arXiv:2602.04097v1 [math.DS] 4 Feb 2026

子移位的稳定覆盖

SOLLY COLES、VAN CYR、BRYNA KRA 和 RONNIE PAVLOV

Abstract. 给定一个动力系统，特征测度是一个在其所有自同构作用下均保持不变的博雷尔概率测度。Frisch 和 Tamuz 曾提出这样的问题：每个符号系统是否都支持这样的测度？受此问题启发，我们研究子移位由其有限型移位近似所构成的自然覆盖，以及这种覆盖可以稳定的两种意义。第一种是从熵衰减的角度而言，第二种则是从周期点的角度而言。我们证明，第一种稳定化类型给出了语言稳定移位这一类的新刻画，并表明存在一种仅依赖于熵差来构造特征测度的机制。对于第二种稳定化类型，我们证明它定义了一类新的子移位，这类子移位在共轭映射下保持不变，并且具有特征测度。

1. 特征测度

给定一个符号动力系统（X，σ），存在一个由更简单的系统——有限型移位——对 X 进行逼近的典范序列。我们研究 X 的性质与该逼近序列在各种意义下趋于稳定之间的相互作用。我们研究稳定化的动机，是推进由 Frisch 与 Tamuz [6]提出的特征测度问题。他们定义：若一个测度在自同构群 Aut(X，T) 下不变，则该测度对拓扑系统（X，T）是特征的。并非每个拓扑系统都支撑这样的测度，例如 [6] 中提到，作用在康托集上的恒等映射就不支撑。甚至存在不支撑特征测度的极小系统的例子 [5]。

另一方面，已知有许多类符号系统支撑特征测度。例如，Parry [9] 证明，任何混合有限型移位都有唯一的最大熵测度，因此该测度必定是特征测度。尽管并未使用这一术语，由克雷洛夫–博戈柳博夫定理可知，任何具有可和自同构群的系统都支撑这样的测度。容易验证，任何具有周期点的符号系统也有特征测度。
Frisch 与 Tamuz [6]证明，任何零熵符号系统都支撑一个特征测度。他们还提出了一般性问题 [6, 问题1.3]：是否每个符号 $\mathbb{Z}$系统都支撑特征测度?

解决这一问题的一种富有成效的方法，是利用子移位（X，σ）的有限型子移位覆盖$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$。这是有限型移位的一个典范序列（X_n，σ_n），使得

$$X = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

BK 和 RP 衷心感谢 Simons Foundation 的支撑，BK 还感谢 NSF 资助项目 DMS-2348315 的支撑。

利用这一覆盖， [2]引入了语言稳定移位这一类，其中有限型子移位覆盖中的子移位在任意长的连续段上保持不变。每一个语言稳定移位都支撑一个特征测度 [2]。这些移位在 [3], 中以定量方式得到了进一步研究，其中证明：只要有限型子移位覆盖中的逼近序列满足良好可逼近性，语言稳定移位的因子便具有特征测度。

本文针对移位的有限型子移位覆盖引入了两种稳定性概念，它们蕴含特征测度的存在。由这些条件定义的每个类都包含所有语言稳定移位，但要证明特征测度的存在，还需要采用新的方法。定义移位 (X, σ)为**周期稳定**，如果对所有 $m \in \mathbb{N}$, 都存在 $n, p \in \mathbb{N}$，使得 X_n 中最小周期为 p 的周期点集合与X_{n+m} 中最小周期为 p 的周期点集合相同（见定义 4.1）。在第4节中，我们证明这一条件足以保证特征测度的存在。

定理1.1。 每个周期稳定子移位都支撑一个特征测度。

容易验证，任何至少有一个周期点的移位都是周期稳定的，因此该定理最有趣的情形是 X 没有任何周期点。在这种情况下，有限型子移位覆盖 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的项提供了一个“周期点光环”：这些周期点实际上并非 X 的元素，却仍能帮助我们为 X找到一个特征测度。此外，任何语言稳定移位 X（见 [2]）都具有这样的性质：对所有 $m \in \mathbb{N}$，都存在 n 使得 $X_{n+m} = X_n$，因此这类移位尤其都是周期稳定的。我们证明，我们的结果超越了具有周期点的移位和语言稳定移位这两种情形，因为已知这两类移位都支撑特征测度。在第4.2节中，我们构造了一个例子，说明周期稳定移位这一类包含一个既没有周期点、也不是语言稳定的子移位。

在 [2], 中还证明了，所有语言稳定移位都有一个特征测度，且该测度是最大熵测度。尽管我们证明了所有周期稳定移位也都有一个特征测度，但我们构造的测度不一定是最大熵测度。

转而考察另一种稳定性，我们考虑有限型子移位覆盖中移位的熵。我们在第 3 节定义**熵稳定移位** 这一类，并再次证明，这种稳定性会产生一个特征测度。

定理 1.2. 每个拓扑混合的熵稳定子移位都支撑一个特 -
征测度。

在第 3.3 节中，我们证明，熵稳定移位这一类实际上是语言稳定移位这一类的一种新刻画。尽管这两类相同，但证明熵稳定移位具有特征测度所用的机制，仅取决于有限型子移位覆盖中各项的熵降。虽然这种方法并未提供一类此前未知其具有特征测度的移位，但要证明语言稳定移位具有特征测度， [2] 中使用的方法从根本上需要符号结构：证明的关键在于，语言稳定移位的自同构由块码定义，并且可以扩展为该语言稳定移位的有限型子移位覆盖中除有限项之外各项的自同构。相比之下，我们证明熵稳定移位具有特征测度的方法，只用到了有限型子移位覆盖中连续各项的运行段之间的熵降。因此，我们的方法很可能也能推广到某些

非符号系统，从而提供一种借助由较简单系统构成的自然覆盖来研究更一般拓扑动力系统的方法。

2. Notation and background

2.1. 子移位与语言。假设 $\mathcal{A} = \mathcal{A}(X)$ 是一个有限字母表，并将 $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 写作 $x = \big(x(n) : n \in \mathbb{Z}\big)$。左移位 σ: $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 定义为对所有 $n \in \mathbb{Z}$，有 $(\sigma x)(n) = x(n+1)$。若 $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 非空、闭且对 σ 不变，则称 (X, σ) 为一个子移位。

对于每个词 $w \in \mathcal{A}^*$，令 $|w|$ 表示 w 的长度，令 w_i 表示 w $(0 \le i < |w|)$ 的第 i^{th} 个字母，并令

$$[w] := \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \colon x(i) = w_i \text{ for all } 0 \le i < |w|\}$$

表示由 w 确定的柱集。

一般而言，我们约定用下标 w_i 表示有限词 w 中的第 i^{th} 个字母，而用 $x(i)$ 表示元素（无限词）$x \in X$ 中的第 i^{th} 个字母。然而，当 X 的元素带有下标时，我们会滥用记号，将这些下标合并使用（例如第4.2.2节），但根据上下文应当能够清楚理解。

对于子移位 (X, σ)，对每个 $n \in \mathbb{N}$，我们记

$$\mathcal{L}_n(X) := \{w \in \mathcal{A}^n \colon [w] \cap X \neq \emptyset\}$$

为 **语言** $\mathcal{L}(X) := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}_n(X)$ 中长度为 n 的词，其中 X。我们将 X 的语言中的任意词称为**可容许** 词。若 $a, u, b \in \mathcal{L}(X)$ 且$w = aub \in \mathcal{L}(X)$，并约定 a 和 b 中有一个可以为空，则称 u 为 w 的一个**子词**，称 a 为词 w 的**前缀**，称 b 为词 w 的**后缀**。若 $w \in \mathcal{L}(X)$，我们将向右的无限周期词 $www\ldots$ 记为 w^{∞}，将向左的无限周期词 $\ldots www$ 记为 ${}^{\infty}w$。

若 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}^*$，则

$$X_{\mathcal{F}} := \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \colon \sigma^i(x) \notin [w] \text{ for all } i \in \mathbb{Z} \text{ and } w \in \mathcal{F}\}$$

是一个子移位。任意子移位 (X, σ) 均可通过指定其语言 $\mathcal{L}(X)$ 来定义，或者等价地，通过指定其规范禁词集 $\mathcal{F}(X) := \mathcal{A}^* \setminus \mathcal{L}(X)$ 来定义，因为 $X = X_{\mathcal{F}(X)}$。然而，一般而言，可能存在一个集合 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}^*$，使得$X = X_{\mathcal{F}}$，但 $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}(X)$。在这种情况下，我们称 X **可由** $\mathcal{F}$ 定义。若子移位 (X, σ) 可由有限集合 $\mathcal{F}$ 定义，则称其为**有限型移位** 。若一个禁词不含任何作为规范禁词的真子词，则称其为**极小**，并注意到极小禁词集合是定义子移位的一种规范方式。若有限型移位由有限集合 $\mathcal{F}$ 定义，且其中所有禁词的长度至多为 2，则称其为**最近邻** 移位。

