$\bigoplus_{\substack{0<\ell_1<\ell_2 \\ a \leq \dim Y - \ell_2}} P_{\ell_1} \otimes P_{\ell_2}(-a), \ \text{with}\ \ell_1 + \ell_2 + 2a = 4\dim Y.$$

注意到

$$\ell_1 + \ell_2 = 4\dim Y - 2a < 2\ell_2 \implies 2\dim Y - a < \ell_2.$$

但是 $\ell_2 \leq$维数$Y - a$，这就导致矛盾：维数 $Y < 0$。我们得出结论 t

$$\mathrm{Gr}^W_{4\dim Y} H^{4\dim Y+1}(\Sigma) = 0.$$

现在我们计算 $\mathrm{Gr}^W_{4\dim Y+1} H^{4\dim Y+1}(\Sigma)$。注意到 $4\dim\ Y + 1$ 是奇数，因此唯一可能的贡献来自以下直和（取 $w = 4\dim\ Y + 1$）

$$\left(\bigoplus_{k=1}^{\dim Y - 1} H^{4\dim Y+1-2-2k}(Y)(-k-1) \right) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{\ell_1<\ell_2 \\ a \leq \dim Y - \ell_2}} P_{\ell_1} \otimes P_{\ell_2}(\ell_1 - \dim Y - a - 1) \right).$$

除非 $4\dim Y+1-2-2k\le 2\dim Y$，否则第一项为零；换言之，除非 $\dim Y-\frac{1}{2}\le k$，但根据假设，$k\le \dim Y-1$，这是不可能的。

在第二个直和中，我们希望 $\ell_1<\ell_2$ 且 $a\le \dim Y-\ell_2$ 使得

$$4\dim Y+1=\ell_1+\ell_2+2(\dim Y+a+1-\ell_1)=\ell_2+2\dim Y+2a+2-\ell_1,$$

或者通过重新整理，

$$2(\dim Y-a)-1=\ell_2-\ell_1,$$

但根据假设$2(\dim Y-a)\ge 2\ell_2$，因此这将给出

$$2\ell_2-1\le \ell_2-\ell_1\implies \ell_2+\ell_1\le 1.$$

由于 $\ell_1<\ell_2$，唯一的可能性是等式成立，从而 $\ell_1=0,\ell_2=1$ 且$\dim Y-a=\ell_2$，由此得到 $a=\dim Y-1$。因此，我们得到一项贡献

$$P_0\otimes P_1(-\dim Y-(\dim Y-1)-1)=H^1(Y)(-2\dim Y).$$

因此，我们得出结论

$$H^{4\dim Y+1}(\Sigma)=H^1(Y)(-2\dim Y),$$

由此得证。

(2) 根据 [PP25，定理 A], 该**有理数域**-因子化缺陷 $\sigma(\Sigma)$ 与.....一致

$$\sigma'(\Sigma)=\dim_{\mathbf{Q}}\left(\mathrm{IH}^2(\Sigma,\mathbf{Q})\cap \mathrm{IH}^{1,1}(\Sigma)\right)-\dim_{\mathbf{Q}}\left(\ker(H^2(\Sigma,\mathbf{Q})\to H^2(\Sigma,\mathcal{O}_\Sigma))\right)$$

当 $\sigma(\Sigma)<\infty$ 时。

我们有 $\mathrm{IH}^2(\Sigma)$ 的公式：它是

$$\begin{cases}\mathrm{Sym}^2H^0(Y)(-1)\oplus\bigwedge^2 H^1(Y) & \dim Y=1\\ H^0(Y)(-1)\oplus H^2_{\mathrm{prim}}(Y)\otimes H^0(Y)\oplus \mathrm{Sym}^2H^0(Y)(-1)\oplus\bigwedge^2 H^1(Y) & \dim Y\ge 2\end{cases}.$$

就 (1,1) 部分而言，注意到 $H^{1,1}\mathrm{prim}(Y)=H^{1,1}(Y)/(\text{曲线 }C\cdot c_1(L))$，并且由于 $c_1(L)$ 总是定义在 $\mathbb{Q}$ 上，我们还有 $H^{1,1}\mathrm{prim}(Y)\cap H^2(Y,\mathbb{Q})=(H^{1,1}(Y)\cap H^2(Y,\mathbb{Q}))/\mathbb{Q}\cdot c_1(L)$ 因此维数为 $h^{1,1}_{\mathbb{Q}}(Y)-1$。

对于 $\wedge^2H^1(Y)$，我们看到 $(\wedge^2H^1(Y))_{\mathbf{Q}}=\wedge^2H^1(Y,\text{**有理数域**})$。然而，与 $H^{1,1}(Y)$ 的交不易计算，因此我们将其保留为

$$\left(\bigwedge^2 h^{1,1}(Y)\right)_{\mathbf{Q}}=\dim_{\mathbf{Q}}\left(\left(\bigwedge^2 H^1(Y)\right)^{(1,1)}\bigcap\bigwedge^2 H^1(Y,\mathbf{Q})\right).$$

由于 $H^1(Y)$ 始终是一个可极化的 **有理数域**-霍奇结构，权为 1，因此当且仅当 $H^1(Y)=0$ 根据引理 4.16 时，交为零。

我们得出结论

$$\dim \mathrm{IH}^{1,1}_{\mathbf{Q}}(\Sigma)=\begin{cases}1+(\bigwedge^2 h^{1,1}(Y))_{\mathbf{Q}} & \dim Y=1\\ h^{1,1}_{\mathbf{Q}}(Y)+(\bigwedge^2 h^{1,1}(Y))_{\mathbf{Q}}+1 & \dim Y\ge 2\end{cases}.\tag{54}$$

利用我们的上同调计算，很容易看出 $H^2(\Sigma,\text{**有理数域**})=\text{**有理数域**}^H(-1)$ 是一维的（例如，由与该非常丰 L' 相对应的 $c_1(L')$ 张成

嵌入 $\Sigma \hookrightarrow \mathbf{P}^N$），并且我们知道，在映射到 $H^2(\Sigma,\ \mathcal{O}_\Sigma)$ 时，$c_1(L') \mapsto 0$（由指数短正合列诱导的长正合列）。因此，

$$\ker(H^2(\Sigma, \mathbf{Q}) \to H^2(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma)) = H^2(\Sigma, \mathbf{Q})$$

是一维的。从上述维数中减去 1（54），我们得出

$$\sigma'(\Sigma) = \begin{cases} (\bigwedge^2 h^{1,1}(Y))_{\mathbf{Q}} & \dim Y = 1 \\ h^{1,1}_{\mathbf{Q}}(Y) + (\bigwedge^2 h^{1,1}(Y))_{\mathbf{Q}} & \dim Y \geq 2 \end{cases}. \tag{55}$$

$\mathbf{Q}$-因子化缺陷的取值可由上述结果推出，假设 $H^1(Y) = 0$，这迫使 $(\bigwedge^2 h^{1,1}(Y))_{\mathbf{Q}} = 0$，因为根据 (1)，只有在这种情况下 $\sigma(\Sigma)$ 才是有限的。

(3) 众所周知，(a) $\Longrightarrow$(b)。(b) 与 (d) 等价可由 (2) 得出。为证明 (d) $\Longrightarrow$(c)，回顾 [PP25，定理 2。1] 循环类映射

$$\mathrm{cl}_{\mathbf{Q}} : \mathrm{Div}_{\mathbf{Q}}(\Sigma) \to \mathrm{IH}^2(\Sigma, \mathbf{Q}) \cap \mathrm{IH}^{1,1}(\Sigma)$$

是满射，因此在此情形下 $\mathrm{CDiv}_{\mathbf{Q}}(\Sigma) = \mathrm{Div}_{\mathbf{Q}}(\Sigma)$，结论便如前所述成立。为证明 (c) $\Longrightarrow$(d)，我们使用交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CDiv}_{\mathbf{Q}}(\Sigma) & \hookrightarrow & \mathrm{Div}_{\mathbf{Q}}(\Sigma) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{cl}_{\mathbf{Q}}} \\ \ker(H^2(\Sigma, \mathbf{Q}) \to H^2(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma)) & \hookrightarrow & \mathrm{IH}^2(\Sigma, \mathbf{Q}) \cap \mathrm{IH}^{1,1}(\Sigma) \end{array}$$

根据 [PP25，第 14] 页，所示映射是满射/单射。因此，复合映射 $\mathrm{cl}^{\mathrm{res}}_{\mathbf{Q}}$: $\mathrm{CDiv}_{\mathbf{Q}}(\Sigma) \to \mathrm{IH}^2($ Σ, 有理数域) $\cap\, \mathrm{IH}^{1,1}(\Sigma)$ 是满射，这意味着底部的水平映射是同构；结合等式 (55)，可得 (d)。现在，由定理 A（或推论 B），(d) 意味着 Σ 是维数为 3 的有理同调流形，故由 [PP25，推论 F] 可得 (a)（因为我们知道，在这种情况下，Σ具有有理奇点，见 [CS18，推论 1.5]）。

最后，如果 Σ 是因子化的，那么它特别是 **有理数域**-因子化且为 Gorenstein，因此根据[OR24，定理 F] 我们有 $(Y, L) \cong (\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(4))$。在这种情况下，$\Sigma$ 由下式定义：$\{f = 0\}$ 其中f 是 Hankel 矩阵的行列式

$$\begin{bmatrix} Z_0 & Z_1 & Z_2 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ Z_2 & Z_3 & Z_4 \end{bmatrix}$$

在 $\mathbf{P}^4$中。不过，在这种情况下，Σ 的齐次坐标环具有非平凡的除子类群，见 [CMSV18，定理 3。1]。

(4) 假设 L满足（U_2）性质。根据 [ORS24，命题 4，3],我们有

$$R^i\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-\Phi) = 0 \text{ for all } 1 \leq i \leq 2.$$

因此，正合列

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-\Phi) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}} \to \mathcal{O}_\Phi \to 0$$

表明 $R^1t_*\mathcal{O}_P = 0$ 当且仅当 $R^1p_*\mathcal{O}_\Phi = 0$，而由 [CS18，引理2.2] 等价于如下消失：$H^1(Y,\ \mathcal{O}_Y) = 0$。在此情形下 $R^2p_*\mathcal{O}_\Phi \cong H^2(Y,\ \mathcal{O}_Y) \otimes \mathcal{O}_Y$，故通过对（17）进行对偶化并利用 [PP25，定理B]即得结论。□

注 4.18。我们注意到 $\Sigma := \Sigma(\mathbf{P}^1,\ \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(d))$ 对于 $d \geq 4$ 是（在 [HK00] 的意义下的）莫里梦空间。事实上，在此情形下 Σ 具有 **有理数域**-因子化奇点（由上文），并且它还是具有对数终端奇点的 Fano，由 [ENP20，定理1.1]。此类簇在 [BCHM10] 中被证明为 Mori 梦空间。

我们记录上文证明的有理正规曲线的割线簇的若干等价刻画（更多此类刻画见 [OR24，推论 E]）：

推论 4.19。假设 L 是 *3*-非常丰的，且 $\Sigma \neq \mathbb{P}^N$。那么下列条件等价：

(a) Σ是有理同调流形。*(b)* $(Y, L) \cong (\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(d))$ 且 $d \geq 4$。

若 Σ 是正规簇，则上述任一条件等价于下列任一条件：

(c) Σ局部解析地是 $\mathbf{Q}$-因子化的。*(d)* Σ是 $\mathbf{Q}$-因子化的。

(e) 循环类映射在 *Cartier* 类上的限制

$$\mathrm{cl}^{\mathrm{res}}_{\mathbf{Q}} : \mathrm{CDiv}_{\mathbf{Q}}(\Sigma) \to \mathrm{IH}^2(\Sigma, \mathbf{Q}) \cap \mathrm{IH}^{1,1}(\Sigma)$$

是满射的。

如果 L 满足（$Q'_{\dim Y - 1}$）性质，则 *(a)-(e)* 等价于

(f) $\mathrm{gl}(\mathcal{H}^j_\Sigma(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}), F) = 0$ *for some* j.

本节最后，我们将结果应用于$\mathbf{P}^2$的割线簇：

例 4.20。考虑 $\Sigma := \Sigma(\mathbf{P}^2,\ \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(d))$，其中 $d \geq 3$。我们应用上述结果来得到 Σ的奇点不变量。

霍奇理论奇点不变量。利用 定理 A、推论 B、推论 C和推论 D，我们得到：

- 对数典范缺陷(Σ) = 对数典范缺陷$_{\mathrm{gen}}(\Sigma)$ = 对数典范缺陷$^{>0}{}_{\mathrm{gen}}(\Sigma) = 0$。
- $c(\Sigma) = \infty$，$\mathrm{HRH}(\Sigma) = 0$，以及 $\Sigma_{\mathrm{nRS}} = \mathbf{P}^2$。
- 对于任意 $y \in \mathbf{P}_2$，Hodge-Lyubeznik 数由下式给出

$$\lambda^{p,q}_{r,s}(\mathcal{O}_{\Sigma,y}) = 0 \text{ for all } p, q, r, s;$$

相交Hodge-Lyubeznik数由下式给出

$$\mathrm{I}\lambda^{p,q}_r(\mathcal{O}_{\Sigma,y}) = \begin{cases} 1 & (r,p,q) = (3,-1,-1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

- 设 $N = \binom{d+2}{2} - 1$ 且 $q = N - 5$。由于 Σ 是 CCI（上面的第二项），我们看到 $\mathcal{H}^j_\Sigma(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N})$ 仅在 $j = q$ 时不消失。我们有 $(\mathrm{IC}^H_\Sigma(-q)\ F)$ 和 $(\mathcal{H}^q_\Sigma(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N})\ F)$ 的生成层级如下

$$\mathrm{gl}(\mathrm{IC}^H_\Sigma(-q), F) = 0 \text{ and } \mathrm{gl}(\mathcal{H}^q_\Sigma(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}), F) = 1.$$

交叉上同调与交叉霍奇数。根据庞加莱 对偶，我们只需计算 $\mathrm{IH}^j(\Sigma)$，其中 $0 \leq j \leq 5$ 根据 定理 E 可得：

j	0	1	2	3	4	5
$\mathrm{IH}^j(\Sigma)$	有理数域^H	0	有理数域$^H(-1)$ $\oplus 2$	0	有理数域$^H(-2)$ $\oplus 2$	0

因此，交叉霍奇数 $\mathrm{Ih}^{p,\,q}(\Sigma) := \dim \mathrm{Gr}_F^p \mathrm{IH}^{p+q}(\Sigma)$ 为

$$\mathrm{Ih}^{p,q}(\Sigma) = \begin{cases} 1 & (p,q) \in \{(0,0),(5,5)\} \\ 2 & (p,q) \in \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

交叉上同调与霍奇-杜布瓦数。利用定理F（或例4.15），我们看到 $H^j(\Sigma)$ 是权 j纯的，并且由下式给出

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$H^j(\Sigma)$	有理数域^H	0	有理数域$^H(-1)$	0	有理数域$^H(-2)$	0	有理数域$^H(-3)^{\oplus 2}$	0	有理数域$^H(-4)^{\oplus 2}$	0	有理数域$^H(-5)$

因此，霍奇-杜布瓦数 $h^{p,\,q}(\Sigma) := \dim \mathrm{Gr}_F^p H^{p+q}(\Sigma)$ 的值为

$$\underline{h}^{p,q}(\Sigma) = \begin{cases} 1 & (p,q) \in \{(0,0),(1,1),(2,2),(5,5)\} \\ 2 & (p,q) \in \{(3,3),(4,4)\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

有理数域-因子化缺陷。 利用 推论 G，我们看到**有理数域**-因子化缺陷及其局部解析类比为

$$\sigma(\Sigma) = 1, \text{ and } \sigma^{\mathrm{an}}(\Sigma; y) = 1 \text{ for any } y \in \mathbf{P}^2.$$

5. Cohomology and Singularities of Higher Secant Varieties of Curves

在本小节中， $C \subset \mathbf{P}^N$ 是由一个（$2k-1$）-非常丰线丛的完全线性系嵌入的光滑射影曲线 L。本文旨在研究它的 k阶割线簇 σ_k。我们沿用小节 2.4.2中的记号。

5.1. 局部上同调缺陷及相关不变量。 我们回到系数域为 $A \subseteq \mathbf{R}$、基域为 k（可嵌入 $\mathbf{C}$）的一般混合层理论 $\mathcal{M}(-)$ 的情形。

为方便记号，在本小节中我们省略闭嵌入的推前。此外，令 p 表示任意一个目标为割线簇的自然态射（因此 $p\colon Z_m^k \to \sigma_m$和 $p\colon C^{(a)} \times B^b \to \sigma_b$）。等价地， p始终表示到 $\mathbf{P}(H^0(C, L))$的自然态射。

我们接下来证明定理 I其陈述回顾如下：

定理 5.1 (= 定理 I)。 设 L 为 $(2k-1)$-非常丰，并假设 $\sigma_k \neq \mathbf{P}^N$ 对某个$k \geq 2$成立。则：

(1) **有理数域**$_{\sigma_k}[2k-1]$ 是中间延拓的（等价地，对数典范缺陷$(\sigma_k) = 0$）。*(2)* 我们有同构

$$\mathrm{Gr}^W_{2k-1-\ell} \mathbf{Q}^H_{\sigma_k}[2k-1] = \mathrm{Sym}^\ell(H^1(C)) \boxtimes \mathrm{IC}_{\sigma_{k-\ell}}$$

反之亦然

$$\mathrm{Gr}^W_{N+q_k+\ell} \mathcal{H}^{q_k}_{\sigma_k}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}) \cong \mathrm{Sym}^\ell(H^1(C)) \boxtimes \mathrm{IC}_{\sigma_{k-\ell}}(-q_k-\ell).$$

我们先从以下观察开始（归功于 [Bro26]）：态射 $p\colon B^k \to \sigma_k$ 是半小的。这也将为所有 $p_*A^{\mathcal{M}}_{B^c}[2c-1]$ 给出一个显式代表元 c，这要归功于[dCM02，注释 3.2.2、3.2。3]。请注意，同上中的结果是针对倾斜层陈述的，但 A-混合层理论中的相容性保证了它在我们的情形下也成立。

引理 5.2. 对于所有 $c \geq 1$，映射 $B^c \to \sigma_c$ 都是半小的，并且我们有一个典范同构

$$p_*A^{\mathcal{M}}_{B^c}[2c-1] = \bigoplus_{\ell \leq c} H^{2(c-\ell)}_{\mathcal{M}}(C^{(c-\ell)}) \boxtimes \mathrm{IC}^{\mathcal{M}}_{\sigma_\ell}.$$

证明. 只需对底层的 A-对象证明该断言。

对于映射 $p\colon B^c \to \sigma_c$，注意到

$$\{y \in \sigma_c \mid \dim p^{-1}(y) \geq \ell\} = \sigma_{c-\ell},$$

此外，在限制到 $U^{c-\ell} = \sigma_{c-\ell} \setminus \sigma_{c-\ell-1}$ 上时，该映射是从一个纤维为 $C^{(\ell)}$ 的乘积出发的投影。

于是半小缺陷为

$$\max_{\ell \geq 0} 2\ell - \dim B^c + \dim \sigma_{c-\ell} = 0,$$

因此，该态射是半小的，且每个分层 $U^{c-\ell}$ 都是相关的。因此，我们得到一个同构

$$p_*A_{B^c}[2c-1] \cong \bigoplus_{\ell \leq c} \mathrm{IC}_{\sigma_{c-\ell}}(\mathcal{L}_\ell),$$

其中，$\mathcal{L}_\ell$ 是 $U^{c-\ell}$ 上由下式给出的局部系统

$$y \mapsto H^{\dim B^c - \dim \sigma_{c-\ell}}(p^{-1}(y)).$$

由于 $p^{-1}(y) = C^{(\ell)}$ 是不可约的，单值化作用是平凡的；又因为 $\dim B^c - \dim \sigma_{c-\ell} = 2c-1-(2(c-\ell)-1) = 2\ell$，这就证明了该结论。□

我们有正合三角

$$A^{\mathcal{M}}_{\sigma_k} \to p_*A^{\mathcal{M}}_{B^k} \to \mathcal{C}^k \xrightarrow{+1},$$

其中，锥支撑于 σ_{k-1}。限制到 σ_{k-1} 上，可得

$$A^{\mathcal{M}}_{\sigma_{k-1}} \to p_*A^{\mathcal{M}}_{Z^k_{k-1}} \to \mathcal{C}^k \xrightarrow{+1}.$$

第一个三角表明我们有同构

$$\mathcal{H}^{j-1}\mathcal{C}^k \cong \mathcal{H}^j A^{\mathcal{M}}_{\sigma_k} \text{ for } j < 2k-1$$

$$\mathrm{Gr}^W_\ell \mathcal{H}^{2k-2}\mathcal{C}^k \cong \mathrm{Gr}^W_\ell \mathcal{H}^{2k-1} A^{\mathcal{M}}_{\sigma_k} \text{ for } \ell < 2k-1,$$

因此，要理解 $A^{\mathcal{M}}_{\sigma_k}$，只需研究 $\mathcal{C}^k$。

利用奇点消解 $\alpha\colon C^{(k-m)} \times B^m \to Z^k_m$，我们得到三角形

$$A^{\mathcal{M}}_{Z^k_m} \to \alpha_*A^{\mathcal{M}}_{C^{(k-m)}\times B^m} \to \Sigma^{k,m}_{m-1} \xrightarrow{+1},$$

其中锥现在支撑于 Z^k_{m-1}。如果我们限制到 Z^k_{m-1}，就得到一个三角

$$A^{\mathcal{M}}_{Z^k_{m-1}} \to \alpha_*A^{\mathcal{M}}_{C^{(k-m)}\times Z^m_{m-1}} \to \Sigma^{k,m}_{m-1} \xrightarrow{+1},$$

其中我们也用 α 表示自然态射 $C^{(k-m)} \times Z^m_{m-1} \to Z^k_{m-1}$。

更一般地（也为了解释上述记号），对于任意 $a > b > c \geq 1$，我们考察三角形：

$$A^{\mathcal{M}}_{Z^a_c} \to \alpha_* A^{\mathcal{M}}_{C^{(a-b)} \times Z^b_c} \to \Sigma^{a,b}_c \xrightarrow{+1},$$

它由自然态射 $\alpha\colon C^{(a-b)} \times Z^b_c \to Z^a_c$ 诱导。

我们有交换图表

$$\begin{array}{ccc} C \times B^{k-1} & \longrightarrow & B^{k-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z^k_{k-1} & \longrightarrow & \sigma_{k-1} \end{array},$$

由此得到交换图表

$$\begin{array}{ccc} p_* A^{\mathcal{M}}_{C \times B^{k-1}} & \longleftarrow & p_* A^{\mathcal{M}}_{B^{k-1}} \\ \uparrow & & \uparrow \\ p_* A^{\mathcal{M}}_{Z^k_{k-1}} & \longleftarrow & A^{\mathcal{M}}_{\sigma_{k-1}} \end{array}.$$

我们令 $T_k = \mathsf{cone}(A^{\mathcal{M}}_{\sigma_{k-1}} \to p_* A^{\mathcal{M}}_{C \times B^{k-1}})$。由八面体公理应用于这些态射的复合（沿交换方块任一方向），可得两个正合三角（使用上述记号）：

$$H^0_{\mathcal{M}}(C) \boxtimes \mathcal{C}^{k-1} \to T_k \to \tau^{>0} \kappa_* A^{\mathcal{M}}_C \boxtimes p_* A^{\mathcal{M}}_{B^{k-1}} \xrightarrow{+1}, \tag{56}$$

$$\mathcal{C}^k \to T_k \to p_* \Sigma^{k,k-1}_{k-2} \xrightarrow{+1}. \tag{57}$$

三角（56）是分裂的。事实上，根据构造，我们有消失 $\mathcal{H}^\ell(H^0_{\mathcal{M}}(C) \boxtimes \mathcal{C}^{k-1}) = H^0_{\mathcal{M}}(C) \boxtimes \mathcal{H}^\ell \mathcal{C}^{k-1} = 0$ 对于 $\ell > 2k-3$ 以及同构

$$\mathcal{H}^\ell(\tau^{>0} \kappa_* A^{\mathcal{M}}_C \boxtimes p_* A^{\mathcal{M}}_{B^{k-1}}) = \begin{cases} H^1_{\mathcal{M}}(C) \boxtimes \mathcal{H}^{2k-3} p_* A^{\mathcal{M}}_{B^{k-1}} & \ell = 2k-2 \\ H^2_{\mathcal{M}}(C) \boxtimes \mathcal{H}^{2k-3} p_* A^{\mathcal{M}}_{B^{k-1}} & \ell = 2k-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases},$$

