arXiv:2602.04049v1 [cs.FL] 3 Feb 2026

元胞自动机的范畴论框架

A. Castillo-Ramirez*、A. Vazquez-Aceves与A. Zaldivar-Corichi

瓜达拉哈拉大学精确科学与Ingenier´ıas大学中心，M´exico。

摘要

本文提出一个运用范畴论语言的元胞自动机广义框架，将经典定义扩展到集合论约束之外。对于一个具有积的任意范畴 $\mathcal{C}$，我们将 $\mathcal{C}$-元胞自动机定义为 $\mathcal{C}$中的态射 $\tau : A^G \to B^G$，其中字母表 A与 B 是 $\mathcal{C}$中的对象，宇宙是一个群 G。我们证明，$\mathcal{C}$-元胞自动机构成 $\mathcal{C}$ 的一个对有限积封闭的子范畴，并且满足Curtis-Hedlund-Lyndon定理的范畴论版本。对于两个任意群宇宙 G与 H，我们扩展该理论，将广义 $\mathcal{C}$-元胞自动机定义为经由群同态 $\phi : H \to G$构造的态射 $\tau : A^G \to B^H$。最后，我们证明广义 $\mathcal{C}$-元胞自动机构成 $\mathcal{C}$ 的一个子范畴，该子范畴具有涉及底层群宇宙自由积的有限弱积。该框架统一了现有概念，并为元胞自动机理论中的基础性结果提供了纯范畴论证明。

关键词：元胞自动机；广义元胞自动机；范畴论；范畴积；Curtis-Hedlund-Lyndon 定理。

1 引言

范畴论是数学的一个强有力的基础，它提供了一个统一的框架，用以描述和分析不同的结构及其关系。数学中在不同语境下出现的许多构造与概念，例如商空间、直积、伴随和对偶，都在范畴论中以精确的定义得到统一。

*电子邮箱：alonso.castillor@academicos.udg.mx

特别地，范畴中的范畴积，或简称积，是集合的笛卡尔积、群的直积以及拓扑空间的积拓扑的推广。它刻画了这样一种思想：将一个对象族组合起来以产生一个新对象，同时在某种程度上保持该新对象与原对象之间的关系。

元胞自动机传统上被视为定义在离散群 G （宇宙）上的变换，其状态取自有限集合 A （字母表）。尽管经典理论通常借助符号动力系统、群论和拓扑学来形式化，并且已发展得相当成熟（例如，参见 [7]），但人们越来越关注通过更抽象的数学结构来理解这些系统。本文提出了一个运用范畴论语言研究元胞自动机的广义框架，突破了集合论定义的限制。

本文的主要目标是推广元胞自动机的传统定义：以任意具有积的范畴 $\mathcal{C}$ 中的对象 A 取代字母表集合。在这一框架下，我们引入 $\mathcal{C}$-元胞自动机的概念，将其定义为态射 τ: $A^G \to B^G$，其中 G 是一个群，并通过局部定义态射来刻画。这一定义使我们能够系统地研究 $\mathcal{C}$-元胞自动机：当 $\mathcal{C}$ 是诸如**Set**、**Grp**、**Top**、$\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ 和**Poset**这样的具体范畴时可以如此；当 $\mathcal{C}$ 是诸如**Poset**(P)（其中P 是完备格）以及**Rel**这样的抽象范畴时也同样如此。我们证明， $\mathcal{C}$-元胞自动机构成 $\mathcal{C}$的一个子范畴，记作 $\mathsf{CA}_{\mathcal{C}}(G)$，并且满足与其经典对应物——**Set**-元胞自动机范畴——相类似的性质。本文的一项核心结果是证明 Curtis-Hedlund-Lyndon 定理的范畴版本：该定理将 $\mathcal{C}$-元胞自动机刻画为同时满足 G-等变性和一致性的态射；这表明这一著名定理的本质属于范畴论，而非通常所认为的拓扑学。我们还证明，范畴 $\mathsf{CA}_{\mathcal{C}}(G)$ 本身对有限积封闭，这是对 [6]中所述工作的推广。

此外，我们将研究扩展至定义广义 $\mathcal{C}$元胞自动机，即通过群同态 ϕ: $H \to G$构造的态射 τ: $A^G \to B^H$，这一概念最初由 [4] 针对 $\mathcal{C}$ =**Set**引入。我们证明，这些对象也构成一个子范畴 $\mathsf{GCA}_{\mathcal{C}}$ of $\mathcal{C}$，且其中任意一对对象 A^G 和 A^H 都存在一个弱积 $(A \times B)^{G*H}$，其中 $A \times B$ 是 $\mathcal{C}$ 中的积，而 $G * H$ 是群的自由积。

尽管已有多项研究将元胞自动机与范畴论联系起来 [3, 8, 13, 9, 10]，但它们的研究范围仅限于具体范畴，这类范畴本质上是带有结构保持函数的结构化集合。相比之下，我们不假设所讨论的范畴是具体的；因此，我们采用纯粹的范畴论方法（如泛性质和交换图）来表述所有定义与证明。

本文结构如下。第 2 节回顾范畴论的一些基本概念，包括积和余积，并给出一些例子。第 3 节定义群 G 上的 $\mathcal{C}$-元胞自动机范畴 $\mathsf{CA}_{\mathcal{C}}(G)$，证明 Curtis-Hedlund-Lyndon 定理的一个范畴论版本，并展示 $\mathsf{CA}_{\mathcal{C}}(G)$ 在有限积下封闭。最后，第 4 节介绍范畴 $\mathsf{GCA}_{\mathcal{C}}$ ，其对象为

广义 $\mathcal{C}$-元胞自动机，并证明该范畴具有有限弱积 t.

本文是 [6] 的扩展版本，显著拓展了其理论范围，因为 [6] 中的所有定义和证明都是针对特定情形 $\mathcal{C}$ =**Set**完成的。此外，范畴 Curtis-Hedlund-Lyndon 定理的证明是全新的。

2 范畴概念

本节我们将回顾范畴论的一些基本概念；更全面的论述请参见标准教材 [2, 12, 11, 15]。

一个范畴 $\mathcal{C}$ 由一组对象构成，我们将其记为 Obj($\mathcal{C}$)，以及对象之间的一组态射，或称箭头。每个态射 f 都有定义域 $A \in$Obj($\mathcal{C}$)和陪域 $B \in$Obj($\mathcal{C}$)；一个态射所携带的全部信息都浓缩在记号 $f\colon A \to B$中。范畴论的部分本质在于，对象被当作未必是集合来处理，而态射被当作未必是函数来处理。

我们将定义域为 A 、陪域为 B 的态射集合记作 $\mathcal{C}(A, B)$。此外，范畴还规定了态射的复合规则：这意味着，对于每一对态射 $f\colon A \to B$ 和 $g\colon B \to C$ ，都存在一个态射 $g \circ f\colon A \to C$，称为 g 与 f的复合。态射复合满足以下两个公理：

1. 对于任意三个态射 $f\colon A \to B$、 $g\colon B \to C$ 和 $h\colon C \to D$，我们有 ：

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

2. 对于每个对象 $A \in$ Obj($\mathcal{C}$)，都存在一个态射 $\mathrm{id}_A \in \mathcal{C}(A, A)$，使得对于任意$B \in$ Obj($\mathcal{C}$)以及态射 $g \in \mathcal{C}(A, B)$和 $h \in \mathcal{C}(B, A)$，我们有：

$$g \circ \mathrm{id}_A = g \text{ and } \mathrm{id}_A \circ h = h.$$

例 2.1。 我们介绍一些范畴的例子。

1. 所有集合组成的类与集合之间所有函数组成的类构成一个范畴，记作 **Set**。*2.* 所有群组成的类与群之间所有群同态组成的类构成一个范畴，记作**Grp**。*3.* 所有拓扑空间组成的类与拓扑空间之间所有连续函数组成的类构成一个范畴，记作 **Top**。*4.* 给定一个域 $\mathbb{K}$， $\mathbb{K}$ 上的所有向量空间组成的类与所有线性变换组成的类构成一个范畴，记作 $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$。

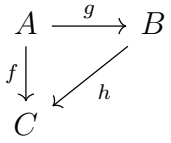
5. 所有偏序集（*posets*）组成的类与偏序集之间所有保持序的函数组成的类构成一个范畴，记作 **Poset**。

