arXiv:2602.04073v1 [math.LO] 3 Feb 2026

量化条件逻辑的不完备性

Alexander W. Kocurek、James Walsh、Yale Weiss

摘要

Stalnaker 和 Thomason 曾著名地证明，带有一阶量词的条件逻辑 C2 相对于选择函数语义是完备的。然而，这一完全性结果所使用的选择函数以公式而非命题（即世界集合）为参数。但 Stalnaker 曾多次强调，将选择函数视为作用于命题的函数具有重要的哲学意义，而他的理论的许多应用也需要这一点。他们的完全性结果能否推广到以命题为参数的选择函数语义？我们证明答案是否定的：他们的逻辑是框架不完备的。此外，无论是采用变域还是常域，是否包含同一性谓词或存在谓词，这一结果在许多语义选择方面都保持不变。最后，我们讨论这些结果所引发的、对条件句进行哲学和逻辑研究时若干重要而困难的问题。

关键词。 条件句；不完备性；量词；选择函数；命题。

1 引言

在《条件句理论》中，Stalnaker写道：

> 我主要关注的将是所谓的条件句的逻辑问题。……其任务是描述条件函数的形式性质：这一函数通常在英语中由词语“if. . . then”表示，它将命题的有序对映射为命题。（Stalnaker 1968，第98页）

Stalnaker将命题等同于可能世界的集合，并借助选择函数来阐明条件函数；该函数把给定的命题 P 与世界 w映射到距 w“最近”的 P-世界。因此，按Stalnaker的构想，对条件句的逻辑问题的任何解答都要求将如此理解的选择函数的逻辑行为加以公理化。

Stalnaker 声称（同上，第 98 页，脚注 1），这一问题的命题版本可由一个名为 C2 的逻辑的完备性定理解答，并引用了 Stalnaker and R. Thomason 1970 的早期版本。正式发表的版本更进一步，探讨了条件句逻辑问题的一阶变体。他们证明了一个逻辑的完备性定理，我们将其称为 QST（量化斯塔尔纳克-汤姆森逻辑），旨在确立

斯塔尔纳克条件句理论在“技术上是站得住脚的”，并符合“逻辑学家目前设定的标准”（Stalnaker and R. Thomason 1970，第 41 页）。[1]

尽管 Stalnaker 和 Thomason 是否为条件句的逻辑问题提出了正确的答案尚有争议，但人们普遍认为，他们确实为这一问题提出了一个答案。本文旨在重新审视这一主张。我们认为，事实上，逻辑 QST 并未——而且不可能——构成 Stalnaker 所设想的条件句逻辑问题的解决方案。

要理解原因，重要的是要强调，Stalnaker 是通过命题而非语言表达式来界定条件句的逻辑问题的。这种界定并非偶然，而是植根于命题和条件句在其著作中所发挥的理论作用。关于命题，Stalnaker 一再强调，命题不是语言项目，而且任何“将命题视为某种语言项目的命题说明都是不恰当的”（Stalnaker 1976，第 82–83 页）。例如，Stalnaker 以信念和欲望来说明理性行动，其中信念和欲望的对象是命题；由于理性行动的说明应同时适用于语言生物和非语言生物，因此必须以非语言的方式理解命题。关于条件句，Stalnaker 运用他的条件句理论分析了理性行动、交流、自然定律以及条件句的概率等问题。由于这些问题都是通过命题来理解的，因此条件句必须被理解为命题上的函数。

新斯塔尔纳克框架中也有相当多的研究，关键在于通过命题上的选择函数来理解条件函数。例如，在当代关于条件句概率的新斯塔尔纳克研究中（参见 Schulz 2014；Schulz 2017；Bacon 2015；Goldstein 和 Santorio 2021；Khoo 2022；Khoo 和 Matthew Mandelkern 2019；Santorio 2022；Santorio 2025；Schultheis 2023），概率函数——无论是被理解为置信度还是客观机会——都被视为作用于非语言实体的函数，选择函数也是如此。[2] 这种对条件句置信度的非语言取向，与 Stalnaker 关于非语言生物也能拥有置信度的主张相一致（Stalnaker 1976）。同样，Stalnaker 的条件句理论与逻辑也常见于当代决策理论中，具体而言，是在因果决策理论的语境下；在这种理论中，期望效用会用到某些反事实条件句的概率（Gibbard 和 Harper 1978；Lewis 1981；Joyce 1999；Hedden 2023；McNamara 2024）。这里同样至关重要的是，条件句的概率并不必然是句子的概率，而是条件命题的概率，因为决策理论旨在为任何行动者（包括非语言行动者）提供理性理论。

因此，将条件句的逻辑问题界定为关于命题而非语言表达式的问题，并非任意之举，而是该理论预期应用的核心所在。事实上，Stalnaker 和 Thomason 讨论了 QST 完备性定理的潜在应用，

[1]我们称为 QST 的理论，就是 Stalnaker 和 Thomason 称为 CQ 的理论。我们使用 QST 这一标签，是为了避免与之后引入的其他标签（例如 QC2）混淆。[2]我们说“非语言实体”而不说“命题”，因为有些分析使用的概率函数所作用的实体，比世界集合更精细（例如世界序列集合）。这些作者偶尔会谈到某个“句子”的概率，但这总是指该句子所表达的命题（类实体）的概率。

而且从他们的讨论中可以清楚看出，他们认为这一定理处理的是关于命题的逻辑问题的地位。例如，Stalnaker 和 Thomason 探讨了以条件句为基础、直接诉诸 QST 性质的自然定律分析。正如他们所指出的，对自然定律进行语言分析并不合理，因为没有任何要求规定自然定律必须用某种对象语言表述，甚至能够用这种语言表述：

> 语义方法的一个优点是，它让我们能够直接关注世界，而不是关注那些声称描述世界的语言表达式。例如，我们可以用可能世界和 s函数来分析解释，而不必间接地诉诸规律。这样一来，我们便可以避免未明言或未知规律带来的尴尬，也可能找到一种更合理地处理日常解释案例的分析方法。（Stalnaker and R. Thomason 1970年，第 41 页）

同样，在讨论如何用条件概率来定义条件句的概率时，Stalnaker 和 Thomason 明确援引了 QST 的逻辑性质来进行分析，并写道：

> 如果以一种自然的方式扩展这个定义，所得的条件概念就具有与系统 [QST]所定义的条件句完全相同的结构。（Stal-nakerand R. Thomason 1970年，第 41 页）

然而，Stalnaker 和 Thomason 用来获得完备性结果的选择函数，并不是定义在命题上的函数。也就是说，这一完备性结果并未 公理化 Stalnaker 1968 所关注的那些函数的行为。相反，用于证明完备性的选择函数是定义在对象语言公式 上的函数。[3] 换言之，在这一框架中，语义值并非通过选择函数赋予所有条件命题，而只赋予那些前件能够表达出来的条件命题。因此，Stalnaker–Thomason逻辑并未实现这一目标——尽管该目标在多处被重申（例如参见 Stalnaker 1984年，第 7 章）——即刻画定义在命题上的选择函数的形式行为。

这使得一个关于条件句逻辑的重要理论问题仍未得到解决：QST 能否由一种实现 Stalnaker 指导性直觉的语义刻画？更准确地说：QST 是否是某个选择函数框架类的逻辑，其中函数是为所有命题和可能世界定义的？我们的主定理是，Stalnaker–Thomason 逻辑 QST 是框架不完备的，也就是说，它无法由任何此类框架类刻画。因此，QST不可能成为 Stalnaker 1968年所阐述的条件句的逻辑问题的一种解答。

事实上，我们证明的结果更强。原始的 Stalnaker–Thomason 逻辑 QST 是用包含同一性符号的语言表述的。它不包含原始的存在谓词，但可以用同一性来定义存在谓词。此外，QST 旨在刻画现实主义量化，也就是说，其预期语义采用可变量化域。正如我们将要展示的，我们的不完备性定理并不依赖

[3]参见 Stalnaker and R. Thomason 1970，第27页中的 D3.4。实际上，他们证明了相对于一般框架类的完备性（参见 Segerberg 1989）。

于上述任何一种选择。为说明这一点，我们重点讨论一个称为 QC2 的系统，它是我们所考虑的系统中最简单的。这个系统本质上是以最直接的方式，将 C2 与支配一阶量词的标准公理和推理规则结合而成的。QC2 的语言不含同一性和存在的符号，其预期语义采用单一的全局量化域。在证明 QC2 的不完备性定理后，我们将说明如何对其进行修改，以纳入前述选择，例如加入存在谓词或同一谓词，或者允许可变量化域。

尽管我们的结果似乎是量化条件逻辑中首个此类结果，[4] 但框架不完备现象在模态逻辑中早已为人所知。哲学家和逻辑学家感兴趣的大多数命题正规模态逻辑，都可以通过调整二元可及关系的条件，用克里普克框架刻画出来。然而，自20世纪70年代中期以来，人们发现了许多并非任何一类克里普克框架之逻辑的命题正规模态系统（即框架不完备模态逻辑）。[5] 尽管不完备的命题模态逻辑往往略显人为，[6] 但也存在一些自然的框架完备命题模态逻辑，它们扩展加入量词后会变成框架不完备。一个特别出色且颇具启发性的例子是可证性逻辑 GL。一方面，命题逻辑 GL 是框架完备的——它是有限克里普克框架的逻辑，其中可及关系是传递且逆良基的——但它并非强完备，也就是说，存在一些无法在 GL 中推导出的（无穷）蕴涵。[7] 另一方面，Montagna 1984 证明，加入量词（但不加入巴坎公式）的 GL 是框架不完备的。[8] 我们将会看到，斯托尔内克条件逻辑的情形相当类似。具体而言，尽管 C2 相对于命题选择函数语义是弱完备的（即所有有效式都是 C2 定理），[9] 但相对于该语义，它并非强完备，也就是说，有些（无穷）蕴涵无法在 C2 中推导出来。[10] 我们的不完备性定理有效地补足了与 GL 的类比：它表明，扩展加入量词的 C2 （无论采用现实主义还是可能主义的量词，无论是否加入巴坎公式或其逆）都是框架不完备的。

[4]Nute 1978 针对 Lewis 1973 的球面语义，给出了命题条件逻辑的不完全性结果（不过，该结果是建立在命题模态逻辑的不完全性结果之上的）。[5]另见 Fine 1974、S. K. Thomason 1974、van Benthem 1978，以及 Boolos 和 Sambin 1985；此外，Hughes 和 Cresswell 1996 第9章，以及 Blackburn、de Rijke 和 Venema 2001 第4.4节，也在教科书中介绍了这类系统。这并不意味着这类系统没有任何语义；它们可以用代数方式刻画，也可以借助一般框架来刻画（即附带一个命题代数的克里普克框架，容许赋值会将命题变量映射到该代数中）。相关讨论见 Blackburn、de Rijke 和 Venema 2001 第5章。[6]更准确地说，不完备的命题单模态逻辑往往是人为构造的。不完备命题双模态逻辑中相当自然的例子包括 S. K. Thomason 1972 第4节中的时态逻辑，以及双模态可证性逻辑 GLB（见 Boolos 1993，第193–194页）。[7] GL（又称 K4W）的（弱）完备性由 Segerberg 1971（第84–89页）证明；教科书式的介绍见 Boolos 1993 第4–5章。关于 GL 不具强完备性的证明，见 Blackburn、de Rijke 和 Venema 2001，第211页。读者或许会发现，将这一论证与 Kocurek 2025 用以证明 C2 不具强完备性的论证进行比较，颇有启发。[8]相关结果还有许多，见 Rybakov 2024。[9]Stalnaker 1968 并未证明这一结果，但例如可以在 van Fraassen 1974 第6节找到证明概要。[10]C2 不具强完备性这一点，分别由 van Fraassen 1974 第6节、Veltman 1985 第105页、Fine 2012 脚注2、Kocurek 2025，以及 Dorr 和 Matt Mandelkern 2024 独立发现或证明。