因此，态射

$$\tau^{>0} \kappa_* A^{\mathcal{M}}_C \boxtimes p_* A^{\mathcal{M}}_{B^{k-1}}[-1] \to H^0_{\mathcal{M}}(C) \boxtimes \mathcal{C}^{k-1}$$

为 0。

特别地，我们有同构

$$\mathcal{H}^\ell T_k \cong \begin{cases} H^0_{\mathcal{M}}(C) \boxtimes \mathcal{H}^\ell \mathcal{C}^{k-1} & \ell \leq 2k-3 \\ H^1_{\mathcal{M}}(C) \boxtimes \mathcal{H}^{2k-3} p_* A^{\mathcal{M}}_{B^{k-1}} & \ell = 2k-2 \\ H^2_{\mathcal{M}}(C) \boxtimes \mathcal{H}^{2k-3} p_* A^{\mathcal{M}}_{B^{k-1}} & \ell = 2k-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

由三角（57），我们得到长正合列

$$\cdots \to \mathcal{H}^{2k-4} \mathcal{C}^k \to H^0_{\mathcal{M}}(C) \boxtimes \mathcal{H}^{2k-4} \mathcal{C}^{k-1} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{H}^{2k-4} p_* \Sigma^{k,k-1}_{k-2}$$

$$\to \mathcal{H}^{2k-3}\mathcal{C}^k \to H^0_{\mathcal{M}}(C)\boxtimes \mathcal{H}^{2k-3}\mathcal{C}^{k-1} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}^{2k-3}p_*\Sigma^{k,k-1}_{k-2}$$
$$\xrightarrow{\tau} \mathcal{H}^{2k-2}\mathcal{C}^k \to H^1_{\mathcal{M}}(C)\boxtimes \mathcal{H}^{2k-3}p_*A^{\mathcal{M}}_{B^{k-1}} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{H}^{2k-2}p_*\Sigma^{k,k-1}_{k-2}$$
$$\to \mathcal{H}^{2k-1}\mathcal{C}^k \xrightarrow{\chi} H^2_{\mathcal{M}}(C)\boxtimes \mathcal{H}^{2k-3}p_*A^{\mathcal{M}}_{B^{k-1}} \to \dots.$$

注 5.3。 下面的计算（与当前讨论无关）将表明 $p_*\Sigma^{k}_{,k-2}{}^{k-1}$ 的上同调具有以下消失性质：

$$\mathcal{H}^{\ell}p_*\Sigma^{k,k-1}_{k-2} = 0 \text{ for all } \ell \notin \{2k-4, 2k-3, 2k-2\}. \tag{58}$$

还有一种方法可以看出一个稍弱的消失结论。事实上，我们在 $D^b(\mathcal{M}(\sigma_{k-1}))$ 中有如下三角：

$$p_*A^{\mathcal{M}}_{Z^k_{k-1}} \to p_*A^{\mathcal{M}}_{C\times B^{k-1}} \to p_*\Sigma^{k,k-1}_{k-2} \xrightarrow{+1}.$$

我们可以写成 $p_*A^{\mathcal{M}}_{C\times B^{k-1}} = \kappa_*A^{\mathcal{M}}_C \boxtimes p_*A^{\mathcal{M}}_{B^{k-1}}$，因此由 引理 5.2 可知，该三角中的中心对象仅在以下次数具有非零上同调： $2k-3$， $2k-2$ 和$2k-1$。

利用映射 p: $Z^k_{k-1}\to\sigma_{k-1}$ 的分层，很容易看出半小性缺陷恰好等于 1。此外，由于 Z^k_{k-1} 是 B^{k-1} 中的一个超曲面，我们知道 $A^{\mathcal{M}}_{Z^k_{k-1}}$ 仅在 $2k-2=\dim\ Z^k_{k-1}$ 次具有非零上同调。因此， $p_*A^{\mathcal{M}}_{Z^k_{k-1}}$ 可能非零的上同调对象仅位于 $2k-3$， $2k-2$ 和 $2k-1$ 次。根据上同调长正合列，我们得出

$$\mathcal{H}^{\ell}p_*\Sigma^{k,k-1}_{k-2} = 0 \text{ for all } \ell \notin \{2k-4, 2k-3, 2k-2, 2k-1\}.$$

我们现在可以对长正合列作一些化简：

引理 5.4. 态射 χ 是一个同构。

证明。 由消失（58），我们看到 χ 是纯对象之间的一个满射，其权为$2k-1$。根据定义，定义域为

$$\mathcal{H}^{2k-1}\mathcal{C}^k = (\mathcal{H}^{2k-1}p_*A^{\mathcal{M}}_{B^k})/\mathrm{IC}^{\mathcal{M}}_{\sigma_k} = \bigoplus_{\ell<k} H^{2(k-\ell)}_{\mathcal{M}}(C^{(k-\ell)})\boxtimes \mathrm{IC}^{\mathcal{M}}_{\sigma_\ell}.$$

目标为

$$\bigoplus_{\ell\le k-1}(H^2_{\mathcal{M}}(C)\otimes H^{2(k-1-\ell)}_{\mathcal{M}}(C^{(k-1-\ell)}))\boxtimes \mathrm{IC}^{\mathcal{M}}_{\sigma_\ell},$$

因此，定义域与目标具有彼此同构的简单分量，再由满射性可知该映射是一个同构。□

消失（58）也意味着我们有同构 $\mathcal{H}^{\ell}\mathcal{C}^k \to H^0_{\mathcal{M}}(C)\boxtimes\mathcal{H}^{\ell}\mathcal{C}^{k-1}=0$对于所有 $\ell < 2k-4$，其中消失由归纳法得出。因此，下面的长正合列囊括了我们所需的一切：

$$0\to \mathcal{H}^{2k-4}\mathcal{C}^k \to H^0_{\mathcal{M}}(C)\boxtimes \mathcal{H}^{2k-4}\mathcal{C}^{k-1} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{H}^{2k-4}p_*\Sigma^{k,k-1}_{k-2}$$
$$\to \mathcal{H}^{2k-3}\mathcal{C}^k \to H^0_{\mathcal{M}}(C)\boxtimes \mathcal{H}^{2k-3}\mathcal{C}^{k-1} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}^{2k-3}p_*\Sigma^{k,k-1}_{k-2}$$
$$\xrightarrow{\tau} \mathcal{H}^{2k-2}\mathcal{C}^k \to H^1_{\mathcal{M}}(C)\boxtimes \mathcal{H}^{2k-3}p_*A^{\mathcal{M}}_{B^{k-1}} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{H}^{2k-2}p_*\Sigma^{k,k-1}_{k-2} \to 0.$$

注意，$H^0_{\mathcal{M}}(C) \boxtimes \mathcal{H}^{2k-3}\mathcal{C}^{k-1}$ 是权 $2k-3$ 的纯对象，而 $\mathcal{H}^1_{\mathcal{M}}(C) \boxtimes \mathcal{H}^{2k-3}p_*A^{\mathcal{M}}_{B^{k-1}}$ 是权 $2k-2$ 的纯对象。因此，我们得出

$$\text{(59)}\quad \mathrm{Gr}^W_w(\tau)\colon \mathrm{Gr}^W_w\mathcal{H}^{2k-3}p_*\Sigma^{k,k-1}_{k-2} \to \mathrm{Gr}^W_w\mathcal{H}^{2k-2}\mathcal{C}^k \text{ is } \begin{cases} \text{an isomorphism} & w < 2k-3 \\ \text{surjective} & w = 2k-3 \end{cases}$$

因此，我们看到，定理 I 的证明归结为以下技术性命题 n:

命题 5.5。在上述记号下，我们有

(1) 我们有一个同构

$$\mathcal{H}^{2k-2}p_*\Sigma^{k,k-1}_{k-2} \cong \bigoplus_{\ell \le k-2} H^1_{\mathcal{M}}(C) \wedge H^2_{\mathcal{M}}(C) \otimes H^{2(k-\ell-2)}_{\mathcal{M}}(C^{(k-\ell-2)}) \boxtimes \mathrm{IC}^{\mathcal{M}}_{\sigma_\ell},$$

(2) $W_{2k-3}\mathcal{H}^{2k-3}p_*\Sigma^{k,\ k-1}_{k-2} = \mathcal{H}^{2k-3}p_*\Sigma^{k,\ k-1}_{k-2}$，我们有一个同构

$$\mathrm{Gr}^W_{2k-3}\mathcal{H}^{2k-3}p_*\Sigma^{k,k-1}_{k-2} \cong \mathrm{Sym}^2(H^1_{\mathcal{M}}(C)) \boxtimes \mathrm{IC}^{\mathcal{M}}_{\sigma_{k-2}} \oplus \bigoplus_{\ell \le k-2} H^2_{\mathcal{M}}(C) \otimes H^{2(k-\ell-2)}_{\mathcal{M}}(C^{(k-\ell-2)}) \boxtimes \mathrm{IC}^{\mathcal{M}}_{\sigma_\ell}$$

并且对于 $\ell \ge 3$，我们有一个同构

$$\mathrm{Gr}^W_{2k-1-\ell}\mathcal{H}^{2k-3}p_*\Sigma^{k,k-1}_{k-2} \cong \mathrm{Sym}^\ell(H^1_{\mathcal{M}}(C)) \boxtimes \mathrm{IC}^{\mathcal{M}}_{\sigma_{k-\ell}}$$

(3) 映射 β 是单射。

(4) 映射 α 是一个同构。

证明 命题 *5.5* 推出 定理 *I*。若 β 是单射且 α 是一个同构，则我们得出 $\mathcal{H}^{2k-4}\mathcal{C}^k = \mathcal{H}^{2k-3}\mathcal{C}^k = 0$，因此 $A_{\sigma_k}[2k-1]$ 是中间延拓的。

若 β 是单射，则由 引理 5.2、$\mathrm{Gr}^W_{2k-3}\mathcal{H}^{2k-3}p_*\Sigma^{k,\ k-1}_{k-2}$ 的描述、第（2）项中的内容，以及上文（W_{2k-3}）中 $\mathrm{Gr}\tau$ 的满射性，可得(59)

$$\mathrm{Gr}^W_{2k-3}A^{\mathcal{M}}_{\sigma_k}[2k-1] \cong \mathrm{Gr}^W_{2k-3}\mathcal{H}^{2k-2}\mathcal{C}^k \cong \mathrm{Sym}^2(H^1_{\mathcal{M}}(C)) \boxtimes \mathrm{IC}^{\mathcal{M}}_{\sigma_{k-2}}.$$

对于 $\ell > 3$，利用 $\mathrm{Gr}^W_{2k-\ell}(\tau)$ 是一个同构这一事实（如（59）所示），再由第（2）项可得一个同构

$$\mathrm{Gr}^W_{2k-\ell}A^{\mathcal{M}}_{\sigma_k}[2k-1] \cong \mathrm{Gr}^W_{2k-\ell}\mathcal{H}^{2k-2}\mathcal{C}^k \cong \mathrm{Sym}^\ell(H^1_{\mathcal{M}}(C)) \boxtimes \mathrm{IC}^{\mathcal{M}}_{\sigma_{k-\ell}}.$$

最后，由 $W_{2k-3}\mathcal{H}^{2k-3}p_*\Sigma^{k,\ k-1}_{k-2} = 0$，我们看到

$$\mathrm{Gr}^W_{2k-2}\mathcal{C}^k = \ker(\gamma) \cong H^1_{\mathcal{M}}(C) \boxtimes \mathrm{IC}^{\mathcal{M}}_{\sigma_{k-1}}$$

其中，同构由以下映射的满射性得出：γ 以及引理 5.2 中对定义域的描述，以及式（1）中对目标的描述。□

为了证明条目（3）和（4），我们将对所有$W_w(-)$证明关于 Gr 的相应结论，其中$w \in$**整数环**。以下观察将会有所帮助，因为这意味着我们只需理解态射 α的较低权重，而我们可以通过性质（59）（对于σ_{k-1}）来理解这些权重。

引理 5.6. 映射 $\mathrm{Gr}^W_{2k-3}(\alpha)$是单射。

证明。 我们有一个同构

$$\mathcal{H}^{2k-4}\mathcal{C}^k \cong \mathcal{H}^{2k-3}A^{\mathcal{M}}_{\sigma_k},$$

其权为 $\leq 2k-4$ 通过 [PP24]。因此，我们得到

$$\ker(\mathrm{Gr}^W_{2k-3}(\alpha)) = \mathrm{Gr}^W_{2k-3}\mathcal{H}^{2k-4}\mathcal{C}^k = 0.$$

□

因此，为了理解 α的其余加权分量，我们可以研究复合态射

$$\alpha' \colon H^0_{\mathcal{M}}(C) \boxtimes p_*\Sigma^{k-1,k-2}_{k-3}[-1] \to H^0_{\mathcal{M}}(C) \boxtimes \mathcal{C}^{k-1} \to p_*\Sigma^{k,k-1}_{k-2}.$$

我们将对 $p_*\Sigma^{a,\ c}{}^{b}$随 $a > b > c \geq 1$ 变化的情形给出一些归纳性理解。我们的归纳描述在记号上相当繁重，不过我们将看到，对于 $a = b+1 = c+2$，该描述会大大简化。

注5.7。我们的论证涉及一个 3×3图表，其行和列都是正合三角。众所周知（[Nee91]），这类构造在 D^b（$\mathcal{A}$）的三角范畴层面上表现不佳。例如，在这种设定下，锥并非函子性的。

因此，下面我们将在 $D^b(\mathcal{M}(\sigma_k))$的dg增强中工作，其中，根据映射锥构造的定义，$3 \times 3$-图表成立是一个简单的练习。例如，在链复形范畴中，我们对映射锥的符号约定如下：如果$f\colon\ A \to B$ 是一个态射，那么 $C(f) = A[1] \oplus B$，其微分为 $\begin{pmatrix} -d_A & 0 \\ -f & d_B \end{pmatrix}$。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\ f\ } & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ & & \end{array}$$

若 p q 是一个交换图表，则态射 $C(f) \to C(g)$ 定义为$C \xrightarrow{\ g\ } D$

$$A[1] \oplus B \xrightarrow{\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}} C[1] \oplus D.$$

那么 $C(C(f) \to C(g))$（除直和项的顺序外）就是 $A[2] \oplus B[1] \oplus C[1] \oplus D$，微分上的符号由 $d_A,\ -d_B,\ -d_C,\ d_D,\ -f,\ -g,\ -p,\ -q$给出。容易看出，$C(C(p) \to C(q))$ 与同一对象同构（同样，仅直和项的顺序不同），相应的 3×3-图表是交换的，且所有行和列都是正合三角形（也就是说，任一行或列中的第三项都是前两项之间态射的映射锥）。

我们的出发点是下面这个 3×3-图表，

$$\begin{array}{ccccccc}
p_*A^{\mathcal{M}}_{Z^a_c} & \longrightarrow & p_*A^{\mathcal{M}}_{C^{(a-c)}\times B^c} & \longrightarrow & p_*\Sigma^{a,c}_{c-1} & \xrightarrow{+1} & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
p_*A^{\mathcal{M}}_{C^{(a-b)}\times Z^b_c} & \longrightarrow & p_*A^{\mathcal{M}}_{C^{(a-b)}\times C^{(b-c)}\times B^c} & \longrightarrow & \kappa_*A^{\mathcal{M}}_{C^{(a-b)}} \boxtimes p_*\Sigma^{b,c}_{c-1} & \xrightarrow{+1} & , \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\alpha}} & & \\
p_*\Sigma^{a,b}_c & \longrightarrow & \eta^{a,b}_c \boxtimes p_*A^{\mathcal{M}}_{B^c} & \longrightarrow & S^{a,b}_c & \xrightarrow{+1} &
\end{array} \tag{60}$$

对这个图表取 $\mathrm{Gr}_w^W(-)$（一个正合函子），便得到一个行与列均正合的 3×3-图表。这里 $\eta^{a,}_{c}{}^{b} = C(\kappa_* A^{\mathcal{M}}_{C^{(a-c)}} \to \kappa_* A^{\mathcal{M}}_{C^{(a-b)}\times C^{(b-c)}})$ 与上同调上的拉回态射 $H^j(C^{(a-b)}) \to H^j(C^{(a-c)}\times C^{(b-c)})$ 有关。

我们将通过归纳法看到，可以找到 $V^{a,}_{w}{}^{b}_{c,,,\ell}$，$H^{a,}_{w}{}^{b}_{c,,,\ell} \in D^b(\mathcal{M}_{\mathrm{cons}}(w+1-2\ell))$，使得等式成立

$$\mathrm{Gr}_w^W p_*\Sigma_c^{a,b} = \bigoplus_{\ell\le c} V^{a,b}_{w,c,\ell}\boxtimes \mathrm{IC}^{\mathcal{M}}_{\sigma_\ell},$$

$$\mathrm{Gr}_w^W S_c^{a,b} = \bigoplus_{\ell< c} H^{a,b}_{w,c,\ell}\boxtimes \mathrm{IC}^{\mathcal{M}}_{\sigma_\ell}.$$

例 5.8. 归纳法的基例是 $a>b>c=1$。那么图表为

$$\begin{array}{ccccccc}
p_*A^{\mathcal{M}}_{Z_1^a} & \xrightarrow{\cong} & p_*A^{\mathcal{M}}_{C^{(a-1)}\times C} & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{+1} & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
p_*A^{\mathcal{M}}_{C^{(a-b)}\times Z_1^b} & \xrightarrow{\cong} & p_*A^{\mathcal{M}}_{C^{(a-b)}\times C^{(b-1)}\times C} & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{+1} & ,\\
\downarrow{\scriptstyle\widetilde{\beta}} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\widetilde{\alpha}} & & \\
p_*\Sigma_1^{a,b} & \longrightarrow & \eta_1^{a,b}\boxtimes A_C^{\mathcal{M}} & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{+1} &
\end{array}$$

因此我们看到，对于所有 $\ell,\ w,\ H^{a,}_{w}{}^{b}_{1,,,\ell}=0$ 成立，并且

这说明 $V^{a,}_{w}{}^{b}_{1,,,\ell} = \begin{cases} \mathrm{Gr}^W_w p_*\Sigma_c^{a,b} \cong \mathrm{Gr}^W_{w-1}\eta_1^{a,b}\boxtimes A_C^{\mathcal{M}}, \\ \mathrm{Gr}^W_{w-1}\eta_1^{a,b} \quad \ell=1, \\ 0 \end{cases}$

否则。

考虑图表中底部三角的平移版本会更方便 (60):

$$\eta_c^{a,b}\boxtimes p_*A^{\mathcal{M}}_{B^c} \xrightarrow{\widetilde{\chi}} S_c^{a,b} \xrightarrow{\widetilde{\beta}} p_*\Sigma_c^{a,b}[1] \xrightarrow{+1}. \tag{61}$$

另一个重要的三角是图表中最右侧的垂直三角（60）：

$$p_*\Sigma_{c-1}^{a,c} \to \kappa_* A^{\mathcal{M}}_{C^{(a-b)}}\boxtimes p_*\Sigma_{c-1}^{b,c} \xrightarrow{\widetilde{\alpha}} S_c^{a,b} \xrightarrow{+1}. \tag{62}$$

我们为作为 $\widetilde{\ }$（平移后的）复合态射 $\beta\circ\widetilde{\alpha}$ 中 K¨unneth 直和项出现的一些重要态射命名：

$$\alpha'_{a,b,c,H^0}\colon H^0_{\mathcal{M}}(C^{(a-b)})\boxtimes p_*\Sigma_{c-1}^{b,c}[-1]\to p_*\Sigma_c^{a,b}, \tag{63}$$

$$\alpha'_{a,b,c,H^1}\colon H^1_{\mathcal{M}}(C^{(a-b)})\boxtimes p_*\Sigma_{c-1}^{b,c}[-2]\to p_*\Sigma_c^{a,b} \tag{64}$$

我们看到，使用上述关于 α' 的记号，可以得到等式 $\alpha' = \alpha'_{k,\ k-1,\ k-2,\ H^0}$。事实上，该等式源于这两个态射都经过

$H^0_{\mathcal{M}}(C) \boxtimes p_* A^{\mathcal{M}}_{Z^{k-1}_{k-2}}$，以及三角形态射中最右侧的交换方块

$$\begin{array}{ccccccc} H^0_{\mathcal{M}}(C) \boxtimes A^{\mathcal{M}}_{\sigma_{k-2}} & \longrightarrow & H^0_{\mathcal{M}}(C) \boxtimes p_* A^{\mathcal{M}}_{Z^{k-1}_{k-2}} & \longrightarrow & H^0_{\mathcal{M}}(C) \boxtimes \mathcal{C}^{k-1} & \xrightarrow{+1} & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ p_* A^{\mathcal{M}}_{Z^{k}_{k-2}} & \longrightarrow & p_* A^{\mathcal{M}}_{C \times Z^{k-1}_{k-2}} & \longrightarrow & p_* \Sigma^{k,k-1}_{k-2} & \xrightarrow{+1} & \end{array} .$$

此外，现在我们可以证明映射 β （如命题 5.5 的第（3）项所述）是单射。

第 （3） 项的证明。 我们在上文的 引理 5.4 中看到， $\chi : \mathcal{H}^{2k-1}\mathcal{C}^k \to H^2_{\mathcal{M}}$（$C$） $\boxtimes \mathcal{H}^{2k-3} p_* A^{\mathcal{M}}_{B^{k-1}}$ 是一个同构。将其中的 $k-1$ 替换为 k，可得一个同构

$$\chi \colon \mathcal{H}^{2k-3}\mathcal{C}^{k-1} \to H^2_{\mathcal{M}}(C) \boxtimes \mathcal{H}^{2k-5} p_* A^{\mathcal{M}}_{B^{k-2}}.$$

我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} H^0_{\mathcal{M}}(C) \boxtimes \mathcal{H}^{2k-3}\mathcal{C}^{k-1} & \xrightarrow{\chi} & H^0_{\mathcal{M}}(C) \otimes H^2_{\mathcal{M}}(C) \boxtimes \mathcal{H}^{2k-5} p_* A^{\mathcal{M}}_{B^{k-2}} \\ & & \downarrow \rho_1 \\ \downarrow \beta & & H^2_{\mathcal{M}}(C^{\times 2}) \boxtimes \mathcal{H}^{2k-5} p_* A^{\mathcal{M}}_{B^{k-2}} \\ & & \downarrow \rho_2 \\ \mathcal{H}^{2k-3} p_* \Sigma^{k,k-1}_{k-2} & \xrightarrow{\rho_3} & \mathcal{H}^2(\eta^{k,k-1}_{k-2}) \boxtimes \mathcal{H}^{2k-5} p_* A^{\mathcal{M}}_{B^{k-2}} \end{array}$$

其中，态射 ρ_3 是通过对态射取 $\mathcal{H}^{2k-3}$ 得到的

$$p_* \Sigma^{k,k-1}_{k-2} \to \eta^{k,k-1}_{k-2} \boxtimes p_* A^{\mathcal{M}}_{B^{k-2}},$$

态射 ρ_2 是通过对态射取 $\mathcal{H}^{2k-3}$ 得到的

$$p_* A^{\mathcal{M}}_{C \times C \times B^{k-2}} \to \eta^{k,k-1}_{k-2} \boxtimes p_* A^{\mathcal{M}}_{B^{k-2}}$$

而态射 ρ_1 是由 $H^2_{\mathcal{M}}(C^{\times 2})$ 的 K¨unneth 分解所诱导的。

由于 χ 是同构，要证明 β 的单射性，只需证明右侧两个垂直态射的复合是单射的；而这归结为证明映射的单射性：

$$\pi_1^*(H^0_{\mathcal{M}}(C)) \otimes \pi_2^*(H^2_{\mathcal{M}}(C)) \to H^2_{\mathcal{M}}(C^{\times 2}) \to H^2_{\mathcal{M}}(C^{\times 2})/H^2_{\mathcal{M}}(C^{(2)}),$$

wh这对于底层的 A-向量空间很容易验证。证明至此完成。 □

由固定权的纯对象范畴的半单性 w 以及各个 $\mathrm{IC}^{\mathcal{M}}_{\sigma_\ell}$-模上的严格支撑条件，当我们将 $\mathrm{Gr}^W_w(-)$ 应用于 3×3-图表 (60) 时，可以将所得的 3×3-图表写成对 $\ell \le c$ 求和的正合函子 $(-) \boxtimes \mathrm{IC}_{\sigma_\ell}$ 作用于某些 3×3-图表的直和，这些图表属于 $D^b(\mathcal{M}_{\mathrm{cons}}(w+1-2\ell)$。

现在，我们给出将 $\mathrm{Gr}^W_w(-)$ 应用于三角形（61）和（62）所得到的正合三角。由于我们的计划是给出显式复形来表示我们感兴趣的对象，我们首先将 $\mathrm{Gr}^W_w \eta^{a}{}_{,c}{}^{b}$替换为一个特定的复形。