2.2. 子移位的有限型子移位覆盖。 对于具有禁词$\mathcal{F}(X)$的子移位(X, σ)，对每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $\mathcal{F}_n(X) := \mathcal{A}^n \setminus \mathcal{L}_n(X)$表示 X中长度为 n 的禁词。定义 X_n 为 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 中禁词集合为 $\bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{F}_k(X)$的有限型子移位。序列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为X的**有限型子移位覆盖**，并且由定义立即可得

$$X_1 \supseteq X_2 \supseteq X_3 \supseteq \cdots \supseteq X_n \supseteq X_{n+1} \supseteq \ldots$$

并且读者可以验证 $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$。

子移位 (X, σ) 是**混合** 的，如果对所有词 $u, v \in \mathcal{L}(X)$, 存在某个 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \ge N$ 都存在某个词 $w \in \mathcal{L}_n(X)$，使得 $uwv \in \mathcal{L}(X)$。当子移位 (X, σ) 是混合的时，其有限型子移位覆盖中的每个 X_n 也是混合的。在

这种情况下，由 Parry [9] 可知，每个 X_n 都具有唯一的最大熵测度 μ_n。

2.3. 子移位的自同构群。令 $\varphi \in \mathrm{Aut}(X)$ 为子移位 (X,σ) 的一个自同构，这意味着 $\varphi\colon X \to X$ 是一个同胚，且 $\varphi\circ\sigma = \sigma\circ\varphi$。令 $\mathrm{Aut}(X) = \mathrm{Aut}(X,\sigma)$ 表示子移位 (X,σ) 的所有自同构构成的群。

给定子移位 (X,σ) 的一个自同构 φ，根据柯蒂斯-赫德伦-林登定理，存在 $R\in\mathbb{N}$ 和一个映射 $\Phi\colon \mathcal{L}_{2R+1}(X) \to \mathcal{A}$，使得

$$(\varphi(x))(i) = \Phi(x(i-R)x(i-R+1)\dots x(i)\dots x(i+R-1)x(i+R))$$

对所有 $x\in X$ 和所有 $i\in\mathbb{Z}$ 均成立（注意，为了清晰起见，我们在长度为 $2R+1$ 的词 x 中添加了逗号）。我们称 Φ 为一个实现 φ 的块映射，R 为该块映射的作用范围，并称 φ 为一个作用范围为 R 的滑动块码。参数 R 并非唯一确定；如果 φ 的作用范围为 R，那么对于任意 $R'\geq R$，其作用范围也为 R'。

令 $\mathrm{Aut}_R(X)$ 表示所有满足以下性质的 $\varphi\in\mathrm{Aut}(X)$ 的集合：φ 和φ^{-1} 都是作用范围为 R 的滑动块码。根据定义可立即得出，对所有 $R\geq 1$，$\mathrm{Aut}(X) = \bigcup_{R=0}^{\infty}\mathrm{Aut}_R(X)$ 且 $\mathrm{Aut}_R(X) \subseteq \mathrm{Aut}_{R+1}(X)$。我们记录下面这个初等引理，以便在第 4 节中使用。

引理 2.1。假设 $\varphi\in\mathrm{Aut}(X)$ 的作用范围为 R，并且 Φ、$\Phi^{-1}\colon \mathcal{L}_{2R+1}(X)\to\mathcal{A}$ 是作用范围为 R 的块映射，分别实现 φ、φ^{-1}。那么 $\Phi^{-1}\circ\Phi$实现恒等映射 $\mathrm{Id}\colon X\to X$，是一个作用范围为 $2R$ 的块码。

证明。假设 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的有限型子移位覆盖。对于任意 $n\geq 2R+1$，映射Φ（对 Φ^{-1} 也类似）定义了一个定义域为 X_n 的映射：将块映射 Φ 作为滑动块码作用于 X_n 的元素即可得到该映射。我们略去符号上的区别，用 φ表示由此得到的 X_n 的自同构。初看起来，这将 φ 的定义域扩展了：$X\to X$ 成为一个新的映射 $\varphi\colon X_n\to\mathcal{A}^*$，其中任意 $n\in\mathbb{N}$ 均满足 φ 将 X 的元素映射到 X 的元素。然而，由于 $\varphi(X)=X$，我们断言，若 $k\in\mathbb{N}$ 固定且 $w\in\mathcal{L}_{2R+k}(X)$ 是一个固定的词，那么词 $\Phi(w)\in\mathcal{A}^k$由下式给出

$$(\Phi(w))(j) = \Phi(w_j, w_{j+1},\dots,w_{j+R},\dots,w_{j+2R-1},w_{j+2R})$$

对每个 $0\leq j<k$ 是 $\mathcal{L}_k(X)$的一个元素。具体而言，对每个 $w\in\mathcal{L}_{2R+k}(X)$，存在某个 $x\in[w]\cap X$，且词 $\Phi(w)$作为 $\varphi(x)\in X$的子词出现。特别地，$\varphi(X_{2R+k})\subseteq X_k$。对于 $k\geq 2R+1$，这使我们能够将 Φ^{-1} 应用于$\Phi(w)$，并得到 $\mathcal{L}_{k-2R}(X)$的一个元素。由于 Φ 和 Φ^{-1} 是实现从 X 到 X的逆映射的块码，因此对所有$4R<j<|w|-4R$有 $(\Phi^{-1}\circ\Phi)(w)_j = w_j$。换言之，$\Phi^{-1}\circ\Phi$ 将恒等映射实现为一个作用范围 $2R$ 块码：若 $k\geq 2R+1$，且我们将 $\Phi^{-1}\circ\Phi$ 应用于 $\mathcal{L}_{2R+k}(X)$中的一个词，则该映射会从该词中去掉最右端和最左端的 $2R$ 个字母，并保持中间部分不变。□

2.4. 测度与熵。如果 (X,σ) 是一个子移位，我们用 $h_{\mathrm{top}}(X)$ 表示 X 的拓扑熵；如果 μ是 σ上的一个不变测度，我们用 h_μ 表示测度 μ的熵。

测度 μ 是子移位（X,σ）的特征测度，如果 μ 在自同构群 $\mathrm{Aut}(X,\sigma)$ 下不变。

3. Entropy stability

3.1. 量化稳定性条件。我们首先给出子移位的语言所满足的一个条件，该条件足以确保高熵测度在长度不超过某个固定值的词上彼此接近（文献中通常将此性质称为有效内在遍历性）。

定理 3.1. 设 (X,σ) 是一个混合有限型移位，其最大熵测度为 μ。设 F 为极小禁词的最大长度， s 为长度为 F的可容许词的数量。设 $\varepsilon>0$ 和 $\ell\in\mathbb{N}$。假设 μ' 是 (X,σ) 上的一个不变概率测度，满足

$$h_{\mu'} > h_{\mathrm{top}} - \frac{\varepsilon^2}{(\frac{4}{3})^{2\ell}(\xi(s))^2},$$

其中

$$\xi(s) = \frac{30s^{3(s^2+1)}}{1-\left(1-\frac{1}{4s^{2s^2}}\right)^{\frac{1}{s^2}}}. \tag{1}$$

那么对于所有长度至多为 ℓ的可容许词 w，都有 $|\mu'([w])-\mu([w])|<\varepsilon$.

注意到，函数 $\xi(s)$ 为正，且随 s. 增大而增大

我们的证明采用了 Kadyrov [7] 提出的一种方法，该方法旨在对最近邻有限型子移位存在唯一最大熵测度这一结论给出定量版本。我们首先介绍一些记号，并回顾 [1] 和 [10] 关于 Ruelle转移算子谱性质的结果。给定一个混合有限型移位（X， σ），定义（X^+， σ）为 X的单侧子移位版本。令 C（X^+）表示 X^+上的连续实值函数，则定义*Ruelle*转移算子 $\mathcal{L}$: C（X^+）$\to C$（X^+）为

$$\mathcal{L}f(x) = \sum_{\sigma y = x} f(y).$$

$\mathcal{L}$有一个简单的最大正特征值 λ，其对应的特征函数 h. 严格为正。（这里我们沿用 Bowen 的约定，用 h表示该特征函数；请勿将其与本文中表示熵的符号混淆。）特征值 λ 还满足 h_{top}（X^+）$=\log\lambda$. 存在唯一的概率测度 ν 满足 $\mathcal{L}^*\nu=\lambda\nu$, 并且不失一般性，我们进一步假设 h 满足 ν（h）$=1$。

归一化转移算子 $\mathcal{L}_0$: $C(X^+)\to C(X^+)$ 定义为

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{\lambda}\Delta_h^{-1}\mathcal{L}\Delta_h,$$

其中 Δ_h: $C(X^+)\to C(X^+)$ 是算子 $f\mapsto hf$. 。 $\mathcal{L}_0$ 的谱是 $\mathcal{L}$ 的谱缩放 λ 倍后的结果，而常函数是对应于最大特征值的特征函数。相应的特征测度是 (X^+,σ) 的最大熵测度 μ，其定义为 $d\mu = h\,d\nu$.