无论采用现实主义还是可能主义的量词，无论加入巴坎公式还是其逆，扩展后的 C2 都是框架不完备的。

本文的结构如下。第2节中，我们概述（集合）选择函数语义，以及另一种我们将在技术上加以利用的序语义。第3节介绍我们所关注的各种条件逻辑的公理系统，并讨论已知的完备性结果。第4节中，我们证明 QC2 的框架不完备性。第5节中，我们说明如何将这一结果推广到其他量化条件逻辑，包括 Stalnaker 和 Thomason 的 QST。最后，我们在第6节中给出一些总结性评论。

2 语义

本节概述量化条件逻辑的两类语义（或模型论）。在第2.1节中，我们考察（集合）选择函数语义，并最终基于该语义证明不完备性。在第2.2节中，我们考察另一种序语义，并利用它建立一个对我们的不完备性证明至关重要的独立性结果。

在正式讨论语义之前，我们先明确一下将要使用的形式语言的一些细节。

定义1。 我们假设有一组可数的个体变量$(x_i)_{i<\omega}$，并且对每个 n，都有可数多个 n元谓词$(P_i^n)_{i<\omega}$。量化条件逻辑的语言 $\mathcal{L}$ 如下：

$$\phi ::= P^n(x_1, \ldots, x_n) \mid \neg\phi \mid (\phi \supset \phi) \mid (\phi > \phi) \mid \forall x\phi$$

其中， P^n 是一个 n元谓词。其他外延算子——$\wedge$、 $\vee$、 $\equiv$、 $\top$、 $\bot$ 和$\exists$——按标准方式定义。我们还采用以下标准缩写：

$$\Box\phi := (\neg\phi > \bot)$$
$$\Diamond\phi := \neg(\phi > \bot)$$

语言 $\mathcal{L}_E$ 是在 $\mathcal{L}$中加入一个指定的存在谓词 E 后得到的。语言$\mathcal{L}_=$ 是在 $\mathcal{L}$中加入一个同一谓词 $=$ 后得到的。虽然 $\mathcal{L}_=$ 严格来说缺少存在谓词 E，但在使用 $\mathcal{L}_=$时，我们用 $E(x)$ 作为公式$\exists y(x = y)$的缩写。

我们按照惯常方式宽松地使用记法，并且常写成 x 和 y 表示个体变量，写成 P 和 F 表示谓词，允许元数由语境确定。

2.1 选择函数语义

本文主要关注 Stalnaker 1968年 和 Stalnaker and R. Thomason 1970 提出的选择函数语义。历史上，这种语义被表述为一种世界选择函数语义，其中条件句通过一个函数来建模，该函数将由前件和世界组成的有序对映射到单个世界（直观地说，就是最接近评估世界的那些前件世界）。本文将以等价的

形式呈现这种语义，遵循 Lewis 1973 §2.7，将其表述为一种集合选择函数语义，这也使我们得以省去某些技术工具（例如，不可能世界 λ）。

定义2。 一个集合选择函数框架(以下简称选择框架)是一个五元组$\mathcal{F} = \langle W,\ R,\ f,\ D,\ d\rangle$, 其中:

- $W \neq \varnothing$ 是一个可能世界集合;
- $R \subseteq W \times W$ 是可及关系;
- f: $\mathcal{P}(W) \times W \to \mathcal{P}(W)$ 是（集合）选择函数;
- $D \neq \varnothing$ 是（全局）论域;
- d: $W \to \mathcal{P}(D)$ 是局部论域赋值。[11]

我们用 $R(w)$ 表示 $\{x \in W \mid wRx\}$。我们施加的唯一进一步条件是，对任意$P \subseteq W$和任意 $w \in W$， $f(P, w) \subseteq R(w)$。

由于 f 在定义2中对所有命题（$P \subseteq W$）均有定义，这些框架在技术意义上是完全 的（参见 Segerberg 1989，第161页）。

通篇我们考虑人们可能自然施加于选择框架的各种约束。一类涉及局部论域赋值的约束，反映了一阶量词在模态语境中的不同解释（例如，现实主义的与可能主义者）。

定义3. 设 $\mathcal{F} = \langle W、\ R、\ f、\ D、\ d\rangle$ 为一个选择框架。

- $\mathcal{F}$ 是一个 （全局）常论域框架，如果 $d(w) = D$ 对所有 $w \in W$;
- $\mathcal{F}$ 是一个 局部非递减框架，如果 $d(w) \subseteq d(v)$ 当 wRv;
- $\mathcal{F}$ 是一个局部非递增框架，当且仅当 $d(v) \subseteq d(w)$ 在 wRv时;
- $\mathcal{F}$ 是一个局部常值域框架，当且仅当它既局部非递减又局部非递增。

对于全局常值域框架，我们通常省略对 d 的提及，写作 $\mathcal{F} = \langle W, R, f, D\rangle$。谈到选择框架时，有时无论 d 受到何种限制，都会使用“变域框架”这一术语。

请注意，虽然全局常值意味着局部常值，但反过来并不成立。例如， D 中的某些元素可能是“不可能物”，也就是说，对于任何 $v \in R^*(w)$，它们都不会出现在 $d(w)$ 或 $d(v)$ 中，其中 R^* 是 R 的传递闭包；即便如此，对于所有此类 v，仍有 $d(w) = d(v)$。因此，这类框架是局部常值的，但并非全局常值。正如我们马上将要看到的，这一区别会体现为不同的逻辑原则。

另一类约束涉及选择函数。具体而言，我们关注满足 Stalnaker 1968年 对选择函数所施加的各类约束的选择框架（将这些约束转换为集合选择函数的约束）。

定义4。 选择框架 $\langle W, R, f, D, d\rangle$ 是Stalnaker式 的，当且仅当它对所有 $P, Q \subseteq W$, $w \in W$都满足以下条件:

1. $f(P, w) \subseteq P$ （成功性）

[11]我们遵循 Stalnaker and R. Thomason 1970，第25页的做法，允许局部论域为空 s.

2. 若 $w \in P$，则 $w \in f(P, w)$ *(弱中心化)*

3. 若 $f(P, w) = \varnothing$，则 $P \cap R(w) = \varnothing$ *(LA)*

4. 若 $f(P, w) \subseteq Q$ 且 $f(Q, w) \subseteq P$，则 $f(P, w) = f(Q, w)$ *(Uniformity)*

5. $|f(P, w)| \leq 1$ *(Uniqueness)*

如果选择框架满足条件 *1*、*2*、*4* 和 *5*，则它是弱斯塔尔纳克式的。

注释 1. 弱中心化意味着，任何（弱）斯塔尔纳克框架中的可及关系都是自反的。此外，在存在唯一性的情况下，弱中心化等价于"强中心性"（$w \in P$意味着 $f(P, w) = \{w\}$）。由于下文通常假设唯一性，我们可以将任一条件称为"中心性"条件。

如第1节所述，我们感兴趣的是一种相对于命题 而非公式进行选择的语义（下文将进一步讨论）。除此之外，我们的定义2与 Stalnaker and R. Thomason 1970 第27页的 D3.4 相同，而定义4中的条件1–4与 Stalnaker and R. Thomason 1970 第29页 D3.7 中编号相同的条件起到相同作用。

此外，没 注意到，一致性和唯一性已经蕴含了 LA 的一个弱版本：[12]

$$3^{-}.\ \text{If } f(P, w) = \varnothing, \text{ then } P \cap f(Q, w) = \varnothing \qquad \text{(WLA)}$$

显然，LA 蕴含 WLA，因为根据定义2，$P \cap f(Q, w) \subseteq P \cap R(w)$。另一方面，WLA 并不蕴含 LA。由此引出以下观察：

注2。 每个 *Stalnaker*式选择框架都是弱斯塔尔纳克式的，但反之则不成立。考虑全局常域选择框架 $\mathcal{F} = \langle \{1, 2\}, R, f, \{a\} \rangle$，其中 R 是普遍的，而 f 定义如下：

$$f(P, w) = \begin{cases} \{w\} & \text{if } w \in P \\ \varnothing & \text{otherwise} \end{cases}$$

容易验证，$\mathcal{F}$ 是弱斯塔尔纳克式的，但不是斯塔尔纳克式的，因为例如，$f(\{2\}, 1) = \varnothing$，但 $\{2\} \cap R(1) \neq \varnothing$。

斯塔尔纳克框架与弱斯塔尔纳克框架之间的区别对于读者而言可能并不立即显而易见，但正如我们将看到的，Stalnaker and R. Thomason 1970 所确定的逻辑，最终证明恰好在弱斯塔尔纳克框架上有效（命题 1）。由于斯塔尔纳克框架是弱斯塔尔纳克框架的真子类，因此，在证明相对于后者的不完备性时，我们也将（更不用说）证明相对于前者的不完备性。

定义5。 一个选择模型是一个六元组 $\mathcal{M} = \langle W, R, f, D, d, I \rangle$，其中 $\langle W, R, f, D, d \rangle$是一个选择框架（定义*2*），并且对于每个 $w \in W$元和 n元谓词 P^n，$I(P^n, w) \subseteq D^n$。我们称 $\mathcal{M}$ 是建立在框架 $\langle W, R, f, D, d \rangle$之上的。

[12]假设 $f(P, w) = \varnothing$。若 $f(Q, w) \subseteq P$，则根据一致性，$f(P, w) = f(Q, w) = \varnothing$，因此 $P \cap f(Q, w) = \varnothing$。或者，若 $f(Q, w) \not\subseteq P$，则根据唯一性，对某个 $w' \notin P$有 $f(Q, w) = \{w'\}$，由此可得$P \cap f(Q, w) = \varnothing$，如所求。

定义6。 选择模型 $\langle W, R, f, D, d, I\rangle$ 中的变量赋值 是一个函数g： $\mathcal{V} \to D$，其中 $\mathcal{V}$ 是变量集。若对于除 x之外的所有变量 y，都有 $g(y) = g'(y)$，则变量赋值 g' 是 g 的 x-变体 （记作 $g' \sim_x g$）。对于 $a \in D$，我们将满足 $g^x_a(x) = a$的 g 的 x-变体记作g^x_a。

定义 7. 给定选择模型 $\mathcal{M} = \langle W, R, f, D, d, I\rangle$、世界 $w \in W$ 和变量赋值 g，我们定义 $\Vdash$ 如下（我们用 $[\phi]^g$ 表示 $\{w \in W \mid \mathcal{M}, w, g \Vdash \phi\}$）：

在 $\mathcal{M}, w, g \Vdash P^n(x_1, \ldots, x_n)$ 当且仅当 $\langle g(x_1) \ldots, g(x_n)\rangle \in I(P^n, w)$;$E$。 $\mathcal{M}, w, g \Vdash E(x)$ 当且仅当 $g(x) \in d(w)$;=。 $\mathcal{M}, w, g \Vdash x = y$ 当且仅当 $g(x) = g(y)$;¬。 $\mathcal{M}, w, g \Vdash \neg\phi$ 当且仅当 $\mathcal{M}, w, g \nVdash \phi$;⊃。 $\mathcal{M}, w, g \Vdash \phi \supset \psi$ 当且仅当 $\mathcal{M}, w, g \nVdash \phi$ 或 $\mathcal{M}, w, g \Vdash \psi$;∀。 $\mathcal{M}, w, g \Vdash \forall x\phi$ 当且仅当对于所有 $a \in d(w)$, $\mathcal{M}, w, g^x_a \Vdash \phi$;>。 $\mathcal{M}, w, g \Vdash \phi > \psi$ 当且仅当 $f([\phi]^g, w) \subseteq [\psi]^g$。

其中 Γ 是一个公式集合，我们用 $\mathcal{M}, w, g \Vdash \Gamma$ 表示 $\mathcal{M}, w, g \Vdash \gamma$对每个$\gamma \in \Gamma$都成立。我们用 $\mathcal{M}, w \Vdash \phi$ 表示 $\mathcal{M}, w, g \Vdash \phi$ 对每个变量赋值 g都成立。

请注意，在任何基于*Stalnaker*式选择框架的模型中，所定义的模态联结词$\Box$ 和 $\Diamond$ 都具有标准的克里普克真值条件。[13]

$\Box$. $\mathcal{M}, w, g \Vdash \Box\phi$ iff $R(w) \subseteq [\phi]^g$;

$\Diamond$. $\mathcal{M}, w, g \Vdash \Diamond\phi$ iff $R(w) \cap [\phi]^g \neq \varnothing$.