6. 设$(P, \leq)$是一个 ***Poset***。我们可以将 P视为一个范畴，其中$\mathrm{Obj}(P) = P$，并且对于给定的a、 $b \in P$，从 a 到 b 存在唯一的态射，当且仅当 $a \leq b$。根据序关系的性质，显然所有范畴公理都得以满足。我们将这个范畴记作$\mathbf{Poset}(P)$。

7. 所有集合构成的类，以及集合之间所有二元关系构成的类，共同构成一个范畴，记作 **Rel**。

在前五个例子**Set**、**Grp**、**Top**、$\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$和**Poset**中，范畴的对象是带有附加结构的集合，而态射是保持这些结构的函数。这些范畴称为具体范畴。另一方面，最后两个例子 **Poset(**P**)**和**Rel** 不是具体范畴，也称为抽象范畴，因为态射并非集合之间的函数。

称如下这样的态射图



交换成立等价于说 $h \circ g = f$。一般而言，称一个态射图交换，等价于说任何两条定义域和陪域相同的路径的复合都相等。因此，交换图表达了态射复合的各种等式。

$\mathcal{C}$ 中的同构是一个态射 $f : A \to B$，其中 $\mathcal{C}$ 满足：存在一个态射$g : B \to C$，其中 $\mathcal{C}$, 称为 f的逆，使得

$$g \circ f = \mathrm{id}_A \text{ and } f \circ g = \mathrm{id}_B.$$

在这种情况下，我们称 A 和 B 是 $\mathcal{C}$ 上的同构对象，并记作 $A \cong B$。不难证明，同构的逆唯一且本身也是同构，并且同构的复合仍是同构。如果对于某个 $A \in \mathcal{C}$，自同态集合 $\mathsf{End}(A) := \mathcal{C}(A, A)$ 是一个集合（而非真类），那么 $\mathsf{End}(A)$ 在态射复合运算下构成一个幺半群，而集合 $\mathsf{Aut}(A) := \{f \in \mathsf{End}(A) \mid f \text{ is an isomorphism}\}$ 则是它的单位群。

从范畴 $\mathcal{C}$ 到范畴 $\mathcal{D}$ 的协变函子 F为每个对象 $A \in \mathcal{C}$ 指定一个对象 $F(A) \in \mathcal{D}$，并为 $\mathcal{C}$中的每个态射 $f : A \to B$指定一个态射 $F(f) : F(A) \to F(B)$ in $\mathcal{D}$，使得

$$F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)} \quad \text{and} \quad F(g \circ f) = F(g) \circ F(f),$$

对于 $\mathcal{C}$中的每个态射 $g\colon B \to C$。从 $\mathcal{C}$到 $\mathcal{D}$ 的反变函子 G 的定义类似，不同之处在于，它为 $\mathcal{C}$ 中的每个态射 $f\colon A \to B$ 指定一个态射$G(f)\colon G(B) \to G(A)$ in $\mathcal{D}$，使得

$$G(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{G(A)} \quad \text{and} \quad G(g \circ f) = G(f) \circ G(g),$$

对于每个态射 $g\colon B \to C$ 属于 $\mathcal{C}$。

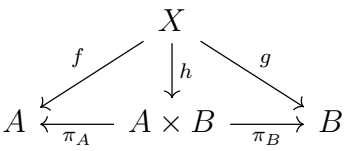
定义 2.2 (积)。 设 $\mathcal{C}$ 为一个范畴，I 为一个指标集，$\{A_i\}_{i\in I}$ 为 $\mathcal{C}$中的一族对象。对象族 $\{A_i\}_{i\in I}$ 的积 是一个对象 $P \in \mathcal{C}$，并配有一族态射 $\{\pi_i\colon P \to A_i\}_{i\in I}$，满足以下泛性质：对于任意对象 $Q \in \mathcal{C}$以及任意一族态射 $\{\rho_i\colon Q \to A_i\}_{i\in I}$，都存在唯一的态射 $f\colon Q \to P$，使得

$$\rho_i = \pi_i \circ f \ \textit{for all}\ i \in I.$$

每个态射 $\pi_i\colon P \to A_i$ 称为第 i个投影。

事实证明，如果一族对象的积存在，那么它在同构意义下是唯一的。因此，我们用 $\prod A_i$ 表示对象族 $\{A_i\}_{i\in I}$的积。当我们有一个有限的对象族 $\{A_i\}_{i=1}^n$时，也可以将它们的积记作 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$。

特别地，$\mathcal{C}$ 中两个对象 A 和 B 的积是一个对象 $A \times B \in \mathcal{C}$，连同态射 $\pi_A\colon A \times B \to A$ 和 $\pi_B\colon A \times B \to B$，满足以下泛性质：对于任意对象 $X \in \mathcal{C}$ 以及 $\mathcal{C}$中的一对态射 $f\colon X \to A$ 和 $g\colon X \to B$，存在唯一的态射 $h\colon X \to A \times B$，使得下图交换：



如果范畴 $\mathcal{C}$ 本身的任意对象族都有积，我们就称该范畴具有 积；如果 $\mathcal{C}$ 中的任意有限对象族都有积，我们就称 $\mathcal{C}$ 具有 有限积（或者等价地说，$\mathcal{C}$ 中的任意一对对象都有积）。两个对象$A \times B \in \mathcal{C}$的 弱积 定义类似于定义 2.2 中的积，只是态射$h\colon X \to A \times B$不要求唯一（参见 [11, 第 X.2] 节）。

例 2.3. 我们介绍范畴中积的几个例子 .

1. 在上述具体范畴中，集合族 $\{A_i\}_{i\in I}$ 的积是集合 $\prod_{i\in I} A_i$ 的笛卡尔积，并赋予相应的结构，使投影 $\{\pi_j\colon \prod_{i\in I} A_i \to A_j\}_{j\in I}$ 成为相应范畴（如 **Set**、**Grp**、**Top**、$\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$、**Poset**）中的态射。然而，存在一些具体范畴，其中积并非上述笛卡尔积及其投影。当二者一致时，我们称该具体范畴具有具体积 （见*[1,*例 *10.55]*）。

2. 在范畴 $\mathbf{Poset}(P)$ 中， P 是一个固定偏序集，其中两个对象 a、$b \in P$ 的积是它们的最小上界。

3. 在范畴 **Rel** 中，集合族 $\{A_i\}_{i\in I}$ 的积是其不交并 $\sqcup_{i\in I} A_i$与典范嵌入的对偶所构成的。

以下结果众所周知，但为使论述完整，我们在此给出证明，因为本文后续部分经常会用到它。

引理 2.4. 设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴， $\{A_i\}_{i\in I}$ 是一个具有积 $\prod A_i$的对象族，并且$_{i\in I}$考虑两个态射

$$X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} \prod_{i\in I} A_i.$$

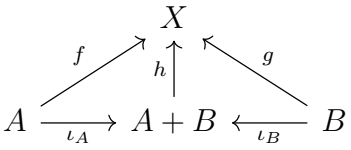
那么， $f = g$ 当且仅当 $\pi_i \circ f = \pi_i \circ g$ 对所有 $i \in I$成立。

证明. 第一个蕴含显然，因此假设对所有 $i \in I$都有 $\pi_i \circ f = \pi_i \circ g$。将积的泛性质应用于态射族 $\{\rho_i := \pi_i \circ f = \pi_i \circ g\}_{i\in I}$，存在唯一的态射 $h\colon X \to \prod A_i$，使得对所有 $i \in I$都有 $\rho_i = \pi_i \circ h$。因此，根据 ρ_i 的构造以及 h的唯一性，我们有 $f = h = g$。

□

范畴中积的对偶概念称为余积，其定义是将积定义中的态射方向反转。尽管定义只做了这一简单改变，积和余积在范畴中的表现却可能截然不同。我们只需要两个对象的余积定义。

定义 2.5 （余积）。 设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴， A和 $B \in \mathcal{C}$ 是该范畴中的对象。对象 A 和 B 在 $\mathcal{C}$ 中的余积 是一个对象 $A + B \in \mathcal{C}$ 及其态射$\iota_A\colon A \to A + B$ 和 $\iota_B\colon B \to A + B$，满足以下泛性质：对于任意对象 X 以及态射 $f\colon A \to X$ 和 $g\colon B \to X$，存在唯一的态射$h\colon X \to A + B$，使得 $h \circ \iota_A = f$和 $h \circ \iota_B = g$成立；这等价于说下图是可交换的：