在下一个命题中，我们假设 X^+ 是最近邻有限型移位。在定理 3.1 的证明中，我们稍后会将一般的有限型移位重新编码为最近邻有限型移位。

命题 3.2. 设(X^+,σ) 是一个具有最大熵测度 μ 的混合最近邻有限型移位。设 w 是一个长度为 $\ell\geq 1$ 的可容许词，并且

设 $f = \mathbf{1}_{[w]}$ 和 $g = f - \mu(f)$。存在 $A > 0$ 和 $\beta \in (0,\ 1)$，使得对于所有$n \geq 0$,

$$\|\mathcal{L}_0^n g\|_\infty \leq \frac{A\|h\|_\infty}{\inf h}\beta^{n-\ell}, \tag{2}$$

其中， $\mathcal{L}_0$ 是归一化转移算子， h 是与 $\mathcal{L}$对应的特征函数。此外，令 s 表示字母表的大小，则有 $\frac{\|h\|_\infty}{\text{下确界 } h} \leq s^s$，并且我们可以选择 $A \leq 15s^{2s^2}$ 和 ——

$$\frac{3}{4} \leq \beta \leq \left(1 - \frac{1}{4s^{2s^2}}\right)^{\frac{1}{s^2}}.$$

证明。 令 $\mathcal{L}$: $C(X^+) \to C(X^+)$表示Ruelle转移算子， λ 是其（单一且为正的）最大特征值，特征函数为 h，并令 ν 为满足$\mathcal{L}^*\nu = \lambda\nu$的唯一概率测度。根据 [1, 引理 1.12], , 存在 $A > 0$ 和$\beta \in (0,\ 1)$，使得对所有 $n \geq \ell$,

$$\|\tfrac{1}{\lambda^n}\mathcal{L}^n(hg)\|_\infty \leq A\nu(|hg|)\beta^{n-\ell}.$$

由于 $\mathcal{L}_0 = \frac{1}{\lambda}\Delta_h^{-1}\mathcal{L}\Delta_h$，因此

$$\|\mathcal{L}_0^n g\|_\infty \leq \frac{1}{\inf h}\|\tfrac{1}{\lambda^n}\mathcal{L}^n(hg)\|_\infty \leq \frac{A}{\inf h}\nu(|hg|)\beta^{n-\ell} \leq \frac{A\|h\|_\infty}{\inf h}\beta^{n-\ell}. \tag{3}$$

为证明关于 h的界，令 Q 表示 X^+ 的转移矩阵，并令 M为其本原指数。Wielandt [13], 给出的关于 M的（紧）界为

$$M \leq (s-1)^2 + 1. \tag{4}$$

设 u 是 Q 的左 Perron-Frobenius特征向量，并定义 ψ: $X^+ \to \mathbb{R}$ 如下:

$$\psi(x) = u_{x(0)}. \tag{5}$$

Then

$$(\mathcal{L}\psi)(x) = \sum_i Q_{ix(0)}\psi(ix(0)x(1)\dots) = \sum_i u_i Q_{ix(0)} = \lambda u_{x(0)} = \lambda\psi(x),$$

因此 ψ 是 λ. 的特征函数。由于 λ 是 $\mathcal{L}$ 的单特征值，特征函数 h 在相差一个比例因子的意义下唯一。因此，假设 $\nu(h) = 1$ 意味着 $h = {}^{1}{}_{(\psi)}\psi\cdot$ 。特别地，根据 $\overline{\psi}$的定义 (5)，特征函数 h 仅取决于第一项。

对于 $n < \ell$，直接计算可得 $\mathcal{L}_0^n g(x) = {}^{h}{}_{(x(0))\lambda^n h(\cancel{x(n))} - \mu(f)}$。回想一下，$h$ 严格正且只取有限个值， $0 \leq \mu(f) \leq 1$，并且 $\lambda > 1$。如果 ${}_{h(x(0))\ \lambda^n h(x(n))} > \mu($ $\cancel{f)}$，那么

$$\left|\frac{h(x(0))}{\lambda^n h(x(n))} - \mu(f)\right| \leq \frac{h(x(0))}{\lambda^n h(x(n))} \leq \frac{h(x(0))}{h(x(n))} \leq \frac{\|h\|_\infty}{\inf h}.$$

否则,

$$\left|\frac{h(x(0))}{\lambda^n h(x(n))} - \mu(f)\right| \leq 1 \leq \frac{\|h\|_\infty}{\inf h}.$$

不失一般性，我们可以假设 $A \geq 1$，并且由于 $n < \ell$,

$$\frac{\|h\|_\infty}{\inf h} \leq \frac{A\|h\|_\infty}{\inf h}\beta^{n-\ell}.$$

将此与 (3) 结合，我们得出 (2) 对所有 $n \geq 1$ 都成立。

令 $u_p = \min_i u_i$, 且 $u_q = \max_i u_i$, 我们有

$$\frac{\|h\|_\infty}{\inf h} = \frac{u_q}{u_p}.$$

考虑由 Q所描述的图。由于 X 是传递的，存在一条从q 到 p 、长度为 $t < s$, 即$(Q^t)_{qp} \geq 1$. 由于 u 是一个左特征向量，我们有

$$\lambda^t u_p = (uQ^t)_p = \sum_j u_j (Q^t)_{jp} \geq u_q,$$

由此得到

$$\frac{u_q}{u_p} \leq \lambda^t \leq s^s. \tag{6}$$

第一个不等式随之成立。

剩下要证明的是 A 和 β 的界成立。在 [1], 中证明了

$$A = \frac{(\|h\|_\infty + K)\sup_{0<r\leq M}(\frac{1}{\lambda^r}\|\mathcal{L}^r\|)}{1-\eta} \quad \text{and} \quad \beta = (1-\eta)^{\frac{1}{M}},$$

其中 $\eta = (4\lambda^M \|h\|_\infty)^{-1}$ 且 $K = \lambda^M e^2$. (4)中给出了 M 的一个界，因此我们必须求出用 s表示的 λ 和 $\|h\|_\infty$ 的界。

回想一下， $h_{\text{top}}(X^+) = \log \lambda$。因此， λ 是 $Q,$的Perron-Frobenius特征值；又由于 Q是一个元素属于 $\{0,1\},$的不可约 $s \times s$矩阵，我们有$1 < \lambda \leq s$。由（5）可知， h 仅取决于第一个元素，因此条件 $\nu(h) = 1$可表示为

$$\sum \nu([i])h(i) = 1. \tag{7}$$

我们还有$\sum_i \nu([i]) = 1$，因此 $\|h\|_\infty \geq 1$. 。为求h的上界，令 v 表示向量 $v_i = \nu([i])$。那么，由于 ν 是一个特征测度，

$$(Qv)_i = \sum_j Q_{ij} v_j = \int_{X^+} Q_{ix(0)} d\nu(x) = \int_{X^+} \mathcal{L}\mathbf{1}_{[i]} d\nu = \lambda \int_{X^+} \mathbf{1}_{[i]} d\nu = \lambda v_i,$$

由此可知， v 是一个右 Perron-Frobenius 特征向量。特别地， v 是严格正的。结合（7），我们得到

$$\|h\|_\infty \leq \frac{1}{\min_i v_i}.$$

用来推导（6）的类似论证可得$\max_i v_i \leq \lambda$最小值,，而 $\sum_i v_i = 1$意味着最大值$_i v_i \geq \frac{1}{s}$. 。综合这些结果，我们有 $\|h\|_\infty \leq s\lambda^s \leq s^{s+1}$. 。因此

$$\frac{1}{4s^{2s^2}} \leq \frac{1}{4s^{s^2+s+1}} \leq \eta \leq \frac{1}{4}.$$

为完成证明，我们给出 $\sup_{0<r\leq M}(\frac{1}{\lambda^r}\|\mathcal{L}^r\|)$ 的上界。令 $r \geq 1$和 $\phi \in C(X^+)$。那么

$$|\mathcal{L}^r \phi(x)| \leq \sum_{\sigma^r y = x} |\phi(y)| \leq \|\phi\|_\infty \sum_i (Q^r)_{ix(0)} \leq \|\phi\|_\infty s^r \leq \|\phi\|_\infty s^{s^2}.$$

因此我们有 $\|\mathcal{L}^r\| \leq s^r$，并且 $\sup_{0<r\leq M}(\frac{1}{\lambda^r}\|\mathcal{L}^r\|) \leq s^{s^2}$. 。由此可得

$$A \leq \frac{4s^{2s^2}(1+e^2)}{3} \leq 15s^{2s^2} \quad \text{and} \quad \frac{3}{4} \leq \beta \leq \left(1 - \frac{1}{4s^{2s^2}}\right)^{\frac{1}{s^2}},$$

从而得到证明中的最后两个不等式。 □

我们利用这一点完成定理 3.1 的证明。

定理 *3.1* 的证明。 设 (X,σ) 是一个混合有限型移位，其最大熵测度为 μ，并固定 $\varepsilon > 0$ 和一个长度为 ℓ 的可容许词 w。设 (X^+,σ) 是 (X,σ) 的单侧子移位版本。注意，通过将 (X^+,σ) 中的所有柱集的测度定义为与 μ 在 (X,σ) 中赋予它们的测度相同，μ 在 (X^+,σ) 上定义了一个最大熵测度；同时注意，这一过程保留了熵。因此，我们在 (X^+,σ) 的设定下证明此定理，因为结论仅取决于柱集的测度。稍微滥用一下记号，我们继续用 (X,σ) 表示该系统，而不是 (X^+,σ)。