态射 $H^\bullet_{\mathcal{M}}(C^{(a-c)}) \to H^\bullet_{\mathcal{M}}(C^{(a-b)} \times C^{(b-c)})$ 是单射，因为函子 For 是正合的，且上同调上的拉回态射是单射，因此 $\eta^{a}{}_{,c}{}^{b}$是权为 0 的纯复形，其第 j 次上同调等于

$$H^j_{\mathcal{M}}(C^{(a-b)} \times C^{(b-c)})/H^j_{\mathcal{M}}(C^{(a-c)}).$$

特别地，将 $\mathrm{Gr}^W_j \eta^{a}{}_{,c}{}^{b} = (H^j_{\mathcal{M}}(C^{(a-b)} \times C^{(b-c)})/H^j_{\mathcal{M}}(C^{(a-c)}))[-j]$ 视为导出范畴中的对象。如果记 $\gamma^{a}{}_{,c}{}^{b}{}_{,j}$ 为复形 $H^j_{\mathcal{M}}(C^{(a-c)}) \to H^j_{\mathcal{M}}(C^{(a-b)} \times C^{(b-c)})$，其项位于 -1,0 次，则我们更倾向于写成

$$\mathrm{Gr}^W_j \eta^{a,b}_c = \gamma^{a,b}_{c,j}[-j].$$

根据 K¨unneth，我们可以改写为（使用引理 5.2 处理 $A^{\mathcal{M}}_{B^c}$ 项）：

$$\mathrm{Gr}^W_w(\eta^{a,b}_c \boxtimes p_* A^{\mathcal{M}}_{B^c}) = (\mathrm{Gr}^W_{w+1-2c}\eta^{a,b}_c[1-2c]) \boxtimes (p_* A^{\mathcal{M}}_{B^c}[2c-1]) = \bigoplus_{\ell \le c} \gamma^{a,b}_{c,w+1-2c} \otimes H^{2(c-\ell)}_{\mathcal{M}}(C^{(c-\ell)})[-w] \boxtimes \mathrm{IC}^{\mathcal{M}}_{\sigma_\ell}.$$

因此，将 $\mathrm{Gr}^W_w(-)$ 应用于三角（61），并考察 $\mathrm{IC}^{\mathcal{M}}_{\sigma_\ell}$的系数后，我们得到对所有 $\ell \in \mathbf{Z}$ 都成立的正合三角：

$$\gamma^{a,b}_{c,w+1-2c} \otimes H^{2(c-\ell)}_{\mathcal{M}}(C^{(c-\ell)})[-w] \to H^{a,b}_{w,c,\ell} \to V^{a,b}_{w,c,\ell}[1] \xrightarrow{+1} . \tag{65}$$

我们再给出另一个三角，以帮助理解复形 $H^{a}{}_{,w}{}^{b}{}_{c,,\ell}$。同样地，根据 K¨unneth 公式，我们有

$$\mathrm{Gr}^W_w(\kappa_* A^{\mathcal{M}}_{C^{(a-b)}} \boxtimes p_* \Sigma^{b,c}_{c-1}) = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} \mathrm{Gr}^W_{w-i} \kappa_* A^{\mathcal{M}}_{C^{(a-b)}} \boxtimes \mathrm{Gr}^W_i p_* \Sigma^{b,c}_{c-1},$$

并且再次，因为 $\kappa_* A^{\mathcal{M}}_{C^{(a-b)}}$ 是一个权为 0 的纯复形，这可以改写为

$$\mathrm{Gr}^W_w(\kappa_* A^{\mathcal{M}}_{C^{(a-b)}} \boxtimes p_* \Sigma^{b,c}_{c-1}) = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} H^{w-i}_{\mathcal{M}}(C^{(a-b)})[i-w] \boxtimes \mathrm{Gr}^W_i p_* \Sigma^{b,c}_{c-1}.$$

现在，对 $\mathrm{Gr}^W_w(-)$ 应用 Gr 及（62），我们得到对所有 ℓ 的正合三角：

$$V^{a,c}_{w,c-1,\ell} \to \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} H^{w-i}_{\mathcal{M}}(C^{(a-b)})[i-w] \otimes V^{b,c}_{i,c-1,\ell} \to H^{a,b}_{w,c,\ell} \xrightarrow{+1} . \tag{66}$$

由归纳法，这些三角形表明，我们总能找到复形 $V^{a}{}_{,w}{}^{b}{}_{c,\ell}$（分别为 $H^{a}{}_{,w}{}^{b}{}_{c,\ell}$）；此外，如上所述，对于 $\ell > c$（分别为 $\ell \ge c$），我们有消失。

我们将通过令 $c = \ell + e$ 来改写这些三角形。正如三角形（66）中 $[i-w]$ 的平移所示，施加一些平移也会有所帮助。因此，我们考虑平移 $[w+e-1]$ 后的三角形，并引入以下记号：

$$\widetilde{V}^{a,b}_{w,e,\ell} = V^{a,b}_{w,\ell+e,\ell}[w+e],$$

$$\widetilde{H}^{a,b}_{w,e,\ell} = H^{a,b}_{w,\ell+e,\ell}[w+e-1].$$

采用这一记号，并使用映射锥记号而非正合三角记号，我们得到等式（由平移三角形（65）、（66））：

$$\widetilde{V}^{a,b}_{w,e,\ell} = C(\gamma^{a,b}_{\ell+e,w+1-2(\ell+e)} \otimes H^{2e}_{\mathcal{M}}(C^{(e)})[e-1] \to \widetilde{H}^{a,b}_{w,e,\ell}), \tag{67}$$

$$\widetilde{H}^{a,b}_{w,e,\ell} = C(\widetilde{V}^{a,\ell+e}_{w,e-1,\ell} \to \bigoplus_{i\in\mathbf{Z}} H^{w-i}_{\mathcal{M}}(C^{(a-b)}) \otimes \widetilde{V}^{b,\ell+e}_{i,e-1,\ell}). \tag{68}$$

E例5.9。重述例5.8中的陈述，在此记号下，我们有

$$\widetilde{V}^{a,b}_{w,0,\ell} \cong \gamma^{a,b}_{\ell,w+1-2\ell}.$$

现在我们继续进行归纳构造。对于 $s \geq 0$ 和 $p > q > r+s$，我们归纳地定义长度为 $s+2$ 的复形，记作 ${}^{s}\gamma^{p}{}_{r}{}^{q}{}_{,j}$，定义如下

$${}^{0}\gamma^{p,q}_{r,j} = \gamma^{p,q}_{r,j},$$

and

$${}^{s}\gamma^{p,q}_{r,j} = C({}^{s-1}\gamma^{p,r+s}_{r,j} \to \bigoplus_{i\in\mathbf{Z}} H^{j-i}_{\mathcal{M}}(C^{(p-q)}) \otimes {}^{s-1}\gamma^{q,r+s}_{r,i}), \tag{69}$$

取映射锥所沿的态射由上同调上的加法映射的拉回诱导，并且其具体定义将在下面的讨论中给出。

为方便起见，令

$$H^{j}_{\mathcal{M}}(C^{(a_1)} \times \cdots \times C^{(a_r)}) = H^{j}_{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_r),$$

其中顺序对下面的讨论很重要。对于重复出现的值，我们用指数作简写：例如 $H^{j}_{\mathcal{M}}(1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2) = H^{j}(1^3, 2^2)$，但 $H^{j}_{\mathcal{M}}(1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 2)$ 是 $H^{j}_{\mathcal{M}}(1, 2, 1^2, 2)$。

只要有序分拆 (b) 是 (a) 的细化，就存在典范态射 $H^{j}_{\mathcal{M}}(a_1,\ \ldots\ldots,\ a_r) \to H^{j}_{\mathcal{M}}(b_1,\ \ldots\ldots,\ b_{r'})$。从我们的角度来看，细化性质最容易表述为以下条件：如果 $p = \sum_{i=1}^{r} a_i = \sum_{j=1}^{r'} b_j$，那么 (b) 是 (a) 的细化，当且仅当 $\mathfrak{S}_{b_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{b_{r'}} \subseteq \mathfrak{S}_{a_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{a_r}$ 是 $\mathfrak{S}_p$ 的子群。于是，典范态射对应于将 $H^{\bullet}_{\mathcal{M}}(C^{\times p})$ 的 $\mathfrak{S}_{a_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{a_r}$-不变量包含到 $\mathfrak{S}_{b_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{b_{r'}}$-不变量中。

引理 5.10。对于所有的 j 和 $p > q > r+s$，复形 ${}^{s}\gamma^{p}{}_{,\ r}{}^{q}{}_{,\ j}$ 的 $-(s+1)$次项为

$$H^{j}_{\mathcal{M}}(p-r),$$

其 $-s$次项为

$$\bigoplus_{m=1}^{s} H^{j}_{\mathcal{M}}(p-r-m, m) \oplus H^{j}_{\mathcal{M}}(p-q, q-r),$$

并且对于 $t \in \{2, \ldots, s+1\}$，其 $-(s+1-t)$次项为直和

$$\bigoplus_{m=t}^{s} \bigoplus_{i_1+\cdots+i_t=m} H^{j}_{\mathcal{M}}(p-r-m, i_1, i_2, \ldots, i_t) \oplus \bigoplus_{m=t-1}^{s} \bigoplus_{i_1+\cdots+i_{t-1}=m} H^{j}_{\mathcal{M}}(p-q, q-r-m, i_1, i_2, \ldots, i_{t-1})$$

因此，微分由 $p-r$ 的有序分拆细化所诱导的典范态射给出，符号遵循映射锥构造的约定。

证明。通过对 s 使用归纳法即可证明。对于 $s=0$，结论由定义成立。因此，我们现在假设结论对 $s-1$ 以及所有 j，p，q，r均成立。

在归纳步骤中，我们使用映射锥构造的定义。于是，映射锥的第$-(s+1-t)$项由 ${}^{s-1}\gamma^{p}{}_{,\ r}{}^{r+s}{}_{,j}$ 的 $-(s+1-t)+1 = -((s-1)+1-t)$项与

$\bigoplus_{i\in\text{整数环}} H^{j-i}_{\mathcal{M}}(C^{(p-q)}) \otimes {}^{s-1}\gamma^{q,r}_{i}{}^{r+s}$,的() (()())项取直和得到；根据 K¨unneth 定理，我们可以简单地将$p-q$ 添加到每个直和项的元组前面来理解这一点。

$t=0$ 的断言显然。

对于 $t=1$，映射锥的第 $-(s+1-t)$ 项由以下三个直和的直和给出

$$\bigoplus_{m=1}^{s-1} H^j_{\mathcal{M}}(p-r-m,m),$$

$$\bigoplus_{m=0}^{s-1} H^j_{\mathcal{M}}(p-r-s,s),$$

$$H^j_{\mathcal{M}}(p-q,q-r),$$

这正如引理陈述中所描述的。

对于 $t>1$，第 $-(s+1-t)$ 项由以下四个直和的直和给出：

$$\bigoplus_{m=t}^{s-1}\ \bigoplus_{i_1+\cdots+i_t=m} H^j_{\mathcal{M}}(p-r-m,i_1,\dots,i_t),$$

$$\bigoplus_{m=t-1}^{s-1}\ \bigoplus_{i_1+\cdots+i_{t-1}=m} H^j_{\mathcal{M}}(p-r-s,s-m,i_1,\dots,i_{t-1}),$$

$$\bigoplus_{m=t-1}^{s-1}\ \bigoplus_{i_1+\cdots+i_{t-1}=m} H^j_{\mathcal{M}}(p-q,q-r-m,i_1,\dots,i_{t-1}),$$

$$\bigoplus_{m=t-2}^{s-1}\ \bigoplus_{i_1+\cdots+i_{t-2}=m} H^j_{\mathcal{M}}(p-q,q-r-s,s-m,i_1,\dots,i_{t-2}),$$

对于最后两个，我们使用 K¨unneth 同构，将其改写为以第一个条目作为 $p-q$。

这就给出了引理陈述中的描述。 □

我们可以利用 引理 5.10 来明确地识别该态射

$$\gamma^{a,b}_{\ell+e,w+1-2(\ell+e)}\otimes H^{2e}_{\mathcal{M}}(C^{(e)})[e-1]\to \widetilde{H}^{a,b}_{w,e,\ell}$$

由将目标定义为映射锥（67）所诱导的 $e>0$。确实，考虑到平移，我们看到该态射对应于以下交换图

$$\begin{array}{ccc} H^{w+1-2(\ell+e)}_{\mathcal{M}}(C^{(a-\ell-e)})\otimes H^{2e}_{\mathcal{M}}(C^{(e)}) & \longrightarrow & H^{w+1-2(\ell+e)}_{\mathcal{M}}(C^{(a-b)}\times C^{(b-\ell-e)})\otimes H^{2e}_{\mathcal{M}}(C^{(e)}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{w+1-2\ell}_{\mathcal{M}}(a-\ell-e,e) & \longrightarrow & H^{w+1-2\ell}_{\mathcal{M}}(a-b,b-\ell-e,e) \end{array},$$

其中，垂直态射是沿着 K¨unneth 分解的直和项的包含。我们知道，最下面两个空间是直和项，这要归功于引理 5.10的明确描述。

将 $\mathrm{Gr}_w^W(-)$（其中 $w \in$ **整数环**）应用于态射 $\alpha'_{a,b,c,H^0}, \alpha'_{a,b,c,H^1}$，对于每个 $\ell \leq c-1$ 态射，我们得到

$$\rho^{a,b}_{w,c,\ell,H^0} \colon H^0_{\mathcal{M}}(C^{(a-b)}) \otimes V^{b,c}_{w,c-1,\ell}[-1] \to H^{a,b}_{w,c,\ell}[-1] \to V^{a,b}_{w,c,\ell}, \tag{70}$$

$$\rho^{a,b}_{w,c,\ell,H^1} \colon H^1_{\mathcal{M}}(C^{(a-b)}) \otimes V^{b,c}_{w-1,c-1,\ell}[-2] \to H^{a,b}_{w,c,\ell}[-1] \to V^{a,b}_{w,c,\ell}, \tag{71}$$

不过，按照我们目前的记号，我们更倾向于使用移位版本：

$$\widetilde{\rho}^{a,b}_{w,e,\ell,H^0} \colon H^0_{\mathcal{M}}(C^{(a-b)}) \boxtimes \widetilde{V}^{b,c}_{w,e-1,\ell} \to \widetilde{V}^{a,b}_{w,e,\ell},$$

$$\widetilde{\rho}^{a,b}_{w,e,\ell,H^1} \colon H^1_{\mathcal{M}}(C^{(a-b)}) \boxtimes \widetilde{V}^{b,c}_{w-1,e-1,\ell} \to \widetilde{V}^{a,b}_{w,e,\ell}.$$

现在，我们将 $\widetilde{H}^{a,b}_{w,e,,\ell}$ 和 $\widetilde{V}^{a,b}_{w,e,,\ell}$ 重写为迭代映射锥。

命题 5.11。我们有

$$\widetilde{H}^{a,b}_{w,e,,\ell} = C({}^1\gamma^{a,b}_{\ell+e-1,w+1-2(\ell+e-1)} \otimes H^{2(e-1)}_{\mathcal{M}}(C^{(e-1)})[e-2] \to C(\cdots \to C({}^{e-1}\gamma^{a,b}_{\ell+1,w+1-2(\ell+1)} \otimes H^2_{\mathcal{M}}(C) \to {}^e\gamma^{a,b}_{\ell,w+1-2\ell})))$$

这是一个 $(e-1)$ 阶迭代映射锥，并且

$$\widetilde{V}^{a,b}_{w,e,\ell} = C({}^0\gamma^{a,b}_{\ell+e,w+1-2(\ell+e)} \otimes H^{2e}_{\mathcal{M}}(C^{(e)}) \to \widetilde{H}^{a,b}_{w,e,\ell})$$

$$= C({}^0\gamma^{a,b}_{\ell+e,w+1-2(\ell+e)} \otimes H^{2e}_{\mathcal{M}}(C^{(e)})[e-1] \to C(\cdots \to C({}^{e-1}\gamma^{a,b}_{\ell+1,w+1-2(\ell+1)} \otimes H^2_{\mathcal{M}}(C) \to {}^e\gamma^{a,b}_{\ell,w+1-2\ell}))),$$

这是一个经过 e 次迭代的映射锥。

态射 $\widetilde{\rho}^{a,b}_{w,e,,\ell,H^0}$（分别地，$\widetilde{\rho}^{a,b}_{w,e,,\ell,H^1}$）由定义态射 $\widetilde{H}^{a,b}_{w,e,,\ell} \to \widetilde{V}^{a,b}_{w,e,,\ell}$ 与态射 $\widetilde{V}^{b,c}_{w,e-1,\ell} \to \widetilde{H}^{a,b}_{w,e,,\ell}$ 的复合给出；后者由自然态射诱导

$$H^0_{\mathcal{M}}(C^{(a-b)}) \otimes {}^{s-1}\gamma^{b,r+s}_{r,j} \to {}^s\gamma^{a,b}_{r,j}$$

$$(resp.\ H^1_{\mathcal{M}}(C^{(a-b)}) \otimes {}^{s-1}\gamma^{b,r+s}_{r,j-1} \to {}^s\gamma^{a,b}_{r,j})$$

在将目标定义为映射锥时 (69)。

证明。根据迭代映射锥的定义，这显然成立：事实上，dg 增强中的 3×3 规则指出，如果我们考虑如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

并且如果 $h\colon C(f) \to C(g)$ 是由 p 和 q 诱导的态射，那么存在一个典范同构

$$C(C(p) \to C(q)) \cong C(h).$$

最后一个断言由态射的定义以及 $H^0_{\mathcal{M}}(C^{(a-b)}) \otimes (-)$ 的正合性得出，因此它以显然的方式与映射锥构造 $C(-)$相容。□

现在我们专门讨论 $a = k$、$b = k-1$这一情形，此时一切都变得清晰起来。根据引理 5.10，这些复形以及它们之间的态射具有非常特殊的形式：

命题 5.12。 复形 ${}^{k-2-r}\gamma^{k}{}_{r}{}^{k-1}{}_{,j}$ 等于

$$H^j_{\mathcal{M}}(k-r) \to \bigoplus_{i_1+i_2=k-r} H^j_{\mathcal{M}}(i_1,i_2) \to \cdots \to H^j_{\mathcal{M}}(1^{k-r}).$$

态射

$$H^0_{\mathcal{M}}(C) \otimes {}^{k-3-r}\gamma^{k-1,k-2}_{r,j} \to {}^{k-2-r}\gamma^{k,k-1}_{r,j}$$

$$(resp.\ H^1_{\mathcal{M}}(C) \otimes {}^{k-3-r}\gamma^{k-1,k-2}_{r,j-1} \to {}^{k-2-r}\gamma^{k,k-1}_{r,j})$$

是由复形的典范态射诱导的（其中顶行只是以 1 开头的 $k-r$ 的有序分拆的集合）：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & H^j_{\mathcal{M}}(1,k-1) & \longrightarrow & \oplus_{i_1+i_2=k-1-r} H^j_{\mathcal{M}}(1,i_1,i_2) & \longrightarrow \ldots \longrightarrow & H^j_{\mathcal{M}}(1,1^{k-1-r}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^j_{\mathcal{M}}(k-r) & \longrightarrow & \oplus_{i_1+i_2=k-r} H^j_{\mathcal{M}}(i_1,i_2) & \longrightarrow & \oplus_{i_1+i_2=k-r} H^j_{\mathcal{M}}(i_1,i_2,i_3) & \longrightarrow \ldots \longrightarrow & H^j_{\mathcal{M}}(1^{k-r})
\end{array}$$

对顶行应用 *Künneth*（分离出第一个因子），并考察 $H^0_{\mathcal{M}}(C)$ 部分（分别为 $H^1_{\mathcal{M}}(C)$ 部分）。

证明。 这可通过在上文 $s = k-r-2$ 的描述中令引理 5.10 得到。事实上，当 $p = k, q = k-1$ 时，该引理陈述中的第二个直和给出所有首项为 1 的分拆。第一个直和则给出其余所有分拆。

关于态射的断言由构造显然成立。注意，顶行确实是一个子复形，因为以 1 开头的有序分拆的任何细化也必定以 1 开头。□

以下推论中的描述是 Burt Totaro 向我们说明的，我们对此深表感谢。

回顾一下，对于任意 $H \in \mathcal{M}_{\mathrm{cons}}$，我们一直在使用自然的 $\mathfrak{S}_k$-作用于 $H^{\otimes k}$，因此可以将 H 的第 k 个除幂视为 $H^{\otimes k}$ 内最大的 $\mathfrak{S}_k$-不变子空间。由于 A 的特征为 0，通常的平均化技巧使我们能够将其与第 k 个对称幂等同；后者定义为 $H^{\otimes k}$ 的最大 $\mathfrak{S}_k$-不变商。类似地，我们可以为此类对象定义第 k 个外幂；应用遗忘函子后，它们便还原为（超） A-向量空间范畴中的通常构造。

推论 5.13. 复形 ${}^{k-2-r}\gamma^{k}{}_{,r}{}^{k-1}{}_{,j}$ 除最右端外均为正合；最右端处的上同调等于 $\mathrm{Gr}^W_j \bigwedge^{k-r} H^\bullet_{\mathcal{M}}(C)$。

诱导态射

$$H^0_{\mathcal{M}}(C) \otimes {}^{k-3-r}\gamma^{k-1,k-2}_{r,j} \to {}^{k-2-r}\gamma^{k,k-1}_{r,j}$$

$$(resp.\ H^1_{\mathcal{M}}(C) \otimes {}^{k-3-r}\gamma^{k-1,k-2}_{r,j-1} \to {}^{k-2-r}\gamma^{k,k-1}_{r,j})$$

拟同构于自然态射

$$H^0_{\mathcal{M}}(C) \otimes \mathrm{Gr}^W_j \bigwedge^{k-r-1} H^\bullet_{\mathcal{M}}(C) \to \mathrm{Gr}^W_j \bigwedge^{k-r} H^\bullet_{\mathcal{M}}(C)$$

$$(resp.\ H^1_{\mathcal{M}}(C) \otimes \mathrm{Gr}^W_{j-1} \bigwedge^{k-r-1} H^\bullet_{\mathcal{M}}(C) \to \mathrm{Gr}^W_j \bigwedge^{k-r} H^\bullet_{\mathcal{M}}(C)).$$

证明。 由函子 For 的正合性和忠实性，只需证明底层 A-对象的正合性。关于诱导态射的断言可由前一个命题直接得出。

这由将 $H^j(C^{(a)}, A)$ 与 Gr_j^W对称幂$^a H^\bullet(C, A)$ 等同而来，如上文第2.5小节所述。事实上，在此等同下，复形 For($^{k-2-r}\eta^k_{,r}{}^{k-1}_{,j}$) 可以写成

$$\mathrm{Gr}_j^W\left(\mathrm{Sym}^{k-r}(H^\bullet(C),A)\to\bigoplus_{i_1+i_2=k-r}\mathrm{Sym}^{i_1}(H^\bullet(C),A)\otimes\mathrm{Sym}^{i_2}(H^\bullet(C),A)\to\cdots\to H^\bullet(C,A)^{\otimes k-r}\right)$$

并且根据 [Tot97，第 6], 页，我们对其应用 $\mathrm{Gr}_j^W(-)$ 的复形是 $\bigwedge^{k-r} H^\bullet(C, A)$ 的一个消解（其中外幂取自超向量空间范畴）。由函子 $\mathrm{Gr}_j^W(-)$ 的正合性，我们得出结论。 □

~ ~由命题5.11，对象 H 与 V 可由 $H^\bullet_{\mathcal{M}}(C)$ 的外幂与 $H^{2e}_{\mathcal{M}}(C^{(e)})$ 的张量积之间的映射锥来描述。

下述显式描述是有用的:

$$\mathrm{Gr}^W_{w'}\bigwedge^{k-\ell}H^\bullet_{\mathcal{M}}(C)=\begin{cases}H^0_{\mathcal{M}}(C)\wedge\mathrm{Sym}^{k-\ell-1}(H^1_{\mathcal{M}}(C)) & w'=k-\ell-1\\ H^0_{\mathcal{M}}(C)\wedge H^2_{\mathcal{M}}(C)\wedge\mathrm{Sym}^{k-\ell-2}(H^1_{\mathcal{M}}(C))\oplus\mathrm{Sym}^{k-\ell}(H^1_{\mathcal{M}}(C)) & w'=k-\ell\\ H^2_{\mathcal{M}}(C)\wedge\mathrm{Sym}^{k-\ell-1}(H^1_{\mathcal{M}}(C)) & w'=k-\ell+1\end{cases}.$$