然而，对于基于弱Stalnaker式框架的模型，通常并非如此。[14] 因此，以下我们谨慎使用所定义的模态联结词，并且通常将它们展开为条件式表述。

定义8。 我们称 Γ 在选择模型 $\mathcal{M} = \langle W, R, f, D, d, I\rangle$ 中是有效的（记作 $\mathcal{M} \Vdash \Gamma$），当且仅当对每个世界 $w \in W$ 和变量赋值 g，都有 $\mathcal{M}, w, g \Vdash \Gamma$；称 Γ在选择框架 $\mathcal{F} = \langle W, R, f, D, d\rangle$ 中是有效的（记作 $\mathcal{F} \Vdash \Gamma$），当且仅当对每个模型 $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, I\rangle$都有 $\mathcal{M} \Vdash \Gamma$；称 Γ 在选择框架类 $\mathcal{C}$ 中是有效的（记作 $\mathcal{C} \Vdash \Gamma$），当且仅当对每个 $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$都有 $\mathcal{F} \Vdash \Gamma$。

我们用$\mathsf{L}(\mathcal{C})$表示在框架类 $\mathcal{C}$中有效的公式集合。将逻辑L视为公式集合时，称L 是选择框架不完备，就是指对于任意选择框架类 $\mathcal{C}$，都有$\mathsf{L} \neq \mathsf{L}(\mathcal{C})$。

---

[13]举例来说，考虑 $\Box$的情形，并假设 $\mathcal{M}, w, g \Vdash \Box\phi$，也就是说， $\mathcal{M}, w, g \Vdash \neg\phi > \bot$。于是$f([\neg\phi]^g, w) = \varnothing$，因此根据 LA， $[\neg\phi]^g \cap R(w) = \varnothing$，由此得到 $R(w) \subseteq [\phi]^g$。反过来，如果 $R(w) \subseteq [\phi]^g$，那么由于$f([\neg\phi]^g, w) \subseteq R(w) \subseteq [\phi]^g$(定义2)，且 $f([\neg\phi]^g, w) \subseteq [\neg\phi]^g$(成功性)，所以 $f([\neg\phi]^g, w) = \varnothing \subseteq [\bot]^g$，正如所需。[14]在注2中的框架上定义一个模型 $\mathcal{M}$，令 $I(P, 1) = \{a\}$，且 $I(P,2) = \varnothing$（其他情况任意）。对于任意 g, $\mathcal{M}$， $1, g \Vdash \Box P(x)$，但 $R(1) \not\subseteq [P(x)]^g$。

在结束本节之前，我们简要回顾两个先前提到的要点。首先，为了指出全局常域与局部常域之间的逻辑差异，请注意，尽管 $\forall x\phi \supset \phi[y/x]$ 在全局常域选择框架类上有效，但它在局部常域选择框架类上无效，因为 y 可能会选出一个对象，而该对象不属于参照世界或任何（传递可达的）世界的局部论域。这将成为我们在第3节转向公理化时遇到微妙问题的一个来源。

其次，快速总结我们的语义与 Stalnaker and R. Thomason 1970 的语义之间的重要差异将是有益的。[15] 对于给定的（全局）论域 D，令 $\mathcal{VA}_D$ 为变量赋值 g 的集合： $\mathcal{V} \to D$。

定义 9。 准选择框架 是一个五元组 $\langle W, R, f, D, d\rangle$，其中 W、 R、 D 和 d 与定义*2*中的相同，而 f： $\mathcal{L}_{=} \times W \times \mathcal{VA}_D \to \mathcal{P}(W)$ 是一个将公式、世界和变量赋值映射到世界集合的准选择函数；如前所述，要求 $f(\phi、 w、 g) \subseteq R(w)$。

（弱）Stalnaker式准选择框架等概念，均依样定义，如前所述。我们按照定义 7 定义 $\Vdash$，但有以下 $>$ 条款例外:

$>$. $\mathcal{M}, w, g \Vdash \phi > \psi$ iff $f(\phi, w, g) \subseteq [\psi]^g$.

关于准选择模型等的有效性，依样按照定义8定义。此处我们不对准选择函数语义作任何详尽的批判，但我们认为，很明显，让选择函数同时将公式和变量赋值作为参数，会使其带有明显的句法色彩，这与 Stalnaker的计划 的精神相悖。

2.2 序语义

本节简要介绍条件逻辑的另一种序（或比较相似性）语义。这种语义在 Lewis 1971 和 Lewis 1973 §2.3 中以两种略有不同的形式提出。[16] 除了一些细节上的差异外，下面我们更接近于最初的表述。

定义10。一个序框架是一个五元组 $\langle W, R, \preceq, D, d\rangle$，其中 W, R, D 和 d 的含义与定义*2*中相同，并且对于每个 $w \in W$, $\preceq_w \subseteq R(w) \times R(w)$。一个序模型是一个六元组$\langle W, R, \preceq, D, d, I\rangle$，其中 $\langle W, R, \preceq, D, d\rangle$ 是一个序框架，而 I 是按照定义*5*所述的一个解释。

定义11。一个序框架 $\langle W, R, \preceq, D, d\rangle$ 称为Stalnaker式，当且仅当它对所有 $S \subseteq W$, $w \in W$ 满足以下条件:

1. $w \in R(w)$ （自反性）
2. $\forall x, y, z \in R(w)$: $x \preceq_w y$ 且 $y \preceq_w z \Rightarrow x \preceq_w z$ *(Transitivity)*

[15]在本陈述中，我们忽略无关紧要的差异（例如，他们对技术手段 λ的使用）。[16]在这两种情况下，该语义仅针对命题条件逻辑给出。据我们所知，文献中没有讨论这一语义与量化条件逻辑的关联。

3. $\forall x, y \in R(w)$： $x \preceq_w y$ 或 $y \preceq_w x$ （强连通）

4. $x \in R(w) \Rightarrow w \preceq_w x$ （弱中心化）

5. $x \preceq_w w \Rightarrow x = w$ *(Strong Centering)*

6. $S \cap R(w) = \varnothing$ 或 $\exists x \in S \cap R(w)$： $\forall y \in S\,(y \preceq_w x \Rightarrow x = y)$ *(SLA)*

如果序框架满足上述所有条件（但 *SLA* 条件除外），则称其为Lewis 式。

Lewis 1971年，第77页将序语义中的SLA限制为仅适用于可表达命题，而我们则是在完全一般的意义下介绍它的。满足除SLA之外所有条件（SLA也可能不满足）的框架刻画了Lewis偏好的条件逻辑C1（别名：VC）；基于此，我们称这些框架为"Lewis式"（参见Lewis 1971年，第83页）。

序模型和变量赋值的定义，经过相应的变更后，分别与定义5和定义6相同。对于给定的序模型 $\mathcal{M} = \langle W、\ R、\preceq、\ D、\ d、\ I\rangle$、世界 $w \in W$以及变量赋值 g， $\Vdash$ 的定义与第2.1节中相同，只是：

$>$. $\mathcal{M}、\ w、\ g \phi\!\!\!

3 量化条件逻辑系统

本文旨在证明一系列量化条件逻辑的不完备性。本文介绍 Stalnaker and R. Thomason 1970 提出的原始逻辑，以及若干变体。

定义12 (缩写)。 我们用 $\phi[y_1, \ldots, y_n/x_1, \ldots, x_n]$ 表示这样一种结果：将 x_1、…、x_n 在 ϕ 中的所有自由出现同时替换为 y_1、…、y_n，并在必要时用不同的变量替换 y_i 的约束出现。

若 α_1、…、α_n 是公式，我们用 $\vec{\alpha}$ 表示序列 $\langle \alpha_1$、…、$\alpha_n \rangle$。对于前件为 α_1、…、α_n 的右嵌套条件句，我们用 $\vec{\alpha} > \phi$ 表示：

$$\vec{\alpha} > \phi := (\alpha_1 > (\alpha_2 > (\cdots > (\alpha_n > \phi) \cdots)))$$

在 $\vec{\alpha} = \langle\rangle$ 的情况下，我们将 $\vec{\alpha} > \phi$ 定义为 ϕ。

Stalnaker and R. Thomason 1970，第30–31页研究了语言 $\mathcal{L}_=$ 中的以下形式系统，我们将其标记为 QST（Stalnaker 和 Thomason 将其标记为 CQ）。[18]

定义13. 语言 $\mathcal{L}_=$ 中的逻辑QST 由以下公理和推理规则定义：[19]

1. ϕ，其中 ϕ 是命题重言式的代入实例 *2.* $\Box(\phi \supset \psi) \supset (\Box\phi \supset \Box\psi)$ *3.* $\Box(\phi \supset \psi) \supset (\phi > \psi)$ *4.* $\Diamond\phi \supset (\phi > \psi \supset \neg(\phi > \neg\psi))$ *5.* $(\phi > (\psi \vee \chi)) \supset ((\phi > \psi) \vee (\phi > \chi))$ *6.* $(\phi > \psi) \supset (\phi \supset \psi)$ *7.* $((\phi > \psi) \wedge (\psi > \phi)) \supset ((\phi > \chi) \supset (\psi > \chi))$ *8.* $\forall x\phi \supset (\exists x \Box x = t \supset \phi[t/x])$ *9.* $\forall x(\exists y \Box y = x \supset \phi) \supset \forall x\phi$ *10.* $s = s$ *11.* $s = t \supset (\phi \supset \phi')$，其中 ϕ' 是将 t 的零个或多个出现替换为所得的结果

h

x 并且，ϕ 中被 s 替换的 t 的任何出现都不在……的作用域内 a

模态 *12.* $\Diamond x = y \supset \Box x = y$

13. 如果 $\vdash \phi$ 且 $\vdash \phi \supset \psi$，那么 $\vdash \psi$

[18]严格来说，Stalnaker and Thomason 使用的语言同时包含变量和（非刚性）常项。因此，对该逻辑的阐述会对任意项调用 t 和 s。非刚性常项的存在并不会实质性地影响下文的任何结果，因此为求简便，我们使用一个不含此类常项的系统。[19]Stalnaker and R. Thomason 1970，第25页定义了 $\Box\phi := \neg\phi > \phi$；在任何包含该图式的正规条件逻辑中（更不用说QST），它都等价于我们的缩写（见定义1）。