例 2.6. 我们介绍一些范畴中余积的例子。

1. 在集合范畴 **Set** 中， A 和 B 的余积对应于不交并$A \sqcup B$ 以及典范包含 $\iota_A\colon A \to A \sqcup B$ 和 $\iota_B\colon B \to A \sqcup B$。

2. 在群范畴 **Grp** 中， G 和 H 的余积对应于群的自由积 $G * H$ 以及典范嵌入 $\iota_G\colon G \to G * H$ 和$\iota_H\colon H \to G * H$ （见 *[12,* 例 *88]* 或 *[11,* 第 ***III.****3]*节）。具体而言，若 G 和 H 由以下表示给出

$$G = \langle S_G \mid R_G \rangle \quad and \quad H = \langle S_H \mid R_H \rangle,$$

则自由积 $G * H$ 具有表示

$$G * H = \langle S_G + S_H \mid R_G + R_H \rangle,$$

其中 $+$表示集合范畴中的余积（不交并）（见 *[***?***，* 定理***11.****53]*）。于是显然，典范嵌入 $\iota_G\colon G \to G * H$ 与 $\iota_H\colon H \to G * H$ 分别由将生成元 S_G 和 S_H 映射到 $S_G + S_H$来定义。

3. 在范畴**Poset**(P)中，其中 P是一个固定偏序集，两个对象 a、$b \in P$的积是它们的最大下界。

3 具有积的范畴中的元胞自动机

3.1 配置对象

在本文其余部分，设 $\mathcal{C}$ 是一个具有积的范畴。这些范畴的例子包括具体范畴**Set**、**Grp**、**Top**、$\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$、**Poset**，以及抽象范畴**Poset(***P***)**（当 P 是完备格 时，即 P 中任意一族元素都有最小上界），以及**Rel**。

为元胞自动机建立范畴论框架的第一步，是考察一个对象 $A \in \mathcal{C}$ 与自身的幂。给定一个集合 I 和一个对象 $A \in \mathcal{C}$，我们将 I 个 A的积记为

$$A^I := \prod_{i \in I} A.$$

对于任意子集 $S \subseteq I$，积的泛性质 A^S 意味着存在唯一的态射

$$\mathrm{Res}^I_S : A^I \to A^S$$

使得

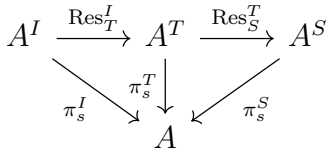
$$\pi^I_s = \pi^S_s \circ \mathrm{Res}^I_S \quad \forall s \in S, \tag{1}$$

其中，π^S_s 是 A^S 的投影，π^I_s 是 A^I的投影。我们称 $\mathbf{Res}^I_S\colon A^I \to A^S$ 为限制态射。

引理 3.1. 对于任意对象 $A \in \mathcal{C}$ 和集合 $S \subseteq T \subseteq I$，则

$$\mathrm{Res}_S^I = \mathrm{Res}_S^T \circ \mathrm{Res}_T^I.$$

证明。 根据积的泛性质，对于每个$s \in S$，下图都交换:



由于 $\mathrm{Res}_S^I: A^I \to A^S$ 是满足对所有 $s \in S$ 均有 $\pi_s^I = \pi_s^S \circ \mathrm{Res}_S^I$ 的唯一态射，因此必有 $\mathrm{Res}_S^I = \mathrm{Res}_S^T \circ \mathrm{Res}_T^I$。 □

考虑集合 I 和 J之间的函数 $f: I \to J$，并固定一个对象 $A \in \mathcal{C}$。对于每个$i \in I$，我们都有态射 $\pi_{f(i)}^J : A^J \to A$，并且根据积的泛性质，存在唯一态射

$$f_A^* : A^J \to A^I$$

使得:

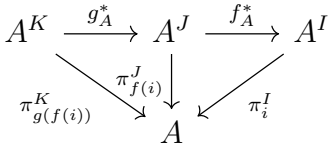
$$\pi_{f(i)}^J = \pi_i^I \circ f_A^*, \quad \forall i \in I. \tag{2}$$

我们称态射 $f_A^*: A^J \to A^I$为函数 $f: I \to J$的拉回 [1]。

命题 3.2。 对于任意函数 $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} K \in$**Set** 以及任意对象 $A \in \mathcal{C}$，我们有

$$(g \circ f)_A^* = f_A^* \circ g_A^*$$

证明。 拉回的定义 f_A^* 和 g_A^* 表明下图对所有 :



$i \in I$均交换。根据 $(g \circ f)_A^*$ 的定义，我们有

$$\pi_i^I \circ (g \circ f)_A^* = \pi_{g(f(i))}^K = \pi_i^I \circ (f_A^* \circ g_A^*), \quad \forall i \in I,$$

因此，根据拉回的唯一性，结论成立。 □

[1]这一术语的使用源于微分几何中的拉回，而非范畴论中的拉回。

显然，对于任意 $I \in$**Set**和 $A \in \mathcal{C}$，$(id_I)^*_A = id_{A^I}$；因此，前一个命题蕴含拉回 $(\,)^*_A$ 定义了一个从**Set** 到 $\mathcal{C}$的反变函子。

还显然，如果 $\alpha : I \to I$ 是集合 I的一个置换，即 $\alpha \in$Sym(I)，那么对任意对象 $A \in \mathcal{C}$，$\alpha^*_A \in$ Aut(A^I)。为简化记号，当对象 $A \in \mathcal{C}$ 可由上下文确定时，我们通常用 α^*代替 α^*_A。

现在我们着重讨论指标集为群 $G \in$ **Grp**的 $A \in \mathcal{C}$ 与自身的积。回顾一下，对每个 $g \in G$，右平移 $R_g : G \to G$由 $R_g(x) := xg, \forall x \in G$给出，是 G的一个置换。因此，拉回 $R^*_g : A^G \to A^G$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个自同构，并且满足

$$R^*_g \circ R^*_h = (R_h \circ R_g)^* = R^*_{gh}, \quad \forall g, h \in G.$$

定义 t he 移位作用 of G on A^G as the assignment $\varphi : G \to$ Aut(A^G) given by

$$\varphi(g) = R^*_g \quad \forall g \in G.$$

当 $\mathcal{C} =$**Set**时，这个构造与 G 对 A^G 的通常移位作用一致（参见 [7,第 1.1]节）。

对于任意 $g \in G$，我们将 G 在 A^G 上的移位作用 $\varphi_g := \varphi(g) \in$Aut($A^G$) 的像记为。

引理 3.3. 对于每个 $g \in G$，自同构 $\varphi_g : A^G \to A^G$ 是 $\mathcal{C}$的唯一态射，使得

$$\pi^G_{hg} = \pi^G_h \circ \varphi_g, \quad \forall g, h \in G,$$

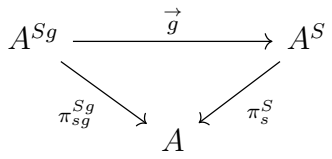
其中 $\pi^G_h : A^G \to A$ 是投影态射。此外，

$$\varphi_{gh} = \varphi_g \circ \varphi_h, \quad \forall g, h \in G.$$

证明. 这由拉回 R^*_g 的定义 (2) 得出。 □

我们称积 $A^G \in \mathcal{C}$ 连同 G 在 A^G 上的移位作用构成一个字母表为 $A \in \mathcal{C}$、宇宙为 $G \in$ **Grp**的构型对象。

我们以一个稍后会用到的技术性结果结束本节。对于 G 的任意子集 S以及任意 $g \in G$，考虑由 $Sg := \{sg : s \in S\}$ 给出的 S 的平移。根据积的泛性质，存在唯一的态射 $\vec{g} : A^{Sg} \to A^S$，使得对每个 $s \in S$，以下图交换：



引理 3　　.4. 设 $A^G \in \mathcal{C}$ 是一个构型对象，设 $S \subseteq G$，并设 $g \in G$。　　n

$$\overrightarrow{g} \circ \mathrm{Res}^G_{Sg} = \mathrm{Res}^G_S \circ \varphi_g.$$