于是我们看到，我们取其映射锥的那些态射将由沿加法映射 $C\times C^{(e-1)}\to C^{(e)}$ 的拉回所给出的自然同构 $H^{2e}_{\mathcal{M}}(C^{(e)})\to H^2_{\mathcal{M}}(C)\otimes H^{2(e-1)}_{\mathcal{M}}(C^{(e-1)})$ 诱导。

为了了解这些映射的行为，我们明确写出最简单的前三个例子。

例 5.14. 令 $\ell=k-2$ 和 $e=0$。那么我们得到一个同构

$$\widetilde{V}^{k,k-1}_{w,k-2,k-2}\cong{}^0\gamma^{k,k-1}_{k-2,w+5-2k}=\mathrm{Gr}^W_{w+5-2k}\bigwedge^2 H^\bullet_{\mathcal{M}}(C).$$

对于 $w=2k-4$，我们得到 $H^0_{\mathcal{M}}(C)\wedge H^1_{\mathcal{M}}(C)$；对于 $w=2k-3$，我们得到 $H^0_{\mathcal{M}}(C)\wedge H^2_{\mathcal{M}}(C)\oplus$对称幂$^2(H^1_{\mathcal{M}}(C))$；对于 $w=2k-2$，我们得到 $H^1_{\mathcal{M}}(C)\wedge H^2_{\mathcal{M}}(C)$。因此，将其平移 $[-w]$ 后，我们得到

$$V^{k,k-1}_{w,k-2,k-2}=\begin{cases}H^0_{\mathcal{M}}(C)\wedge H^1_{\mathcal{M}}(C)[4-2k] & w=2k-4\\ \left(H^0_{\mathcal{M}}(C)\wedge H^2_{\mathcal{M}}(C)\oplus\mathrm{Sym}^2(H^1_{\mathcal{M}}(C))\right)[3-2k] & w=2k-3\\ H^1_{\mathcal{M}}(C)\wedge H^2_{\mathcal{M}}(C)[2-2k] & w=2k-2\end{cases}$$

例 5.15. 令 $\ell=k-3$，使得 $k-2-\ell=e=1$，因此我们只需运行一次归纳过程。于是我们看到，$\widetilde{V}$是 ${}^0\gamma\otimes_{k-1}H^2_{\mathcal{M}}(C)\to{}^1\gamma$的锥。

我们得出，$\widetilde{V}^k{}_{,\ w+2\ell-1,\ 1,\ \ell}$ 是该态射的锥

$$\mathrm{Gr}^W_{w-2}\bigwedge^2 H^\bullet_{\mathcal{M}}(C)\otimes H^2_{\mathcal{M}}(C)\to\mathrm{Gr}^W_w\bigwedge^3 H^\bullet_{\mathcal{M}}(C)$$

对于 $w=2$，左空间消失，因此只剩下 $H^0_{\mathcal{M}}(C)\wedge$对称幂$^2(H^1_{\mathcal{M}}(C))$。对于$w=3$，我们取该自然态射的锥

$$H^0_{\mathcal{M}}(C)\wedge H^1_{\mathcal{M}}(C)\otimes H^2_{\mathcal{M}}(C)\to H^0_{\mathcal{M}}(C)\wedge H^1_{\mathcal{M}}(C)\wedge H^2_{\mathcal{M}}(C)\oplus \mathrm{Sym}^3(H^1_{\mathcal{M}}(C)),$$

它是 $\mathrm{Sym}^3(H^1_{\mathcal{M}}(C))$。

对于 $w=4$，我们取以下对象的锥：

$$H^0_{\mathcal{M}}(C)\wedge H^2_{\mathcal{M}}(C)\otimes H^2_{\mathcal{M}}(C)\oplus \mathrm{Sym}^2(H^1_{\mathcal{M}}(C))\otimes H^2_{\mathcal{M}}(C)\to H^2_{\mathcal{M}}(C)\wedge \mathrm{Sym}^2(H^1_{\mathcal{M}}(C)),$$

它是满射，其核为 $H^0_{\mathcal{M}}(C)\wedge H^2_{\mathcal{M}}(C)\otimes H^2_{\mathcal{M}}(C)$。因此，锥为

$$\big(H^0_{\mathcal{M}}(C)\wedge H^2_{\mathcal{M}}(C)\big)\otimes H^2_{\mathcal{M}}(C)[1].$$

对于 $w=5$，右侧空间为零，因此锥就是

$$\big(H^2_{\mathcal{M}}(C)\wedge H^1_{\mathcal{M}}(C)\big)\otimes H^2_{\mathcal{M}}(C)[1].$$

将 w 替换为 $w-2\ell+1$ 并平移 $[-w-e]=[-w-1]$，我们得出 e

$$V^{k,k-1}_{w,k-2,k-3}=\begin{cases}\mathrm{Sym}^2(H^1_{\mathcal{M}}(C))[4-2k] & w=2k-5\\ \mathrm{Sym}^3(H^1_{\mathcal{M}}(C))[3-2k] & w=2k-4\\ \big(H^0_{\mathcal{M}}(C)\wedge H^2_{\mathcal{M}}(C)\big)\otimes H^2_{\mathcal{M}}(C)[3-2k] & w=2k-3\\ \big(H^1_{\mathcal{M}}(C)\wedge H^2_{\mathcal{M}}(C)\big)\otimes H^2_{\mathcal{M}}(C)[2-2k] & w=2k-2\end{cases}.$$

例 5.16. 设 $\ell=k-4$，使得 $k-2-\ell=e=2$。因此，我们必须进行两次归纳。我们采用简写：先从 ${}^0\gamma$开始，然后进行归纳，得到第一个 $\widetilde{H}$为 ${}^1\gamma$。

那么，第一个 $\widetilde{V}$是 ${}^0\gamma\to{}^1\gamma$的锥。为计算下一个 $\widetilde{H}$，我们将归纳描述应用于这个锥。或者，我们可以将归纳描述应用于所涉及的每个 ${}^i\widetilde{\gamma}$，然后取所得态射的锥。因此，我们看到下一个 H 是 ${}^1\gamma\to{}^2\gamma$的锥。最后，我们得出

$$\widetilde{V}=\mathrm{cone}({}^0\gamma\to\mathrm{cone}({}^1\gamma\to{}^2\gamma)).$$

根据上述计算，我们看到 V是自然态射的锥

$$\mathrm{Gr}^W_{w+5-2k}\bigwedge^2 H^\bullet_{\mathcal{M}}(C)[1]\otimes H^4_{\mathcal{M}}(C^{(2)})\to C(\mathrm{Gr}^W_{w+7-2k}\bigwedge^3 H^\bullet_{\mathcal{M}}(C)\otimes H^2_{\mathcal{M}}(C)\to \mathrm{Gr}^W_{w+9-2k}\bigwedge^4 H^\bullet_{\mathcal{M}}(C)).$$

只有少数几个 w 的取值会使项非零。

$w=2k-6$：那么前两项消失，只剩下 $H^0_{\mathcal{M}}(C)\wedge$对称幂$^3(H^1_{\mathcal{M}}(C))$.

$w=2k-5$：那么第一项消失，我们只剩下该态射的锥$H^0_{\mathcal{M}}(C)\wedge$对称幂$^2(H^1_{\mathcal{M}}(C))\otimes H^2_{\mathcal{M}}($
$C)\to\big(H^0_{\mathcal{M}}(C)\wedge H^2_{\mathcal{M}}(C)\wedge$对称幂$^2(H^1_{\mathcal{M}}(C))\big)\oplus$对称幂$^4(H^1_{\mathcal{M}}(C))$,

这给出了第一个直和项的包含，因此该锥同构于对称幂$^4(H^1_{\mathcal{M}}(C))$。

$w=2k-4$：现在有三项非零：我们先计算内锥：$C(\big(H^0_{\mathcal{M}}(C)\wedge H^1_{\mathcal{M}}(C)\wedge H^2_{\mathcal{M}}(C)\big)\otimes H^2_{\mathcal{M}}($
$C)\oplus$对称幂$^3(H^1_{\mathcal{M}}(C))\otimes H^2_{\mathcal{M}}(C)\to H^2_{\mathcal{M}}(C)\wedge$对称幂$^3(H^1_{\mathcal{M}}(C$)))

而这是满射，因此这个映射锥是另一个经 $[1]$平移的直和项。但随后我们看到，所得的态射

$$H^0_{\mathcal{M}}(C)\wedge H^1_{\mathcal{M}}(C)[1]\otimes H^4_{\mathcal{M}}(C^{(2)})\to\big(H^0_{\mathcal{M}}(C)\wedge H^1_{\mathcal{M}}(C)\wedge H^2_{\mathcal{M}}(C)\big)\otimes H^2_{\mathcal{M}}(C)[1]$$

实际上是一个同构，因此这里的映射为 0。

对于所有更小的 w 值，最右侧的空间都消失。因此，我们最初取的锥拟同构于第二个对象平移 $[1]$ 后的结果。因此，我们只需平移自然态射的锥

$$\mathrm{Gr}^W_{w+5-2k}\bigwedge^2 H^\bullet_{\mathcal{M}}(C)\otimes H^4_{\mathcal{M}}(C^{(2)})\to \mathrm{Gr}^W_{w+7-2k}\bigwedge^3 H^\bullet_{\mathcal{M}}(C)\otimes H^2_{\mathcal{M}}(C)$$

在每种情况下都通过 $[1]$。

$w=2k-3$：我们取自然映射的锥

$$H^0_{\mathcal{M}}(C)\wedge H^2_{\mathcal{M}}(C)\otimes H^4_{\mathcal{M}}(C^{(2)})\oplus \mathrm{Sym}^2(H^1_{\mathcal{M}}(C))\to H^2_{\mathcal{M}}(C)\wedge \mathrm{Sym}^2(H^1_{\mathcal{M}}(C))\otimes H^2_{\mathcal{M}}(C)$$

它是自然满射，因此该锥就是另一个直和项（平移 $[1]$）。由此可知，在这种情况下，我们得到$H^0_{\mathcal{M}}(C)\wedge H^2_{\mathcal{M}}(C)\otimes H^4_{\mathcal{M}}(C^{(2)})[2]$。

$w=2k-2$：现在最右边的项消失了，因此我们只剩下 $\mathrm{Gr}^W_3\bigwedge^2 H^\bullet_{\mathcal{M}}(C)\otimes H^4_{\mathcal{M}}(C^{(2)})[2]=H^2_{\mathcal{M}}(C)\wedge H^1_{\mathcal{M}}(C)\otimes H^4_{\mathcal{M}}(C^{(2)})[2]$。

平移 $[-w-e]=[-w-2]$ 后，我们得到

$$V^{k,k-1}_{w,k-2,k-4}=\begin{cases}\mathrm{Sym}^3(H^1_{\mathcal{M}}(C))[4-2k] & w=2k-6\\ \mathrm{Sym}^4(H^1_{\mathcal{M}}(C))[3-2k] & w=2k-5\\ H^0_{\mathcal{M}}(C)\wedge H^2_{\mathcal{M}}(C)\otimes H^4_{\mathcal{M}}(C^{(2)})[3-2k] & w=2k-3\\ H^1_{\mathcal{M}}(C)\wedge H^2_{\mathcal{M}}(C)\otimes H^4_{\mathcal{M}}(C^{(2)})[2-2k] & w=2k-2\end{cases}.$$

现在处理一般情形。为简化记号，我们先计算 $\widetilde{V}^{k,\ k-1}_{k,\ w+2\ell-1,\ k-2,\ \ell}$，然后在最后将 $w-2\ell+1$ 替换为 w。

利用这些对象的显式描述，我们可以看到，对于任意固定的 w，这些对象中至多有三个非零。事实上，我们有

$${}_{k-2+e}\gamma^{k,k-1}_{\ell+e,w-2e}=\mathrm{Gr}^W_{w-2e}\bigwedge^{k-\ell-e} H^\bullet_{\mathcal{M}}(C),$$

它仅在 $w-2e\in\{k-\ell-e-1,k-\ell-e,k-\ell-e+1\}$ 时可能非零。因此，对于固定的 w，可能非零的项为 $e\in\{w-1-(k-\ell),\ w-(k-\ell),\ w+1-(k-\ell)\}$。

像上面那样取迭代映射锥（在拟同构意义下进行）时，我们可以忽略第一个可能非零项左侧的零项；最右侧可能非零项右侧的零项则相当于平移 $[1]$，，除非不存在这样的零项，也就是说 $0\in\{w-1-(k-\ell),\ w-(k-\ell),\ w+1-(k-\ell)\}$。

我们暂时忽略后一种情形，同时也忽略情形 $k-\ell-2\in\{w-1-(k-\ell),\ w-(k-\ell),\ w+1-(k-\ell)\}$，因为这是两种极端情形。

因此，如果我们假设 $(k-\ell)+2\le w\le 2(k-\ell)-4$ 我们得出 $\widetilde{V}^{k,\ k-1}_{k,w+2\ell-1,k-2,\ell}[-w+(k-\ell)+1](-k+\ell-1+w)$ 由下式给出

$$C\left(\mathrm{Gr}^W_{2(k-\ell)-w-2}\bigwedge^{2(k-\ell)-w-1} H^\bullet_{\mathcal{M}}(C)[1](-2)\to C(\mathrm{Gr}^W_{2(k-\ell)-w}\bigwedge^{2(k-\ell)-w} H^\bullet_{\mathcal{M}}(C)(-1)\to \mathrm{Gr}^W_{2(k-\ell)-w+2}\bigwedge^{2(k-\ell)-w+1} H^\bullet_{\mathcal{M}}(C))\right),$$

其中，对于这些项，我们已将 $H^{2e}_{\mathcal{M}}(C^{(e)})$（通过记号的滥用）简单地改写为 $(-e)$ 的泰特扭曲。我们将看到这些项消失。

忽略位移和泰特扭曲后，我们可以明确写出这个锥。事实上，利用这些外幂的描述，我们看到内锥是该映射的核（位移 $[1]$），而该映射的核是 $H^0_{\mathcal{M}}(C)\wedge H^2_{\mathcal{M}}(C)\wedge$对称幂$^{2(k-\ell)-w-2}(H^1_{\mathcal{M}}(C))(-1)$。

但此时剩余的态射在相差一个位移的意义下，是同构

$$H^0_{\mathcal{M}}(C)\wedge \mathrm{Sym}^{2(k-\ell)-w-2}(H^1_{\mathcal{M}}(C))(-2)\cong H^0_{\mathcal{M}}(C)\wedge H^2_{\mathcal{M}}(C)\wedge \mathrm{Sym}^{2(k-\ell)-w-2}(H^1_{\mathcal{M}}(C))(-1),$$

因此我们看到该锥为零。

For 那些确实包含 $e=0$ 的情形，我们考虑

$$C(\mathrm{Gr}^W_{w-4}\bigwedge^{k-\ell-2} H^\bullet_{\mathcal{M}}(C)\otimes H^4_{\mathcal{M}}(C^{(2)})[1]\to C(\mathrm{Gr}^W_{w-2}\bigwedge^{k-\ell-1} H^\bullet_{\mathcal{M}}(C)\otimes H^2_{\mathcal{M}}(C)\to \mathrm{Gr}^W_w\bigwedge^{k-\ell} H^\bullet_{\mathcal{M}}(C))),$$

并且如果 $w=(k-\ell)+1$，则我们看到上述同样的分析成立，且该锥为 0。

For $w=(k-\ell)$，最左边的项消失，因此我们剩下

$$C(\mathrm{Gr}^W_{(k-\ell)-2}\bigwedge^{k-\ell-1} H^\bullet_{\mathcal{M}}(C)\otimes H^2_{\mathcal{M}}(C)\to \mathrm{Gr}^W_{(k-\ell)}\bigwedge^{k-\ell} H^\bullet_{\mathcal{M}}(C)),$$

并且此处该态射为单射，其余核为对称幂$\mathrm{Sym}^{k-\ell}(H^1_{\mathcal{M}}(C))$，因而与映射锥拟同构。

对于 $w=(k-\ell)-1$，左边两项消失，因此只剩下

$$\mathrm{Gr}^W_{(k-\ell)-1}\bigwedge^{k-\ell} H^\bullet_{\mathcal{M}}(C)=H^0_{\mathcal{M}}(C)\wedge \mathrm{Sym}^{k-\ell-1}(H^1_{\mathcal{M}}(C)).$$

对于包含 $e=k-\ell-2$ 的那些项，我们平移 $[4+\ell-k]$ 并考虑 er

$$C(\mathrm{Gr}^W_{w-2(k-\ell-2)}\bigwedge^{2} H^\bullet_{\mathcal{M}}(C)\otimes H^{2(k-\ell-2)}_{\mathcal{M}}(C^{(k-\ell-2)})[1]\to$$

$$C(\mathrm{Gr}^W_{w-2(k-\ell-3)}\bigwedge^{3} H^\bullet_{\mathcal{M}}(C)\otimes H^{2(k-\ell-3)}_{\mathcal{M}}(C^{(k-\ell-3)})\to \mathrm{Gr}^W_{w-2(k-\ell-4)}\bigwedge^{4} H^\bullet_{\mathcal{M}}(C)\otimes H^{2(k-\ell-4)}_{\mathcal{M}}(C^{(k-\ell-4)}))).$$

对于 $w-2(k-\ell-3)=3$，我们看到上述同样的分析仍然成立，因此锥消失。

对于 $w=2(k-\ell)-2$，我们看到最右边的一项消失，因此内锥就是 $\mathrm{Gr}^W_4\bigwedge^3 H^\bullet_{\mathcal{M}}(C)\otimes H^{2(k-\ell-3)}_{\mathcal{M}}(C^{(k-\ell-3)})[1]$。自然态射

$$\mathrm{Gr}^W_2\bigwedge^{2} H^\bullet_{\mathcal{M}}(C)\otimes H^{2(k-\ell-2)}_{\mathcal{M}}(C^{(k-\ell-2)})\to \mathrm{Gr}^W_4\bigwedge^{3} H^\bullet_{\mathcal{M}}(C)\otimes H^{2(k-\ell-3)}_{\mathcal{M}}(C^{(k-\ell-3)})$$

是满射，其核等于 $H^0_{\mathcal{M}}(C)\wedge H^2_{\mathcal{M}}(C)\otimes H^{2(k-\ell-2)}_{\mathcal{M}}(C^{(k-\ell-2)})$。因此，锥为$H^0_{\mathcal{M}}(C)\wedge H^2_{\mathcal{M}}(C)\otimes H^{2(k-\ell-2)}_{\mathcal{M}}(C^{(k-\ell-2)})[2]$。

最后，对于 $w=2(k-\ell)-1$，最右边的两项都消失，因此该锥就是最左边那一项平移 $[1]$ 后的结果。由于该项本身已经经过平移，我们得出该锥为

$$H^1_{\mathcal{M}}(C)\wedge H^2_{\mathcal{M}}(C)\otimes H^{2(k-\ell-2)}_{\mathcal{M}}(C^{(k-\ell-2)})[2].$$

请记住，我们必须平移 $[k-\ell-4]$，才能得到锥的实际值 .

最后，将 $w+2\ell-1$ 替换为 w，然后平移 $[-w-(k-\ell-2)]$ (从 $\widetilde{V}$变为 V)，我们得到 $V^{k,w}_{k-2,\ell}$、的如下描述，从而得到 $\mathrm{Gr}^W_w p_*\Sigma^k_{k-2,\ell}$。注意，该描述与 例 5.14 （在此情形下取 $k+\ell-1=2k-3$ 项的直和）中给出的描述一致，也与 例 5.15 和 例 5.16中给出的描述一致。

推论 5.17。 对于所有 $k+\ell \le w \le 2k-4$，我们有 $V^{k,k-1}_{w,k-2,\ell}=0$。

我们有如下结论：

$$V^{k,k-1}_{w,k-2,\ell}=\begin{cases} H^0_{\mathcal{M}}(C)\wedge \mathrm{Sym}^{k-\ell-1}(H^1_{\mathcal{M}}(C))[4-2k] & w=k+\ell-2\\ \mathrm{Sym}^{k-\ell}(H^1_{\mathcal{M}}(C))[3-2k] & w=k+\ell-1\\ H^0_{\mathcal{M}}(C)\wedge H^2_{\mathcal{M}}(C)\otimes H^{2(k-\ell-2)}_{\mathcal{M}}(C^{(k-\ell-2)})[3-2k] & w=2k-3\\ H^1_{\mathcal{M}}(C)\wedge H^2_{\mathcal{M}}(C)\otimes H^{2(k-\ell-2)}_{\mathcal{M}}(C^{(k-\ell-2)})[2-2k] & w=2k-2 \end{cases},$$

所有其他项都消失。

特别是，(58) 以及命题 (1)和 (2) 中的 命题 *5.5* 成立。

推论 5.18。 态射 α 在项 (4) 是一个同构。

证明。 如上所述，我们检查对所有 $w\in$ **整数环**，态射 $\mathbf{Gr}^W_w(\alpha)$ 是一个同构。根据 引理 5.6 以及该情形下的计算（这表明定义域和值域中出现相同的简单直和项，因此单射即可推出同构），只需检查 $w<2k-3$，因此只需检查映射

$$\mathrm{Gr}^W_w(\alpha')\colon H^0_{\mathcal{M}}(C)\boxtimes \mathrm{Gr}^W_w\mathcal{H}^{2k-5}p_*\Sigma^{k-1,k-2}_{k-3}[-1]\to \mathrm{Gr}^W_w\mathcal{H}^{2k-4}p_*\Sigma^{k,k-1}_{k-2}$$

对所有 $w<2k-3$ 都是同构。

利用上述态射 $\tilde{\rho}$ 的等同以及这些模的计算，我们看到，若 $w=k+\ell-2$，则该态射是恒等映射

$$H^0_{\mathcal{M}}(C)\otimes \mathrm{Sym}^{k-\ell-1}(H^1_{\mathcal{M}}(C))\boxtimes \mathrm{IC}_{\sigma_\ell}\to H^0_{\mathcal{M}}(C)\otimes \mathrm{Sym}^{k-\ell-1}(H^1_{\mathcal{M}}(C))\boxtimes \mathrm{IC}_{\sigma_\ell},$$

这就证明了这一断言。 □

通过取$\mathcal{M}(-)$ = MHM(–)，当 $k=$ **曲线 C**且 $A=$ **有理数域**时，即可由上述结果立即得到常值霍奇模的描述。若 k 是一个数域，并且我们采用例 2.1中的混合层理论，那么定理中的同构给出了伽罗瓦等变倾斜层之间的同构。下文将利用这一结果及其霍奇模版本，计算奇异上同调的霍奇结构和伽罗瓦表示结构。

计算奇异上同调时，我们需要以下陈述；它解释了为什么我们还追踪了 $H^1(C)$K¨unneth 分量：

推论 y 5.19. 如果对任意 $2\le \ell\le k-2$，我们将 $\mathrm{Gr}^W_{2k-1-\ell}\mathcal{H}^{2k-3}(-)$ 作用于该态射

$$H^1_{\mathcal{M}}(C)\boxtimes p_*\Sigma^{k-1,k-2}_{k-3}[-2]\to p_*\Sigma^{k,k-1}_{k-2}$$

则我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc}
H^1_{\mathcal{M}}(C)\otimes \mathrm{Sym}^{\ell-1}(H^1_{\mathcal{M}}(C))\boxtimes \mathrm{IC}_{\sigma_{k-1-(\ell-1)}} & = & H^1_{\mathcal{M}}(C)\boxtimes \mathrm{Gr}^W_{2k-2-\ell}\mathcal{H}^{2k-4}\mathcal{C}^{k-1} \\
\downarrow & & \| \\
 & & H^1_{\mathcal{M}}(C)\boxtimes \mathrm{Gr}^W_{2k-2-\ell}\mathcal{H}^{2k-4}p_*A^{\mathcal{M}}_{Z^{k-1}_{k-2}} \\
 & & \downarrow \\
 & & H^1(C)\boxtimes \mathrm{Gr}^W_{2k-2-\ell}\mathcal{H}^{2k-5}p_*\Sigma^{k-1,k-2}_{k-3} \\
 & & \downarrow \\
\mathrm{Sym}^{\ell}(H^1_{\mathcal{M}}(C))\boxtimes \mathrm{IC}_{\sigma_{k-\ell}} & \longrightarrow & \mathrm{Gr}^W_{2k-1-\ell}\mathcal{H}^{2k-3}p_*\Sigma^{k,k-1}_{k-2}
\end{array}$$

其中左侧的垂直态射是自然乘积映射。

证明。 顶部的水平等式由定理 I给出。定义三角 e

$$A^{\mathcal{M}}_{\sigma_{k-2}}\to p_*A^{\mathcal{M}}_{Z^{k-1}_{k-2}}\to \mathcal{C}^{k-1}\xrightarrow{+1}$$

给出一个同构 $\mathcal{H}^{2k-4}p_*A^{\mathcal{M}}_{Z^{k-1}_{k-2}}\to\mathcal{H}^{2k-4}\mathcal{C}^{k-1}$，因此得到右上方的垂直等式。