14. 如果 $\vdash \phi$，那么 $\vdash \psi > \phi$*15.* 如果 $\vdash \psi \supset \phi$ 且 ψ 中没有 x的自由出现，那么 $\vdash \psi \supset \forall x\phi$*16.* 如果 $\vdash \vec{\alpha} > \phi$ 且 x 没有在任何 α_i中自由出现，那么 $\vdash \vec{\alpha} > \forall x\phi$*17.* 如果 $\vdash \vec{\alpha} >$ $(\phi > t \neq x)$ 且 x 没有在任何 α_i 或 ϕ中自由出现，那么 $\vdash \vec{\alpha} > \neg\phi$。[20]

Stalnaker and R. Thomason 1970 证明，QST 相对于某些变域选择框架是可靠且完备的；在这些框架中，选择函数以公式而非命题作为参数（见定义 9）。

定理 1 (Stalnakerand R.Thomason1970)。 QST 对于 $\mathcal{L}_=$ *Stalnaker* 式准选择模型类是可靠且完备的。

为求简明，同时也为展示我们结果的稳健性，接下来我们将主要关注与 QST 相关的其他系统。这些系统更容易推广到 Stalnaker 和 Thomason 所研究框架之外的情形（例如常域、不含同一性符号的语言等）。

最简单的系统，也是我们将花最多时间讨论的系统，是 QC2。这个系统实质上是将命题条件逻辑 C2 与经典一阶量化的标准公理和推理规则结合起来的结果。更确切地说：

定义 14. 语言 $\mathcal{L}$中的逻辑 QC2 由以下公理和推理规则定义：

18. ϕ，其中 ϕ 是命题重言式的一个代入实例 *19.* $\phi > \phi$*20.* $((\phi > \psi) \wedge (\psi > \phi) \wedge (\phi > \chi)) \supset (\psi > \chi)$ *21.* $(\phi > \psi) \supset (\phi \supset \psi)$ *22.* $(\phi > \psi) \vee (\phi > \neg\psi)$ *23.* $\forall x\phi \supset \phi[y/x]$*24.* $\forall x(\phi > \psi) \supset (\phi > \forall x\psi)$，其中 x 在 ϕ中不是自由的 *25.* 若 $\vdash \phi$ 且 $\vdash \phi \supset \psi$，则 $\vdash \psi$*26.* 若 $\vdash (\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \supset \chi$，则 $\vdash ((\phi > \psi_1) \wedge \cdots \wedge (\phi > \psi_n)) \supset (\phi > \chi)$ *27.* 若 $\vdash \psi \supset \phi[y/x]$，且 y 在 ψ 或 $\forall x\phi$ 中不自由出现，则 $\vdash \psi \supset \forall x\phi$。

语言 $\mathcal{L}_=$ 中的逻辑 $\text{QC2}_=$ 是通过在 QC2 中加入以下公理得到的：

28. $x = x$

29. $x = y \supset (\phi \equiv \phi[y/x])$

30. $x \neq y \supset \Box x \neq y$

[20]在不含非刚性常项的框架中，规则 17 在给定其他公理和推理规则的情况下是可导出的。这实际上要求证明以下命题（按证明的长度进行归纳）：若 $\vdash \phi[y/x]$，则 $\vdash \phi[z/x]$。因此，若 $\vdash \vec{\alpha} > (\phi > y \neq x)$，其中 x 不在 $\vec{\alpha}$ 或 ϕ中自由出现，则 $\vdash \vec{\alpha} > (\phi > y \neq y)$，这意味着$\vdash \vec{\alpha} > \neg\phi$。

简而言之，QC2 是不含同一性的 QST 的全局常值域类比，而 $\mathsf{QC2}_{=}$ 是含同一性的 QST 的全局常值域类比。（我们不费心加入“$\mathsf{QC2}_E$”，因为这只会把 Ex 作为公理加入以 $\mathcal{L}_E$ 表述的 QC2 中。）

要看出这些逻辑系统是 QST 在全局常值域下的对应版本，一种方法是注意以下定理；其证明留作读者练习。[21]

定理2. $\mathsf{QC2}_{(=)}$ 在 $\mathcal{L}_{(=)}$ 中，对于全局常值域的 *Stalnaker* 式准选择模型类而言是可靠且完备的。

换句话说，对于选择函数以公式（和变量赋值）而非命题作为输入的模型类，$\mathsf{QC2}_{(=)}$ 是可靠且完备的。因此，相对于变域，QST 的地位与 $\mathsf{QC2}_{=}$ 相对于全局常值域的地位相同。

我们的第一个不完备性结果将针对 QC2。不过，我们也将证明 $\mathsf{QC2}_{=}$ 以及下文定义的 QC2 的变域对应版本的相应不完备性结果。

定义15. 逻辑 $\mathsf{QC2}^{\mathsf{v}}_{E}$ 在 $\mathcal{L}_E$ 中定义如下：将QC2中的公理 *23* 和推理规则 *27* 替换为以下内容：

23$^{\mathsf{v}}$。 $(\forall x\phi \wedge E(y)) \supset \phi[y/x]$

27$^{\mathsf{v}}$. 若 $\vdash \psi \supset (\vec{\alpha} > (E(y) \supset \phi[y/x]))$，且 y 在 α_1、…、α_n、ψ或 $\forall x\phi$ 中不自由出现，则 $\vdash \psi \supset (\vec{\alpha} > \forall x\phi)$。

逻辑 系统 $\mathsf{QC2}^{\mathsf{c}}_{E}$ 在 $\mathcal{L}_E$ 中，是通过为$\mathsf{QC2}^{\mathsf{v}}_{E}$ 添加以下公理而得到的：

31$^{\mathsf{c}}$。 $E(x) \supset \Box E(x)$ *32*$^{\mathsf{c}}$。 $\neg E(x) \supset \Box \neg E(x)$

逻辑系统 $\mathsf{QC2}^{\mathsf{v}}_{=}$ 和$\mathsf{QC2}^{\mathsf{c}}_{=}$ 分别通过将公理 *28–30* 添加到$\mathsf{QC2}^{\mathsf{v}}_{E}$ 和$\mathsf{QC2}^{\mathsf{c}}_{E}$ 而定义。

实际上，$\mathsf{QC2}^{\mathsf{v}}_{E/=}$ 是$\mathsf{QC2}_{(=)}$ 的变域类比，而$\mathsf{QC2}^{\mathsf{c}}_{E/=}$ 则是局部常域类比。[22] 同样，我们可以通过考察下述完备性定理看出这一点：

定理 3。 $\mathsf{QC2}^{\mathsf{v}}_{E/=}$ 在 $\mathcal{L}_{E/=}$ 中，对于变域 *Stalnaker* 式准选择模型这一类模型而言，是可靠且完备的。$\mathsf{QC2}^{\mathsf{c}}_{E/=}$ 在 $\mathcal{L}_{E/=}$ 中，对于局部常域 *Stalnaker* 式准选择模型这一类模型而言，是可靠且完备的。

[21]请注意，利用公理 24和QC2的规则27，可以证明QST的规则16是可容许的。[22]请注意，我们尚未在语言 $\mathcal{L}$ 不含E 或 $=$中为变域框架公理化一种逻辑“$\mathsf{QC2}^{\mathsf{v}}$”，也未在 $\mathcal{L}$中为局部常域框架公理化一种逻辑“$\mathsf{QC2}^{\mathsf{c}}$”。我们未能找到自然的逻辑系统，使其完备性可相对于相应的准选择模型类得到证明。这或许显得有些出人意料，但仔细想来却在意料之中，因为在不含 E 或 $=$ 的语言中，证明变域上量化模态逻辑的完备性，明显比在含有这些手段的语言中证明完备性更为困难（参见Hughes和Cresswell 1996年，第304页及以下）。

由定理 3 可知，$\mathrm{QC2}^{\mathrm{v}}_{=}$ 可证明地等价于逻辑 QST。事实上，只需证明二者互相包含，就可以直接（即公理化地）验证这一点。这里我们仍将其留作读者的练习。这道练习中的一个重要步骤，是认识到以下公式是 QC2 及其各种变体的一个定理（使用公理20和公理22）；该公式称为 MOD 公理（参见例如 Nute 1980，第160页）：

$$(\neg\phi > \bot) \supset (\psi > \phi) \ \ (\text{i.e., } \Box\phi \supset (\psi > \phi))$$

该公理对应于第2.1节中的框架条件WLA，即对任意选择框架 $\mathcal{F}$，$\mathcal{F} \Vdash \Box\phi \supset (\psi > \phi)$当且仅当 $\mathcal{F}$满足WLA。

某些弱斯塔尔纳克框架类恰好由QC2或其变体在如下意义上刻画：

命题 1. 设 $\mathcal{F} = \langle W、\ R、\ f、\ D、\ d\rangle$ 为一个选择框架。则$\mathrm{QC2}_{(=)}$ 在 $\mathcal{F}$上有效（即 $\mathcal{F} \Vdash \mathrm{QC2}_{(=)}$）当且仅当 $\mathcal{F}$ 是弱斯塔尔纳克式且全局常值的。类似地，$\mathrm{QC2}^{\mathrm{v}}_{E/=}$在 $\mathcal{F}$上有效当且仅当 $\mathcal{F}$是弱斯塔尔纳克式的，且$\mathrm{QC2}^{\mathrm{c}}_{E/=}$在 $\mathcal{F}$上有效当且仅当 $\mathcal{F}$ 是弱斯塔尔纳克式且局部常值的。

证明。 我们考虑几个代表性情形。我们仅给出QC2的命题，而将其余逻辑系统的相应结果留给读者。

从右到左的方向是常规的——它本质上相当于检验QC2的公理与推理规则在全局常值弱斯塔尔纳克框架上的可靠性。我们仅说明公理 24的可靠性：$\forall x(\phi > \psi) \supset (\phi > \forall x\psi)$，当 x 在ϕ中不自由出现时。设 $\mathcal{F}$ 是弱斯塔尔纳克式且全局常值的。令 $\mathcal{M}$ 基于 $\mathcal{F}$，其中 $\mathcal{M}, w, g \Vdash \forall x(\phi > \psi)$。因此，对所有 $a \in D$，$f([\phi]^{g^x_a}, w) \subseteq [\psi]^{g^x_a}$。由于 x在ϕ中不自由出现，$[\phi]^{g^x_a} = [\phi]^g$。故 $f([\phi]^g, w) \subseteq \bigcap_{a\in D}[\psi]^{g^x_a} = [\forall x\psi]^g$，即 $\mathcal{M}, w, g \Vdash \phi > \forall x\psi$。

对于从左到右的方向，我们只需证明：如果 $\mathcal{F} \Vdash$ QC2，那么 $\mathcal{F}$ 是全局常值的，并且满足一致性和唯一性（定义 3 和定义 4）。