首先，我们将 X 在长度为 F的词上重新编码。换言之，我们构造一个有向图，其顶点是 $\mathcal{L}_F(X)$ 中的词；当且仅当 $a_{i+1} = b_i$对所有 $0 \le i < F-1$都成立时，顶点 $(a_0, \ldots\ldots, a_{F-1})$ 与 $(b_0, \ldots\ldots, b_{F-1})$ 之间有一条有向边。于是，X 就是由这个有向图表示的有限型移位。我们将这个新的移位记作 $\tilde{X}$，并注意到 $\tilde{X}$ 与 X拓扑共轭。令 $\psi\colon \tilde{X} \to X$ 为共轭映射，并令 $\tilde{\mu}$ 为与 μ对应的测度，定义在 $\tilde{X}$ 上。

如果 $\ell < F$，我们将这个柱集记作 $[w]$。令 $\ell = F-1$，长度为 F 的柱集 $[w]$ 属于 $\tilde{X}$，以及 $g = \mathbb{1}_{[w]}$。令 $g_n = \mathcal{L}_0^n g$。根据 Kadyrov 的结果 [7, 引理 3.2]，，我们有

$$|\tilde{\mu}'(g_{n+1}) - \tilde{\mu}'(g_n)| \le \sqrt{2}\|g_n\|_\infty (h_{\tilde{\mu}} - h_{\tilde{\mu}'})^{1/2}$$

对任意不变概率测度 $\tilde{\mu}'$。由命题 3.2，

$$\|g_n\|_\infty \le \frac{A\|h\|_\infty}{\inf h}\beta^{n-\ell+F-1},$$

特别地，

$$\lim_{n\to\infty} g_n = 0 = \tilde{\mu}(g).$$

设 μ' 为 X 上的任意不变概率测度，$\tilde{\mu}'$ 为其在 ψ 下的推前。由于 ψ 是拓扑共轭，$h_\mu = h_{\tilde{\mu}}$ 与 $h_{\mu'} = h_{\tilde{\mu}'}$。于是，我们有

$$\begin{aligned}
|\mu'([w]) - \mu([w])| &= |\tilde{\mu}'(g) - \tilde{\mu}(g)| \\
&= \lim_{n\to\infty} |\tilde{\mu}'(g) - \tilde{\mu}'(g_n)| \le \sum_{n=0}^{\infty} |\tilde{\mu}'(g_{n+1}) - \tilde{\mu}'(g_n)| \\
&\le \frac{\sqrt{2}A\beta^{F-1}\|h\|_\infty}{\beta^\ell(1-\beta)\inf h}(h_\mu - h_{\mu'})^{1/2} \le \frac{\sqrt{2}A\|h\|_\infty}{\beta^\ell(1-\beta)\inf h}(h_\mu - h_{\mu'})^{1/2},
\end{aligned}$$

它小于 ε，只要

$$h_\mu - h_{\mu'} < \frac{\varepsilon^2}{\left(\frac{\sqrt{2}A\|h\|_\infty}{\beta^\ell(1-\beta)\inf h}\right)^2}. \tag{8}$$

命题 3.2 给出的三个界意味着

$$\left(\frac{4}{3}\right)^\ell \xi(s) \ge \frac{\sqrt{2}A\|h\|_\infty}{\beta^\ell(1-\beta)\inf h},$$

其中， s 是 X的字母表大小，等于 X. 中长度为 F的可容许词的数量。可以验证，事实上，当 $h_\mu - h_{\mu'}$满足 (8) 时， $|\mu'([w]) - \mu([w])| < \frac{\varepsilon}{s}$。

若 $\ell < F$，论证类似。在这种情况下， $\psi[w] = \bigsqcup_{i=1}^{r}[\tilde{\alpha}_i]$，其中每个 $\tilde{\alpha}_i$都是 X 和 $r < s$的字母表中的一个符号。我们应用这一论证，将 $\tilde{w}$替换为 $\tilde{\alpha}_i$ （并使用界 ε/s 而不是 ε），从而得到无论何时

$$h_\mu - h_{\mu'} < \frac{\varepsilon^2}{(\frac{4}{3})^{2\ell}(\xi(s))^2},$$

我们有 $|\tilde{\mu}'[\tilde{\alpha}_i] - \tilde{\mu}[\tilde{\alpha}_i]| < \frac{\varepsilon}{s}$. 。由此，三角不等式给出

$$|\mu'[w] - \mu[w]| \le \sum_{i=1}^{r} |\tilde{\mu}'[\tilde{\alpha}_i] - \tilde{\mu}[\tilde{\alpha}_i]| < \varepsilon. \qquad \square$$

3.2. **熵稳定移位的特征测度**。我们证明，在有限型子移位覆盖中，移位的熵降足够小，就足以保证特征测度的存在。

定理 3.3. 假设 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是拓扑混合系统(X,σ)的有限型子移位覆盖。假设对于每个 $\varepsilon > 0$和整数 $\ell, j \ge 1$，都存在一个整数$m = m(\varepsilon,\ell,j)$ 使得

$$\left|h_{\mathrm{top}}(X_m) - h_{\mathrm{top}}(X_{m+j})\right| < \Xi(\varepsilon,\ell,j) \tag{9}$$

对于函数 $\Xi(\varepsilon,\ell,j) = \frac{\varepsilon^2}{(\frac{4}{3})^{2\ell}(\xi(s_m))^2}$，其中 $s_m \le |\mathcal{A}(X)|^m$表示 X_m 中长度为 m 的可容许词的数量，而 ξ 定义见 (1)。那么系统 (X,σ) 支撑一个特征测度。

定义 3.4。具有满足定理 3.3 条件的有限型子移位覆盖的拓扑传递子移位（X,σ），称为熵稳定。

证明。我们先在系统 (X,σ) 上构造一个测度 μ，它是测度 $(\mu_m)_{m\in\mathbb{N}}$ 的弱*极限，其中 μ_m 表示 X_m 上的最大熵测度。正函数 $\Xi(\varepsilon,\ell,j)$ 关于各个参数单调递减：当 ε 趋于零、整数 ℓ 趋于无穷大，以及当 $j \to \infty$ 时皆如此。因此，如果对于某个 $m \in \mathbb{N}$、某个 $\varepsilon_0 > 0$ 和某个 $\ell_0, j_0 \in \mathbb{N}$，(9) 成立，那么对于相同的 m，以及 $\varepsilon > 0$ 和 ℓ，$j \in \mathbb{N}$，只要 $\varepsilon \ge \varepsilon_0$, $\ell \le \ell_0$，且 $j \le j_0$，(9) 也成立。给定 $\varepsilon > 0$ 和 $\ell, j \in \mathbb{N}$，令 $m(\varepsilon,\ell,j)$ 为使 (9) 成立的 m 的值。为方便记号，我们定义 $m_n := m(1/n, n, n)$。

令 $\phi \in \mathrm{Aut}(X,\sigma)$，并假设 ϕ 的作用范围为 R（我们总是假设作用范围是对称的，因此 ϕ^{-1} 的作用范围也为 R）。固定一个词 $w \in \mathcal{L}(X)$。选取大于 $\max\{|w|, 2R+1\}$ 的 $n \in \mathbb{N}$。根据 m_n 的定义，我们有

$$|h_{\mathrm{top}}(X_{m_n}) - h_{\mathrm{top}}(X_{m_n+n})| < \Xi(1/n, n, n).$$

由于 $h_{\mu_{m_n+n}}(\sigma) = h_{\mathrm{top}}(X_{m_n+n})$，我们有

$$h_{\mu_{m_n+n}}(\sigma) > h_{\mathrm{top}}(X_{m_n}) - \Xi(1/n, n, n). \tag{10}$$

我们还有 $h_{\phi_*(\mu_{m_n+n})}(\sigma) = h_{\mu_{m_n+n}}(\sigma)$，因为 ϕ 是 X_{m_n+n} 与 ϕ之间的拓扑共轭（X_{m_n+n}）。此外，由于 $\phi(X_{m_n+n}) \subseteq X_{m_n+n-2R} \subseteq X_{m_n}$，我们有 $\phi_*\mu_{m_n+n}$ 是定义在 X_{m_n}上的测度。因此也可推出

$$h_{\phi_*(\mu_{m_n+n})}(\sigma) > h_{\mathrm{top}}(X_{m_n}) - \Xi(1/n, n, n). \tag{11}$$

因此，由定理 3.1 和 (10) 可得

$$|\mu_{m_n+n}([w]) - \mu_{m_n}([w])| < \frac{1}{n}$$

并由定理 3.1 和 (11) 可得

$$|\phi_*\mu_{m_n+n}([w]) - \mu_{m_n}([w])| < \frac{1}{n}.$$

结合这些结果，我们得到

$$|\phi_*\mu_{m_n+n}([w]) - \mu_{m_n+n}([w])| < \frac{2}{n}. \tag{12}$$

设 μ 是序列 $(\mu_{m_n+n})_{n\in\mathbb{N}}$ 的一个弱*极限。由于对所有充分大的 n，(12) 都成立，因此可得

$$|\phi_*\mu([w]) - \mu([w])| = 0. \tag{13}$$

由于 (13) 对任意词 $w \in \mathcal{L}(X)$ 都成立，因此可得 $\phi_*\mu = \mu$。由于这对任意 $\phi \in \mathrm{Aut}(X)$ 都成立，因此可得 μ 是 X 上的一个特征测度。□