证明。 根据引理 3.3 和限制态射的定义 (1)，对于所有 $s \in S$，有

$$\pi^{Sg}_{sg} \circ \mathrm{Res}^G_{Sg} = \pi^G_{sg} = \pi^G_s \circ \varphi_g = \pi^S_s \circ \mathrm{Res}^G_S \circ \varphi_g.$$

根据其定义， $\pi^{Sg}_{sg} = \pi^S_s \circ \overrightarrow{g}$，因此我们有

$$\pi^S_s \circ \overrightarrow{g} \circ \mathrm{Res}^G_{Sg} = \pi^S_s \circ \mathrm{Res}^G_S \circ \varphi_g,$$

对于所有 $s \in S$。由引理 2.4 可得结论。 □

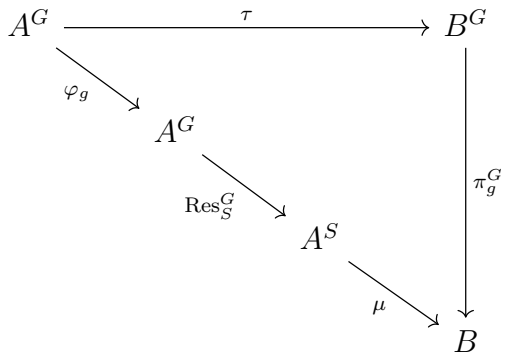
3.2 $\mathcal{C}$-元胞自动机的定义

我们将定义 1.4.1 推广到 [7] 中关于群宇宙 G 上的元胞自动机的情形：允许字母表 A 不仅是一个集合，还可以是带积的任意范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个对象。

定义 3.5 ($\mathcal{C}$-元胞自动机)。 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有积的范畴， G 是一个群。设 A^G、 $B^G \in \mathcal{C}$ 是两个配置对象。态射 τ： $A^G \to B^G \in \mathcal{C}$ 是一个定义在 G 上的 $\mathcal{C}$-元胞自动机，如果存在一个有限子集 $S \subseteq G$ 和一个态射 μ： $A^S \to B \in \mathcal{C}$，使得

$$\pi^G_g \circ \tau = \mu \circ \mathrm{Res}^G_S \circ \varphi_g \quad \forall g \in G;$$

等价地，这意味着对于每个 $g \in G$，下图都交换：



集合 S 称为 τ 的邻域，态射 μ： $A^S \to B$ 称为 τ 的局部定义态射。

显然， G 上的 **Set**-元胞自动机与 [7, 第 1] 章中所述的 G 上的元胞自动机一致。我们将证明， $\mathcal{C}$-元胞自动机满足许多与 **Set**-元胞自动机类似的性质。

例 3.6. 对于任意构型对象 $A^G \in \mathcal{C}$ 和 $g \in G$，由引理 *3.3* 及限制态射 *(1)* 的定义可知

$$\pi_g^G \circ \mathrm{id}_{A^G} = \pi_g^G = \pi_e^G \circ \varphi_g = \pi_e^{\{e\}} \circ \mathrm{Res}_{\{e\}}^G \circ \varphi_g,$$

其中 $e \in G$ 是群单位元。这表明，$\mathrm{id}_{A^G}\colon\ A^G \to A^G$ 是一个 $\mathcal{C}$-元胞自动机，其局部定义态射为 $\pi_e^{\{e\}}\colon\ A^{\{e\}} \to A$。

命题 3.7. 每个 $\mathcal{C}$-元胞自动机 $\tau\colon\ A^G \to B^G$ 都是 G-等变 的，即

$$\tau \circ \varphi_g = \varphi_g \circ \tau \quad \forall g \in G.$$

证明. 设 $\mu\colon A^S \to B$ 是 τ的一个局部定义态射。注意，根据引理 3.3，对每个 $g, k \in G$,

$$\pi_g^G \circ \varphi_k \circ \tau = \pi_{gk}^G \circ \tau = \mu \circ \mathrm{Res}_S^G \circ \varphi_{gk} = \mu \circ \mathrm{Res}_S^G \circ \varphi_g \circ \varphi_k = \pi_g^G \circ \tau \circ \varphi_k.$$

由引理 2.4 可得所需结论。 □

推论 3.8. 对于 $A, B \in \mathcal{C}$，设 $\tau\colon\ A^G \to B^G$ 和 $\sigma\colon\ A^G \to B^G$ 是 $\mathcal{C}$中的两个 G-等变态射。若 $\pi_e^G \circ \tau = \pi_e^G \circ \sigma$，则 $\tau = \sigma$。

证明. 由引理 3.3 和命题 3.7 可知，对每个 $g \in G$,

$$\pi_g^G \circ \tau = \pi_e^G \circ (\varphi_g \circ \tau) = (\pi_e^G \circ \tau) \circ \varphi_g = \pi_e^G \circ (\sigma \circ \varphi_g) = (\pi_e^G \circ \varphi_g) \circ \sigma = \pi_g^G \circ \sigma.$$

由引理 2.4 可得 $\tau = \sigma$。 □

定理 3.9. 设 $\tau\colon\ A^G \to B^G$ 和 $\sigma\colon\ B^G \to C^G$ 是定义在 G 上的两个 $\mathcal{C}$-元胞自动机，其邻域分别为 $T \subseteq G$ 和 $S \subseteq G$。那么，复合 $\sigma \circ \tau\colon\ A^G \to C^G$ 是定义在 G 上的一个 $\mathcal{C}$-元胞自动机，其邻域为 $TS := \{ts\colon\ t \in T, s \in S\}$。

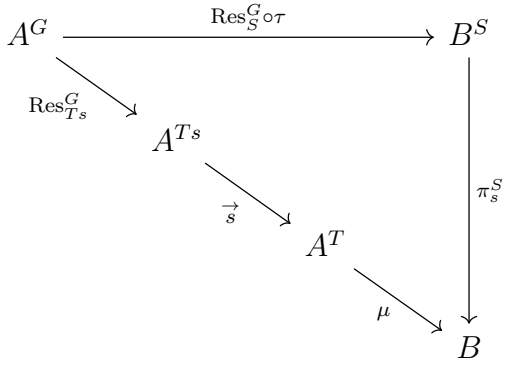
证明。 设 $\mu\colon A^T \to B$ 和 $\nu\colon B^S \to C$ 分别是 τ和 σ的局部定义态射。根据命题 3.7，对于任意 $k \in G$，我们有

$$\pi_k^G \circ (\sigma \circ \tau) = (\pi_k^G \circ \sigma) \circ \tau = \nu \circ \mathrm{Res}_S^G \circ (\varphi_k \circ \tau) = \nu \circ \mathrm{Res}_S^G \circ \tau \circ \varphi_k. \tag{3}$$

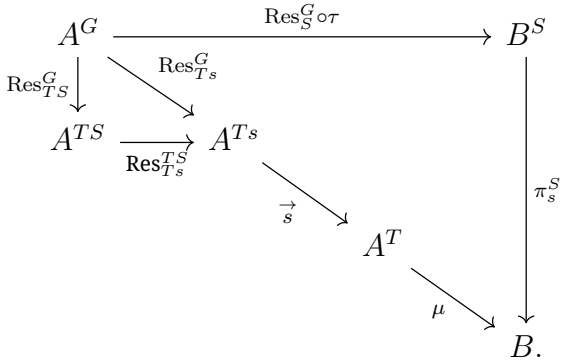
对于 $s \in S$，考虑投影 $\pi_S^S\colon B^S \to B$。那么，根据限制的定义 (1) 和引理 3.4,

$$\pi_s^S \circ (\mathrm{Res}_S^G \circ \tau) = (\pi_s^S \circ \mathrm{Res}_S^G) \circ \tau = \pi_s^G \circ \tau = \mu \circ \mathrm{Res}_T^G \circ \varphi_s = \mu \circ \overrightarrow{s} \circ \mathrm{Res}_{Ts}^G.$$