- 全局常值：对于任意 $w \in W$、$d(w) \subseteq D$，因此设 $a \in D$，并考虑一个在 $\mathcal{F}$ 上的模型 $\mathcal{M}$，使得 $I(F, w) = d(w)$，以及一个变量赋值 g，使得 $g(y) = a$（其他部分任意）。那么 $\mathcal{M}, w, g \Vdash \forall xF(x)$，因此根据假设 $\mathcal{F}$ 验证公理 23，我们有 $\mathcal{M}, w, g \Vdash F(y)$，也就是说，$g(y) = a \in I(F, w) = d(w)$。
- 一致性：对于 $P、Q \subseteq W$，设 $f(P、w) \subseteq Q$，且 $f(Q、w) \subseteq P$。考虑任意一个在 $\mathcal{F}$ 上的模型 $\mathcal{M}$，使得：如果 $w' \in P$，则 $I(A、w') = D$（否则为空）；如果 $w' \in Q$，则 $I(B、w') = D$（否则为空）；最后，如果 $w' \in f(P、w)$，则 $I(C、w') = D$（否则为空）。那么，对于任意变量赋值 g、$\mathcal{M}$、w、$g \Vdash$，$A(x) > B(x) \wedge (B(x) > A(x)) \wedge (A(x) > C(x))$。由于 $\mathcal{F}$ 验证公理20，$\mathcal{M}$、w、$g \Vdash B(x) > C(x)$，也就是说，$f(Q、w) \subseteq f(P、w)$。通过对称推理可得 $f(P、w) \subseteq f(Q、w)$，从而 $f(P、w) = f(Q、w)$，证毕。
- 唯一性：如果唯一性不成立，那么对于某个 $P \subseteq W$ 和 $u, v, w \in W$、$u \neq v$和 $u, v \in f(P, w)$。通过令 $I(A, w')$ 在 $w' \in P$ 时成立，且 $I(B, w')$ 在 $w' = u$ 时成立（否则为空），定义一个基于 $\mathcal{F}$ 的模型 $\mathcal{M}$。那么对于任意变量赋值 g，$v \in f([Ax]^g, w) \not\subseteq \{u\} = [Bx]^g$ 且 $u \in f([Ax]^g, w) \not\subseteq [\neg Bx]^g = W \setminus \{u\}$。因此，公理22在 $\mathcal{F}$ 上无效，这与我们的假设矛盾。

□

人们可能会认为，完备性可直接由命题 1 得出。但事实并非如此。虽然命题 1 表明，QC2 及其变体恰好在弱斯塔尔纳克框架上有效，但它们并不是任何此类选择框架类所对应的逻辑系统。这是因为这个框架类使一个在 QC2 或其变体中不可证的公式有效。下一节将着手证明这一结果。

4 QC2 的不完备性

本节证明主定理最简单的实例，即 QC2 的框架不完备性。这将作为证明其他不完备性结果的基础，其中包括 Stalnaker-Thomason 逻辑 QST 的框架不完备性。

在证明此　　结果时，我们会用到以下公式（参见 Montagna 1984，第 182 页）　　：

$$\mathsf{DS} := \exists x \top \wedge \forall x \Diamond F(x) \wedge \forall x \exists y \Big(\big(F(x) \vee F(y) \big) > \neg F(x) \Big).$$

DS 之所以得名，是因为它强制存在一个世界的“下降序列”。本节将看到：(i) ¬DS 在所有弱斯塔尔纳克框架中都有效，但 (ii) QC2 $\nvdash$ ¬DS。由此可知，相对于弱斯塔尔纳克框架类，QC2 并不完备。命题 1 进而意味着，QC2 不是任何选择框架类的逻辑。

注 *3.* 我们用 $\vec{x}$ 表示 $x_1, \ldots, x_n$，并用 $g(\vec{x})$ 表示 $g(x_1) \ldots, g(x_n)$。若 $\phi(\vec{x})$ 只包含自由的 $\vec{x}$ 和 $\vec{a} \in D$，我们就用 $\mathcal{M}, w \Vdash \phi(\vec{a})$ 表示 $\mathcal{M}, w, g^{\vec{x}}_{\vec{a}} \Vdash \phi(\vec{x})$。同样，我们用 $[\phi(\vec{a})]$ 表示 $[\phi(\vec{x})]^{g^{\vec{x}}_{\vec{a}}}$。这种记法定义良好，因为 *(i)* 变量是刚性的，即 g 是从变量到 D 的函数；且 *(ii)* 当 $g(\vec{x}) = g'(\vec{x})$ 时，$\mathcal{M}, w, g \Vdash \phi(\vec{x})$ 当且仅当 $\mathcal{M}, w, g' \Vdash \phi(\vec{x})$。

命题 2. 没有弱斯塔尔纳克式框架满足 DS。

证明。假设 $\mathcal{M}, w \Vdash \mathsf{DS}$。令 $Q_a = \{v \mid \mathcal{M}, v \Vdash F(a)\}$，并令 $P = \bigcup_{a \in d(w)} Q_a$。根据唯一性，$|f(P, w)| \leq 1$。假设 $f(P, w) = \varnothing$。于是根据 WLA，对所有 $a \in D$，都有 $f(Q_a, w) \cap P = \varnothing$。但 $f(Q_a, w) \subseteq Q_a \subseteq P$，所以 $f(Q_a, w) = \varnothing$，这与如下事实矛盾：$\mathcal{M}, w \Vdash \forall x \Diamond F(x)$，且 $d(w) \neq \varnothing$（因为 $\mathcal{M}, w \Vdash \exists x \top$）。反过来，假设 $f(P, w) = \{v\}$。根据 P 的定义，存在一个 $a \in d(w)$，使得 $\mathcal{M}, v \Vdash F(a)$。由于 $\mathcal{M}, w \Vdash \exists y((F(a) \vee F(y)) > \neg F(a))$，令 $b \in d(w)$ 为一个见证。因此 $\mathcal{M}, w \Vdash (F(a) \vee F(b)) > \neg F(a)$。根据成功性，$f(Q_a \cup Q_b, w) \subseteq Q_a \cup Q_b \subseteq P$。但同时 $f(P, w) = \{v\} \subseteq Q_a \subseteq Q_a \cup Q_b$。根据一致性，$f(Q_a \cup Q_b, w) = f(P, w) = \{v\}$，这与如下事实矛盾：$\mathcal{M}, w \Vdash (F(a) \vee F(b)) > \neg F(a)$。 □

注4. 命题 *2* 的证明，是对 *Kocurek 2025* 中论证的简单扩展（参见 *Dorr* 和 *Matt Mandelkern 2024*，第 *2.2* 节）：即使在命题情形下，紧致性在斯塔尔纳克框架类上也不成立（例如，$\{\Diamond A_i\}_{i \in \omega} \cup \{(A_i \vee A_{i+1}) > \neg A_i\}_{i \in \omega}$ 可满足其每个有限子集，但整体上不可满足）。由于命题 *2* 的证明并不依赖 *LA*（只依赖 *WLA*，而 *WLA* 可由一致性和唯一性推出），这表明紧致性在弱斯塔尔纳克框架上同样不成立。

事实上，采用与 *Kocurek 2025* 类似的策略，命题 *2* 的证明并不需要唯一性和一致性：我们只需要成功性、*WLA* 和理性单调性（参见 *Veltman 1985*，第 *104–105* 页，命题*II.59*）：

$$if\ P \subseteq Q\ and\ f(Q,w) \cap P \neq \varnothing,\ then\ f(P,w) = f(Q,w) \cap P$$

综合来看，命题 *2* 的证明可以加强，从而表明：不存在同时满足成功性、*WLA* 和理性单调性的选择框架满足DS。此外，可以看到，该证明并不依赖于对局部论域的任何特殊约束。

命题 3. QC2 $\nvdash$ ¬DS.

为证明命题 3，我们使用序语义（第2.2节）。具体而言，我们给出 QC2 + ¬DS 的一个全局恒定序模型。

定义16. 我们定义一个全局恒定序模型 $\mathcal{K} = \langle W, R, \preceq, D, I\rangle$，它满足以下条件（可视化参见图 *1*）：

1. $W = \mathbb{Z}^- \cup \{-\infty\}$，即负整数集再加上一个额外元素 $-\infty$（其中，对每个整数 k，$-\infty < k$）；*2.* $R(-\infty) = W$ 且 $R(k) = \{k\}$；*3.* 对所有 $w \in W$，$D = \mathbb{Z}^- = d(w)$；*4.* $x \preceq_{-\infty} y$ 当且仅当 $x \leq y$；*5.* $\preceq_k := \{\langle k, k\rangle\}$；*6.* 对 $k \neq -\infty$，$I(F,k) = \{n \in \mathbb{Z}^- \mid n \leq k\}$；*7.* $I(F,-\infty) = \varnothing$；*8.* 对每一个其他谓词 G，$I(G,x) = \varnothing$。

注意，$\mathcal{K}$ 是一个刘易斯式序模型。然而，它不是 Stalnaker式的，因为强极限假设（SLA）对于这一结构并不成立，原因在于 $\preceq_{-\infty}$ 不是良序：$\mathbb{Z}^- \cap R(\neg\infty) \neq \varnothing$ 但对于任意 $k \in \mathbb{Z}^- \cap R(\neg\infty)$，都存在一个 $j \in \mathbb{Z}^-$ 使得 $j \prec_{-\infty} k$。尽管如此，我们仍然能够证明 QC2 在 $-\infty$处成立，因为该模型中的可定义世界集受到相当大的限制。不过请注意，我们不能仅仅通过定义 $f(P,w) := \min_{\preceq_w}(P)$，然后应用选择函数语义来证明这一点。事实上，根据命题 1 和 2，不存在一个选择框架，能够在满足 DS 的同时验证 QC2。[23] 特别地，如果我们将 $f(P,w)$ 取为 P 的 $\preceq_w$- 极小元集合，就会违反一致性：$f(\mathbb{Z}^-,-\infty) = \varnothing \subseteq \{-1\}$ 且 $f(\{-1\},-\infty) = \{-1\} \subseteq \mathbb{Z}^-$，但 $f(\mathbb{Z}^-,-\infty) \neq f(\{-1\},-\infty)$。因此，为了说明 QC2 在 $-\infty$处“成立”，我们将在序语义本身中进行推理。这足以证明 QC2 $\nvdash$ ¬DS：我们只需要在某种不满足 ¬DS 的语义中找到一个 QC2 的模型，就能证明 ¬DS 不是 QC2 的定理。

注意，如果存在一个 $\preceq_w$极小的 $[\phi]^g$世界，则 $\mathcal{K}, w, g \Vdash \phi > \psi$ 当且仅当$\min_{\preceq_w}([\phi]^g) \subseteq [\psi]^g$。特别地，如果存在一个 $\preceq_w$极小的 $[\phi]^g$世界，则 $\mathcal{K}, w \Vdash \neg(\phi > \bot)$。

[23] 也许可以构造一个选择模型，使其在某个点同时满足 DS 和 QC2，而底层框架却不验证 QC2，但我们至今尚未找到这样的模型。

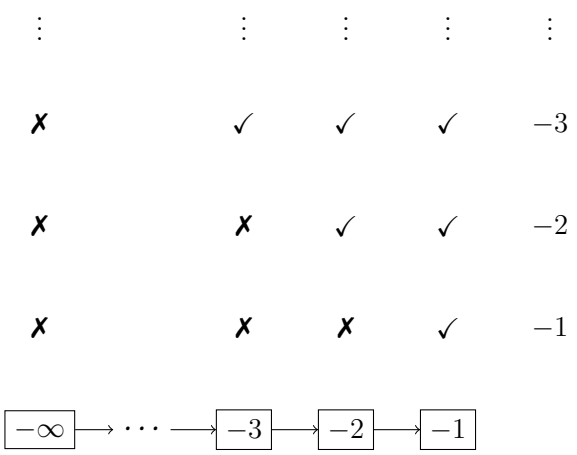


图1：结构 $\mathcal{K}$ 中谓词 F 的内涵。x 轴表示可能世界，y 轴表示论域元素。

断言1. $\mathcal{K}, -\infty \Vdash \mathsf{DS}$.