最后一个结论由推论 5.17 中的等同以及推论 5.13的最后一个结果推出，它使我们能够确定右下方的垂直态射。 □

5.2. **局部上同调上霍奇滤过的生成层级**。在本小节中，假设 $k=$**曲线 C** 和 $A=$**有理数域**。

令 $\sigma_k\to\mathbf{P}^N$为闭嵌入，其余维记为 $q_k=N-(2k-1)$。我们利用 定理 I，给出 $\mathcal{H}^{q_k}_{\sigma_k}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N},F)$ 的生成层级的一个界。

推论 5.20 (= 推论 J)。 假设 L 是 $(2k-1)$-非常丰的，并且 $\sigma_k\neq\mathbf{P}^N$，其中$k\geq 2$。则有

$$\mathrm{gl}(\mathcal{H}^{q_k}_{\sigma_k}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N},F))\leq k-1,$$

因此，对于该对的任意对数消解 $f\colon(\widetilde{P},E)\to\mathbf{P}^N$，$\mathbf{P}^N,\sigma_k)$，我们有

$$R^{q_k-1+i}f_*\Omega^{N-i}_{\widetilde{P}}(\log E)=0\ \textit{for all}\ i\geq k.$$

证明。 利用函子 $\mathrm{Gr}^F_{i-N}\mathrm{DR}(-)$ 在三角范畴意义下的正合性，我们可以将问题归结为给出每个 $\mathrm{Gr}^W_w\mathcal{H}^{q_k}_{\sigma_k}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N},F)$ 的生成层级的一个界。我们有

$$\mathcal{H}^{q_k}_{\sigma_k}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N},F)\cong\mathcal{H}^0\mathbf{D}^H_{\sigma_k}(-q_k)=\mathbf{D}^H_{\sigma_k}(-q_k),$$

其中，最后一个等式源于以下事实： σ_k 是 CCI。

我们有

$$\mathrm{Gr}^W_{2k-1-\ell}\mathbf{Q}^H_{\sigma_k}[2k-1]\cong\mathrm{Sym}^{\ell}H^1(C)\boxtimes\mathrm{IC}^H_{\sigma_{k-\ell}}$$

因此，对偶化（并在右侧使用纯可极化性）后，我们得到

$$\mathrm{Gr}^W_{\ell+1-2k}\mathbf{D}(\mathbf{Q}^H_{\sigma_k}[2k-1])\cong\mathrm{Sym}^{\ell}H^1(C)\boxtimes\mathrm{IC}^H_{\sigma_{k-\ell}}(2k-1-\ell),$$

因此，对等式两边进行 $(1-2k)$ 的 Tate 扭曲，我们得到

$$\mathrm{Gr}^W_{2k-1+\ell}\mathbf{D}^H_{\sigma_k}\cong\mathrm{Sym}^{\ell}H^1(C)\boxtimes\mathrm{IC}^H_{\sigma_{k-\ell}}(-\ell).$$

对等式进行 $(-q_k)$ 的 Tate 扭曲，我们得出

$$\mathrm{Gr}^W_{N+q_k+\ell}\mathcal{H}^{q_k}_{\sigma_k}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}) \cong \mathrm{Sym}^\ell H^1(C) \boxtimes \mathrm{IC}^H_{\sigma_{k-\ell}}(-\ell-q_k).$$

应用 $\mathcal{H}^0(-)$ 到方程 (6) 后，我们得到

$$\mathcal{H}^0\mathrm{Gr}^F_{i-N}\mathrm{DR}(\mathrm{Gr}^W_{N+q_k+\ell}\mathcal{H}^{q_k}_{\sigma_k}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N})) = \bigoplus_{b\in\mathbf{Z}} \mathrm{Gr}^F_{i-b}\mathrm{Sym}^\ell H^1(C) \boxtimes \mathcal{H}^0\mathrm{Gr}^F_{b+\ell+q_k-N}\mathrm{DR}(\mathrm{IC}^H_{\sigma_{k-\ell}})$$

对于任意固定的 c，考虑消解 $p\colon B^c \to \sigma_c$。与引理 5.2的证明中一样，此态射关于分层 $C=\sigma_1\subseteq\sigma_2\subseteq\cdots\subseteq\sigma_c$是分层的，其中纤维在$U_a=\sigma_a\setminus\sigma_{a-1}$ 处为 $C^{(c-a)}$。因此，最大维数出现在 $a=1$，最大纤维维数为 $c-1$。

由引理 2.19可知

$$\mathcal{H}^0\mathrm{Gr}^F_{b+\ell+q_k-N}\mathrm{DR}(\mathrm{IC}^H_{\sigma_{k-\ell}}) = 0 \text{ for all } b+\ell+q_k > k-\ell-1+q_{k-\ell}.$$

注意 $q_{k-\ell}=q_k+2\ell$，因此对所有 $b\geq k$，消失都成立。所以我们可以利用这一消失将直和改写为：

$$\mathcal{H}^0\mathrm{Gr}^F_{i-N}\mathrm{DR}(\mathrm{Gr}^W_{N+q_k+\ell}\mathcal{H}^{q_k}_{\sigma_k}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N})) = \bigoplus_{b<k} \mathrm{Gr}_F^{b-i}\mathrm{Sym}^\ell H^1(C) \boxtimes \mathcal{H}^0\mathrm{Gr}^F_{b+\ell+q_k-N}\mathrm{DR}(\mathrm{IC}^H_{\sigma_{k-\ell}}),$$

这里我们对该霍奇结构改用递减的 Hodge 过滤。第一个因子在 $b-i>0$ 时自动消失，换句话说，在 $b>i$ 时也消失。特别地，对于任意$i\geq k$，消失都是自动成立的。

因此我们得到一致界

$$\mathrm{gl}(\mathrm{Gr}^W_{N+q_k+\ell}\mathcal{H}^{q_k}_{\sigma_k}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N},F)) \leq k-1,$$

并得出结论 $\mathrm{gl}(\mathcal{H}^{q_k}_{\sigma_k}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N})\ F) \leq k-1$。 □

5.3. **Hodge-Lyubeznik 数。** 在本小节中，我们假设 $k=$ **曲线 C** 且 $A=$**有理数域**，并计算第 k 个割线簇 σ_k 的相交 Hodge-Lyubeznik 数。

对于给定的 $x\in\sigma_{k-1}=\sigma_{k,\ \mathrm{nRS}}$，相交霍奇-柳贝兹尼克数的值取决于满足 $x\in U_a=\sigma_a\setminus\sigma_{a-1}$的 $1\leq a\leq k-1$ 的值。

为方便记号，我们改写引理 5.2 的结果：

$$p_*\mathbf{Q}^H_{B^k} = \bigoplus_{\ell\leq k} \mathrm{IC}^H_{\sigma_\ell}(\ell-k)[1-2k]. \tag{72}$$

回忆一下，若 $x\in U_a$ 则 $p^{-1}(x)\cong C^{(k-a)}\subseteq Z^k_a\subseteq B^k$。因此，若将 i^*_x 应用于同构 (72) 的两边，我们得到

$$\kappa_*\mathbf{Q}^H_{C^{(k-a)}} \cong \bigoplus_{\ell\leq k} i^*_x\mathrm{IC}^H_{\sigma_\ell}(\ell-k)[1-2k].$$

利用 $x\in U_a$，因此不在 σ_{a-1} 中，我们可以将该同构改写为

$$\kappa_*\mathbf{Q}^H_{C^{(k-a)}} \cong \bigoplus_{a\leq\ell\leq k} i^*_x\mathrm{IC}^H_{\sigma_\ell}(\ell-k)[1-2k].$$

为使归纳法更容易进行，我们重新编号：

$$\kappa_*\mathbf{Q}^H_{C^{(k-a)}} \cong \bigoplus_{0\leq\ell\leq k-a} i^*_x\mathrm{IC}^H_{\sigma_{a+\ell}}(a+\ell-k)[1-2k],$$

现在我们可以写成 $k-a=b$，得到

$$\kappa_*\mathbf{Q}^H_{C^{(b)}} \cong \bigoplus_{0\le \ell\le b} \left(i_x^*\mathrm{IC}^H_{\sigma_{a+\ell}}[1-2(a+\ell)]\right)(\ell-b)[2(\ell-b)].$$

最后，用以 $b-1$ 代替 b 的相同公式，并利用我们只关注 $\ell=b$ 部分这一事实，可写为

$$\begin{aligned}\kappa_*\mathbf{Q}^H_{C^{(b)}} \cong& \bigoplus_{0\le \ell< b} \left(i_x^*\mathrm{IC}^H_{\sigma_{a+\ell}}[1-2(a+\ell)]\right)(\ell-b)[2(\ell-b)] \oplus i_x^*(\mathrm{IC}^H_{\sigma_{a+b}}[1-2(a+b)])\\ \cong&(\kappa_*\mathbf{Q}^H_{C^{(b-1)}})(-1)[-2]\oplus i_x^*(\mathrm{IC}^H_{\sigma_{a+b}}[1-2(a+b)]),\end{aligned}$$

对 $-$ 应用 $\mathcal{H}^j$ 后，对于所有 $0\le j\le 2b$ 均得到一个同构：

$$\mathcal{H}^{j+1-2(a+b)}i_x^*\mathrm{IC}^H_{\sigma_{a+b}} \cong H^j(C^{(b)})/H^{j-2}(C^{(b-1)})(-1). \tag{73}$$

定理 5.21 (= 定理 K)。 设 C 是一条亏格为 $g>0$ 的光滑射影曲线，且 L 是一个 $(2k-1)$-非常丰线丛，满足 $\sigma_k\neq\mathbf{P}^N$，其中 $k\ge 2$。设 $x\in U_a=\sigma_a\setminus\sigma_{a-1}$ 对某个 $a\le k-1$ 成立。则相交霍奇-柳贝兹尼克数 $\mathrm{I}\lambda^{r}_{p,\,q}(\mathcal{O}_{\sigma_k,\,x})$ 仅可能在 $r\in[k+a-1,2k-1]$ 时非零；在此情况下，我们有

$$\mathrm{I}\lambda^r_{p,q}(\mathcal{O}_{\sigma_k,x}) = \begin{cases}\binom{g}{-p}\binom{g}{-q} & -p-q=2k-1-r, p\in[-(2k-1-r),0]\\ 0 & otherwise\end{cases}.$$

证明。 我们令 $b=k-a$ 在同构（73）中，由此得到

$$\mathcal{H}^{j+1-2k}i_x^*\mathrm{IC}^H_{\sigma_k} \cong H^j(C^{(k-a)})/H^{j-2}(C^{(k-a-1)})(-1).$$

应用公式（11），对所有 $0\le j\le 2(k-a)$，我们得到

$$\begin{aligned}H^j(C^{(k-a)}) \cong& \bigoplus_{\max\{0,j-(k-a)\}\le i\le\lfloor\frac{j}{2}\rfloor} \bigwedge^{j-2i} H^1(C)(-i)\\ =&\begin{cases}\bigoplus_{0\le i\le\lfloor\frac{j}{2}\rfloor}\bigwedge^{j-2i}H^1(C)(-i) & j-(k-a)\le 0\\ \bigoplus_{j-(k-a)\le i\le\lfloor\frac{j}{2}\rfloor}\bigwedge^{j-2i}H^1(C)(-i) & \text{otherwise}\end{cases}\end{aligned}$$

并且类似地，对所有 $0\le j-2\le 2(k-a-1)$，我们有

$$\begin{aligned}H^{j-2}(C^{(k-a-1)})(-1) \cong& \bigoplus_{\max\{0,j-2-(k-a-1)\}\le i\le\lfloor\frac{j-2}{2}\rfloor} \bigwedge^{(j-2)-2i} H^1(C)(-i-1)\\ \cong& \bigoplus_{\max\{0,j-(k-a)-1\}\le i\le\lfloor\frac{j}{2}\rfloor-1} \bigwedge^{j-2(i+1)} H^1(C)(-(i+1))\end{aligned}$$

因此，如果我们重新编号，这可以写成

$$\begin{aligned}\cong& \bigoplus_{\max\{0,j-(k-a)-1\}+1\le i\le\lfloor\frac{j}{2}\rfloor} \bigwedge^{j-2i} H^1(C)(-i)\\ =&\begin{cases}\bigoplus_{1\le i\le\lfloor\frac{j}{2}\rfloor}\bigwedge^{j-2i}H^1(C)(-i) & j-(k-a)\le 0\\ \bigoplus_{j-(k-a)\le i\le\lfloor\frac{j}{2}\rfloor}\bigwedge^{j-2i}H^1(C)(-i) & \text{otherwise}\end{cases}.\end{aligned}$$

所以我们得出结论，我们有

$$H^j(C^{(k-a)})/H^{j-2}(C^{(k-a-1)})(-1) \cong \begin{cases} \bigwedge^j H^1(C) & j \leq (k-a) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

我们得出

$$\mathcal{H}^{j+1-2k} i_x^* \mathrm{IC}^H_{\sigma_k} \cong \begin{cases} \bigwedge^j H^1(C) & 0 \leq j \leq (k-a) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

霍奇分量的维数很容易计算：

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathrm{Gr}_p^F \mathrm{Gr}^W_{-p-q} \bigwedge^j H^1(C) = \begin{cases} 0 & -p-q \neq j, p \notin [-j, 0] \\ \binom{g}{-p}\binom{g}{-q} & \text{otherwise} \end{cases},$$

取 $-r = 2k-1-j$，使得 $j = 2k-1-r$，即可得出定理的证明。 □

5.4. **Q-阶乘性的缺陷**。 我们从以下一般事实开始，该事实由 [PP25，引理 3.6]提出。注意，这里不要求正规性，只需满足奇异轨迹余维的界。

引理 5.22. 设 X 是一个射影的 d 等维簇，且 余维$_X(X_{\mathrm{sing}}) > 1$。则 $\mathrm{IH}^{2d-1}_{\mathcal{M}}(X) \cong H^{2d-1}_{\mathcal{M}}(X)$。

回顾一下， B^k 是 $C^{(k)}$ 上的一个 $\mathbf{P}^{k-1}$-丛，因此其上同调可以写成

$$H^j_{\mathcal{M}}(B^k) = \bigoplus_{i \geq 0} H^{j-2i}_{\mathcal{M}}(C^{(k)})\xi^i$$

其中， $\xi = c_1(\mathcal{O}(1))$ 是相对超平面类。

引理 5.23。 对于所有 $j \leq 2k-3$，限制映射

$$H^j_{\mathcal{M}}(B^k) \to H^j_{\mathcal{M}}(Z^k_{k-1}) \text{ is injective.}$$

一般而言，对于任意 j，复合映射

$$\bigoplus_{i=0}^{\min\{k-2, \lfloor \frac{j}{2} \rfloor\}} H^{j-2i}_{\mathcal{M}}(C^{(k)})\xi^i \to H^j_{\mathcal{M}}(B^k) \to H^j_{\mathcal{M}}(Z^k_{k-1})$$

是单射。

证明。 映射 $H^j_{\mathcal{M}}(B^k) \to H^j_{\mathcal{M}}(Z^k_{k-1})$ 位于复合映射

$$H^j_{\mathcal{M}}(B^k) \to H^j_{\mathcal{M}}(Z^k_{k-1}) \to H^j_{\mathcal{M}}(C \times B^{k-1}),$$

其中复合映射为 α^*。由于 B^k 是 $C^{(k)}$ 上的$\mathbf{P}^{k-1}$ 束（分别地， $C \times B^{k-1}$ 是 $C \times C^{(k-1)}$ 上的 $\mathbf{P}^{k-2}$ 束），我们可以将 α^* 写作

$$\bigoplus_{i=0}^{\min\{k-1, \lfloor \frac{j}{2} \rfloor\}} H^{j-2i}_{\mathcal{M}}(C^{(k)})\xi^i \to \bigoplus_{i=0}^{\min\{k-2, \lfloor \frac{j}{2} \rfloor\}} H^{j-2i}_{\mathcal{M}}(C \times C^{(k-1)})\zeta^i,$$

并且根据 [Bro26，引理 2。7], 我们知道 $\alpha^*(\xi) = \zeta$。映射

$$H^{j-2i}_{\mathcal{M}}(C^{(k)}) \to H^{j-2i}_{\mathcal{M}}(C \times C^{(k-1)})$$

由加法映射 $C\times C^{(k-1)}\to C^{(k)}$ 诱导。该映射是单射：事实上，它是从 S_k-不变量到 $H^\bullet_{\mathcal{M}}(C^{\times k})$ 的 $(\mathrm{id}\times S_{k-1})$-不变量的包含。

由于 $\alpha^*(\xi)=\zeta$，拉回 α^* 保持直和分解，但含有 $i=k-1$ 的项除外。特别地，复合映射

$$\bigoplus_{i=0}^{\min\{k-2,\lfloor\frac{j}{2}\rfloor\}} H^{j-2i}_{\mathcal{M}}(C^{(k)})\xi^i\to \bigoplus_{i=0}^{\min\{k-1,\lfloor\frac{j}{2}\rfloor\}} H^{j-2i}_{\mathcal{M}}(C^{(k)})\xi^i\to \bigoplus_{i=0}^{\min\{k-2,\lfloor\frac{j}{2}\rfloor\}} H^{j-2i}_{\mathcal{M}}(C\times C^{(k-1)})\zeta^i$$

是单射。因此结论成立。 □

这有如下推论（定理 M也能推出这一推论）：

引理 5.24。 对于所有 $k\geq 2$，我们有

$$H^1_{\mathcal{M}}(\sigma_k)=0.$$

证明。 根据 [Bro26，推论 2。16]（或本引理后面的计算），该结论对$k=2$成立。

由判别式方块

$$\begin{array}{ccc} Z^k_{k-1} & \longrightarrow & B^k \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sigma_{k-1} & \longrightarrow & \sigma_k \end{array}$$

我们有长正合列（见 [PS08，推论 A。14]）

$$\cdots\to H^j_{\mathcal{M}}(\sigma_k)\to H^j_{\mathcal{M}}(\sigma_{k-1})\oplus H^j_{\mathcal{M}}(B^k)\to H^j_{\mathcal{M}}(Z^k_{k-1})\to\ldots,$$

因此

$$0\to H^1_{\mathcal{M}}(\sigma_k)\to H^1_{\mathcal{M}}(\sigma_{k-1})\oplus H^1_{\mathcal{M}}(B^k)\to H^1_{\mathcal{M}}(Z^k_{k-1})$$

是正合的。

由归纳法， $H^1_{\mathcal{M}}(\sigma_{k-1})=0$。因此，所要证明的是自然映射 $H^1_{\mathcal{M}}(B^k)\to H^1_{\mathcal{M}}(Z^k_{k-1})$是单射，但这由上面的引理 5.23立即可得。□

现在我们在**曲线 C**上工作。

推论 5.25 (= 推论 L)。 设 L 是 $(2k-1)$-非常丰，并假设 $\sigma_k\neq\mathbf{P}^N$ 对某个 $k\geq 2$成立。那么以下条件等价：

(1) $C\cong\mathbf{P}^1$,*(2)* σ_ℓ 对某个（等价地，对所有） $2\leq\ell\leq k$都是有理同调流形。

此外，假设 σ_k 是正规的。那么上述任一条件都等价于以下任一条件：

(3) σ_ℓ 对某个（等价地对所有） $2\leq\ell\leq k$具有有限的**有理数域**-因子化性缺陷，*(4)* σ_ℓ 对某个（等价地对所有） $2\leq\ell\leq k$是**有理数域**-因子化的，*(5)* σ_ℓ 在每一点 $y\in\sigma_l$ 处对某个（等价地对所有） $2\leq\ell\leq k$具有有限的局部解析**有理数域**-因子化性缺陷，*(6)* σ_ℓ 对某个（等价地对所有） $2\leq\ell\leq k$是局部解析**有理数域**-因子化的。

证明。(1)与(2)的等价性直接由定理 I得出。我们首先证明(3)、(4)与(1)的等价性。

根据 [PP25，定理 A]，，我们知道 σ_k 具有有限的 **有理数域**-因子化缺陷，当且仅当 $h^1(\sigma_k) = h^{2\dim\sigma_k-1}(\sigma_k)$。根据 引理 5.24，可知它具有有限的 **有理数域**-因子化缺陷，当且仅当$h^{2\dim\sigma_k-1}(\sigma_k) = 0$。

根据 引理 5.22，这等价于 IH 的消失$^{2\text{维数}\sigma_k-1}(\sigma_k) = 0$；根据庞加莱对偶，这又等价于 $\mathrm{IH}^1(\sigma_k) = 0$。最后，根据 [Bro26，定理 2。12]，有 $\mathrm{IH}^1(\sigma_k) \cong H^1(C)$。

因此可知，**有理数域**-因子化缺陷有限，当且仅当 $C \cong \mathbf{P}^1$。我们已经看到，这意味着 σ_k 是一个有理同调流形（[Bro26]中也证明了相同的蕴含关系），因此结论得证。

现在证明 (5)、(6) 和 (1) 等价。假设 $\sigma^{\mathrm{an}}(\sigma_l)$ 在每个 y处都是有限的，则$\sigma(\sigma_l) < \infty$ 因此 $C \cong \mathbf{P}^1$ 由前面的部分可知。另一方面，若 $C \cong \mathbf{P}^1$，，则 σ_l具有有理奇点，这由 [ENP20]，可得，因此根据 [PP25，定理B] 以及 定理 K， σ_l 在局部解析意义下是**有理数域**-因子化的。□

注 5.26. 上文用到了这样一个事实：若一个正规射影簇 Z 在每个点 $z \in Z$处的 Q-阶乘性缺陷均有限，则其 Q-阶乘性缺陷 $\sigma(Z)$ 是有限的。证明这一点的一种方法如下：假设 $\sigma^{\mathrm{an}}(Z; z) < \infty$在每个 $z \in Z$处都成立。则 $R^1 f_* \mathcal{O}_{\tilde{Z}} = 0\tilde{}$，其中 $f : Z \to Z$ 是由 [PP25，定理 B]给出的消解。接着，根据 [AH24，定理 0.5]，，有 $H^1(Z) \cong \mathrm{IH}^1(Z) \cong \mathrm{IH}^{2\dim Z-1}$，它同构于 $H^{2\dim Z-1}(Z)$，由引理 5.22 可知。因此 $\sigma(Z) < \infty$，根据 [PP25，定理 A]。

5.5. **奇异上同调**。最后，我们给出任意混合层理论中的奇异上同调公式，因此我们的结果既适用于霍奇结构，也适用于伽罗瓦群(k/k)-表示。回顾定理陈述：

定理 5.27。假设 L 是$(2k-1)$-非常丰，其中 $k \geq 2$ 且 $\sigma_k \neq \mathbf{P}^N$。对于 $0 \leq j \leq 4k-2$，有如下结论：

- 若 $w \leq k$，则

$$\mathrm{Gr}_w^W H^j_{\mathcal{M}}(\sigma_k) = \begin{cases} A^{\mathcal{M}}(-\frac{w}{2}) & j = w \text{ is even} \\ \mathrm{Sym}^k(H^1_{\mathcal{M}}(C)) & (w,j) = (k, 2k-1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

- 若 $w \geq k+1$，则

$$\mathrm{Gr}_w^W H^j_{\mathcal{M}}(\sigma_k) = \begin{cases} A^{\mathcal{M}}(-\frac{w}{2}) & j = w \text{ is even}, w \notin [3k-2, 4k-3] \\ A^{\mathcal{M}}(-\frac{w}{2}) \oplus \mathbf{S}_{1^{4k-w-2}}(2k-j-1) & j = w \text{ is even}, 3k-2 \leq w \leq 4k-3 \\ \mathbf{S}_{1^{4k-w-2}}(2k-j-1) & j = w \text{ is odd}, 3k-2 \leq w \leq 4k-3 \\ \mathbf{S}_{j-w+1,1^{2w+4k-3j-3}}(2k-j-1) & w \in [\frac{3}{2}j - 2k + \frac{3}{2}, 2j-3k+2],\ j > w \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

上文中，$\mathbf{S}_\lambda$ 表示与分拆 λ相关联的舒尔函子，作用于 $H^1_{\mathcal{M}}(C)$。由 $H^1_{\mathcal{M}}(C)$的纯性可知，它是权 $|\lambda|$的纯对象。

我们采用以下方法：对射影态射 κ: $\sigma_k \to \mathrm{Spec}(k)$ 和对象 $A^{\mathcal{M}}_{\sigma_k}[2k-1]$ 应用权重谱序列。