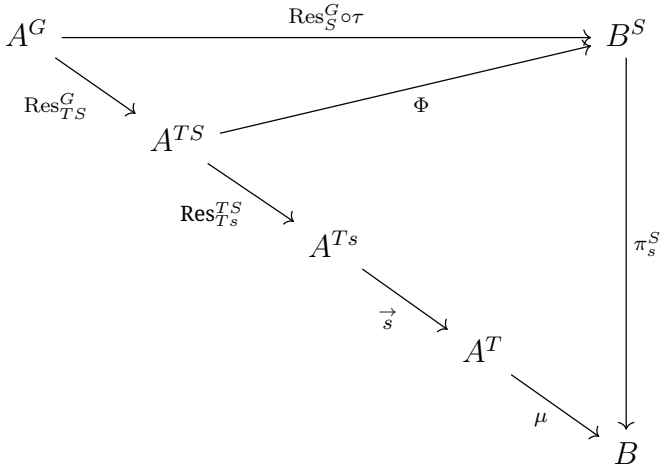
这意味着以下图交换:



另一方面，根据引理 3.1，我们可以分解态射 Res_{Ts}，并得到如下交换图



根据积的泛性质，应用于态射 $\mu \circ \vec{s} \circ \mathrm{Res}_{Ts}^{TS}$: $A^{TS} \to B$，存在唯一的态射 Φ: $A^{TS} \to B^S$，使下图交换:



因此，根据引理 2.4，我们有

$$\Phi \circ \mathrm{Res}^G_{TS} = \mathrm{Res}^G_S \circ \tau.$$

最后，由（3）可得，

$$\pi_k \circ (\sigma \circ \tau) = \nu \circ (\mathrm{Res}^G_S \circ \tau) \circ \varphi_k = \nu \circ \Phi \circ \mathrm{Res}^G_{TS} \circ \varphi_k, \quad \forall k \in G,$$

这证明 $\sigma \circ \tau$ 是一个在 G 上、具有局部定义态射$\nu \circ \Phi$：$A^{TS} \to C$的 $\mathcal{C}$-元胞自动机。

□

定理 3.9 和例 3.6 表明，配置对象 $A^G \in \mathcal{C}$与 $\mathcal{C}$-元胞自动机组成了 $\mathcal{C}$ 的一个子范畴（见 [12, 第 12] 页）。我们将此范畴记为 $\mathsf{CA}_{\mathcal{C}}(G)$。

3.3 范畴化的 Curtis-Hedlund-Lyndon 定理

以下定义以范畴论的方式，刻画了 A^G 的逐离散一致结构中一致连续映射的本质，其中 $A \in \mathbf{Set}$ （见 [7, 第 1.9]节）。

定义 3.10 （局部与一致态射）。 设 $A, B \in \mathcal{C}$ 为对象，且 I 为一个集合。若存在有限子集 $S \subseteq I$ 和态射 $\mu' : A^S \to B$，使得态射 $\mu : A^I \to B$ 满足以下条件，则称其为局部的

$$\mu = \mu' \circ \mathrm{Res}^I_S.$$

如果对于每个 $i \in I$，态射 $\pi^I_i \circ f : A^I \to B$ 都是局部的，则称态射 $f : A^I \to B^I$ 是一致的。

引理 3.11。 每个 $\mathcal{C}$-元胞自动机都是一致的。

证明。 设 $\tau : A^G \to B^G$ 是一个 $\mathcal{C}$-元胞自动机，并设 $\mu : A^S \to B$ 是 τ 的一个局部定义态射。根据定义 3.5 和引理 3.4，对于每个 $g \in G$，我们有

$$\pi^G_g \circ \tau = \mu \circ \mathrm{Res}^G_S \circ \varphi_g = \mu \circ \overrightarrow{g} \circ \mathrm{Res}^G_{Sg}.$$

由于 $Sg \subseteq G$ 是有限集，这表明对于每个 $g \in G$，态射 $\pi_g \circ \tau$ 都是局部的。因此， τ 是一致的。 □

本节的主要结果是著名的 Curtis-Hedlund-Lyndon 定理 [7, 定理 1.8。1] 的一个范畴版本。

定理 3.12。 设 A、$B \in \mathcal{C}$ 为对象， G 为群。态射 $\tau : A^G \to B^G \in \mathcal{C}$ 是 $\mathcal{C}$-元胞自动机，当且仅当 τ 是 G-等变且一致的。

证明。若 $\tau\colon A^G \to B^G \in \mathcal{C}$ 是 $\mathcal{C}$-元胞自动机，则根据命题 3.7 和引理 3.11)，它是 G-等变且一致的。

反之，假设 $\tau\colon A^G \to B^G \in \mathcal{C}$ 是一个 G-等变且一致的态射。由于 τ 是一致的，对每个 $g \in G$，存在一个有限子集 $S_g \subseteq G$ 以及一个态射$\mu_g\colon A^{S_g} \to B$，使得

$$\pi_g^G \circ \tau = \mu_g \circ \mathrm{Res}_{S_g}^G.$$

根据引理 3.3以及 τ的 G-等变性，对每个 $g \in G$，我们有 ，

$$\pi_g^G \circ \tau = \pi_e^G \circ \varphi_g \circ \tau = \pi_e^G \circ \tau \circ \varphi_g = \mu_e \circ \mathrm{Res}_{S_e}^G \circ \varphi_g,$$

其中 $e \in G$ 是群单位元。这证明 τ 是一个以 $\mu_e\colon A^{S_e} \to B$为局部定义态射的 $\mathcal{C}$-元胞自动机。

□

3.4 范畴$\mathrm{CA}_{\mathcal{C}}(G)$中的有限积

在本节中 我们证明 $\mathcal{C}$ 的子范畴$\mathbf{CA}_{\mathcal{C}}(G)$在有限积下封闭 s.

考虑一个集合 I 和一个态射 $f\colon A \to B$，其中 $A \to B$ 属于 $\mathcal{C}$。根据积的泛性质，将其应用于态射族 $\{f \circ \pi_i^I\colon A^I \to B\}_{i\in I}$，存在唯一的态射

$$f_*^I : A^I \to B^I$$

使得对每个 $i \in I$，下图都交换:

$$\begin{array}{ccc} A^I & \xrightarrow{f_*^I} & B^I \\ {\scriptstyle \pi_i^I}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_i^I} \\ A & \xrightarrow[f]{} & B \end{array} \tag{4}$$

这里我们滥用记号，用 π_i^I 表示两个投影。我们称态射 $f_*^I\colon A^I \to B^I$ 为态射 $f\colon A \to B$ 的推前 。

引理 3.13。对于任意集合 I，以及任意一对态射 $f\colon A \to B$ 和 $g\colon B \to C$（它们属于 $\mathcal{C}$），有

$$(g \circ f)_*^I = g_*^I \circ f_*^I$$

证明。根据态射 f_*^I和 g_*^I的构造（4），对于每个 $i \in I$，下图都可交换:

$$\begin{array}{ccccc} A^I & \xrightarrow{f_*^I} & B^I & \xrightarrow{g_*^I} & C^I \\ {\scriptstyle \pi_i^I}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_i^I} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_i^I} \\ A & \xrightarrow[f]{} & B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

因此，

$$\pi_i^I \circ (g_*^I \circ f_*^I) = (g \circ f) \circ \pi_i^I, \quad \forall i \in I.$$

另一方面，根据 $(g \circ f)_*^I$ 的构造，我们有

$$\pi_i^I \circ (g \circ f)_*^I = (g \circ f) \circ \pi_i^I, \quad \forall i \in I.$$

由引理 2.4 可得结论。 □

引理 3.14. 对于任意群 G 以及任意态射 $f: A \to B$ （属于 $\mathcal{C}$），推前$f_*^G: A^G \to B^G$ 是一个定义在 G 上的 $\mathcal{C}$-元胞自动机。

证明. 根据 f^G 的构造 (4)，

$$\pi_g^G \circ f_*^G = f \circ \pi_g^G, \quad \forall g \in G.$$

由引理 3.3 和限制态射 (1) 的定义，对于所有 $g \in G$，我们有

$$f \circ \pi_g^G = f \circ \pi_e^G \circ \varphi_g = f \circ \pi_e^{\{e\}} \circ \mathrm{Res}_{\{e\}}^G \circ \varphi_g.$$

这证明 $f_*^G: A^G \to B^G$ 是一个 $\mathcal{C}$-元胞自动机，其局部定义态射为$f \circ \pi_e^{\{e\}}: A^{\{e\}} \to B$。

□

引理 3.13 和引理 3.14 表明，推前 $(\,)_*^G$定义了一个从$\mathcal{C}$到 $\mathbf{CA}_{\mathcal{C}}(G)$ 的协变函子。