证明。对于第一个合取项，这由每个 $w \in W$的局部论域均为非空这一事实得出。

对于第二个合取项，注意到 $\mathcal{K}, k \Vdash F(k)$（换句话说，$\mathcal{K}, g(x)\ g \Vdash F(x)$）。此外，$k$ 是距离 $-\infty$ 最近的 $[F(k)]$-世界，这意味着 $\mathcal{K}, -\infty \Vdash \neg(F(k) > \bot)$，即 $\mathcal{K}, -\infty \Vdash \Diamond F(k)$。因此，$\mathcal{K}, -\infty \Vdash \forall x \Diamond F(x)$。

对于第三个合取项，令 $k \in \mathbb{Z}^-$。对于见证 y，我们选择 $k-1$。注意，$[F(k) \vee F(k-1)]$ 的 $\preceq_{-\infty}$-极小元是 $k-1$。然而，$\mathcal{K}, k-1 \nVdash F(k)$。因此，$\mathcal{K}, -\infty \Vdash ((F(k) \vee F(k-1)) > \neg F(k)$。 □

接下来要检查的是，QC2 的所有定理在 $-\infty$ 处都成立。事实上，证明更强的主张更容易：QC2 在 $\mathcal{K}$ 中有效，也就是说，对于，w，$g \Vdash$ 所有可能世界 w 及变量赋值 g，QC2 都成立。证明中最困难的部分，莫过于验证公理22（$\phi > \psi$）$\vee$（$\phi > \neg\psi$），我们将其标记为 CEM，在 $-\infty$ 处成立。我们先提出以下几个简单的主张。

主张 2. 设 ϕ 是一个公式，令 ϕ^- 为将 ϕ 中每一处 $>$ 替换为 $\supset$ 后所得的结果。那么 $[\phi]^g \cap \mathbb{Z}^- = [\phi^-]^g \cap \mathbb{Z}^-$。

证明。对 ϕ 的复杂度作归纳。对于 $>$ 这一情形，由于 $R(k) = \{k\}$，容易验证 $\mathcal{K}$，k，$g \Vdash \phi > \psi$ 当且仅当 $\mathcal{K}$，k，$g \Vdash \phi \supset \psi$。 □

主张 3. QC2 中除CEM 之外的所有公理在 $\mathcal{K}$中均有效。此外，QC2的推理规则在 $\mathcal{K}$ 中保有效性。

证明。根据主张 2，对于任意 $k \in \mathbb{Z}^-$, $\mathcal{K}$，k，$g \Vdash \alpha$，QC2 的任意公理 α（包括 CEM）都成立。此外，除 CEM 以外的所有公理，在具有全局常值域的刘易斯框架上的序语义中均有效（参见 Lewis 1971）。因此，除 CEM 以外的每个公理 α 在 $\mathcal{K}$ 中均有效，而推理规则在 $\mathcal{K}$ 中保有效性。

举例来说，我们简要验证规则26保有效性。假设 $\mathcal{K} \Vdash (\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \supset \chi$。假设 $[\phi]^g \cap R(w) \neq \varnothing$，并且对每个 $1 \leq i \leq n$，都存在一个 $k_i \in [\phi]^g \cap R(w)$，使得 $\mathcal{K}, j, g \Vdash \phi \supset \psi_i$ 对所有 $j \preceq_w k_i$ 均成立。于是，当 $k = \min_{\preceq_w}(k_1, \ldots, k_n)$ 时，任意 $j \preceq_w k$ 都满足 $\mathcal{K}, j, g \Vdash (\phi \supset \psi_1) \wedge \cdots \wedge (\phi \supset \psi_n) \wedge ((\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \supset \chi$。因此，对于任意这样的 j，$\mathcal{K}, j, g \Vdash \phi \supset \chi$。所以 $\mathcal{K}, w, g \Vdash \phi > \chi$。 □

接下来需要检查 CEM 在 $\mathcal{K}$ 中是否有效。上述推理并不适用，因为尽管 $\preceq_w$ 是线性的，但若缺少 $\preceq_w$ 的良基性，也就是 SLA，就不能保证 CEM 成立。（例如，如果存在由 $(\phi \wedge \psi)$-世界和 $(\phi \wedge \neg\psi)$-世界构成的无限下降交替序列，且没有极小的 ϕ-世界，那么 $(\phi > \psi) \vee (\phi > \neg\psi)$ 就不会得到满足。）因此，需要更复杂的论证来表明，该模型仍满足语言中可表达的每个 CEM 实例。

对于 $k \in \mathbb{Z}^-$，根据主张 2，这相当于检查 $\mathcal{K}, k \Vdash (\phi \supset \psi) \vee (\phi \supset \neg\psi)$，这很简单。当然，更困难的情形是证明 $\mathcal{K}, -\infty \Vdash$ CEM。实际上，CEM 即使在 $-\infty$ 中也成立，原因在于公式所能表达的集合受到很大限制。

注 *5.* 接下来，我们固定公式 ϕ 和 ψ，目的是证明 $\mathcal{K}, -\infty \Vdash (\phi > \psi) \vee (\phi > \neg\psi)$。这意味着，对于任意变量赋值 g，我们需要证明 $\mathcal{K}, -\infty, g \Vdash (\phi > \psi) \vee (\phi > \neg\psi)$。不过请注意，如果 g 和 g' 在 ϕ 和 ψ 中出现的所有变量上都一致，那么 $[\phi > \psi]^g = [\phi > \psi]^{g'}$。特别是，如果 $g^\star$ 是一个满射变量赋值，且对于所有出现在 ϕ 和 ψ 中的 x，都有 $g^\star(x) = g(x)$，那么 $\mathcal{K}, -\infty, g \Vdash (\phi > \psi) \vee (\phi > \neg\psi)$ 当且仅当 $\mathcal{K}, -\infty, g^\star \Vdash (\phi > \psi) \vee (\phi > \neg\psi)$。这样的 $g^\star$ 总是存在，因为 ϕ 和 ψ 中只出现有限多个变量。因此，我们不失一般性地将讨论范围限制为满射变量赋值。由此，我们可以用“$\phi(k)$”表示 $\phi(x)$，其中 $g^\star(x) = k$。

现在我们固定公式 ϕ 和 ψ，目标是证明 $\mathcal{K}, -\infty \Vdash (\phi > \psi) \vee (\phi > \neg\psi)$。注意，如果 $\mathcal{K}, -\infty, g \Vdash \phi$，那么这显然成立，因为 $\mathcal{K}$ 满足弱中心化。因此，我们接下来始终关注 $\mathcal{K}, -\infty, g \nVdash \phi$ 的情形。

断言4. 假设 $\mathcal{K}, -\infty, g \nVdash \phi$。那么存在某个不含 $>$ 的公式 $\phi^\star$，使得 $[\phi]^g = [\phi^\star]^g$。

证明。 我们来汇总三个事实。首先，我们假设 ϕ 在 $-\infty$ 处为假，即

$$\star \quad [\phi]^g = [\phi]^g \cap \mathbb{Z}^-.$$

其次，根据主张 2，存在一个不含 $>$ 的公式 ϕ^-，使得：

$$\star\star \quad [\phi]^g \cap \mathbb{Z}^- = [\phi^-]^g \cap \mathbb{Z}^-.$$

第三，注意到：

$$\star\star\star \quad [\exists x F(x)]^g = \mathbb{Z}^-.$$

现在令 $\phi^\star := \phi^- \wedge \exists x F(x)$。我们推理如下：

$$\begin{aligned}
[\phi^\star]^g &= [\phi^- \wedge \exists x F(x)]^g \text{ by definition of } \phi^\star \\
&= [\phi^-]^g \cap [\exists x F(x)]^g \text{ by the semantics for } \wedge \\
&= [\phi^-]^g \cap \mathbb{Z}^- \text{ by } \star\star\star \\
&= [\phi]^g \cap \mathbb{Z}^- \text{ by } \star\star \\
&= [\phi]^g \text{ by } \star
\end{aligned}$$

由于 $\phi^\star$ 不含 $>$，这就完成了该断言的证明。 □

贯穿全文，我们称 ϕ 与 $\mathcal{K}$等价于 ϕ'（相对于 g），意指 $[\phi]^g = [\phi']^g$。

断言 5. 假设 $\mathcal{K}, -\infty, g \nVdash \phi$。则 ϕ 等价于一个析取，其中每个析取项具有以下某种形式（n, $m \geq 0$）：

$$\begin{aligned}
&F(x_1) \wedge \cdots \wedge F(x_n) \wedge \neg F(y_1) \wedge \cdots \wedge \neg F(y_m) \\
&F(x_1) \wedge \cdots \wedge F(x_n) \wedge \exists x \neg F(x) \\
&\neg F(x_1) \wedge \cdots \wedge \neg F(x_n) \wedge \exists x F(x) \\
&\exists x F(x) \wedge \exists x \neg F(x) \\
&\forall x F(x)
\end{aligned}$$

证明。根据断言4，我们可以假设 ϕ 不含 $>$。F 是语言中唯一的非空谓词，因此我们可以假设 ϕ中的任何其他原子公式都已替换为$\bot$。

这就是说，我们可以假设 ϕ是一个简单单调公式，其中只出现谓词 F。此类公式可以写成形如 $F(x)$、$\forall x F(x)$和 $\exists x F(x)$的公式的布尔组合。接着，我们可以将这个布尔组合改写为析取范式，并消去冗余的合取项。也就是说，我们可以假设 ϕ 是一个析取，其中每个析取项都是由以下形式的公式构成的合取式：

$$\begin{aligned}
&F(x_1) \wedge \cdots \wedge F(x_n) \\
&\neg F(x_1) \wedge \cdots \wedge \neg F(x_n) \\
&\exists x F(x) \\
&\exists x \neg F(x) \\
&\forall x F(x) \\
&\forall x \neg F(x)
\end{aligned}$$

其中一些合取式在逻辑上是冗余的，例如 $F(x_1) \wedge \exists x F(x)$。另一些则在逻辑上是矛盾的，例如 $F(x_1) \wedge \forall x \neg F(x)$。还需注意，$\forall x \neg F(x)$ 总是可以作为析取项消去，因为 ϕ 在 $-\infty$ 处为假。逐一考察后，可以去除这些冗余项，从而将 ϕ 化为声明中所述的确切形式的析取。 □

回想一下，我们假设变量赋值 g 是满射的（注 5）。因此，对于每个 $j \in \mathbb{Z}^-$，都存在一个公式 $F(x)$，使得 $g(x) = j$，我们将其记作 "$F(j)$"。对于其余主张，我们将反复应用以下观察结果。

主张 6. 若 $m \geq n$ 则 $\mathcal{K} \Vdash F(m) \supset F(n)$。

证明。 参见图1。 □

主张 7。 假设 $\mathcal{K}, -\infty, g \nVdash \phi$。那么 ϕ 与以下析取等价，其中每个析取项均为以下形式之一：

$$F(j) \wedge \neg F(j+1) \ \textit{where}\ k \leq j < -1$$
$$\forall x F(x)$$
$$\neg F(k) \wedge \exists x F(x)$$

证明。 我们假设 ϕ具有断言 5 给出的形式。现在我们逐一考察 ϕ 的不同析取项。注意，$\forall x F(x)$已经具有适当的形式。接下来考察其他情况。

情况 1： 考虑以下形式的某个实例：

$$(B) \quad F(x_1) \wedge \cdots \wedge F(x_n) \wedge \neg F(y_1) \wedge \cdots \wedge \neg F(y_m)$$