注 5.28。权重谱序列中的态射按以下方式确定：对于对象 $M \in \mathcal{M}(X)$ 和真态射 $f\colon X \to Y$，考虑

$$0 \to \mathrm{Gr}^W_{w-1} M \to (W_w/W_{w-2})M \to \mathrm{Gr}^W_w M \to 0,$$

其中我们使用简写 $(W_k/W_\ell)(-) = W_k(-)/W_\ell(-)$，它是一个正合函子。若应用 f_*，则得到正合三角

$$f_*\mathrm{Gr}^W_{w-1} M \to f_*((W_w/W_{w-2})M) \to f_*\mathrm{Gr}^W_w(M) \xrightarrow{+1},$$

并且权重谱序列中的态射是与诱导映射 $f_*\mathrm{Gr}^W_w(M) \to f_*\mathrm{Gr}^W_{w-1}(M)[1]$ 相关联的上同调中的态射。

通过应用定理 I（在 $\mathcal{M}(-)$ 中考虑），我们有

$$\mathrm{Gr}^W_{2k-1-\ell} A^{\mathcal{M}}_{\sigma_k}[2k-1] = \mathrm{Sym}^\ell(H^1_{\mathcal{M}}(C)) \boxtimes \mathrm{IC}^{\mathcal{M}}_{\sigma_{k-\ell}}.$$

此外，由（在 $\mathcal{M}(-)$ 中的）权重谱序列的显然类比 [Sai90，命题 2.15] 关于常值映射 $\kappa\colon \sigma_k \to \mathrm{Spec}(k)$，我们有一个谱序列

$$E_1^{-i,i+j} = \mathcal{H}^j \kappa_*(\mathrm{Gr}^W_i A^{\mathcal{M}}_{\sigma_k}[2k-1])$$

其在 E_2 处退化（因为 $E^{-i,i+j}_1$ 是权为 $i+j$ 的纯的），并且满足

$$E_2^{-i,i+j} = \mathrm{Gr}^W_{i+j} H^{\dim \sigma_k + j}_{\mathcal{M}}(\sigma_k).$$

我们重新编号，以便看出复形的第 ℓ 个上同调

(74)
$$0 \to \mathrm{IH}^p_{\mathcal{M}}(\sigma_k) \xrightarrow{d_1} \mathrm{Sym}^1(H^1_{\mathcal{M}}(C)) \otimes \mathrm{IH}^{p-1}_{\mathcal{M}}(\sigma_{k-1}) \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_1} \mathrm{Sym}^{k-1}(H^1_{\mathcal{M}}(C)) \otimes H^{p+1-k}_{\mathcal{M}}(C) \to 0$$

与 $\mathrm{Gr}^W_p H^{p+\ell}_{\mathcal{M}}(\sigma_k)$ 同构。

注 5.29。我们将使用 Brogan 对 $\mathrm{IH}^j(\sigma_k)$ 的描述，即 $\ker(\pi_{H^2,*}\alpha^*\colon H^j(B^k) \to H^2(C) \otimes H^{j-2}(B^{k-1}))$，其中 $\alpha\colon C \times B^{k-1} \to B$ 是自然态射，而 $\pi_{H^2,*}\colon H^j(C \times B^{k-1}) \to H^2(C) \otimes H^{j-2}(B^{k-1})$ 是 Künneth 投影。我们采用这种记法，因为我们还将关注态射

$$\pi_{H^1,*}\colon H^j(C \times B^{k-1}) \to H^1(C) \otimes H^{j-1}(B^{k-1}).$$

我们确定 d_1 权重谱序列中态射的策略如下。根据注 5.28，我们首先要对连续的 $\mathrm{Gr}^W_w(-)$ 部分之间的扩张作出有用的解释 $A^{\mathcal{M}}_{\sigma_k}[2k-1]$。我们将 $w = 2k-1$ 的情形手动处理，然后证明对于 $w < 2k-1$，该扩张由 $H^1(C) \boxtimes -$ 作用于 σ_{k-1} 对应扩张而诱导得到；这使我们能够对 k 使用归纳法。

为方便记述，令

$$\eta^{(k)}_w\colon \mathrm{Gr}^W_w A^{\mathcal{M}}_{\sigma_k}[2k-1] \to \mathrm{Gr}^W_{w-1} A^{\mathcal{M}}_{\sigma_k}[2k]$$

表示由 $(W_w/W_{w-2})A^{\mathcal{M}}_{\sigma_k}[2k-1]$ 诱导的扩张类。

命题 5.30。 设 L 在 C 上是$(2k-1)$-非常丰的，并假设 $\sigma_k \neq \mathbf{P}^N$。那么我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gr}^W_{2k-1} A^{\mathcal{M}}_{\sigma_k}[2k-1] & \xrightarrow{\eta^{(k)}_{2k-1}} & \mathrm{Gr}^W_{2k-2} A^{\mathcal{M}}_{\sigma_k}[2k] \\ \downarrow & & \downarrow \\ p_* A^{\mathcal{M}}_{B^k}[2k-1] & \longrightarrow & H^1_{\mathcal{M}}(C) \boxtimes p_* A^{\mathcal{M}}_{B^{k-1}}[2k-2] \end{array},$$

where 底部的映射是由 α 和 *Künneth* 投影诱导的典范映射 .

此外，对于 $w < 2k-1$，我们有一个交换图表

$$\begin{array}{ccc} H^1_{\mathcal{M}}(C) \boxtimes \mathrm{Gr}^W_{w-1} A^{\mathcal{M}}_{\sigma_k}[2k-3] & \xrightarrow{\eta^{(k-1)}_{w-1}} & H^1_{\mathcal{M}}(C) \boxtimes \mathrm{Gr}^W_{w-2} A^{\mathcal{M}}_{\sigma_k}[2k-2] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Gr}^W_w A^{\mathcal{M}}_{\sigma_k}[2k-1] & \xrightarrow{\eta^{(k)}_w} & \mathrm{Gr}^W_{w-1} A^{\mathcal{M}}_{\sigma_k}[2k] \end{array},$$

其中，在 定理 *I* 中对所有四个项作等同后，垂直态射由自然的满射乘法映射诱导

$$H^1_{\mathcal{M}}(C) \otimes \mathrm{Sym}^a(H^1_{\mathcal{M}}(C)) \to \mathrm{Sym}^{a+1}(H^1_{\mathcal{M}}(C)).$$

证明。 我们先证明第一个断言。

我们在定义 $\mathcal{C}^k$ 的三角形中对 $W_{2k-1-2}(-)$ 取商，得到：

$$A^{\mathcal{M}}_{\sigma_k}/W_{2k-3}A^{\mathcal{M}}_{\sigma_k} \to p_* A^{\mathcal{M}}_{B^k} \to \mathcal{C}^k/W_{2k-3}\mathcal{C}^k \xrightarrow{+1}, \tag{75}$$

$$p_* A^{\mathcal{M}}_{Z^k_{k-1}}/W_{2k-3}p_* A^{\mathcal{M}}_{Z^k_{k-1}} \cong \mathcal{C}^k/W_{2k-3}\mathcal{C}^k.$$

根据构造，若记 $p_* A^{\mathcal{M}}_{B^k} = \mathrm{IC}^{\mathcal{M}}_{\sigma_k} \oplus \bigoplus_{\ell<k} \mathrm{IC}^{\mathcal{M}}_{\sigma_\ell}(\ell - k)$，则映射

$$p_* A^{\mathcal{M}}_{B^k} \to \mathcal{H}^{2k-1}\mathcal{C}^k = \mathcal{H}^{2k-1}\mathcal{C}^k/W_{2k-3}\mathcal{C}^k$$

是自然投影 $p_* A^{\mathcal{M}}_{B^k} \to \bigoplus_{\ell<k} \mathrm{IC}^{\mathcal{M}}_{\sigma_\ell}(\ell - k)$。接下来我们将使用以下基本引理：

引理 5.31. 设 $A, B, C \in \mathcal{A}$ 属于一个阿贝尔范畴，其中 $p = (f, 0)\colon A \to B \oplus C$，并且设 $D = C(p)$。假设 $f\colon A \to B$ 是满射。那么诱导映射 $C \to \mathcal{H}^0 D$ 是同构，并且我们有 $D^b(\mathcal{A})$中的一个正合三角的典范态射：

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \longrightarrow & (\mathcal{H}^{-1}D)[1] & \xrightarrow{+1} & \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow & & \downarrow & & \\ A & \xrightarrow{p} & B \oplus C & \xrightarrow{g} & D & \xrightarrow{+1} & \end{array}$$

其中垂直态射是典范态射。

证明。 这可由映射锥构造直接得出。 □

我们将其应用于自然态射

$$\mathcal{H}^{2k-2}(\mathcal{C}^k/W_{2k-3}\mathcal{C}^k)[2-2k] \to \mathcal{C}^k/W_{2k-3}\mathcal{C}^k,$$

由此得到一个三角形态射

$$\begin{array}{ccccccc} A^{\mathcal{M}}_{\sigma_k}/W_{2k-3}A^{\mathcal{M}}_{\sigma_k} & \longrightarrow & \mathrm{IC}^{\mathcal{M}}_{\sigma_k}[1-2k] & \longrightarrow & \mathcal{H}^{2k-2}(\mathcal{C}^k/W_{2k-3}\mathcal{C}^k)[2-2k] & \xrightarrow{+1} & \\ \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ A^{\mathcal{M}}_{\sigma_k}/W_{2k-3}A^{\mathcal{M}}_{\sigma_k} & \longrightarrow & p_*A^{\mathcal{M}}_{B^k} & \longrightarrow & \mathcal{C}^k/W_{2k-3}\mathcal{C}^k & \xrightarrow{+1} & \end{array} \tag{76}$$

根据构造，顶部的三角正是我们所需的扩张。

自然映射 $p_*A^{\mathcal{M}}_{B^k} \to \mathcal{C}^k$ 经过 $p_*A^{\mathcal{M}}_{Z^k_{k-1}}$，借助 $i\colon\ \sigma_{k-1} \to \sigma_k$，因此图表（76）的底部三角在典范意义下同构于

$$A^{\mathcal{M}}_{\sigma_k}/W_{2k-3}A^{\mathcal{M}}_{\sigma_k} \to p_*A^{\mathcal{M}}_{B^k} \to p_*A^{\mathcal{M}}_{Z^k_{k-1}}/W_{2k-3}p_*A^{\mathcal{M}}_{Z^k_{k-1}} \xrightarrow{+1}.$$

我们有复合映射 $C \times B^{k-1} \to Z^k_{k-1} \to B^k$，从而得到这些态射

$$p_*A^{\mathcal{M}}_{B^k} \to p_*A^{\mathcal{M}}_{Z^k_{k-1}} \to p_*A^{\mathcal{M}}_{C\times B^{k-1}}$$

因此

$$p_*A^{\mathcal{M}}_{B^k} \to p_*A^{\mathcal{M}}_{Z^k_{k-1}}/W_{2k-3}p_*A^{\mathcal{M}}_{Z^k_{k-1}} \to p_*A^{\mathcal{M}}_{C\times B^{k-1}}/W_{2k-3}p_*A^{\mathcal{M}}_{C\times B^{k-1}}.$$

在 定理 I 的证明中，我们证明 $\mathbf{Gr}^W_{2k-2}\mathcal{H}^{2k-2}\mathcal{C}^k$ 是$H^1_{\mathcal{M}}(C) \boxtimes \mathcal{H}^{2k-3}p_*A^{\mathcal{M}}_{B^{k-1}}$ 的自然子商。换言之，我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{IC}^{\mathcal{M}}_{\sigma_k}[1-2k] & \longrightarrow & (\mathrm{Gr}^W_{2k-2}\mathcal{H}^{2k-2}\mathcal{C}^k)[2-2k] & \longrightarrow & H^1_{\mathcal{M}}(C)\boxtimes\mathcal{H}^{2k-3}p_*A^{\mathcal{M}}_{B^{k-1}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ p_*A^{\mathcal{M}}_{B^k} & \longrightarrow & p_*A^{\mathcal{M}}_{Z^k_{k-1}}/W_{2k-3}p_*A^{\mathcal{M}}_{Z^k_{k-1}} & \longrightarrow & H^1_{\mathcal{M}}(C)\boxtimes p_*A^{\mathcal{M}}_{B^{k-1}}[2k-2] \end{array},$$

由此证明了第一个断言。

我们现在处理 $w = 2k-2$ 与 $w = 2k-3$之间的扩张。我们将对 σ_{k-1}归纳地应用上述扩张的等同。回想一下，$A^{\mathcal{M}}_{\sigma_k}$ 的较低权重的扩张经过该三角

$$\mathcal{C}^k \to T \to p_*\Sigma^{k,k-1}_{k-2} \xrightarrow{+1},$$

并对该三角应用正合函子 W_{2k-2}/W_{2k-4}。

由于 $p_*\Sigma^{k,\ k-1}_{\cdot,\ k-2}$ 支撑于 σ_{k-2}，我们知道定义态射 $p_*A^{\mathcal{M}}_{C\times B^{k-1}} \to p_*\Sigma^{k,\ k-1}_{\cdot,\ k-2}$经由 $i\colon \sigma_{k-2} \to \sigma_k$的伴随，分解为通过 $p_*A^{\mathcal{M}}_{C\times Z^{k-1}_{k-2}}$。此外，$T$自然地接收了一个来自 $p_*A^{\mathcal{M}}_{C\times B^{k-1}}$ 的态射，使得以下构成一个正合三角的交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{K} & \longrightarrow & p_*A^{\mathcal{M}}_{C\times B^{k-1}} & \longrightarrow & p_*A^{\mathcal{M}}_{C\times Z^{k-1}_{k-2}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}^k & \longrightarrow & T & \longrightarrow & p_*\Sigma^{k,k-1}_{k-2} \end{array}.$$

现在，我们可以将 K¨unneth 分解应用于映射 $p_*A^{\mathcal{M}}_{C\times B^{k-1}} \to p_*A^{\mathcal{M}}_{C\times Z^{k-1}_{k-2}}$，从而得到以下对象的一个直和项

$$H^1(C)\boxtimes p_*A^{\mathcal{M}}_{B^{k-1}}[-1] \to H^1(C)\boxtimes p_*A^{\mathcal{M}}_{Z^{k-1}_{k-2}}.$$

根据上一步，这部分编码了 $A^{\mathcal{M}}_{\sigma_{k-1}}$ 中 $w=2k-3$ 与 $w=2k-4$ 之间的扩张，再与 $H^1_{\mathcal{M}}$ 张量积（C）。通过复合并考察上同调中的长正合列，我们得到一个正合序列的态射

$$\begin{array}{ccccc} H^1(C)\boxtimes \mathrm{Gr}^W_{2k-4}A^{\mathcal{M}}_{\sigma_{k-1}} & \longrightarrow & H^1(C)\boxtimes (W_{2k-3}/W_{2k-5})A^{\mathcal{M}}_{\sigma_{k-1}} & \longrightarrow & H^1(C)\boxtimes \mathrm{Gr}^W_{2k-3}A^{\mathcal{M}}_{\sigma_{k-1}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{coker}(\beta) & \xrightarrow{\tau} & (W_{2k-2}/W_{2k-4})\mathcal{H}^{2k-2}\mathcal{C}^k & \longrightarrow & \ker(\gamma) \end{array}.$$

右侧的映射是 $H^1(C)$ ⊠交叉复形$^{\mathcal{M}}_{\sigma_{k-1}}$ 上的恒等映射。

对于左侧的映射，我们应用 推论 5.19。

接下来，我们研究 $w=2k-3$ 与 $w=2k-4$ 之间的扩张。如上所述，我们有态射

$$p_*A^{\mathcal{M}}_{C\times Z^{k-1}_{k-2}} \to p_*\Sigma^{k,k-1}_{k-2},$$

因此，应用 $\mathcal{H}^{2k-3}$，我们得到一个 $\mathcal{M}(\sigma_k)$ 中的态射：

$$H^1(C)\boxtimes \mathcal{H}^{2k-4}p_*A^{\mathcal{M}}_{Z^{k-1}_{k-2}} \to \mathcal{H}^{2k-3}p_*\Sigma^{k,k-1}_{k-2},$$

结论可由考察通常的短正合列所得到的短正合列态射得出

$$0\to \mathrm{Gr}^W_{2k-4}(-)\to (W_{2k-3}/W_{2k-5})(-)\to \mathrm{Gr}^W_{2k-3}(-)\to 0$$

并应用推论 5.19 来识别外侧垂直态射。

最后，对于 $w<2k-4$，我们利用该态射

$$H^1(C)\boxtimes p_*\Sigma^{k-1,k-2}_{k-3}[-2]\to p_*\Sigma^{k,k-1}_{k-2}.$$

若取 $\mathcal{H}^{2k-3}$，则可得到 $\mathcal{M}(\sigma_k)$ 中的一个态射：

$$H^1(C)\boxtimes \mathcal{H}^{2k-5}p_*\Sigma^{k-1,k-2}_{k-3}\to \mathcal{H}^{2k-3}p_*\Sigma^{k,k-1}_{k-2},$$

结论再次可通过考察与.....相关联的短正合列态射得出

$$0\to \mathrm{Gr}^W_{w-1}(-)\to (W_w/W_{w-2})(-)\to \mathrm{Gr}^W_w(-)\to 0$$

并利用推论 5.19识别最外侧的两个垂直态射。 □

由 Remar k 5.28，我们可以轻松确定权重谱序列中的态射 .

推论 5.32. 我们有交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{IH}^p_{\mathcal{M}}(\sigma_k) & \xrightarrow{d_1} & H^1_{\mathcal{M}}(C)\otimes \mathrm{IH}^{p-1}_{\mathcal{M}}(\sigma_{k-1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^j_{\mathcal{M}}(B^k) & \xrightarrow{\pi_{H^1,*}\alpha^*} & H^1_{\mathcal{M}}(C)\otimes H^{j-1}_{\mathcal{M}}(B^{k-1}) \end{array},$$

其中水平映射来自将交叉上同调等同于$\ker(\pi_{H^2,*}\alpha^*)$。

此外，对于 $\ell > 0$，我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} H^1_{\mathcal{M}}(C) \otimes \mathrm{Sym}^{\ell-1}(H^1_{\mathcal{M}}(C)) \otimes \mathrm{IH}^{p-\ell}_{\mathcal{M}}(\sigma_{k-\ell}) & \xrightarrow{d_1} & H^1_{\mathcal{M}}(C) \otimes \mathrm{Sym}^{\ell}(H^1_{\mathcal{M}}(C)) \otimes \mathrm{IH}^{p-\ell-1}(\sigma_{k-\ell-1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Sym}^{\ell}(H^1_{\mathcal{M}}(C)) \otimes \mathrm{IH}^{p-\ell}_{\mathcal{M}}(\sigma_{k-\ell}) & \xrightarrow{d_1} & \mathrm{Sym}^{\ell+1}(H^1_{\mathcal{M}}(C)) \otimes \mathrm{IH}^{p-\ell-1}_{\mathcal{M}}(\sigma_{k-\ell-1}) \end{array},$$

其中，垂直态射是自然满射。

现在显然，我们必须在底层的 A-向量空间层面分析复合映射 $\pi_{H^1,*}\alpha^*$: $H^j(B^k) \to H^1(C) \otimes H^{j-1}(B^{k-1})$（因此我们省略下文中的符号 $\mathcal{M}$ ）。这可以用线性代数完成。事实上，回忆一下， B^k 是一个在 $C^{(k)}$ 上的射影丛，我们可以改写为

$$\alpha^*\colon H^j(B^k) = \bigoplus_{i=0}^{k-1} H^{j-2i}(C^{(k)})\xi^i \to H^j(C \times B^{k-1}) = \bigoplus_{i=0}^{k-2} H^{j-2i}(C \times B^{k-1}),$$

其中 [Bro26] 表明 $\alpha^*(\xi) = \xi$ 因此对于 $i < k-1$，诱导态射

$$H^{j-2i}(C^{(k)})\xi^i \to H^{j-2i}(C \times C^{(k-1)})\xi^i$$

由沿加法映射 $C \times C^{(k-1)} \to C^{(k)}$ 拉回得到。 $i = k-1$ 的情形需要特别注意。

注 5.33。 对于 V 一个 A-向量空间，存在自然的 GL(V)-等变态射

$$d_{\mathrm{Kosz}}\colon \mathrm{Sym}^a V \otimes \bigwedge^b V \to \mathrm{Sym}^{a+1} V \otimes \bigwedge^{b-1} V$$

$$w_1 \otimes w_a \otimes (v_1 \wedge \cdots \wedge v_b) \mapsto \sum_{\ell=1}^{b} (-1)^{\ell-1} w_1 \otimes w_a \otimes v_\ell \otimes (v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v_\ell} \wedge \cdots \wedge v_b),$$

我们称之为“Koszul 微分”（沿用 [Eis95]由它们的复合构成的复形称为“Koszul 串”。）

根据定义，以下图表交换

$$\begin{array}{ccc} V \otimes \mathrm{Sym}^a V \otimes \bigwedge^b V & \xrightarrow{d_{\mathrm{Kosz}}} & V \otimes \mathrm{Sym}^{a+1} V \otimes \bigwedge^{b-1} V \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Sym}^{a+1} V \otimes \bigwedge^b V & \xrightarrow{d_{\mathrm{Kosz}}} & \mathrm{Sym}^{a+2} V \otimes \bigwedge^{b-1} V \end{array}.$$

In 不可约 GL(V)-表示的项，我们可以应用 Pieri 规则来写出 e

$$d_{\mathrm{Kosz}}\colon \mathbf{S}_{(a,1^b)} \oplus \mathbf{S}_{(a+1,1^{b-1})} \to \mathbf{S}_{(a+1,1^{b-1})} \oplus \mathbf{S}_{(a+2,1^{b-2})}$$

因此 $\ker(d_{\mathrm{Kosz}}) = \mathbf{S}_{(a,1^b)}$ 且 $\mathrm{coker}(d_{\mathrm{Kosz}}) \cong \mathbf{S}_{(a+2,1^{b-2})}$ 。

在中间次数之前，我们可以将权重谱序列中最左侧的微分识别为 Koszul 微分：

命题 5.34. 对于 $p \le 2k-1$，利用同构 $\mathrm{IH}^p(\sigma_k) \cong \bigoplus_{\max\{p-k,0\}\le 2i} \bigwedge^{p-2i} H^1_{\mathcal{M}}(C)$，态射

$$\mathrm{IH}^p(\sigma_k) \xrightarrow{d_1} H^1(C) \otimes \mathrm{IH}^{p-1}(\sigma_{k-1})$$

分解为态射

$$\bigwedge^{p-2i} H^1_{\mathcal{M}}(C) \xrightarrow{d_1} H^1(C) \otimes \bigwedge^{p-1-2i} H^1_{\mathcal{M}}(C),$$

它与 Koszul 态射 *(*注 *5.33)*一致。

证明。 这一等同需要一些 $\mathfrak{S}_k$-等变多重线性代数，不过是初等的。

回顾一下，我们将 $H^\bullet(C^{(k)})$等同于 $H^\bullet(C^{\times k})$中的 $\mathfrak{S}_k$-不变量，其中作用带有符号。具体而言，对于 $\sigma \in \mathfrak{S}_k$，我们有

$$\sigma \cdot v_1 \otimes \cdots \otimes v_k = (-1)^{\sum_{i<j,\sigma(i)>\sigma(j)} \deg(v_i)\deg(v_j)} v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(k)}.$$

我们描述 $\mathfrak{S}_k$-不变量的一组基。为此，定义一个对称化函子 Σ_k 如下

$$\Sigma_k(v) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \sigma \cdot v.$$

对于曲线 $C(C)$的一组基，我们使用 $1 \in H^0(C)$ $c_1(L) \in H^2(C)$ 和 $\gamma_1, \ldots\ldots, \gamma_{2g} \in H^1(C)$。令$\eta_{p,q,J} = 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes c_1(L) \otimes \cdots \otimes c_1(L) \otimes \gamma_{j_1} \otimes \cdots \otimes \gamma_{j_b}$，其中 $|J| = b = k-p-q$。然后定义

$$\eta^{(k)}_{p,q,J} = \Sigma_k(\eta_{p,q,J}),$$

当 p， q， J变化时（满足 $p+q+|J| = k$），所有此类对称向量构成的集合给出了 $H^\bullet(C^{(k)})$ 的一组基。

类似地，对于 $\mathfrak{S}_{k-1}$ 在 $H^\bullet(C^{\times k-1})$ 上的作用，我们定义对称化算子 $\Sigma_{k-1}(-)$。我们将 $H^\bullet(C \times C^{(k-1)})$ 视为 $H^\bullet(C^{\times k})$ 中满足 $\mathrm{id} \times \mathfrak{S}_{k-1}$-不变量条件的向量。这个子空间的一组基为

$$1 \otimes \eta^{(k-1)}_{p,q,J},\ c_1(L) \otimes \eta^{(k-1)}_{p,q,J},\ \gamma_i \otimes \eta^{(k-1)}_{p,q,J},$$