3.3. 熵稳定性与语言稳定性的等价性。 语言稳定移位具有这样的性质：对于所有 $j \in \mathbb{N}$，都存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得$X_m = X_{m+j}$。因此，任何语言稳定移位也都是熵稳定的。为证明逆命题，我们先计算从语言中移除一个词时熵的变化。尽管此类界或许可以由已有结果推导得出 [8, 12], ，为方便起见，我们仍给出一个自足的证明。

定理 3.5。 若 X 是一个非平凡的传递最近邻有限型移位，字母表大小为 n ，且有限型移位 Y 是从 X的语言中移除一个长度为 $k > 1$ 的词 w 后得到的，则

$$h_{\mathrm{top}}(X) - h_{\mathrm{top}}(Y) > h_{\mathrm{top}}(X)e^{-2(3n+4k)h_{\mathrm{top}}(X)}.$$

证明。取 X、h、n、k、w如陈述所述。任取字母 a，使得对于 Y的某个最大熵遍历测度 ν，有 $\nu([a]) \geq 1/n$。由于 $a \in \mathcal{L}(Y)$，存在一个词 u，使得 ua 不含 w，且 $|u| = n+3k$。由 X的传递性，存在长度最短的词 t、t'，使得 at 以 w 为后缀，且 $t'ua$ 以 w为前缀。根据长度最短这一假设，$0 < |t|$、$|t'| < n+k$，并且 at 和 $t'ua$ 均不含 w的其他出现。将这些词在中央的 w 处拼接，得到一个词 $atva$ ，其中 w 只出现一次（作为 at的后缀）。此外，我们有 $|v| = |u| + |t'| - k \in (n+2k, 2n+3k)$。

对于任意 m，定义 Z_m 为 $\mathcal{L}_m(Y)$ 中包含超过 $\frac{m}{2n}$ 次 a 的词所组成的集合。根据遍历定理，$\nu(Z_m)$ 趋近于 1，因此由 [11,推论 2.7],

$$m^{-1}\ln|Z_m| \to h(\nu) = h_{\mathrm{top}}(Y)$$

当 $m \to \infty$ 时。

任选一个 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2n}$。对于任意词 $y \in Z_m$，定义 $A_Y = \{i : y(i) = a\}$。根据定义，$|A_Y| > \frac{m}{2n}$，因此定义 B_Y 为 A_Y 中最小的 $\lfloor \frac{m}{2n} \rfloor$ 个元素所组成的集合。然后，对于每个满足 $|S| = \lfloor \varepsilon m \rfloor$的集合 $S \subset B_Y$，通过对每个 $s \in S$，将$y(s) = a$ 替换为 $atva$，来关联一个词 $f(y, S)$。接着，$f(y, S) \in L(X)$，因为所有相邻关系要么属于 $atva$ ，要么属于 y，而这两者都在 $\mathcal{L}(X)$中。

我们断言，所有这些词都各不相同。为说明这一点，考虑任意两个不相等的对（y，S）和（y'，S'）。取使得 $y(i) \neq y'(i)$ 或 $\chi_S(i) \neq \chi_{S'}(i)$ 成立的最小 i。

由于对于 $j<i$，有 $y(j)=y'(j)$ 且 $\chi_S(j)=\chi_{S'}(j)$，因此在 y 和 y'中对第 i 个位置左侧所作的替换是相同的，从而得到词 z。于是，在 $f(y,\ S)$ 和 $f(y',\ S')$ 中紧接在 z 后面的字母分别为 $y(i)$ 和 $y'(i)$，因此，如果 $y(i)\neq y'(i)$，那么 $f(y,\ S)\neq f(y',\ S')$。

因此，我们可以假设 $y(i)=y'(i)$ 且 $\chi_S(i)\neq\chi_{S'}(i)$，并且不失一般性地假设 $i\in S$ and $i\notin S'$，这意味着 $y(i)=y'(i)=a$。由于 $i\in S,\ f(y,S)$ 以 $zatva$ 开头。定义 $j=\min\{s\in S':\ s>i\}$。若 $j>i+|t|$，则在构造 $f(y',S')$ 时，$y'(i)$ 之后的字母保持不变，这意味着 $f(y',S')$ 以 $zy'(i+1)\dots y'(i+|t|+1)$ 开头。由于 y' 不包含任何 w，且 at 以 w 结尾，$zat\neq zy'(i+1)\ \dots y'(i+|t|+1)$，因此再次有 $f(y,S)\neq f(y',S')$。

唯一剩下的情形是 $i<j\leq i+|t|$。这意味着，对于某个满足 $0\leq|r|\leq|t|$ 的词 r，$f(y',\ S')$ 以$zaratva$ 开头。于是，w 在at末尾的出现以 $f(y',\ S')(p)$ 结尾，其中 $p\in[|z|+2+|t|,|z|+1+2|t|]$。如果 $f(y,\ S)=f(y',\ S')$，那么 $f(y,\ S)$ 在同一位置也会出现 w。然而，

$$|z|+1+|t|<p\leq|z|+2+2|t|<|z|+|t|+n+k<|z|+|t|+|v|,$$

因此，$f(y,\ S)(p)$ 位于 $f(y,\ S)$ 开头处紧接着的 va 个 zat之内。但$atva$ 中只出现了一次 w，且该次出现结束于 t 的最后一个字母处，这与假设矛盾。因此，在所有情况下，$f(y,\ S)\neq f(y',\ S')$。

每个 $f(y,\ S)$ 的长度为 $m+\lfloor\varepsilon m\rfloor(1+|t|+|v|)<m+m\varepsilon(3n+4k)$。综合以上可得

$$|L_{m(1+\varepsilon(3n+4k))}(X)|\geq|Z_m|\cdot\binom{\lfloor\frac{m}{2n}\rfloor}{\lfloor\varepsilon m\rfloor}.$$

取对数后除以 m，并令 m 趋于无穷大，得到

$$h_{\mathrm{top}}(X)(1+\varepsilon(3n+4k))\geq h_{\mathrm{top}}(Y)-\varepsilon\ln(2\varepsilon n).$$

选取 $\varepsilon=(2n)^{-1}e^{-2(3n+4k)h_{\mathrm{top}}(X)}<\frac{1}{2n}$。于是 $\ln(2\varepsilon n)=-2(3n+4k)h_{\mathrm{top}}(X)$，从而得到

$$h_{\mathrm{top}}(X)+\varepsilon(3n+4k)h_{\mathrm{top}}(X)\geq h_{\mathrm{top}}(Y)+2\varepsilon(3n+4k)h_{\mathrm{top}}(X).$$

因此可得

$$h_{\mathrm{top}}(X)-h_{\mathrm{top}}(Y)\geq\varepsilon(3n+4k)h_{\mathrm{top}}(X).$$

最后，

$$\begin{aligned}&h_{\mathrm{top}}(X)-h_{\mathrm{top}}(Y)\geq\varepsilon(3n+4k)h_{\mathrm{top}}(X)\\&=h_{\mathrm{top}}(X)(3n+4k)(2n)^{-1}e^{-2(3n+4k)h_{\mathrm{top}}(X)}>h_{\mathrm{top}}(X)e^{-2(3n+4k)h_{\mathrm{top}}(X)}.\end{aligned}\qquad\square$$

推论 3.6。如果 X 是一个字母表大小为 a 且具有有限型子移位覆盖 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$的无限传递子移位，那么对于任意满足 $X_n\supsetneq X_{n+k-1}$的 n 和 k，有

$$h_{\mathrm{top}}(X_n)-h_{\mathrm{top}}(X_{n+k-1})>(\ln 2)s^{-1}e^{-3(3s+4k)\ln a},$$

其中 $s=|\mathcal{L}_n(X_n)|$。

证明。任取这样的 X,n,k。由于 X 是传递的，因此每个 X_n 也都是传递的。此外，存在 $w\in\mathcal{L}_{n+k-1}(X_n)\setminus\mathcal{L}_{n+k-1}(X_{n+k-1})$。通过重新编码，我们可以假设$X_n$ 是最近邻有限型子移位，且 w 的长度为 k。

作为最近邻有限型子移位， X_n 的字母表为 $\mathcal{L}_n(X_n)$，大小为 s，且 X_{n+k-1} 包含于有限型子移位 Y 中；该子移位是从 $\mathcal{L}_k(X)$中移除 k字词 w 后得到的。因此，根据定理 3.5，

$$h_{\mathrm{top}}(X_n) - h_{\mathrm{top}}(X_{n+k-1}) \geq h_{\mathrm{top}}(X_n) - h_{\mathrm{top}}(Y) > h_{\mathrm{top}}(X_n)e^{-2(3s+4k)h_{\mathrm{top}}(X_n)}.$$

显然， $h_{\mathrm{top}}(X_n) \leq \ln a$。最后，由于 X_n 是一个具有 s 个字母的传递的最近邻有限型子移位，因此它有一个长度最小的环 C，其长度至多为 s，并且以某个字母 L为起点和终点。由于 X_n 是无限的，必定还存在另一个以 L为起点和终点的环 C'，我们可以假设它不重复经过任何字母，因此其长度也至多为 s。 C 和 C'的所有拼接都产生 X_n中的点，因此$h_{\mathrm{top}}(X_n) \geq \ln_s 2$。因此，

$$h_{\mathrm{top}}(X_n)e^{-2(3s+4k)h_{\mathrm{top}}(X_n)} \geq (\ln 2)s^{-1}e^{-3(3s+4k)\ln a},$$