不失一般性，设 $g(x_1)$在所有 $g(x_i)$中最大，而 $g(y_1)$在所有 $g(y_i)$中最小。

首先，我们注意到(B)与以下内容 $\mathcal{K}$等价：

$$(C) \quad F(x_1) \wedge \neg F(y_1)$$

显然，(B) $\mathcal{K}$-蕴含 (C)。对于反方向，首先注意到，对于所有 $i \neq 1$， $g(x_1) > g(x_i)$。因此，根据主张 6，合取项 $F(x_1)$ 蕴含每个 $F(x_i)$。同样，利用主张 6 以及事实 $g(y_1) < g(y_i)$，我们可以看出，合取项 $\neg F(y_1)$ 蕴含每个 $\neg F(y_i)$。

现在我们要证明，(C) 与形如 $F(j) \wedge \neg F(j+1)$ 的主张之析取 $\mathcal{K}$-等价。注意，(C) 表明，相对于变量赋值 g， F 与 $\neg F$ 之间的边界位于区间 $[x_1, y_1]$ 内。因此，(C) $\mathcal{K}$-蕴含以下析取：

$$(D) \quad \big(F(x_1) \wedge \neg F(x_1+1)\big) \vee \cdots \vee \big(F(y_1-1) \wedge \neg F(y_1)\big)$$

再次借助主张 6，我们看到，(D) $\mathcal{K}$ 的每个析取项都蕴含 (C)。总而言之，(B) 与 (D) $\mathcal{K}$-等价。

情况 2： 现在，形如

$$(E) \quad F(x_1) \wedge \cdots \wedge F(x_n) \wedge \exists x \neg F(x)$$

的公式与形如 $F(j) \wedge \neg F(j+1)$ 的主张的析取是 $\mathcal{K}$-等价的。为此，我们采用与前一种情况相同的推理。我们再次规定， $g(x_1)$ 在所有 $g(x_i)$s 中最大。然后，再次应用主张 6，我们看到 (E) 与以下析取是 $\mathcal{K}$-等价的：

$$\big(F(x_1) \wedge \neg F(x_1+1)\big) \vee \cdots \vee \big(F(-2) \wedge \neg F(-1)\big)$$

情况 3： 最后，我们来考虑如下形式的公式：

$$(F) \quad \neg F(x_1) \wedge \cdots \wedge \neg F(x_n) \wedge \exists x F(x)$$

不失一般性，我们规定 $g(x_1)$ 是诸 $g(x_i)$ 中最小者。于是主张 6 立即推出 (F) 与下式 $\mathcal{K}$-等价：

$$\neg F(x_1) \wedge \exists x F(x)$$

至此证明完成。 □

我们已经整理出所有必要的主张，终于可以证明 CEM 在序模型 $\mathcal{K}$ 中有效。

主张 8. $\mathcal{K} \Vdash$CEM。

证明。 根据主张 2， $\mathcal{K}$， k， $g \Vdash$ CEM 对于 $k \in \mathbb{Z}^-$ 成立。因此，只需证明 $\mathcal{K}$， $-\infty \Vdash (\phi > \psi) \vee (\phi > \neg\psi)$。若 $\mathcal{K}$， $-\infty \Vdash \phi$，这显然成立；因此，假设 $\mathcal{K}$， $-\infty \nVdash \phi$。

由于 $\exists x F(x)$ 在 $-\infty$ 处为假， $\psi \wedge \exists x F(x)$ 在 $-\infty$ 处也为假。因此，主张 7 蕴含 $\psi \wedge \exists x F(x)$ 与某个公式 $\psi^\star$ 等价（关于 $\mathcal{K}$），而该公式是特定类型的析取。由于 ϕ 在 $-\infty$ 处为假，这意味着：

$$\mathcal{K}, -\infty \Vdash (\phi > \psi) \equiv (\phi > \psi^\star).$$

根据主张 7，我们也可以假设 ϕ 是某种特定形式的析取。注意，$[\phi]^g$ 可能 有极小元，也可能没有 。事实上，如果任何

$$\neg F(k) \wedge \exists x F(x) \quad \neg F(k) \quad \exists x F(x) \quad \exists x F(x) \wedge \exists x \neg F(x)$$

是 ϕ 的一个析取项，那么 $[\phi]^g$ 没有极小元。否则，它有极小元。现在我们根据 $[\phi]^g$ 是否有极小元来讨论不同情况。

情况 *1:* 假设 $[\phi]^g$ 有极小元。那么 $(\phi > \psi) \vee (\phi > \neg\psi)$ 在 $-\infty$ 处成立。情况 *2:* 假设 $[\phi]^g$ 没有极小元。我们再分情况讨论：

情形 *2.1:* 假设对于某个 $j \geq k$，以下任意一项：

$$\neg F(j) \wedge \exists x F(x) \quad \neg F(j) \quad \exists x F(x) \quad \exists x F(x) \wedge \exists x \neg F(x)$$

是 $\psi^\star$ 的一个析取项。由于 $j \geq k$，主张 6 推出 $\neg F(k) \supset \neg F(j)$ 是一个全局 $\mathcal{K}$-真式。因此，$\phi > \psi^\star$ 在 $-\infty$ 处成立。因此， $\phi > \psi$ 在 $-\infty$ 处也成立。

情形 *2.2:* 假设我们不属于情形 2.1。剩下的可能性不多。一种可能是存在一个 $j < k$，使得以下某一项：

$$\neg F(j) \wedge \exists x F(x) \quad \neg F(j)$$

是 $\psi^\star$ 的一个析取项。另一种可能是 $[\psi]^g$ 有一个极小元。无论哪种情况， $\phi > \neg\psi^\star$ 在 $-\infty$ 处成立，因此 $\phi > \neg\psi$ 在 $-\infty$ 处也成立。 □

命题 1、3 和 8 共同推出命题 3。这就得出了本节的主定理：

定理 4. QC2 不是任何选择框架类的逻辑。

证明。 设 $\mathcal{C}$ 是一个选择函数框架类。若 $\mathcal{C}$ 包含一个并非弱斯塔尔纳克式的框架 $\mathcal{F}$，那么根据命题 1，QC2 相对于 $\mathcal{C}$ 并不可靠。另一方面，若 $\mathcal{C}$ 只包含弱斯塔尔纳克框架，那么根据命题 2， ¬DS 在 $\mathcal{C}$ 上有效。然而，根据命题 3， ¬DS 并非 QC2 的定理，因此 QC2 相对于 $\mathcal{C}$ 并不完备。 □

5 改进

本节将简要说明，如何以多种方式推广 QC2 的不完备性证明（定理 4）。具体而言，我们将证明，该结果可以推广到包含 $=$ 的语言，以及变域逻辑。由于其中一个逻辑（$\mathrm{QC2}^{\mathrm{v}}_{=}$）已被证明与 QST 等价，这意味着不完备性结果也适用于 QST，也就是 Stalnaker and R. Thomason 1970 最初研究的条件逻辑。

5.1 带同一性的逻辑

我们首先考虑如何将定理 4 的证明推广到 $\mathrm{QC2}_{=}$。我们的目标定理是：

定理 5. $\mathrm{QC2}_{=}$ 不是任何选择框架类的逻辑。

命题 1 已经适用于 $\mathrm{QC2}_{=}$，因此我们可以像之前一样援引它。此外，命题 2 并不取决于 $=$ 的有无。因此，只需证明下述与命题 3 类似的命题：

命题4. $\mathrm{QC2}_{=} \nvdash \mathrm{DS}$.

命题4的证明与命题 3的证明相当相似。事实上，策略是相同的：构造 $\mathrm{QC2}_{=} + \neg\mathrm{DS}$ 的序模型 $\mathcal{K}$。主要区别在于我们如何证明 $\mathcal{K} \Vdash \mathrm{CEM}$。在命题 3的证明中，我们依赖这样一个事实：如果 $\mathcal{K}$, $-\infty$, $g \Vdash \phi$，那么 ϕ 与某个具有非常特殊形式的公式等价。断言 4–7 完成了这一化简。当 $=$ 被纳入语言时，化简会变得更复杂——尽管只复杂了一点。

证明。 我们使用定义16中的同一个模型 $\mathcal{K}$。和之前一样，很容易验证所有公理和推理规则的有效性，CEM 除外。同样，唯一的问题是在 $\mathcal{K}$, $-\infty$, $g \nVdash \phi$ 的情况下，证明 $(\phi > \psi) \vee (\phi > \neg\psi)$ 在点 $-\infty$ 成立。

使用完全相同的证明，断言4的以下类似结论也成立：

断言 9. 假设 $\mathcal{K}$、$-\infty$、$g \nVdash \phi$。那么，存在某个不含 $>$ 的公式 $\phi^\star$，使得$[\phi]^g = [\phi^\star]^g$。

在命题 3 的证明中，我们接着证明了 ϕ 可以写成析取范式，其中每个析取项都极其简单。这得益于一元谓词 F 是唯一非空洞的谓词，而且仅凭一个非空洞的一元谓词，我们能表达的内容非常有限。在签名中加入同一性符号后，我们能表达的内容就稍微多一些。现在，我们可以说某些事物相同或不同，也可以计算 有多少个不是 F 的事物。不过，正如我们将看到的，我们实际上早已具备“计算”不是 F 的事物数量的能力。

继续之前，我们先引入一些新的记法。对于一个公式 $\psi(x)$ 和一个数$n > 0$，我们引入以下缩写：

$$\exists_{=n} x\ \psi(x) \coloneqq \exists x_1 \ldots \exists x_n \Big(\bigwedge_{i \leq n} \psi(x_i) \wedge \forall y \big(\psi(y) \to \bigvee_{i \leq n} y = x_i \big) \wedge \bigwedge_{i \neq j \leq n} x_i \neq x_j \Big).$$

现在我们可以陈述断言 5 的一个类似命题。

断言10。 假设 $\mathcal{K}, -\infty, g \nVdash \phi$。那么 ϕ 与 $\mathcal{K}$等价于一个析取，其中每个析取项都由若干同一性断言和非同一性断言与下列各项之一合取而成（$n, m \geq 0$, $k \geq 1$）：

$$F(x_1) \wedge \cdots \wedge F(x_n) \wedge \neg F(y_1) \wedge \cdots \wedge \neg F(y_m) \wedge \exists_{=k} x\ \neg F(x)$$
$$F(x_1) \wedge \cdots \wedge F(x_n) \wedge \exists x \neg F(x)$$
$$\neg F(x_1) \wedge \cdots \wedge \neg F(x_n) \wedge \exists x F(x) \wedge \exists_{=k} x\ \neg F(x)$$
$$\exists x F(x) \wedge \exists x \neg F(x)$$
$$\forall x F(x)$$

证明。 根据断言 9，我们可以假设 ϕ 不含 $>$。 F 和 $=$ 是语言中仅有的非空谓词，因此我们可以假设 ϕ 中的任何其他原子公式都已替换为 $\bot$。证明的其余部分与之前相同，其中我们会用到以下观察：如果存在一个 F，那么就存在无穷多个。因此，能够作出的信息量最大的数量断言是 $\forall x F(x)$（即不存在非F）以及$\exists_{=k} x\ \neg F(x)$（即恰好有 k $\neg F$）。