其中 $i \in \{1, \ldots, 2g\}$ 和 p， q， J变化满足 $p+q+|J| = k-1$。

映射 α^*: $H^\bullet(C^{(k)}) \to H^\bullet(C \times C^{(k-1)})$ 可视为将 $\mathfrak{S}_k$-不变量自然包含到 $\mathrm{id} \times \mathfrak{S}_{k-1}$-不变量中。要理解复合 $\pi_{H^\ell,*}\alpha^*$（其中 $\ell = 1$， 2），我们只需从一个 $\mathfrak{S}_k$-不变量向量出发，将其重新表示为上述 $\mathrm{id} \times \mathfrak{S}_{k-1}$-向量的基，再投影到相应的子基上。

对于基向量 $\eta^{(k)}_{p,q,J}$上的这一运算，有一个简单的规则，其验证留给读者：我们有

$$\eta^{(k)}_{p,q,J} = p1 \otimes \eta^{(k-1)}_{p-1,q,J} + qc_1(L) \otimes \eta^{(k-1)}_{p,q-1,J} + \sum_{\ell=1}^{b} (-1)^{\ell-1} \gamma_{j_b} \otimes \eta^{(k-1)}_{p,q,J\setminus\{j_b\}}.$$

这使我们能够轻松确定 $\ker(\pi_{H^2,*}\alpha^*)$: 事实上，$\sum_{p,q,J} c_{p,q,J}\eta^{(k)}_{p,q,J}$ 属于核，当且仅当 $qc_{p,q-1,J} = 0$ 对所有 $q > 0$都成立；当且仅当 $c_{p,q,J} = 0$ 对所有 $q > 0$都成立。

此外，态射 $\pi_{H^1,\ *}\alpha^*$ 将核中的向量 $\sum_{p,\ J} c_{p,\ 0,\ J}\eta^{(k)}_{p\ q\ ,\ \ ,\ J}$ 映射为

$$\sum_{p,J}\sum_{\ell=1}^{b}(-1)^{\ell-1}\gamma_{j_b}\otimes\eta^{(k-1)}_{p,0,J\setminus\{j_b\}},$$

这验证了其像包含于 $H^1(C)\otimes\ker(\pi_{H^2,\ *}\alpha^*)$。

此外，利用等同 $\eta^{(k)}_{p\ 0\ ,,J}=\gamma_{j_1}\wedge\cdots\wedge\gamma_{j_b}$，我们看到该映射与注5.33中的 Koszul 微分一致。

现在，对于 $p\le 2k-3$，我们有

$$\bigoplus_{i=0}^{k-2}H^{p-2i}(C^{(k)})\xi^i\xrightarrow{\pi_{H^2,*}\alpha^*}\bigoplus_{i=0}^{k-2}H^2(C)\otimes H^{p-2i-2}(C^{(k-1)})\xi^i$$

是这些映射的直和，从而证明了这种情况下的断言。事实上，$\sum_{i=0}^{k-2}\eta_i\xi^i$ 属于 $\ker(\pi_{H^2,\ *}\alpha^*)$，当且仅当对所有 i，$\eta_i\in\ker(\pi_{H^2,\ *}\alpha^*)$。此外，我们看到，对于$p$ 的任意取值（甚至大于 $2k-1$），都有包含关系

$$\bigoplus_{i=0}^{k-2}\left(\ker(\pi_{H^2,*}\alpha^*)\subseteq H^{j-2i}(C^{(k)})\right)\xi^i\subseteq\ker(\pi_{H^2,*}\alpha^*).$$

对于 $p=2k-2,\ 2k-1$，我们必须考虑 $i=k-1$ 的项。根据奇异上同调的射影丛公式，我们有

$$\alpha^*(\xi^{k-1})=\alpha^*(\xi)^{k-1}=(-c_1(E_{k-1})\xi^{k-2}-\cdots-c_{k-1}(E_{k-1})),$$

因此我们看到，$\sum_{i=0}^{k-1}\eta_i\xi^i\in\ker(\pi_{H^2,\ *}\alpha^*)$ 当且仅当

$$\pi_{H^2,*}(\alpha^*(\eta_i))=\pi_{H^2,*}(1\otimes c_{k-1-i}(E_{k-1}))\cup\eta_{k-1})\text{ for all }i.$$

对于 $p=2k-2$（分别对于 $p=2k-1$），我们有 $\eta_{k-1}\in H^0(C^{(k)})$（分别为 $\eta_{k-1}\in H^1(C^{(k)})$）。特别地，它是 $\eta^{(k)}_{0\ 0\ ,\ ,\ \emptyset}$ 的倍数（分别是形如 $\eta^{(k)}_{0\ 0\ ,\ ,\ \{j\}}$ 的元素的线性组合）。由于与 $1\otimes c_{k-1-i}(E_{k-1})$ 进行杯积不会改变向量中的第一个条目，我们对所有 i 都有 $\pi_{H^2,\ *}(1\otimes c_{k-1-i}(E_{k-1})\cup\eta_{k-1})=0$。因此，在这些情况下，我们有等式

$$\bigoplus_{i=0}^{k-1}\left(\ker(\pi_{H^2,*}\alpha^*)\subseteq H^{j-2i}(C^{(k)})\right)\xi^i=\ker(\pi_{H^2,*}\alpha^*),$$

命题陈述中对态射的描述也由此得出。 □

对于更高次数，我们使用硬 Lefschetz 定理定理 2.8。由于 $\sigma_{k-1}\subseteq\sigma_k\subseteq\mathbf{P}^N$，我们可以取一个非常 ample 类 L_k 于 σ_k 上，其限制为 L_{k-1}，在 σ_{k-1}上。因此，对于任意 ℓ，平方

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{IH}^{2k-1-\ell}(\sigma_k)(-\ell) & \xrightarrow{d_1} & H^1(C)\otimes\mathrm{IH}^{2k-3-(\ell-1)}(\sigma_{k-1})(-\ell)\\ \downarrow{\scriptstyle c_1(L_k)^\ell} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes c_1(L_{k-1})^\ell}\\ \mathrm{IH}^{2k-1+\ell}(\sigma_k) & \xrightarrow{d_1} & H^1(C)\otimes\mathrm{IH}^{2k-3+(\ell-1)+2}(\sigma_{k-1})\end{array},$$

其中左侧的垂直态射是同构，而右侧的垂直态射不是。事实上，我们看到右侧的垂直态射是满射，其核（按定义）是 $\mathrm{IH}^{2k-3-(\ell-1)}(\sigma_{k-1})$ 中的本原类。

推论 5.35. 对于 $p = 2k-1+\ell > 2k-1$，态射

$$\mathrm{IH}^p(\sigma_k) \xrightarrow{d_1} H^1(C) \otimes \mathrm{IH}^{p-1}(\sigma_{k-1})$$

通过硬 *Lefschetz* 定理可识别为如下形式：我们有

$$\mathrm{IH}^p(\sigma_k) \cong \mathrm{IH}^{2k-1-\ell}(\sigma_k)(-\ell) \cong \bigoplus_{\max\{k-1-\ell,0\}\le 2i} \bigwedge^{2k-1-\ell-2i} H^1(C)(-i-\ell)$$

并对$\mathrm{IH}^{p-1}(\sigma_{k-1})$使用类似的分解，我们有 d_1 分解为直和，并且

$$d_1|_{\bigwedge^{2k-1-\ell-2i} H^1(C)} = \begin{cases} 0 & i=0 \text{ and } \ell \ge k-1 \\ d_{\mathrm{Kosz}} & \text{otherwise} \end{cases}.$$

证明。 根据推论陈述之前的讨论，我们只需理解 $\mathrm{IH}^{2k-3-(\ell-1)}(\sigma_{k-1})$ 的本原部分。根据硬 Lefschetz 定理，这些本原部分恰好是 $\mathrm{IH}^{2k-3-(\ell-1)}(\sigma_{k-1})$ 与 $\mathrm{IH}^{2k-3-(\ell-1)-2}(\sigma_{k-1})(-1)$ 之差。我们有

$$\mathrm{IH}^{2k-3-(\ell-1)}(\sigma_{k-1}) = \bigoplus_{\max\{2k-3-(\ell-1)-(k-1),0\}\le 2i} \bigwedge^{2k-3-(\ell-1)-2i} H^1(C)(-i),$$

$$\mathrm{IH}^{2k-3-(\ell-1)-2}(\sigma_{k-1}) = \bigoplus_{\max\{2k-3-(\ell-1)-(k-1)-2,0\}\le 2i} \bigwedge^{2k-3-(\ell-1)-2-2i} H^1(C)(-i).$$

因此我们看到，除非 $i=0$ 在第一个直和中可能出现（即 $\ell \ge k-1$），否则并无差异。由此可见，

$$\mathrm{IH}^{2k-3-(\ell-1)}_{\mathrm{prim}}(\sigma_{k-1}) = \begin{cases} \bigwedge^{2k-3-(\ell-1)} H^1(C) & \ell \ge k-1 \\ 0 & \ell < k-1 \end{cases}.$$

□

注 5.36。 推论结果还可以表述如下：对于 $p = 2k-1+\ell$，利用分解

$$\mathrm{IH}^p(\sigma_k) \cong \bigoplus_{\max\{k-1-\ell,0\}\le 2i} \bigwedge^{2k-1-\ell-2i} H^1(C)(-i-\ell),$$

该态射 m d_1 在任何含有 $i=0$ 的项上均为 0，否则它就是 Koszul 微分 d_{Kosz} .

现在我们可以完成证明。

定理 5.37 (= 定理 M)。 假设 L 是 $(2k-1)$-非常丰，其中 $k \ge 2$ 且 $\sigma_k \ne \mathbf{P}^N$。对于 $0 \le j \le 4k-2$，有如下结论：

- 如果 $w \le k$，则

$$\mathrm{Gr}^W_w H^j_{\mathcal{M}}(\sigma_k) = \begin{cases} A^{\mathcal{M}}(-\frac{w}{2}) & j = w \text{ is even} \\ \mathrm{Sym}^k(H^1_{\mathcal{M}}(C)) & (w,j) = (k, 2k-1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

- 如果 $w \geq k+1$，则

$$\mathrm{Gr}_w^W H^j_{\mathcal{M}}(\sigma_k) = \begin{cases} A^{\mathcal{M}}(-\frac{w}{2}) & j = w \text{ is even}, w \notin [3k-2, 4k-3] \\ A^{\mathcal{M}}(-\frac{w}{2}) \oplus \mathbf{S}_{1^{4k-w-2}}(2k-j-1) & j = w \text{ is even}, 3k-2 \leq w \leq 4k-3 \\ \mathbf{S}_{1^{4k-w-2}}(2k-j-1) & j = w \text{ is odd}, 3k-2 \leq w \leq 4k-3 \\ \mathbf{S}_{j-w+1,1^{2w+4k-3j-3}}(2k-j-1) & w \in [\frac{3}{2}j-2k+\frac{3}{2}, 2j-3k+2],\ j > w \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

证明。 我们的目标是分析所有 $0 \leq w \leq 2(2k-1)$ 对应的复形

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{IH}^w_{\mathcal{M}}(\sigma_k) & \xrightarrow{d_1} & H^1_{\mathcal{M}}(C) \otimes \mathrm{IH}^{w-1}_{\mathcal{M}}(\sigma_{k-1}) & \xrightarrow{d_1} & \cdots & \xrightarrow{d_1} & \mathrm{Sym}^{k-2}(H^1_{\mathcal{M}}(C)) \otimes \mathrm{IH}^{w-(k-2)}_{\mathcal{M}}(\sigma_2) \\ & & & & & & \downarrow d_1 \\ & & & & & & \mathrm{Sym}^{k-1}(H^1_{\mathcal{M}}(C)) \otimes H^{w-(k-1)}_{\mathcal{M}}(C). \end{array}$$

通过追踪权重谱序列中的指标，我们看到该复形的第 ℓ 个上同调同构于 $\mathrm{Gr}_w^W H^{w+\ell}_{\mathcal{M}}(\sigma_k)$。

我们记 $0 \leq \ell = j - w \leq k-1$，并聚焦于以下部分

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sym}^{\ell-1}(H^1_{\mathcal{M}}(C)) \otimes \mathrm{IH}^{w-\ell+1}_{\mathcal{M}}(\sigma_{k-\ell+1}) & \xrightarrow{d_1} & \mathrm{Sym}^{\ell}(H^1_{\mathcal{M}}(C)) \otimes \mathrm{IH}^{w-\ell}_{\mathcal{M}}(\sigma_{k-\ell}) \\ & & \downarrow d_1 \\ & & \mathrm{Sym}^{\ell+1}(H^1_{\mathcal{M}}(C)) \otimes \mathrm{IH}^{w-\ell-1}_{\mathcal{M}}(\sigma_{k-\ell-1}). \end{array}$$

若 $w - \ell \leq 2(k-\ell) - 1$，那么这两个态射都可由 命题 5.34处理。由于完整的 Koszul 串都是正合的（这是众所周知的事实，也可通过将所有对象按舒尔函子分解轻易看出），除非它是仅含单项的复形 A，因此这种情况下对上同调的贡献很少。事实上，要么 $\ell = 0$，并且我们有一个 $\mathrm{IH}^w_{\mathcal{M}}(\sigma_k)$ 的直和项，其形式为 $\bigwedge^0 H^1_{\mathcal{M}}(C)(-i) = A^{\mathcal{M}}(-i)$，这等价于 $w = 2i$ 为偶数；或者该复形具有以下形式

$$\mathrm{Sym}^{k-2}(H^1_{\mathcal{M}}(C)) \otimes \mathrm{IH}^2_{\mathcal{M}}(\sigma_2) \xrightarrow{d_1} \mathrm{Sym}^{k-1}(H^1_{\mathcal{M}}(C)) \otimes H^1_{\mathcal{M}}(C) \xrightarrow{d_1} 0,$$

其余核同构于 $\mathrm{Sym}^k(H^1_{\mathcal{M}}(C))$，因此等于 $\mathrm{Gr}_k^W H^{2k-1}_{\mathcal{M}}(\sigma_k)$。

如果 $w - \ell \geq 2(k-\ell)$，那么我们必须使用 推论 5.35中的描述。根据注 5.36，此情形与前一种情形唯一的不同之处在于：如果我们使用硬 Lefschetz 定理并分解为外幂的直和，那么取 $i = 0$ 时（如果确实存在这样的直和项），该直和项应映射为 0。前一个微分将是映到任意非零直和项上的标准 Koszul 微分。

嗯，硬 Lefschetz 定理表明，中间项可识别为

$$\mathrm{Sym}^{\ell}(H^1_{\mathcal{M}}(C)) \otimes \mathrm{IH}^{4(k-\ell)-2-(w-\ell)}_{\mathcal{M}}(\sigma_{k-\ell})(2(k-\ell)+\ell-1-w),$$

不过我们将把 $4(k-\ell) - 2 - (w-\ell) = 4k - 3j - 2 + 2w$ 重写。因此，在直和分解下，对应于 $i = 0$ 的项是 $\bigwedge^{4k-3j-2+2w} H^1_{\mathcal{M}}(C)$，它仅在 $4k-3j-2+2w-(k-\ell) \leq 0$ 时才出现，或者等价地说， $w \leq 2j-3k+2$。对于这个直和项，复形的这一部分为

$$\mathrm{Sym}^{\ell-1}(H^1_{\mathcal{M}}(C)) \otimes \bigwedge^{4k-3j-2+2w+1} H^1_{\mathcal{M}}(C) \xrightarrow{d_{\mathrm{Kosz}}} \mathrm{Sym}^{\ell}(H^1_{\mathcal{M}}(C)) \otimes \bigwedge^{4k-3j-2+2w} H^1_{\mathcal{M}}(C) \to 0.$$

若 $4k-3j-2+2w=0$，则该复形是正合的（它是完整 Koszul 串的最右端）。因此，我们只需考虑 $4k-3j-2+2w>0$，或者等价地说，$w\geq \frac{3}{2}j-2k+\frac{3}{2}$。对于 $\ell>0$，回想一下，在注5.33 中，我们确定该映射的余核为

$$\mathbf{S}_{j-w+1,1^{4k+2w-3j-3}}(2k-j-1),$$

并且对于 $\ell=0$，余核为

$$\mathbf{S}_{1^{4k-j-2}}(2k-j-1).$$

与前一种情形一样，如果 $\ell=0$ 和 $w=2i$ 为偶数，那么我们得到一个 $A(-\frac{w}{2})$ 的贡献。这就证明了该定理。□

我们给出定理 M 关于 $k=3$的另一种证明。值得注意的是，我们通过图追逐，利用奇点消解图表恢复上同调，而不是直接验证谱序列中各映射上的断言。对于更大的 k，这是一项相当繁琐的计算。在这个证明中，我们以简化的方式呈现了一般证明中的一些思路，例如进行与命题 5.34中类似的计算。

关于 $k=3$的另一种证明。在这种情况下，谱序列给出一个三项复形，其上同调分别对应于 σ_3上同调的最高权重、中间权重和较低权重。此外，在这种情况下，由于纯对象的半单性，只需验证关于最高权重和较低权重的断言，因为这会立即推出关于中间权重的断言，这正是我们接下来要做的。为简化记号，我们在验证过程中不考虑泰特扭曲。

为计算最高权，我们使用以下正合列

$$0\to \mathrm{Gr}_j^W H^j_{\mathcal{M}}(\sigma_3)\to \mathrm{Gr}_j^W H^j_{\mathcal{M}}(\sigma_2)\oplus H^j_{\mathcal{M}}(B^3)\to \mathrm{Gr}_j^W H^j_{\mathcal{M}}(Z_2^3)$$

它由 σ_3的消解的判别式方块得到。此外，我们使用拉回映射

$$\mathrm{Gr}_j^W H^j_{\mathcal{M}}(Z_2^3)\to H^j_{\mathcal{M}}(C\times B^2)$$

是单射（例如参见 [PS08，推论 5.42]），从而得出

$$\mathrm{Gr}_j^W H^j_{\mathcal{M}}(\sigma_3)\cong \ker\{\mathrm{Gr}_j^W H^j_{\mathcal{M}}(\sigma_2)\oplus H^j_{\mathcal{M}}(B^3)\to H^j_{\mathcal{M}}(C\times B^2)\}$$

由复合给出，并注意到 $H^j_{\mathcal{M}}(B^3)\to H^j_{\mathcal{M}}(C\times B^2)$ 对应于沿α的拉回。如我们在引理 5.23的证明中所述，该映射分解为

$$H^j_{\mathcal{M}}(C^{(3)})\oplus H^{j-2}_{\mathcal{M}}(C^{(3)})\xi\oplus H^{j-4}_{\mathcal{M}}(C^{(3)})\xi^2\to H^j_{\mathcal{M}}(C\times C^{(2)})\oplus H^{j-2}_{\mathcal{M}}(C\times C^{(2)})\zeta,$$

以及 $\alpha^*(\xi)=\zeta$。若记 $H^j_{\mathcal{M}}(C\times C^{(2)})/\mathfrak{S}_3$ 为由从$H^j_{\mathcal{M}}(C^{(3)})$到 $\mathfrak{S}_3$-不变量子空间（视为包含于 $H^\bullet_{\mathcal{M}}(C^{\times 3})$ 中）的单射映射给出的商，则可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{Gr}_j^W H^j_{\mathcal{M}}(\sigma_3)\\ &\cong \ker\{\mathrm{Gr}_j^W H^j_{\mathcal{M}}(\sigma_2)\oplus H^{j-4}_{\mathcal{M}}(C^{(3)})\xi^2\to H^j_{\mathcal{M}}(C\times C^{(2)})/\mathfrak{S}_3\oplus (H^{j-2}_{\mathcal{M}}(C\times C^{(2)})/\mathfrak{S}_3)\zeta\}.\end{aligned}\tag{77}$$

这里回顾一下，$\zeta=\pi_2^*(\xi_2)$，其中 $\pi_2\colon C\times C^{(2)}\to C^{(2)}$，且 ξ_2 是射影丛 $B^2=\mathbf{P}(E)$ 的相对超平面类。

为了确定这个态射，我们考察底层的 A向量空间。

我们将 $H^1(C,A)$ 的生成元记为 $\gamma_1,\dots,\gamma_{2g}$，使得 $\gamma_i\cup\gamma_j=\delta_{j,i+g}$，其中 g是曲线的亏格。此外，根据射影丛公式，我们有

$$\xi_2^2=-c_1(E)\xi_2-c_2(E),$$

与 ([BD18])

$$c_1(E) = \frac{\deg L - 1}{\deg L}(1 \otimes c_1(L) + c_1(L) \otimes 1) + \sum \gamma_i \otimes \gamma_{i+g} - \gamma_{i+g} \otimes \gamma_i$$

视为 $H^2(C \times C)$ 中的一个元素；并且

$$c_2(E) = \frac{\deg L - 1}{2 \deg L}(c_1(L) \otimes c_1(L))$$

视为 $H^4(C \times C,\ A)$ 中的一个元素。特别地，这意味着一般而言，ξ^2 的像由一些并非 $\mathfrak{S}_3$-不变量的分量组成（平凡情形除外）。

对于 $j = 9,\ 10$，这立即推出 $\mathrm{Gr}_j^W H^j_{\mathcal{M}}(\sigma_3) \cong H^{j-4}_{\mathcal{M}}(C^{(3)})$，这验证了两种上同调的最高权。对于 $j = 8$，等式右边态射的陪域（77）为零，因此同样，

$$\mathrm{Gr}_8^W H^8_{\mathcal{M}}(\sigma_3) \cong H^4_{\mathcal{M}}(C^{(3)}) \cong A^{\mathcal{M}} \oplus \mathbf{S}_{1,1},$$

如陈述中所述。最后，上同调消失的最后一项是 $\sigma_2\ j = 7$，并且我们有 $H^3_{\mathcal{M}}(C^{(3)}) \cong \mathbf{S}_1 \oplus \mathbf{S}^{1,1,1}$。$\mathbf{S}_1$ 映射到商中对应于 $H^1_{\mathcal{M}}(C) \otimes H^4_{\mathcal{M}}(C^{(2)})$ 的空间，该空间永不为零。$\mathbf{S}^{1,1,1}$ 也映射到这个子空间，因此我们可以将 $\mathrm{Gr}_7^W H^7_{\mathcal{M}}(\sigma_3)$ 与 $\mathbf{S}^{1,1,1}$ 等同，正如猜想中所述。

接下来，对于 $j = 6$，我们有 $\mathrm{Gr}_6^W H^6_{\mathcal{M}}(\sigma_2) = H^4_{\mathcal{M}}(C^{(2)})\xi_2$，它可视为包含在 $H^6_{\mathcal{M}}(B^2)$ 中，而该映射由投影给出的拉回构成，因此，此空间映射到与 $(H^0_{\mathcal{M}}(C) \otimes H^4_{\mathcal{M}}(C^{(2)}))\zeta$ 对应的空间。此外，$H^2_{\mathcal{M}}(C^{(3)}) \cong A^{\mathcal{M}} \oplus \mathbf{S}^{1,1}$。$\mathbf{S}^{1,1}$ 与 $c_1(E)$ 进行杯积后，在 $H^4_{\mathcal{M}}(C \times C^{(2)})/\mathfrak{S}_3$ 关于 $(H^0_{\mathcal{M}}(C) \otimes H^4_{\mathcal{M}}(C^{(2)}))$ 的商中的像，与对应于 $H^2_{\mathcal{M}}(C) \otimes \mathbf{S}1,_1 \subseteq H^2_{\mathcal{M}}(C) \otimes H^2_{\mathcal{M}}(C^{(2)})$ 的空间一一对应。子空间$A^{\mathcal{M}}$ 也映射到 $H^2_{\mathcal{M}}(C) \otimes \mathbf{S}^{1,1}$，中，因此，我们可以将 $\mathrm{Gr}_6^W H^6_{\mathcal{M}}(\sigma_3) \cong A^{\mathcal{M}}$ 识别为猜想中所述的对象。

对于 $j = 5$，$\mathrm{Gr}_5^W H^5_{\mathcal{M}}(\sigma_2) = H^3_{\mathcal{M}}(C^{(2)})\xi_2$ 在 $H^5_{\mathcal{M}}(B^2)$中可见，并且它映射到与（$H^0_{\mathcal{M}}(C) \otimes H^3_{\mathcal{M}}(C^{(2)})$）对应的子空间。然后，通过注意到 $H^1_{\mathcal{M}}(C^{(3)})\xi^2$（经由同构 $H^1_{\mathcal{M}}(C^{(3)}) \cong H^1_{\mathcal{M}}(C)$）以自然方式映射到商中与 $H^1_{\mathcal{M}}(C) \otimes H^4_{\mathcal{M}}(C^{(2)})$对应的子空间，我们得出$\mathrm{Gr}_5^W H^5_{\mathcal{M}}(\sigma_3) = 0$，正如猜想中所示。