对于任意两个对象 $A, B \in C$，记 $\pi_A: A \times B \to A$ 为从积 $A \times B \in \mathcal{C}$ 到 A 的投影态射。根据引理 3.14，推前 $\pi_A^G := (\pi_A)_*^G: (A \times B)^G \to A^G$ 是一个从 G 上的 $\mathcal{C}$-元胞自动机。

定理 3.15. 设 $A, B \in \mathcal{C}$ 为两个对象，G 为一个群。构型对象 $(A \times B)^G \in \mathcal{C}$ 与 $\mathcal{C}$-元胞自动机 $\pi_A^G : (A \times B)^G \to A^G$ 和 $\pi_B^G : (A \times B)^G \to B^G$ 一同构成范畴 $\mathrm{CA}_{\mathcal{C}}(G)$ 中 A^G 与 B^G 的积。

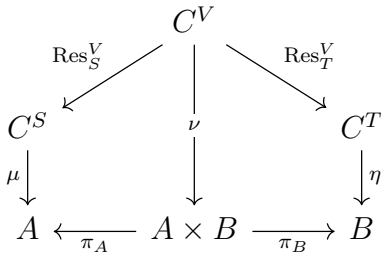
证明。 我们必须证明，$(A \times B)^G$ 连同 $\pi_A^G: (A \times B)^G \to A^G$ 和$\pi_B^G: (A \times B)^G \to B^G$ 满足范畴 $\mathbf{CA}_{\mathcal{C}}(G)$ 中积的泛性质。换言之，我们必须证明，对于任意构型对象 C^G 以及任意一对 $\mathcal{C}$-元胞自动机 $\alpha: C^G \to A^G$ 和 $\beta: C^G \to B^G$，存在唯一的 $\mathcal{C}$-元胞自动机 $\tau: A^G \to (A \times B)^G$，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccccc} & & C^G & & \\ & \swarrow^{\alpha} & \downarrow{\scriptstyle \tau} & \searrow^{\beta} & \\ A^G & \xleftarrow[\pi_A^G]{} & (A \times B)^G & \xrightarrow[\pi_B^G]{} & B^G \end{array} \tag{5}$$

根据定义 3.5，存在有限子集 $S,\ T \subseteq G$ 以及态射 $\mu\colon C^S \to A$和 $\eta : C^T \to B$，使得

$$\pi_g^G \circ \alpha = \mu \circ \mathrm{Res}_S^G \circ \varphi_g \text{ and } \pi_g^G \circ \beta = \eta \circ \mathrm{Res}_T^G \circ \varphi_g,$$

对所有 $g \in G$。考虑有限子集 $V := S \cup T \subseteq G$。根据 $\mathcal{C}$ 中积的泛性质，应用于态射 $\mu \circ \mathrm{Res}_S^V$: $C^V \to A$ 和 $\eta \circ \mathrm{Res}_T^V$: $C^V \to B$，存在唯一的态射 $\nu\colon C^V \to (A \times B)$，属于 $\mathcal{C}$，使得下图交换:



同样，根据 $\mathcal{C}$ 中积的泛性质，应用于态射族 $\{\nu \circ \mathrm{Res}_V^G \circ \varphi_g\colon\ C^G \to (A \times B)\}_{g \in G}$，存在唯一的态射 $\tau\colon\ C^G \to (A \times B)^G$，使得

$$\pi_g^G \circ \tau = \nu \circ \mathrm{Res}_V^G \circ \varphi_g, \quad \forall g \in G.$$

这意味着 $\tau\colon\ C^G \to (A \times B)^G$ 是一个在 G 上的 $\mathcal{C}$-元胞自动机 .

根据引理 3.1 和 $\nu\colon\ C^V \to (A \times B)$ 的定义，我们有，对所有 $g \in G$,

$$\begin{aligned}
\pi_g^G \circ \alpha &= \mu \circ \mathrm{Res}_S^G \circ \varphi_g \\
&= \mu \circ (\mathrm{Res}_S^G \circ \mathrm{Res}_V^S) \circ \varphi_g \\
&= (\pi_A \circ \nu) \circ \mathrm{Res}_V^S \circ \varphi_g \\
&= \pi_A \circ (\pi_g^G \circ \tau) \\
&= \pi_g^G \circ \pi_A^G \circ \tau,
\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由前推态射 π_A^G (4) 的定义得出。根据引理 2.4, $\alpha = \pi_A^G \circ \tau$。类似地, $\beta = \pi_B^G \circ \tau$，这证明了图 (5) 交换。

现在，为了证明 τ 的唯一性，假设 $\sigma\colon\ C^G \to (A \times B)^G$ 是一个定义在 G 上的 $\mathcal{C}$-元胞自动机，且满足 $\alpha = \pi_A^G \circ \sigma$ 和 $\beta = \pi_B^G \circ \sigma$。注意，对于 $X \in \{A, B\}$,

$$\pi_X \circ \pi_e^G \circ \tau = \pi_e^G \circ \pi_X^G \circ \tau = \pi_e^G \circ \pi_X^G \circ \sigma = \pi_X \circ \pi_e^G \circ \sigma.$$

因此，由引理 2.4 可得 $\pi_e^G \circ \tau = \pi_e^G \circ \sigma$。由推论 3.8 可得 $\tau = \sigma$。 □

定理 3.15 中给出的 CA A^G and B^G (G) 的配置对象之积，与 $\mathcal{C}$ 中的积 $A^G \times B^G$ 同构；由于积可以定义为小极限，这正是小极限与小极限可交换这一一般范畴论原理的一个特例 [11, p. 231]。这表明 $\mathrm{CA}_{\mathcal{C}}(G)$ 对有限积封闭。

4 广义 $\mathcal{C}$-元胞自动机

广义元胞自动机定义的主要思想（在 [4], 中引入）是考虑不同群上的配置空间之间的元胞自动机。本节将给出广义元胞自动机的范畴论定义。

对于任意两个群 G 和 H，用 Hom(H, G) 表示从 H 到 G的所有群同态构成的集合。

定义 4.1. 设 A^G、$B^H \in \mathcal{C}$ 是两个配置对象，且 $\tau: A^G \to B^H$ 是 $\mathcal{C}$中的一个态射。若存在一个有限子集 $S \subseteq G$和一个态射 $\mu: A^S \to B \in \mathcal{C}$，使得：则称 τ 为一个 ϕ-元胞自动机，其 $\phi \in \mathrm{Hom}(H, G)$。

$$\pi_h \circ \tau = \mu \circ \mathrm{Res}^G_S \circ \varphi_{\phi(h)}, \quad \forall h \in H.$$

一般来说，若 $\tau: A^G \to B^H$ 是某个 $\phi \in$ Hom(H, G) 对应的ϕ-元胞自动机，则称它为广义 $\mathcal{C}$-元胞自动机 。

The 以下结果的证明与命题 3.7 的证明类似。

引理 4.2。 每个 ϕ-元胞自动机 $\tau: A^G \to B^H$ 都是 ϕ-等变的，其含义是 t

$$\tau \circ \varphi_{\phi(h)} = \varphi_h \circ \tau, \quad \forall h \in H.$$

此外，与定理 3.9 类似，两个广义 $\mathcal{C}$-元胞自动机的复合也是一个广义 $\mathcal{C}$-元胞自动机（参见 [4,定理 2]）。

定理 4.3。 设 $\tau: A^G \to B^H$ 是一个邻域为 $T \subseteq G$ 的 ϕ-元胞自动机，并设$\sigma: B^H \to C^K$ 是一个邻域为 $S \subseteq H$的 ψ-元胞自动机。那么， $\sigma \circ \tau: A^G \to C^K$是一个邻域为 $T\phi(S) := \{t\phi(s) : t \in T, s \in S\}$ 的 $\phi \circ \psi$- 元胞自动机。

前述定理意味着， $\mathcal{C}$中的配置对象类 A^G （其中 G是任意群）与广义 $\mathcal{C}$-元胞自动机类共同构成 $\mathcal{C}$ 的一个子范畴，我们将其记为 $\mathsf{GCA}_{\mathcal{C}}$。显然，对于任意群 G，范畴 $\mathsf{CA}_{\mathcal{C}}(G)$ 是 $\mathsf{GCA}_{\mathcal{C}}$ 的一个子范畴，因为每个 $\mathcal{C}$- 元胞自动机都是一个 id- 元胞自动机。