证明至此完成。 □

由这个推论立即可知，语言稳定类与熵稳定类相同。

定理 3.7。 一个传递子移位语言稳定，当且仅当它熵稳定。

4. Periodic point stability

4.1. 周期稳定移位与特征测度。 对于移位 (X, σ) 和$p \in \mathbb{N}$，令 $\mathcal{P}_p = \mathcal{P}_p(X)$ 表示最小周期为 p 的周期点集合。

定义 4.1。 具有有限型子移位覆盖 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的移位 (X, σ) 称为周期稳定的，如果对于所有 $m \in \mathbb{N}$，都存在 $n, p \in \mathbb{N}$，使得 $\mathcal{P}_p(X_n) = \mathcal{P}_p(X_{n+m})$。

注意，假设该条件对所有 $m \in \mathbb{N}$ 都成立，等价于（看似较弱的）假设：该条件对无穷多个 $m \in \mathbb{N}$成立。我们指出，周期稳定这一性质在拓扑共轭下保持不变。

引理 4.2。 如果 $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 是周期稳定的子移位，且 $Y \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$ 是与 X拓扑共轭的子移位，那么 Y 是周期稳定的。

证明。设 $\varphi\colon X \to Y$是 X 与 Y之间的一个拓扑共轭。设 R 为 φ 与 φ^{-1}共同的作用范围。对于满足 $n > 2R$的词 $w \in \mathcal{L}_n(X)$，我们滥用记号，将 $\varphi(w)$记为把实现 φ 的作用范围 R 块映射作用于 w后得到的长度为 $n-2R$ 的词；当 $w \in \mathcal{L}_n(Y)$时，对 $\varphi^{-1}(w)$同样如此。我们还将 φ 的定义域从 X 扩展到 X_n（对所有 $n > 2R$），将其定义为由该作用范围 R 块码在更大定义域上所确定的函数。对 φ^{-1} 与 Y_n同样如此。注意， $\varphi^{-1} \circ \varphi$ 仅当 $n > 4R$ 时才在 X_n 上有定义，但一旦有定义，它就是恒等映射（由作用范围 $2R$的恒等块码所定义）。由此可知，当 $n > 4R$ 时，移位 X_n 与 $\varphi(X_n)$ 是拓扑共轭的，且 φ 是一个共轭。特别地，当 $n > 4R$时，对任意 p，我们有 $\varphi(\mathcal{P}_p(X_n)) = \mathcal{P}_p(\varphi(X_n))$。

令 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 X 的有限型子移位覆盖，并令 $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 Y的有限型子移位覆盖。固定 $m \in \mathbb{N}$ 并选择 n， $p \in \mathbb{N}$ 使得 $\mathcal{P}_p(X_n) = \mathcal{P}_p(X_{n+(4R+m)})$。不失一般性，我们可以假设 $n > 4R$ （否则我们可以取 n'， p' 使得

$\mathcal{P}_{p'}(X_{n'}) = \mathcal{P}_{p'}(X_{n'+8R+m})$，并令 $n = n' + 4R$ 和 $p = p'$）。注意，对于任意 $w \in \mathcal{L}_{n+4R}(X)$，都有 $\varphi(w) \in \mathcal{L}_{n+2R}(Y)$。因此 $\varphi(X_{n+4R}) \subseteq Y_{n+2R}$。类似地，$\varphi^{-1}(Y_{n+2R}) \subseteq X_n$，从而 $\varphi(\varphi^{-1}(Y_{n+2R})) \subseteq \varphi(X_n)$。由于 $n > 2R$，$\varphi(\varphi^{-1}(Y_{n+2R})) = Y_{n+2R}$，因此 $Y_{n+2R} \subseteq \varphi(X_n)$。换言之，

$$\varphi(X_{n+4R}) \subseteq Y_{n+2R} \subseteq \varphi(X_n).$$

同理，我们有

$$\varphi(X_{n+4R+m}) \subseteq Y_{n+2R+m} \subseteq \varphi(X_{n+m}).$$

由于 $\mathcal{P}_p(X_n) = \mathcal{P}_p(X_{n+4R+m})$，因此对所有 $0 \leq k \leq 4R + m$，都有 $\mathcal{P}_p(X_n) = \mathcal{P}_p(X_{n+k})$。特别地，

$$\mathcal{P}_p(X_n) = \mathcal{P}_p(X_{n+4R}) = \mathcal{P}_p(X_{n+m}) = \mathcal{P}_p(X_{n+4R+m}).$$

由于 $\mathcal{P}_p(\varphi(X_{n+4R})) = \varphi(\mathcal{P}_p(X_{n+4R})) = \varphi(\mathcal{P}_p(X_n)) = \mathcal{P}_p(\varphi(X_n))$，我们有

$$\mathcal{P}_p(Y_{n+2R}) = \varphi(\mathcal{P}_p(X_n)).$$

同理，我们有

$$\mathcal{P}_p(Y_{n+2R+m}) = \varphi(\mathcal{P}_p(X_{n+m})).$$

因此，$\mathcal{P}_p(Y_{n+2R}) = \mathcal{P}_p(Y_{n+2R+m})$。由于这对任意 $m \geq 1$ 都成立，子移位 Y 是周期稳定的。□

接下来我们验证，这个条件足以产生一个特征测度。

定理 4.3. 每个周期稳定的子移位都有一个特征测度。

证明。假设 (X, σ) 是一个周期稳定的移位，并令 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为其有限型子移位覆盖。对每个 $m \in \mathbb{N}$，选取 $n_m, p_m \in \mathbb{N}$，使得 $\mathcal{P}_{p_m}(X_{n_m}) = \mathcal{P}_{p_m}(X_{n_m+m})$。为方便记号，我们记 $\mathcal{P}_m := \mathcal{P}_{p_m}(X_{n_m}) = \mathcal{P}_{p_m}(X_{n_m+m})$，并定义

$$\mu_m := \frac{1}{|\mathcal{P}_m|} \cdot \sum_{x\in\mathcal{P}_m} \delta_x,$$

其中 δ_x 表示 x 处的狄拉克测度。于是，测度 μ_m 是一个支撑在 X_{n_m+m} 上的不变测度，而 X_{n_m+m} 是 X_{n_m} 的一个子移位。令 μ 为序列 $\{\mu_m\}_{m=1}^{\infty}$ 的一个弱*极限点。我们断言，μ 是一个支撑在 X 上的特征测度。

注意，对任意 $w \notin \mathcal{L}(X)$ 和任意 $m > |w|$，都有 $\mu_m([w]) = 0$，因此也有 $\mu([w]) = 0$。由此可知，对任意禁用的 $w \in \mathcal{F}(X)$，μ 的支撑都与 $[w]$ 不相交。特别地，μ 的支撑包含于 X。

给定 $\varphi \in \mathrm{Aut}(X)$，并选取 $R \in \mathbb{N}$ 使得 $\varphi \in \mathrm{Aut}_R(X)$。令 Φ 和 Φ^{-1} 分别为实现 φ 和 φ^{-1} 的作用范围为 R 的块码。对于任意 $m \geq 4R$，注意到 $n_m + m \geq 4R + 1$，因此 $\Phi^{-1} \circ \Phi$ 实现了 X_{n_m+m} 上的恒等映射，且其作用范围为 $2R$ 的块码。因此

$$(\varphi^{-1} \circ \varphi) \colon X_{n_m+m} \to X_{n_m+m-4R}$$

是恒等映射。因此，X_{n_m+m} 与 $\varphi(X_{n_m+m})$拓扑共轭，共轭映射由 φ和 φ^{-1}实现。一般而言，X_{n_m+m} 和 $\varphi(X_{n_m+m})$并不相等。然而，X_{n_m+m} 和 $\varphi(X_{n_m+m})$都是 X_{n_m}的子移位，因为$\varphi(X_{n_m+m}) \subseteq X_{n_m+m-2R} \subseteq X_{n_m}$（我们用到了 $m > 2R$这一事实）。因此，$\mathcal{P}_{p_m}(\varphi(X_{n_m+m})) \subseteq \mathcal{P}_{p_m}(X_{n_m})$。由于 X_{n_m+m} 和 $\varphi(X_{n_m+m})$拓扑共轭，我们有 $|\mathcal{P}_{p_m}(X_{n_m+m})| = |\mathcal{P}_{p_m}(\varphi(X_{n_m+m}))|$。因此可得

根据我们的假设， $\mathcal{P}_{p_m}(X_{n_m}) = \mathcal{P}_{p_m}(X_{n_m+m})$，即 $\mathcal{P}_{p_m}(\varphi(X_{n_m+m})) = \mathcal{P}_{p_m}(X_{n_m+m})$。特别地， φ 在 $\mathcal{P}_m$ 上如同一个置换那样作用，因此 $\varphi_*\mu_m = \mu_m$。由于这对任意的 $m \geq 4R+1$都成立，故可得 $\varphi_*\mu = \mu$。由于 $\varphi \in \mathrm{Aut}(X)$是任意的，这对$\mathrm{Aut}(X)$的所有元素都成立，因此 μ 是特征测度。□