□

由此得到断言 7 的以下类似结果：

断言11。 假设 $\mathcal{K}$、 $-\infty$、 $g \nVdash \phi$。那么， ϕ与一个析取式逻辑等价，其中每个析取项都由若干个同一性断言和非同一性断言合取而成，并与以下某一项合取：

$$F(j) \wedge \neg F(j+1)\ \textit{where}\ k \leq j < -1$$
$$\forall x F(x)$$
$$\neg F(k) \wedge \exists x F(x)$$

证明。 这里的约化并无不同。唯一重要的观察是，陈述 $\exists_{=n} x\ \neg F(x)$与陈述 $F(-n-1) \wedge \neg F(-n)$逻辑等价。此外，由于我们假设变量赋值具有满射性（注 5），因此可以陈述每个形如 $F(-n-1) \wedge \neg F(-n)$的句子。

□

最后一个断言现在很容易得出。

断言12. $\mathcal{K} \Vdash$CEM。

证明。 我们只需修改与之类似的主张 8 的证明。注意，根据断言11，我们可以将 ϕ 化为一种特殊形式。 ϕ 中的析取项现在可能包含一些作为合取项出现的同一性断言和非同一性断言。然而，对于任意变量赋值 g，所有这类断言要么在所有可能世界中都为真，要么在所有可能世界中都不为真（也就是说，变量是刚性地解释的）。真（非）同一性断言可与 $\top$互换，假的则可与 $\bot$互换。因此，无论哪种情况，它们的存在都不会改变证明。

□

至此，命题4的证明完成。 □

5.2 变域逻辑系统

将定理 4 的证明推广到 $\mathrm{QC2}^{\mathrm{v}}_{E}$ 和 $\mathrm{QC2}^{\mathrm{v}}_{=}$ 很简单。首先，命题 1 和命题 2 都不依赖于对局部论域的任何约束。至于命题 3 和命题 4，它们可直接应用于 $\mathrm{QC2}^{\mathrm{v}}_{E/=}$，因为全局常值论域模型只是变论域模型的一种特殊情况。（更直接地说，很容易验证 $\mathrm{QC2}+Ex \vdash \mathrm{QC2}^{\mathrm{v}}_{E}$，并且 $\mathcal{K} \Vdash Ex$。）因此，所有这些结果都可以直接推广到变论域情形。

定理6。$\mathrm{QC2}^{\mathrm{v}}_{E/=}$不是任何选择框架类的逻辑系统。$\mathrm{QC2}^{\mathrm{c}}_{E/=}$亦然。

由于正如我们已经指出的，$\mathrm{QC2}^{\mathrm{v}}_{=}$ 与 QST 可证等价，因此我们得到定理6的以下重要推论：

推论1。 QST 不是任何选择框架类的逻辑系统。

因此，我们的不完全性结果相当普遍。无论是否存在 $=$，也无论对局部论域施加何种约束，该结果都适用。

6 结语

Stalnaker 和 R. Thomason 1970 曾著名地证明，量化条件逻辑 QST 对一类选择框架是可靠且完备的，在这些框架中，选择函数以公式（以及变量赋值；见定义 9）为参数。正如我们在第1节中所指出的，Stalnaker 尤其希望借助这一语义开展的许多哲学应用，都要求选择函数改为以命题为参数。人们很容易猜想，Stalnaker 和 Thomason 的完全性结果并不取决于这一差异。本文证明了这一猜想是错误的：QST 并非任何一类选择函数定义在（所有）命题上的选择框架所对应的逻辑。

这表明，Stalnaker 和 Thomason 得出的完全性结果在某种意义上只是偶然的。他们的完备性证明关键依赖于微妙的语义设计选择，尤其是关于选择函数可以接受哪些参数的选择。另一方面，我们证明了一个稳健的不完备性定理，它并不关键地取决于语言的特征，也不取决于对论域施加了哪些约束。

需要明确的是，我们的不完备性结果并未证明，按照 Stalnaker 的构想，条件句的逻辑问题无法解决。我们的结果仅表明，在存在一阶量词的情况下，某一类逻辑系统（包括 Stalnaker 和 Thomason 提出的逻辑系统）无法构成该问题的解决方案。条件句的逻辑问题能否通过其他逻辑系统解决，以及在多大程度上能够解决，仍有待探讨。最后，我们指出，我们的不完备性结果为量化条件逻辑的研究带来了一些尚待解决的问题。

首先，我们尚未确定我们的不完备性结果是否适用于外层模态（$\Box$）的逻辑得到加强的条件逻辑。值得注意的是，命题 3 的证明中所采用的所有规约，都利用了模型的可及关系并非普遍关系这一事实（具体而言，$R(k)=\{k\}$；见定义16）。可及关系确实满足一些非平凡的约束，例如自反性和传递性，

因此，我们应当预期，即使对于外层模态的逻辑强至 S4 的逻辑系统，不完备性结果也适用。但我们的不完备性结果能否推广到外层模态逻辑为 S5 之类的条件逻辑，仍是一个悬而未决的问题。[24] 如果外层模态逻辑为 S5 会带来一些差异，或许也不足为奇；Fine 1970 指出，尽管量词在所有命题上取值的 S5（S5$\pi+$）是可判定的，但对于许多其他模态逻辑 L，L$\pi+$甚至不可公理化。

其次，我们的不完备性定理依赖于证明某个公式 ¬DS 虽然在相关框架类上有效，却不是许多量化条件逻辑的定理。我们尚未确定，将 ¬DS作为公理加入这些系统，是否可能得到完备系统。如果可能，就有必要从哲学角度评估 ¬DS 是否可取。

最后，有许多自然的选择框架类，我们尚不清楚其逻辑是否可公理化。具体而言，我们尚未确定 L($\mathcal{C}$) 是否可公理化，其中 $\mathcal{C}$ 是所有全局常值（弱）Stal- naker 框架构成的类。如果最终证明这一类不可公理化，那么这将对 Stalnaker 等人 intended 这一语义框架所服务的各项哲学项目产生重大影响。

对这些问题中的任何一个给出肯定或否定的回答，都具有哲学意义，因为这有助于阐明，条件句的逻辑问题的解决方案／可解性在多大程度上取决于发展量化条件逻辑时所作的各种选择。如果通过对可达性作出某些实质性假设，或加入新的公理，可以恢复框架完备性，那么对这些假设和公理进行哲学评估就更加迫切。另一方面，如果框架不完备性对于这类语义设计选择相当稳健，那就意味着，从一开始，解决条件句的逻辑问题这一项目就注定要失败。这一领域亟待进一步研究。

参考文献

Bacon, Andrew（2015）。“语境中的斯塔尔纳克论题”。载于：《符号逻辑评论》8.1，第131–163页。Blackburn, Patrick、Maarten de Rijke与Yde Venema（2001）。模态逻辑。剑桥：剑桥大学出版社。Boolos, George（1993）。可证性的逻辑。剑桥：剑桥大学出版社。Boolos, George与Giovanni Sambin（1985）。“一个不完备的模态逻辑系统”。载于：《哲学逻辑杂志》 14.4，第351–358页。Dorr, Cian与Matt Mandelkern（2024）。“序列的逻辑”。载于：*arXiv*预印本 *arXiv:2411.16994*。Fine, Kit（1970）。“模态逻辑中的命题量词”。载于：*Theoria* 36.3，第336–346页。—（1974）。“包含S4的不完备逻辑”。载于：*Theoria* 40，第23–29页。—（2012）。“反事实句可能世界分析的一个困难”。载于：*Synthese*189.1，第29–57页。

[24]具有 S5 外部模态逻辑的条件逻辑包括 Lewis 1973 在第 137–138 页称为 VCU 和 VCSU 的系统。

Gibbard, Allan与William L Harper（1978）。“反事实与两种期望效用”。载于：决策理论的基础与应用。Clifford Alan Hooker、James J Leach与Edward Francis McClennen编。多德雷赫特：D. Reidel，第125–162页。Goldstein, Simon与Paolo Santorio（2021）。“认知模态的概率”。载于：*Philosophers' Imprint* 33，第1–37页。Hedden, Brian（2023）。“反事实决策理论”。载于：*Mind* 132.527，第730–761页。Hughes, G. E.与M. J. Cresswell（1996年）。模态逻辑新导论。伦敦：Routledge。Joyce, James（1999）。因果决策理论的基础。剑桥：剑桥大学出版社。Khoo, Justin（2022）。“如果”的意义。牛津：牛津大学出版社。Khoo, Justin与Matthew Mandelkern（2019）。“平凡性结果以及逻辑语言与自然语言之间的关系”。载于：*Mind* 128.510，第485–526页。Kocurek, Alexander W（2025）。“斯托尔纳克语义学完备吗？”载于：*Erkenntnis*，第1–9页。Lewis, David（1971年）。“三种反事实条件句逻辑系统的完备性与可判定性”。载于：*Theoria* 37，第74–85页。—（1973）。反事实。牛津：Blackwell。—（1981）。“因果决策理论”。载于：*Australasian Journal of Philosophy* 59.1，第5–30页。McNamara, Calum（2024）。“因果决策理论、语境与决定论”。载于：《哲学与现象学研究》 109.1，第226–260页。Montagna, F.（1984）。“可证性的谓词模态逻辑”。载于：*Notre Dame Journalof Formal Logic* 25，第179–189页。Nute, Donald（1978）。“条件逻辑的一个不完备性定理”。载于：*Notre DameJournal of Formal Logic* 19.4，第634–636页。—（1980）。条件逻辑专题。多德雷赫特：D. Reidel 出版公司。Rybakov, Mikhail（2024）。“可证性模态逻辑的谓词对应系统：高度不可判定性与克里普克不完备性”。载于：*Logic Journal of the IGPL* 32.3，第465–492页。Santorio, Paolo（2022）。“直陈条件句的路径语义学”。载于：*Mind* 131.521，第59–98页。—（2025）。“反事实的概率是反事实概率”。载于：*Journalof Philosophy* 122.6，第285–312页。Schultheis, Ginger（2023）。“反事实概率”。载于：*Journal of Philosophy* 120.11，第581–614页。Schulz, Moritz（2014）。“反事实与任意性”。载于：*Mind* 123，第1021–1055页。—（2017）。反事实与概率。牛津：牛津大学出版社。Segerberg, Krister（1971年）。“古典模态逻辑论”。博士论文。斯坦福：斯坦福大学。—（1989）。“条件逻辑札记”。载于：*Studia Logica* 48.2，第157–168页。罗伯特·斯塔尔纳克（1968年）。《条件句理论》。载于：逻辑理论研究。Nicholas Rescher编。牛津：Blackwell，第98–112页。—（1976）。“命题”。载于：语言哲学问题。耶鲁大学出版社，纽黑文与伦敦，第79–91页。

Stalnaker, Robert（1984）。《探究》。剑桥：麻省理工学院出版社。Stalnaker, Robert 和里士满·托马森（1970）。“条件逻辑的语义分析”。载于：*Theoria* 36.1，第23–42页。S. K.·托马森（1972）。“时态逻辑的语义分析”。载于：《符号逻辑杂志》37.1，第150–158页。—（1974）。“模态逻辑中的一个不完备性定理”。载于：*Theoria* 40.1，第30–34页。约翰·范本特姆（1978）。“两个简单的不完备模态逻辑”。载于：*Theoria* 44.1，第25– 37页。巴斯·C.·范弗拉森（1974）。“条件逻辑中的隐变量”。载于：*Theoria* 40.3，第176–190页。弗兰克·维尔特曼（1985）。《条件句逻辑》。博士论文。阿姆斯特丹大学（逻辑、语言与计算研究所）。