引理 4.4。 对于任意群同态 $\phi: H \to G$ 和任意对象 $A \in \mathcal{C}$，按*(2)*中定义的拉回ϕ^*_A：$A^G \to A^H$是一个 ϕ-元胞自动机。

证明。 根据拉回的定义(2)、引理 3.3以及限制态射 1 的定义，对于所有 $h \in H$，我们有：

$$\pi^H_h \circ \phi^*_A = \pi^G_{\phi(h)} = \pi^G_e \circ \varphi_{\phi(h)} = \pi^{\{e\}}_e \circ \mathrm{Res}^G_{\{e\}} \circ \varphi_{\phi(h)}.$$

这表明 $\phi^*_A: A^G \to A^H$ 是一个 ϕ-元胞自动机。 □

引理 4.4 和 3.2 意味着，对于任意固定的对象 $A \in \mathcal{C}$，拉回 $(\,)^*_A$ 定义了一个从 **Grp**到 $\mathrm{GCA}_{\mathcal{C}}$的反变函子。

以下结果表明，每个 ϕ-元胞自动机都可以分解为一个唯一的 $\mathcal{C}$-元胞自动机与 ϕ 的拉回的复合（参见 [5, 引理 4]）。

引理 4.5. 对于任意广义 $\mathcal{C}$-元胞自动机 $\tau\colon A^G \to B^H$，其中 $A^G \to B^H$ 属于 $\mathrm{GCA}_{\mathcal{C}}$，存在一个群同态 $\phi\colon H \to G$，以及唯一的 $\mathcal{C}$-元胞自动机 $\tau_G\colon A^G \to B^G$，其中$\mathrm{CA}_{\mathcal{C}}(G)$，使得

$$\tau = \phi_B^* \circ \tau_G$$

证明。设 $\mu\colon A^S \to B$ 是 $\tau\colon A^G \to B^H$ 的局部定义态射。由积的泛性质应用于态射族 $\{\mu \circ \mathrm{Res}_S^G \circ \varphi_g\colon A^G \to B\}_{g\in G}$，存在唯一的态射 $\tau_G\colon A^G \to B^G$，使得

$$\pi_g^G \circ \tau_G = \mu \circ \mathrm{Res}_S^G \circ \varphi_g, \quad \forall g \in G.$$

显然，$\tau_G\colon A^G \to B^G$ 是一个 $\mathcal{C}$-元胞自动机。

根据引理 4.4，对于每个 $h \in H$，我们有

$$\pi_h^H \circ \phi_B^* \circ \tau_G = \pi_{\phi(h)}^G \circ \tau_G = \mu \circ \mathrm{Res}_S^G \circ \varphi_{\phi(h)} = \pi_h^H \circ \tau.$$

根据引理 2.4，我们得到 $\tau = \phi_B^* \circ \tau_G$。

为了证明 τ_G 的唯一性，设 $\sigma\colon A^G \to B^G$ 是一个 $\mathcal{C}$-元胞自动机，满足 $\tau = \phi_B^* \circ \sigma$。若 $e_G \in G$ 和 $e_H \in H$ 是相应的单位元，则

$$\pi_{e_G}^G \circ \sigma = \pi_{\phi(e_H)}^G \circ \sigma = \pi_{e_H}^H \circ \phi_B^* \circ \sigma = \pi_{e_H}^H \circ \tau = \pi_{e_H}^H \circ \phi_B^* \circ \tau_G = \pi_{e_G}^G \circ \tau_G$$

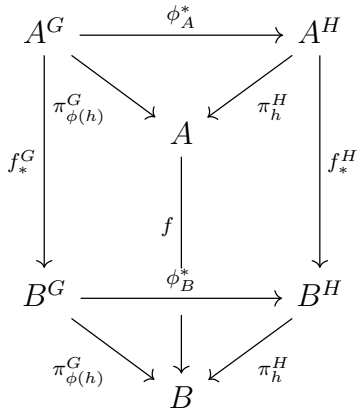
根据推论 3.8，$\sigma = \tau_G$。 □

为了证明范畴 $\mathrm{GCA}_{\mathcal{C}}$ 有弱积，我们需要以下关于拉回与推前的交换性的技术性结果。

引理 4.6。对于任意态射 $f\colon A \to B$（属于 $\mathcal{C}$）以及任意群同态 $\phi\colon H \to G$，以下交换图成立：

$$\begin{array}{ccc} A^G & \xrightarrow{\phi_A^*} & A^H \\ {\scriptstyle f_*^G}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_*^H} \\ B^G & \xrightarrow[\phi_B^*]{} & B^H \end{array}$$

证明。 对于任意 $h \in H$，考虑以下图：



注意，根据拉回 (2) 的定义，该图的上、下三角形均交换。此外，根据幂态射 f_*^G 和 f_*^H 的定义 (4)，边为 f 的两个方形均交换。因此，上述图交换，所以

$$\pi_h^H \circ (\phi_B^* \circ f_*^G) = \pi_h^H \circ (f_*^H \circ \phi_A^*), \quad \forall h \in H.$$

最后，由引理 2.4，$\phi_B^* \circ f_*^G = f_*^H \circ \phi_A^*$，如所需。 □

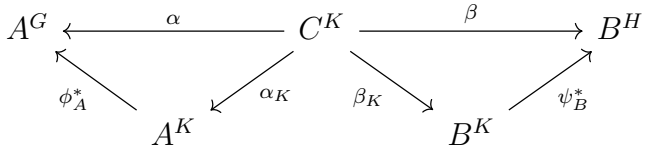
对于任意两个群 G 和 H，考虑典范嵌入 $\iota_G\colon G \to G * H$ 和 $\iota_H\colon H \to G * H$ 到自由积 $G * H$ 中；该自由积是范畴 **Grp** 中的余积（参见例 2.6）。对于任意 $A, B \in \mathcal{C}$，考虑以下广义 $\mathcal{C}$- 元胞自动机：

$$\iota_A^G := \pi_A^G \circ (\iota_G)^*_{A\times B} : (A \times B)^{G*H} \to (A \times B)^G \to A^G$$
$$\iota_B^H := \pi_B^H \circ (\iota_H)^*_{A\times B} : (A \times B)^{G*H} \to (A \times B)^H \to B^H,$$

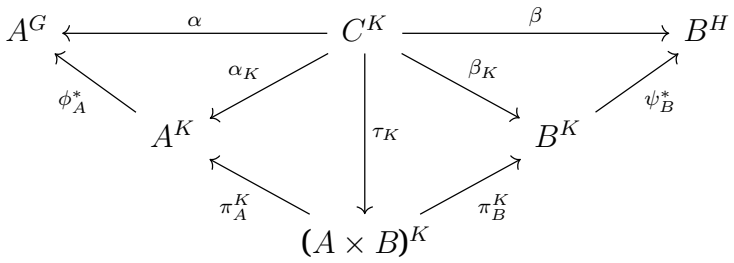
其中 $\pi_A^G\colon (A\times B)^G \to A^G$ 和 $\pi_B^H\colon (A\times B)^H \to B^H$ 是定理 3.15 中定义的 $\mathcal{C}$-元胞自动机投影。

定理 4.7. 设 G 和 H 是两个群，A 和 B 是 $\mathcal{C}$ 中的两个对象。构型对象 $(A \times B)^{(G*H)}$ 连同广义 $\mathcal{C}$-元胞自动机 $\iota_A^G\colon (A\times B)^{G*H} \to A^G$ 和 $\iota_B^H\colon (A \times B)^{G*H} \to B^H$，是范畴 $\mathrm{GCA}_{\mathcal{C}}$ 中 A^G 和 B^H 的弱积。