本节余下部分将通过一个例子说明，该定理涵盖的不仅仅是那些出于简单原因而周期稳定的子移位，例如含有周期点或语言稳定的子移位。先验地，我们不知道所构造的子移位是否具有非平凡自同构以及非平凡的自同构群，因此在第 4.3 节中，我们将说明如何构造这样一个系统。

4.2. **构造一个没有周期点且语言不稳定的周期稳定子移位**。设 $Y \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ 是满足以下两个条件的极小 Sturmian 子移位：

- 11 在 Y 中被禁止；
- 000 在 Y 中被禁止。

满足这两个条件的 Sturmian 序列很容易构造，例如取斜率为无理数 $\alpha \in (1/2,1)$ 的直线的截线序列 $[4, \text{Chapter } 6]$。设 $y \in Y$ 是 Y 中一个满足 $y(1) = 0$ 的固定元素。我们用 y 构造一个周期稳定但语言不稳定且没有周期点的子移位 $X \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$。为了定义 X，我们指定其禁词集合 $\mathcal{F}$，令 $\mathcal{F}$ 为四个词集合的并集，

$$\mathcal{F} = \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2^{11} \cup \mathcal{W}_2^{00} \cup \mathcal{W}_2^{000},$$

并在构造中指定这些词。

我们将 $\mathcal{W}_1$ 中的元素称为*I* 型禁词，将 $\mathcal{W}_2^{11} \cup \mathcal{W}_2^{00} \cup \mathcal{W}_2^{000}$中的元素称为*II* 型禁词，这反映了这些词在构造中发挥的不同作用。粗略地说，I 型词确保X 不语言稳定，而 II 型词确保 X 不包含任何周期点。

4.2.1. 一些辅助结果。 在构造定义子移位的禁词 $\mathcal{F}$ 之前，我们先介绍一些用于控制熵的引理。对于拓扑传递有限型移位 Z 以及一个词 $w \in \mathcal{L}(Z)$，令$Z(w)$表示通过设定以下条件所得到的子移位

$$Z(w) := \{z \in Z : \sigma^i(z) \notin [w] \text{ for all } i \in \mathbb{Z}\}.$$

我们使用的第一个结果归功于 Lind。

引理 4.4 (Lind [8, 定理 3])。 设 Z 为拓扑传递有限型子移位，并给定 $\varepsilon > 0$ 。存在 $k \in \mathbb{N}$ ，使得对于任意词$w \in \mathcal{L}(Z)$，若 $|w| \geq k$，则有 $|h_{\mathrm{top}}(Z) - h_{\mathrm{top}}(Z(w))| < \varepsilon$。

Lind 的结果适用于更一般的情形，但我们无法在文献中找到具体的参考出处。因此，我们针对不一定是拓扑传递的子移位陈述并证明这一推广。

引理 4.5. 设 Y 是一个有限型子移位，且给定 $\varepsilon > 0$。存在 $k \in \mathbb{N}$，使得对于任意满足 $|w| \geq k$的词 $w \in \mathcal{L}(Y)$，都有 $|h_{\mathrm{top}}(Y) - h_{\mathrm{top}}(Y(w))| < \varepsilon$。

证明。由于 Y是一个有限型子移位，因此存在一个包含于 Y中的拓扑传递有限型子移位 Z，满足 $h_{\text{top}}(Z) = h_{\text{top}}(Y)$。（例如，在 a是用于定义 Y的有限个禁词中最长禁词的长度、 f 是 Y的语言大小、 $X := Y$且 φ 是恒等映射这一特殊情形下，可以应用引理 4.7]来证明这一点。）根据引理 4.4，我们可以找到 $k \in \mathbb{N}$ ，使得对于任意满足 $|w| \geq k$的词 $w \in \mathcal{L}(Z)$，对于任意满足 $|w| \geq k$的 $w \in \mathcal{L}(Z)$，都有 $|h_{\text{top}}(Z) - h_{\text{top}}(Z(w))| < \varepsilon$。根据$Z$的构造，这意味着 $|h_{\text{top}}(Y) - h_{\text{top}}(Z(w))| < \varepsilon$。由于 $Z(w) \subseteq Y(w)$，可得$|h_{\text{top}}(Y) - h_{\text{top}}(Z(w))| < \varepsilon$。最后注意，若 $w \in \mathcal{L}(Y) \setminus \mathcal{L}(Z)$，则 $Z = Z(w)$；又由于 $Z(w) \subseteq Y(w)$，因此有 $|h_{\text{top}}(Y) - h_{\text{top}}(Z(w))| = 0$。□

4.2.2. *I* 类禁词集合 $\mathcal{W}_1$。对于每个整数 $n > 0$，定义

$$u_n := 111y(1)y(2)y(3)\dots y(4n)111$$

其中 $y(i)$ 是我们在此构造开始时固定的元素 $y \in Y$ 的第 i^{th} 个坐标。我们从 1 开始为 u_n 的字母编号，记作

$$u_n(i) = \begin{cases} 1 & \text{if } 1 \leq i \leq 3; \\ y(i-3) & \text{if } 4 \leq i \leq 4n+3; \\ 1 & \text{if } 4n+4 \leq i \leq 4n+6. \end{cases}$$

我们令

$$\mathcal{W}_1 = \{u_n \colon n \in \mathbb{N}\}.$$

注意， $\mathcal{W}_1$ 中任意两个元素的长度都不同，而 $\mathcal{W}_1$ 中元素的长度是形如 $4n+6$ 的数。特别地，这些长度构成了 $\mathbb{N}$ 的一个相对稠密子集。还需注意，词 $y(1)y(2)y(3)\dots y(4n)$ 不含子词 11，因为 11 是移位 Y 中的禁词。因此，11 在 u_n 中作为子词出现的位置只有：

(1) 在其前缀 111 中（词 $u_n(1)u_n(2)u_n(3)$）；(2) 在其后缀 111 中（词 $u_n(4n+4)u_n(4n+5)u_n(4n+6)$）；(3) 若 $u_n(4n+3) = 1$，则在其后缀 1111 中（词 $u_n(4n+3)u_n(4n+4)u_n(4n+5)u_n(4n+6)$）。

回想一下，我们选择了 $y \in Y$ 使得 $y(1) = 0$，由此可知，对于所有 n， u_n 都以前缀 1110 开始。它以 0111 或 01111 作为后缀，具体取决于 $u_n(4n+3)$ 是 0 还是 1。

4.2.3. $\mathcal{W}_2^{11}$ 中 *II* 型词的集合。考虑移位

$$\mathcal{X}_1 = \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \colon \sigma^i(x) \notin [u_n] \text{ for all } i \in \mathbb{Z} \text{ and } n \in \mathbb{N}\}.$$

令 $\mathcal{H}_1$ 为有限型子移位，其唯一的禁词是 111。注意，若 $h \in \mathcal{H}_1$，则 h 不包含子词 111。特别地，由于 u_n 本身包含子词 111， h 对任何 $n \in \mathbb{N}$ 都不包含 u_n 作为子词。由此可得 $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{X}_1$ ，因此

$$h_{\text{top}}(\mathcal{X}_1) \geq h_{\text{top}}(\mathcal{H}_1) > \log_2(1.839).$$

因此， $\mathcal{X}_1$ 的拓扑熵为正。此外， $\mathcal{X}_1$ 是拓扑混合的：若 w_1， $w_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_1)$，则对于任意 $k \geq 3$ ，都有 $^\infty 0 w_1 0^k w_2 0^\infty \in \mathcal{X}_1$ （因为对于任意 n， u_n 都不包含子词 000）。

我们通过归纳构造集合 $\mathcal{W}_2^{11}$。我们的目标是将额外的词列为禁词，这些词来自 $\mathcal{X}_1$ 的语言，并能排除所有包含 11 作为

子词的周期点，同时确保所得移位的熵接近 $\mathcal{X}_1$ 的熵，并且新列为禁词的词不会作为子词出现在 y 中。

令 $\mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{X}_1$ 为所有包含 11 作为子词的周期点组成的集合。在 $\mathcal{P}_0$的元素中，选取一个最小周期尽可能小的周期点 p_0 。求一个词 $v_0 \in \mathcal{L}$（$\mathcal{X}_1$），使得 v_0 以 11 为前缀，并且 $p_0 = \ldots v_0 v_0 v_0 v_0 v_0 \ldots$是 v_0的双无限自连接（的某个移位）。接下来，我们选取一个足够大的整数 $k_0 > 0$ ，使得 $v_0^{k_0}$不作为子词出现在 y中；注意，我们总能找到这样的词，因为 $y \in Y$ 不可能包含任意长且周期固定的子词，这是因为 Y是一个 Sturmian 子移位。定义词 $z_0 := v_0^{100k_0}11$。由于 v_0 以前缀 11 开头，词 z_0 是周期为 $|v_0|$ 的周期词，并且以 11 同时作为前缀和后缀。定义

$$\mathcal{P}_1 := \{p \in \mathcal{P}_0 \colon z_0 \text{ is not a subword of } p\}.$$