在 $j = 4$ 情形下，对其作出更精确的描述是有益的

$$\mathrm{Gr}_4^W H^4(\sigma_2, A)$$
$$= \{(u, v\xi_2) \in H^4(C^{(2)}, A) \oplus H^2(C^{(2)}, A)\xi_2 \subseteq H^4(B^2, A) : u = v \cup c_1(L) \text{ in } H^4(C \times C, A)\}$$

它当然同构于 $H^2(C^{(2)},\ A)$。如上面各情形所示，该空间通过投影的拉回自然地映射到每个直和项。类 ξ^2 映射到与之对应的类（$2c_2(E)\ c_1(E)\xi_2$）所对应的同一元素，因此，正如猜想所预言的，$\mathrm{Gr}_4^W H^4_{\mathcal{M}}(\sigma_3) \cong A^{\mathcal{M}}$。

最后，利用 $\mathrm{Gr}_3^W H^3_{\mathcal{M}}(\sigma_2) = 0$，情形 $j = 3$显然成立。对于 $j = 2$，Gr $_2^W H^2_{\mathcal{M}}\ \sigma_2 = H^0_{\mathcal{M}}\ C^{(2)}\ \xi_2$ $j = 1$ $\mathfrak{S}_3$ $_2^W H^2_{\mathcal{M}}\ \sigma_3 \cong ( )\ ( )$，它映射到一个 -不变的 $A^{\mathcal{M}}$ 5 24, $j = 0$ 类，因此 Gr ( )。该情形已在一般情况下由引理。证明，而该情形显然成立。

我们接下来讨论较低权重。该猜想指出，唯一的非零较低权由 $\mathrm{Gr}_3^W H^5_{\mathcal{M}}(\sigma_3) \cong$ 对称幂$^3(H^1_{\mathcal{M}}(C))$ 给出。同样，由判别式方块，该

较低权重由长正合列描述

$$\mathrm{Gr}_j^W H_{\mathcal{M}}^{j+1}(\sigma_2) \to \mathrm{Gr}_j^W H_{\mathcal{M}}^{j+1}(Z_2^3) \to \mathrm{Gr}_j^W H_{\mathcal{M}}^{j+2}(\sigma_3) \to 0.$$

我们还可由 Z_2^3的判别式方块得到

$$H_{\mathcal{M}}^j(C \times B^2) \oplus H_{\mathcal{M}}^j(C^{(2)} \times C) \to H_{\mathcal{M}}^j(C^3) \to \mathrm{Gr}_j^W H_{\mathcal{M}}^{j+1}(Z_2^3) \to 0.$$

根据推论 5.13的证明，更确切地说，[Tot97，第 6]，，我们得到，对于$j \neq 2$，3，4，Gr $_j^W H_{\mathcal{M}}^{j+1}(Z_2^3) = 0$。对于 $j = 2$，我们得到 $\mathrm{Gr}_2^W H_{\mathcal{M}}^3 \cong$对称幂$^2(H_{\mathcal{M}}^1(C))$。再次利用 Z_2^3的判别式方块，我们得到

$$\mathrm{Gr}_2^W H_{\mathcal{M}}^2(Z_2^3) \cong H_{\mathcal{M}}^2(C^{(3)}) \oplus H_{\mathcal{M}}^0(C \times C^{(2)})\zeta,$$

由考察 σ_3的判别式方块可知，$\mathrm{Gr}_2^W H_{\mathcal{M}}^3(\sigma_3) = 0$，进而从 $\mathrm{Gr}_2^W H_{\mathcal{M}}^3(\sigma_2)$ 到 $\cong$ 对称幂$^2(H_{\mathcal{M}}^1(C))$ 的映射是一个同构。由此可得 $\mathrm{Gr}_2^W H_{\mathcal{M}}^4(\sigma_3) = 0$。

对于 $j = 3$，$\mathrm{Gr}_3^W H_{\mathcal{M}}^4(Z_2^3)$、$\mathrm{Gr}_3^W \bigwedge^3 H_{\mathcal{M}}^\bullet(C) \cong H_{\mathcal{M}}^0(C) \otimes H_{\mathcal{M}}^1(C) \otimes H_{\mathcal{M}}^2(C) \oplus$对称幂$^3(H_{\mathcal{M}}^1(C))$，且 $H_{\mathcal{M}}^1(C \times C^{(2)})\zeta$ 的像映到商的第一个直和项。由于 $\mathrm{Gr}_3^W H_{\mathcal{M}}^4(\sigma_2) = 0$，结论得证。

最后，对于 $j = 4$，$\mathrm{Gr}_4^W \bigwedge^3 H_{\mathcal{M}}^\bullet(C) \cong H_{\mathcal{M}}^2(C) \times$对称幂$^2(H_{\mathcal{M}}^1(C))$。但由于子空间 $(H_{\mathcal{M}}^1(C) \otimes H_{\mathcal{M}}^1(C^{(2)}))\zeta \subseteq H_{\mathcal{M}}^2(C \times C^{(2)})\zeta \subseteq H_{\mathcal{M}}^4(B^2)$ 映射到该子空间上，我们得出 $\mathrm{Gr}_4^W H_{\mathcal{M}}^5(Z_2^3) = 0$，因此 $\mathrm{Gr}_4^W H_{\mathcal{M}}^6(\sigma_3) = 0$。至此证明完毕。□

6. Open Questions

我们在此汇集一些与本文内容相关的（高阶）割线簇的开放问题。我们希望这些问题能推动对这些主题的进一步研究。

问题 6.1. 设 $C \subset \mathbf{P}^N$ 是一条由充分正线丛的完全线性系如此嵌入的光滑射影曲线 L。设 q_k 为第 k次割线簇 $\sigma_k \subset \mathbf{P}^N$ 的余维，并且 $k \geq 3$。确定这些量

$$(*) \qquad \mathrm{gl}(\mathrm{IC}_{\sigma_k}^H(-q_k), F) \text{ and } \mathrm{gl}(\mathcal{H}_{\sigma_k}^{q_k}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}), F).$$

回顾一下，推论 J （及其证明）给出了这些量的上界，只需假设 $k-1$ 的（$2k-1$）-很丰性。 L。然而，我们有理由期待，在正性足够的情况下，应当能够计算这些不变量，正如推论 D(4)(b) 在 $k = 2$时所示。这引出了下一个问题：

问题 6.2. 设 C 是一条光滑射影曲线，其典范丛 ω_C 对某个 $k \geq 2$是$(2k-1)$-非常丰的。设 q_k 为其典范嵌入 $C \hookrightarrow \mathbf{P}^N$的第 k 个割线簇 σ_k的余维。求出这些量 $(*)$。

上述问题的一个良好起点是 $k = 2$ 的情形。事实上，我们预期在上述情形下，$\mathrm{gl}(\mathrm{IC}_{\sigma_2}^H(-q_2)\ F) \neq 0$；换言之，我们怀疑不能从推论 D(4)(b) 中去掉正性假设。

现在，假设 $C \subset \mathbf{P}^N$ 是一条光滑射影曲线，它由某个（$2k-1$）-非常丰线丛 L 的完全线性系嵌入，并且 $\sigma_k \neq \mathbf{P}^N$，其中 $k \geq 2$。由我们的结果可得

$$w(\sigma_k) = \mathrm{HRH}(\sigma_k) = \begin{cases} \infty & C \cong \mathbf{P}^1 \\ -1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

因此，对于 $C \cong \mathbf{P}^1$， σ_k 具有预-m-杜布瓦奇点，当且仅当它具有预-m-有理奇点。此外，对于任意 C，当 L 充分正时， σ_k 是正规的，这由[ENP20], 得出。因此，若 $g(C) > 0$，则对于任意 $m \geq 1$， σ_k 都不具有预-m-有理奇点（定义见[SVV23] ）。鉴于此，我们提出以下问题（另见 [CLPS25，第 7.7] 问）：

问题 6.3。 设 L 是光滑射影曲线 C上的一个充分正的线丛，并设 σ_k 是其第 k个割线簇，且 $k \geq 3$。确定对于某个 $m \geq 1$，何时 σ_k 具有预-m-杜布瓦奇点。

接下来，我们转向一个关于直线割线簇的问题：

问题 6.4。 设 L 是光滑射影簇 Y 上的一个 *3*-非常丰线丛，并设Σ 是其割线簇。确定点$y \in Y$ 处的局部解析**有理数域**-因子化缺陷 $\sigma^{\mathrm{an}}(\Sigma; y)$ 。

在推论 G中，我们给出了所讨论量的一个上界。我们的证明表明，上述问题在于确定该态射

$$H^2_{\mathrm{prim}}(\mathrm{Bl}_y(Y)) \to H^2(Y, \mathcal{O}_Y).$$

它是否是由投影给出的典范态射

$$H^2_{\mathrm{prim}}(\mathrm{Bl}_y(Y)) \to H^{0,2}_{\mathrm{prim}}(\mathrm{Bl}_y(Y)) = H^{0,2}(\mathrm{Bl}_y(Y)) = H^{0,2}(Y)?$$

最后，我们提出一个关于高维簇的高阶割线簇的显而易见的问题：

问题 6.5。 将这项研究推广到光滑射影曲面的高阶割线簇，或在正性充分的条件下推广到任意维数的3割线簇。

上述簇的割线簇近期已在 [CLPS25] 中得到分析。特别是，同上文献 的作者假设 $Y \subset \mathbf{P}^N$ 是一个由某个正性充分的线丛的完全线性系嵌入的光滑射影簇 L，并证明，只要维数满足 [Ull16、CS18、ENP20] 中的类似结果仍然成立$Y \leq 2$，或者 $k \leq 3$ 其中$\Sigma_k \subset \mathbf{P}^N$ 是其第 k割线簇。若能借助 同上文献 推进上述问题，将会非常有趣。作为开端，我们提出以下问题：

问题 6.6。 设 $Y \subset \mathbf{P}^N$ 是一个由某个正性充分的线丛 L 的完全线性系嵌入的光滑射影曲面，且 $\Sigma_k \subset \mathbf{P}^N$ 是其第 k 阶割线簇。对数典范缺陷$\mathrm{lcdef}(\Sigma_3)$的值是多少？

事实上，在上述设定中，当 $k \geq 3$ 时，我们预期 $\mathrm{lcdef}(\Sigma_k)$ $c(\Sigma_k)$,$\mathrm{HRH}(\Sigma_k)$ 和 $w(\Sigma_k)$ 的值将与 $k = 2$ 保持不变。

References

[AH24] Donu Arapura 和 Scott Hiatt, *Differential Forms and Hodge Structures on Singular Varieties*, arXiv 电子印本（2024年10月）, arXiv:2410.21007, 网址：2410.21007。 ↑85[AMS25] Mohammadali Aligholi、Laurentiu Maxim 和 Joerg Schuermann, *Hodge index theorem for singular varieties* *Around a class version of the* 2025 2511 08780, , arXiv 电子印本（11月）, arXiv: 。网址：2511.08780。 ↑9, 21, 40[BBDG83] Alexander Beilinson、Joseph Bernstein、Pierre Deligne 和 Ofer Gabber, *Faisceaux pervers*, Ast´erisque **100** （1983）, vi+180。MR4870047 ↑12

[BCHM10] Caucher Birkar、Paolo Cascini、Christopher D. Hacon 和 James McKernan, *Existence of minimal models for varieties of log general type* **23** 2010 2, 405 468 2601039 , 《美国数学会杂志》 (), 第 – 期。MR↑61[BD18] Suratno Basu 和 Krishanu Dan, *Stability of secant bundles on the second symmetric power of curves* **110** 2018 3, 245 249 , 《巴塞尔数学档案》 (), 第 – 期。MR[˘87] ˘ *Height pairing between algebraic cycles* 3761135 ↑96 Bei A. Beilinson, , 《算术代数几何当前趋势》（美国加利福尼亚州阿卡塔，1985），1987年，第1–24页。MR902590 ↑12[Ber92] Aaron Bertram, *Moduli of rank-2 vector bundles theta divisors and the geometry of curves in projective space* **35** 1992 2, 429 469 1158344 ↑9 , , , 《微分几何杂志》 (), 第 – 期。MR, [99] *Rational smoothness and fixed points of torus actions* 1999 127 156 1712861 ↑19 Bri M. Brion, , , 第 – 页。谨以此文纪念Claude Chevalley。MR[26] Bro Daniel Brogan, *Invariants of the singularities of secant varieties of curves*, 《J. ´Ec. polytech. Math. 13》（2026），1–39。↑4, 5, 7, 8, 24, 45, 56, 63, 83, 84, 85, 90[BSY10] Jean-Paul Brasselet、J ¨ ¨ org Schuermann 和 Shoji Yokura, , *Hirzebruch classes and motivic Chern classes for singular spaces* **2** 2010 1, 1 55 2646988 ↑9 21 《拓扑分析杂志》 (), 第 – 期。MR, [10] *On the dimension of secant varieties* CC Luca Chiantini 和 Ciro Ciliberto, , 《欧洲数学会杂志》（JEMS）12（2010），第5期，1267–1291。MR2677616 ↑2[CDO25] Qianyu Chen、Bradley Dirks 和 Sebastian Olano, *Partial Cohomologically Complete Intersections via Hodge Theory* 2025 2511 03042, 2511 03042 , arXiv 电子印本（11月），arXiv: 。网址: 。。↑2, 3, 4, 5, 6, 11, 17, 18, 19, 20, 29, 30, 33, 34[CLPS25] Doyoung Choi、Justin Lacini、Jinhyung Park 和 John Sheridan, *Singularities and syzygies of secant varieties of smooth projective varieties* 2025 2502 19703, , arXiv 电子印本（2月），arXiv: 。网址: 2502 19703 ↑98 。。CMSV Aldo Conca、Maral Mostafazadehfard、Anurag K. Singh 和 Matteo Varbaro, *Hankel determinantal rings have rational singularities* **335** 2018 111 129 3836659 ↑60 [18] , 《Adv. Math.》 (), –。MR[CR06] Ciro Ciliberto 和 Francesco Russo, *Varieties with minimal secant degree and linear systems of maximal dimension on surfaces* **200** 2006 1, 1 50 , 《Adv. Math.》 (), 第 – 期。MR[18] *Singularities of secant varieties* 2199628 ↑2 CS Chih-Chi Chou 和 Lei Song, , 《国际数学研究通知》IMRN 9（2018），2844–2865。MR3801498 ↑2, 5, 23, 41, 60, 98[dBPS22] Javier Fern ´andez de Bobadilla、Irma Pallares ´ *Hodge modules and cobordism classes* 2022 2103 04836 ↑9 和 Morihiko Saito, (), 网址: 。。[02] dCM Mark Andrea A. de Cataldo 和 Luca Migliorini, *The hard Lefschetz theorem and the topology of semismall maps*, 《Ann. Sci. ´Ec. Norm. Sup´er. Ser. 4》, 35（2002），第5期，759–772（英文）。MR1951443[09] dCM, *The decomposition theorem, perverse sheaves and the topology of algebraic maps*, 《美国数学会通报》（新系列）46（2009），第4期，535–633。MR2525735 ↑39[Del71] Pierre Deligne, *Théorie de Hodge. II*, 《Inst. Hautes ´Etudes Sci. Publ. Math.》40（1971），5–57。MR498551 ↑39[Del80] , *La conjecture de Weil. II*, 《Inst. Hautes ´Etudes Sci. Publ. Math.》52（1980），137–252。MR601520 ↑12[DOR25] Bradley Dirks、Sebastian Olano 和 Debaditya Raychaudhury, *A Hodge Theoretic generalization of $\mathbb{Q}$-Homology Manifolds* 2025 2501 14065, 2501 , arXiv 电子印本（1月），arXiv: 。网址: 。 14065 ↑3 4 5 11 17 18 19 。, , , , , Eis David Eisenbud, *Commutative Algebra*, 《数学研究生教材》第150卷，[95] 施普林格出版社，纽约，1995年。附有《着眼于代数几何》。MR1322960 ↑90[ENP20] Lawrence Ein、Wenbo Niu 和 Jinhyung Park, *Singularities and syzygies of secant varieties of nonsingular projective curves* **222** 2020 2, 615 665 4160876 ↑2 10 61 , 《数学发明》 (), 第 – 期。MR, , , 85, 98[FdBPS25] Javier Fern ´andez de Bobadilla、Irma Pallares ´ *Hodge modules and cobordism classes* **27** 2025 2, 773 800 4859578 ↑21 和 Morihiko Saito, , 《欧洲数学会杂志》（JEMS） (), 第 – 期。MR[GH78] Phillip Griffiths 和 Joseph Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, 《纯数学》, Wiley-Interscience [ ], 1978 507725 ↑3 27 John Wiley & Sons, 纽约, 。MR, GLS [25] *Hodge-Lyubeznik numbers* Ricardo Garcıa Lopez 和 Claude Sabbah, , 《巴黎科学院数学报告》 **363** 2025 213 221 4884743 ↑5 20 (), –。MR, [77] *Algebraic Geometry* Har Robin Hartshorne, , 《数学研究生教材》第52卷，施普林格出版社，纽约—海德堡，1977年。MR463157 ↑18

[HK00] Yi Hu 和 Sean Keel, *Mori dream spaces and GIT*，2000 年，第 331–348 页。谨以此文纪念 William Fulton 60 岁寿辰。MR1786494 ↑61[HTT08] Ryoshi Hotta、Kiyoshi Takeuchi 和 Toshiyuki Tanisaki, *D-modules perverse sheaves and repre-*，，，《数学进展》，第 B 卷，*sentation theory* 236, 2008 Birkhauser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，。由 Takeuchi 根据 1995 2357361 ↑12 日文版翻译。MR HW June Huh 和 Botong [17] *Lefschetz classes on projective varieties* Wang，，《美国数学会会刊》145 (2017)，第 11 期，4629–4637 页。MR3691982 ↑3[Kaw88] Yujiro Kawamata, *Crepant blowing-up of 3-dimensional canonical singularities and its application to degenerations of surfaces* 2 **127** 1988 1, 93 163 924674 ↑8 ，《数学年刊》() ()，第 – 期。MR[KPW25] In-Kyun Kim 、 Jinhyung Park 和 Joonyeong Won, *K-polystability of the first secant varieties of rational normal curves* **7** 2025 088, 17 4888702 ，《国际数学研究通知》 IMRN()，论文编号 rnaf。MR ↑9[KS21] Stefan Kebekus 和 Christian Schnell, *Extending holomorphic forms from the regular locus of a complex space to a resolution of singularities* **34** 2021 2, 315 368 ，《美国数学会杂志》()，第 – 期。[62] *Symmetric products of an algebraic curve* **1** 1962 319 343 Mac I. G. ↑20 Macdonald，，《拓扑学》()，–。MR151460 ↑28[MP22] Mircea Mustat ̧ă and Mihnea Popa，，，*Hodge filtration on local cohomology Du Bois complex and local cohomological dimension* **10** 2022 22, 58 4491455 ↑10 《Forum Math. Pi》()，论文编号 e。MR，18，19，20[MSS11] Laurent Maxim、Morihiko Saito 和 Jorg Schurmann，，《J. Math. Pures Appl.》()，第 – 期。 *Symmetric products of mixed Hodge modules* **96** 2011 5, 462 483 ↑29 [91] *Some new axioms for triangulated categories* Nee Amnon Neeman，，《J. Algebra》139 (1991)，第 1 期，221–255 页。MR1106349 ↑67[OR24] Sebasti´an Olano 和 Debaditya Raychaudhury, *On the local cohomology of secant varieties*，arXiv 预印本（2024 年 7 月），arXiv:2407.16688，见 2407.16688。↑2，4，7，22，23，40，60，61[ORS24] Sebasti´an Olano、Debaditya Raychaudhury 和 Lei Song，，《伦敦数学会会刊》()()，第 期，论文编号 e。MR4805266 ↑2，22，23，60[PP24] Sung Gi Park 和 Mihnea Popa, *Hodge symmetry and Lefschetz theorems for singular varieties*，arXiv 预印本（———— 2024 2410 15638, 2410 15638 ↑3 4 19 67 年 10 月），arXiv:。见。。，，，[25] *Q-factoriality and Hodge-Du Bois theory* 2025 PP，，arXiv 预印本（8 月），arXiv:2508.17748，见 2508 17748 ↑8 57 58 59 60 83 85。。。，，，，，，，PS Chris A. M. Peters 和 Joseph H. M. Steenbrink, *Mixed Hodge structures*，《数学及其边缘领域研究成果》。第 3 辑。《数学成果及相关领域》。第三辑。现代数学综述丛书 [《数学成果及相关领域》。第三辑。现代数学综述丛书], 第 52 卷，施普林格出版社，柏林，2008 年。MR2393625 ↑50，84，95[PS25] Mihnea Popa 和 Wanchun Shen, *Du Bois complexes of cones over singular varieties local coho-*，，，《罗马尼亚纯粹与应用 *mological dimension and K-groups* **70** 2025 1 2, 133 数学杂志》()，第 - 期，155 页。MR4876698 ↑3[Rai12] Claudiu Raicu, *Secant varieties of Segre-Veronese varieties*，《代数与数论》6 (2012)，第 8, 1817 1868 3033528 ↑2 –期。MR Sai Morihiko Saito, *Arithmetic mixed sheaves*，[01] 《数学发明》144 (2001)，第 3 期，533–569 页。MR1833893 ↑2 12 ，Sai, *On the Hodge filtration of Hodge modules*，2567401 ↑18 《莫斯科数学杂志》9 (2009)，第 1 期，161–191 页，附录。MR[09] [88] ，Sai, *Modules de Hodge polarisables*，《数理科学研究所刊物》24 (1988)，第 6 期，849–995 页。MR 1000123 ↑12 16 ，Sai, *Mixed ~~Hodge~~ modules*，《数理科学研究所刊物》26 (1990)，第 2 期，221–333 页。MR1047415 [90] ↑12 14 86 ，，Sai, *On the formalisme of mixed sheaves*，RIMS 预印本 784 (1991)。↑2，12，13，14，15，29[Sev01] Francesco Severi, *About the improper double points of a general surface of four-dimensional space, and its apparent triple points* **15** 1901 33 51 ↑2 ，《巴勒莫数学学会报告》()，–。[SV11] Jessica Sidman 和 Peter Vermeire, *Equations defining secant varieties: geometry and computation* 2011, 155 174 ，《交换代数与代数几何的组合方面》，第 – 页。MR2810430 ↑2 [91]

[SVV23] Wanchun Shen、Sridhar Venkatesh 和 Anh Duc Vo, *On k-Du Bois and k-rational singularities*, ↑98 arXiv 预印本（2023 年 6 月），arXiv:2306.03977，见 2306.03977。即将在 Ann. Inst. Fourier 上发表。[16] Tot Burt Totaro, *The integral cohomology of the Hilbert scheme of two points*, 《Forum Math. Sigma》4 (2016 8, 20 3490758 ↑28)，论文编号 e。MR Tot, *Projective resolutions of representations of* [97] GL(*n*), 《J. Reine Angew. Math.》482 (1997), 1 13 1427655 ↑75 97 –。MR, Ull Brooke Ullery, [16] *On the normality of secant varieties*, 《Adv. Math.》288 (2016), 631–647 页。MR3436394↑2, 22, 23, 50, 98[Ver01] Peter Vermeire, *Some results on secant varieties leading to a geometric flip construction*, 《Compositio Math.》 **125** 2001 3, 263 282 1818982 ↑2 22 （），第 – 期。MR, Ver, [08] *Regularity and normality of the secant variety to a projective curve*, 《J. Algebra》319 (2008), 第 3, 1264 1270 2379097 ↑2 –期。MR Ver, *Singularities of the secant variety*, 《J. Pure Appl. Algebra》213 [09] 2498802 ↑2 (2009), 第 6 期, 1129–1132 页。MR[02] Voi Claire Voisin, *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry. I*, 《剑桥高等数学研究丛书》第 76 卷, ↑3 1967689 剑桥大学出版社，剑桥，2002 年。由 Leila Schneps 根据法文原著翻译。MR[81] *Projections of algebraic varieties*Zak F. L. Zak, , Mat. Sb. (N.S.) **116 158** 1981 4, 593 602, （） （），第 – 期。 608 665860 ↑2 MR

Department of Mathematics, University of Michigan, 530 Church Street, Ann Arbor, MI48109, USA*Email address*: qyc@umich.eduDepartment of Mathematics, Stony Brook University, Stony Brook, NY 11794-3651, USA*Email address*: bradley.dirks@stonybrook.eduDepartment of Mathematics, University of Toronto, 40 St. George St., Toronto, OntarioCanada, M5S 2E4*Email address*: seolano@math.toronto.eduDepartment of Mathematics, University of Arizona, 617 N. Santa Rita Ave., Tucson, AZ85721, USA*Email address*: draychaudhury@math.arizona.edu