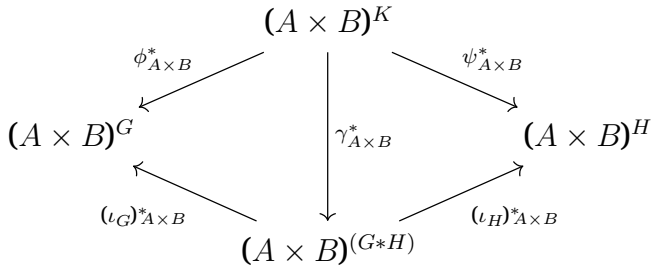
证明。 设 $\alpha\colon C^K \to A^G$ 与 $\beta\colon C^K \to B^H$ 为两个广义 $\mathcal{C}$-元胞自动机。由引理 4.5，存在群同态 $\phi\colon G \to K$ 与 $\psi\colon H \to K$ 以及唯一的$\mathcal{C}$-元胞自动机 $\alpha_K\colon C^K \to A^K$ 与 $\beta_K\colon C^K \to B^K$，使得下图交换：



由定理 3.15，存在唯一的 $\mathcal{C}$-元胞自动机 $\tau_K\colon\ C^K \to (A\times B)^K$，使得下图交换：

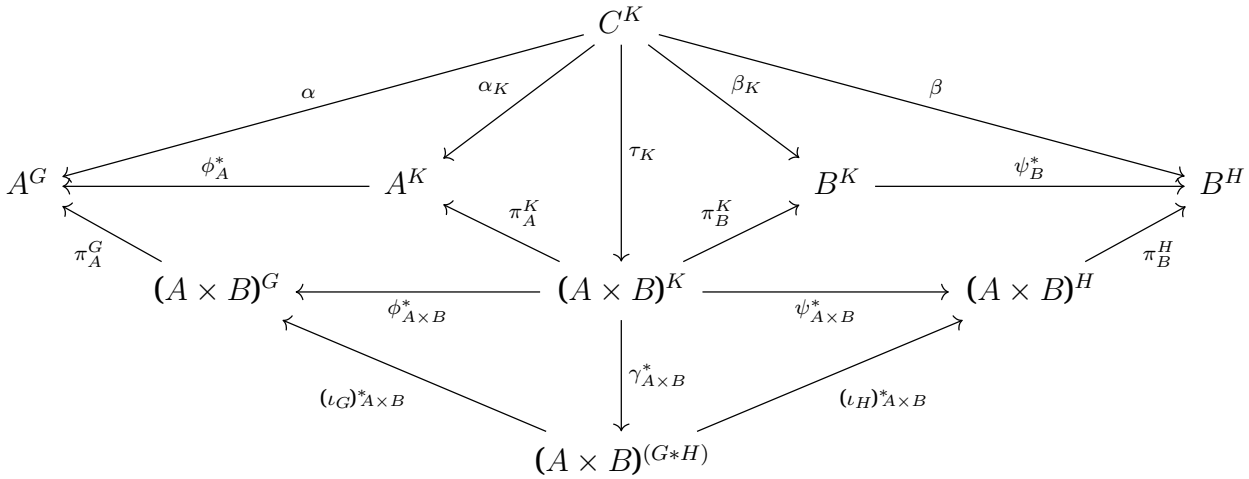


现在，我们将拉回逆变函子 $(\ )^*_{A\times B}$ 应用于范畴 **Grp** 中余积的泛性质所对应的群同态（参见定义 2.5），得到以下交换图：



其中 $\gamma\colon\ G*H\to K$ 是将余积的泛性质应用于 ϕ和 ψ时所满足的唯一群同态。

通过粘合前两个图，我们得到如下结果：



根据引理 4.6，左右两个中间方块均交换，因此整个图交换。结论得证。

□

证明定理 4.7 中给出的弱积是唯一的、因而是一个积时，问题在于，引理 4.5 给出的广义 $\mathcal{C}$-元胞自动机的分解通常并不唯一。我们称 $\tau\colon A^G \to B^H$ in $\mathbf{GCA}_{\mathcal{C}}$ 具有<（style id='5'>唯一分解）若 $\tau = \phi_B^* \circ \tau_G = \psi_B^* \circ \tau_G$ 蕴含 $\phi = \psi$。 [5, 推论 1], 表明，如果 G 是无挠阿贝尔群，那么每个非恒定的广义<（style id='12'>Set）-元胞自动机都具有唯一分解；这一结果在 [14] 中通过去除 G为阿贝尔群的假设而得到推广。然而请注意，恒定的广义<（style id='16'>Set）-元胞自动机从不具有唯一分解：如果 $\tau\colon\ A^G \to B^H$ 是恒定的，那么对于每一对群同态 ϕ 和 ψ，都有 $\tau = \phi_B^* \circ \tau_G = \psi_B^* \circ \tau_G$。这意味着定理 4.7 中给出的弱积不是 $\mathbf{GCA}_{\mathbf{Set}}$中的积，但积是否确实存在于 $\mathbf{GCA}_{\mathbf{Set}}$中仍是一个开放问题。

致谢

第二作者获得了 SECIHTI研究生学习国家奖学金的资助。第三作者获得了 SECIHTI 编号为 CBF-2023-2024-2630 的研究资助。

参考文献

[1] Ad ´mek, J., Herrlich, H., Strecker, G.E.：抽象范畴与具体范畴：猫之乐。在线版，2004年。 http://katmat.math.uni-bremen.de/acc/[2] Borceux, F.：《范畴代数手册 1：范畴论基础》，剑桥大学出版社，剑桥，1994年。[3] Capobianco, S., Uustalu, T.：元胞自动机的范畴论视角。《元胞自动机日》，88–99（2010年）。 https://hal.science/hal-00542015v1[4] Castillo-Ramirez, A., Sanchez-Alvarez, M., Vazquez-Aceves, A., Zaldivar-Corichi, A.：群上的元胞自动机推广。《通讯代数》51(7)，3114–3123（2023年）。https://doi.org/10.1080/00927872.2023.2177663[5] Castillo-Ramirez, A., de los Santos Ba˜nos, L.：广义元胞自动机的进一步结果。《通讯代数》52(6)，2475–2488（2024年）。 https://doi.org/10.1080/00927872.2023.2301538

[6] Castillo-Ramirez, A., Vazquez-Aceves, A., Zaldivar-Corichi, A.（2026年）。元胞自动机的范畴积。载于：Riva, S., Richard, A.（编）《元胞自动机与离散复杂系统》。AUTOMATA 2025。《计算机科学讲义》**15831**。施普林格，Cham。 https://doi.org/10.1007/978-3-032-01570-9_5[7]Ceccherini-Silberstein, T., Coornaert, M.：《元胞自动机与群》。施普林格数学专著。施普林格，Cham，瑞士，第2版，2023年。[8]Ceccherini-Silberstein, T., Coornaert, M.：具体范畴中元胞自动机的满射性与可逆性。载于：Picardello, M.（编）《调和分析趋势》。施普林格 INdAM 系列，第3卷。施普林格，米兰。 https://doi.org/10.1007/978-88-470-2853-1_6[9] Fernandez, A., Maignan, L., Spicher, A.：元胞自动机与 Kan 延拓。载于：Castillo-Ramirez, A., Guillon, P., Perrot, K.（编）第27届 IFIP WG 1.5 元胞自动机与离散复杂系统国际研讨会（AUTOMATA 2021）。《信息学开放获取丛书》（OASIcs）**90**，第7:1–7:12页，Schloss Dagstuhl – Leibniz 信息中心，2021年。 https://doi.org/10.4230/OASIcs.AUTOMATA.2021.7[10] Maignan, L., Spicher, A.：因果图动力学与 Kan 延拓。载于：Harmer, R., Kosiol, J.（编）《图变换》。ICGT 2024。《计算机科学讲义》**14774**，施普林格，Cham，2024年。 https://doi.org/10.1007/978-3-031-64285-2_5[11] Mac Lane, S.：《工作数学家的范畴》。数学研究生教材。施普林格，纽约，第2版，2010年。[12] Roman, S.：《范畴论语言导论》。数学精要教材。Birkh¨auser，Cham，瑞士，2017年。[13] Salo, V., T¨orm¨a, T.：符号动力系统的范畴论。《理论计算机科学》**567**，21–45（2015年）。 https://doi.org/10.1016/j.tcs.2014.10.023[14]Salo, V.：关于上周（2/n）：广义元胞自动机的群论视角，《Shift Happens》（博客），2024年。https://symbolicdynamicsandotherthings.wordpress.com/2024/03/12/about-last-weeks-2-n-a-group-theoretic-take-on-generalized-cellular-automata/，最后访问于2025年3月10日。[15] Simmons, H. 范畴论导论。剑桥大学出版社，剑桥，2011年。