我们继续归纳这一过程。假设我们已构造出词z_0、…、 z_r，满足：

(1) 每个 z_i 都是周期的；(2) z_i 的长度递增；(3) 每个 z_i 都以 11 为前缀和后缀；(4) 存在一个词 v_i，它以 11 为前缀，并存在一个整数 k_i ，使得 $z_i = v_i^{100k_i}11$，其中 k_i 足够大，从而 $v_i^{k_i}$不会作为子词出现在 y中。

进一步假设我们已定义 $\mathcal{P}_0 \supset \mathcal{P}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{P}_r \supset \mathcal{P}_{r+1}$，使得对于每个 $i = 0, 1, \ldots, r$,

$$\mathcal{P}_{i+1} = \{p \in \mathcal{P}_i \colon z_i \text{ is not a subword of } p\}$$

并且词 $\ldots z_i z_i z_i z_i z_i \ldots$是 $\mathcal{P}_i$中的一个元素，在 $\mathcal{P}_i$的所有元素中具有可能的最小周期。在 $\mathcal{P}_{r+1}$ 的元素中，选取一个周期点p_{r+1}，使其最小周期尽可能小。找一个词 $v_{r+1} \in \mathcal{L}$（$\mathcal{X}_1$），使得 v_{r+1} 以 11 为前缀，并且 $p_{r+1} = \ldots v_{r+1} v_{r+1} v_{r+1} v_{r+1} v_{r+1} \ldots$是 v_{r+1}的双无限自连接的（一个移位）。选取一个足够大的整数 $k_{r+1} > 0$，使得 $v_{r+1}^{k_{r+1}}$不会作为子词出现在 y 中，并且还满足 $|v_{r+1}| \cdot k_{r+1} > |z_r|$。定义 $z_{r+1} := v_{r+1}^{100k_{r+1}}11$。由于 v_{r+1} 以 11 为前缀开头，词 z_{r+1} 是周期的，且以 11 为前缀和后缀。定义

$$\mathcal{P}_{r+2} := \{p \in \mathcal{P}_{r+1} \colon z_{r+1} \text{ is not a subword of } p\}.$$

归纳地，这为所有 $i \geq 0$定义了 $\mathcal{P}_i$。我们定义

$$\mathcal{W}_2^{11} := \{z_i \colon i \in \mathbb{N}\} \tag{14}$$

4.2.4. $\mathcal{W}_2^{00}$中II 型词的集合。考虑移位

$$\mathcal{X}_2 = \{x \in \mathcal{X}_1 \colon \sigma^i(x) \notin [z] \text{ for all } i \in \mathbb{Z} \text{ and } z \in \mathcal{W}_2^{11}\}.$$

设 $\mathcal{H}_2$ 为唯一禁词为11的有限型子移位。注意$\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_1$ ，并且 $\mathcal{H}_2 \subseteq \mathcal{X}_2$ ，因为 $\mathcal{W}_2^{11}$中的每个词都包含11作为子词。因此，

$$h_{\text{top}}(\mathcal{X}_2) \geq h_{\text{top}}(\mathcal{H}_2) > \log_2(1.618).$$

因此， $\mathcal{X}_2$ 的拓扑熵为正。此外， $\mathcal{X}_2$ 在拓扑意义下是混合的：若 $w_1, w_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_2)$，那么只要 $k \geq \max\{|w_1|, |w_2|, 3\}$， $^\infty 0 w_1 0^k w_2 0^\infty \in \mathcal{X}_2$（类似于 $\mathcal{W}_2^{11}$中关于词的混合性的论证，移位 $\mathcal{X}_2$ 不包含任何

$\mathcal{W}_1$ 的元素，并且它不包含 $\mathcal{W}_2^{11}$的任何元素作为子词，因为所有这类词都以11开头和结尾，且包含至少100个其周期的副本）。

我们归纳地构造集合 $\mathcal{W}_2^{00}$。我们的目标是从 $\mathcal{X}_2$ 的语言中禁止更多的词，从而消除所有包含 00 但不将 000 作为子词的周期点。

令 $\mathcal{Q}_0 \subseteq \mathcal{X}_2$ 为所有将 00 作为子词、但不将 000 作为子词的周期点组成的集合。这些周期点不将 11 作为子词，因为构造 $\mathcal{X}_2 \subseteq \mathcal{X}_1$ 的目的就是从 $\mathcal{X}_1$ 中移除所有将 11 作为子词的周期点。我们按照构造 $\mathcal{W}_2^{11}$ 中词的方法继续进行。在 $\mathcal{Q}_0$ 的元素中，选取一个最小周期尽可能小的周期点 q_0。找到一个词 $w_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_2)$，使得 w_0 以 00 为前缀，并且 $q_0 = \ldots w_0 w_0 w_0 w_0 w_0 \ldots$ 是 w_0 的双无限拼接（的一个移位）。选取一个充分大的整数 $\ell_0 > 0$，使得 $w_0^{\ell_0}$ 不会作为子词出现在 y 中。定义词 $\alpha_0 := w_0^{100\ell_0}00$。由于 w_0 以前缀 00 开头，词 α_0 是周期的，且其前缀和后缀均为 00。定义

$$\mathcal{Q}_1 := \{q \in \mathcal{Q}_0 \colon \alpha_0 \text{ is not a subword of } q\}.$$

我们归纳地继续这一过程。假设我们已构造出词 $\alpha_0, \ldots, \alpha_r$，使得

(1) 每个 α_i 都是周期的；α_i 的长度递增；(2) 每个 α_i 都以 00 为前缀和后缀；(3) 存在一个词 w_i 和一个整数 ℓ_i，使得 $\alpha_i = w_i^{100\ell_i}00$，且 $w_i^{\ell_i}$不是 y的子词。

我们还假设已经定义了 $\mathcal{Q}_0 \supset \mathcal{Q}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{Q}_r \supset \mathcal{Q}_{r+1}$，使得对于每个 $i = 0, 1, \ldots, r$,

$$\mathcal{Q}_{i+1} = \{q \in \mathcal{Q}_i \colon \alpha_i \text{ is not a subword of } q\}$$

并且词 $\ldots \alpha_i \alpha_i \alpha_i \alpha_i \alpha_i \ldots$是 $\mathcal{Q}_i$ 中周期最小的元素。在 $\mathcal{Q}_i$的所有元素中，词 $\mathcal{Q}_{r+1}$ 是周期点q_{r+1}，且其最小周期尽可能小。找一个词 $w_{r+1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_2)$，使得 w_{r+1} 以 00 为前缀，并且 $q_{r+1} = \ldots w_{r+1} w_{r+1} w_{r+1} w_{r+1} w_{r+1} \ldots$是 w_{r+1}的双无限自连接（的一个移位）。选取一个足够大的整数 $\ell_{r+1} > 0$，使得 $w_{r+1}^{\ell_{r+1}}$ 不作为子词出现在 y 中，并且还满足$|w_{r+1}| \cdot \ell_{r+1} > |\alpha_r|$。定义 $\alpha_{r+1} := w_{r+1}^{100\ell_{r+1}}00$。由于 w_{r+1} 以前缀 00 开头，词 α_{r+1} 是周期的，且以 00 为前缀和后缀。定义

$$\mathcal{Q}_{r+2} := \{q \in \mathcal{Q}_{r+1} \colon \alpha_{r+1} \text{ is not a subword of } q\}.$$

归纳地，这为所有 $i \geq 0$ 定义了 $\mathcal{Q}_i$。我们定义

$$\mathcal{W}_2^{00} := \{\alpha_i \colon i \in \mathbb{N}\}. \tag{15}$$

4.2.5. $\mathcal{W}_2^{000}$ 中 *II* 型词的集合。考虑移位

$$\mathcal{X}_3 = \{x \in \mathcal{X}_2 \colon \sigma^i(x) \notin [\alpha] \text{ for all } i \in \mathbb{Z} \text{ and } \alpha \in \mathcal{W}_2^{00}\}.$$

设 $\mathcal{H}_3$ 是仅以 11 和 1001 为禁词的有限型子移位。注意，若 $h \in \mathcal{H}_3$，则 h 不包含 $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2^{11}$ 中的任何词作为子词（因为所有这类词都包含 11 作为子词，而 h 不包含），并且也不包含任何

$\mathcal{W}_2^{00}$ 中的词作为子词（因为所有这类词都包含 1001 作为子词，而 h 不包含）。因此 $\mathcal{H}_3 \subseteq \mathcal{X}_3$ 和

$$h_{\mathrm{top}}(\mathcal{X}_3) \geq h_{\mathrm{top}}(\mathcal{H}_3) > \log_2(1.512).$$

特别地，$\mathcal{X}_3$ 的拓扑熵为正。此外，$\mathcal{X}_3$ 是拓扑混合的：对于任意 w_1，$w_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_3)$，只要 $k \geq \max\{|w_1|, |w_2|, 3\}$，就有 $^\infty 0 w_1 0^k w_2 0^\infty \in \mathcal{X}_2$；并且也很容易验证，$\mathcal{H}_3$ 也是拓扑混合的。

由于 $\mathcal{X}_3$ 包含一个正熵有限型子移位，它有无穷多个周期点。根据集合 $\mathcal{W}_2^{11}$ 和 $\mathcal{W}_2^{00}$的构造，这些周期点中没有一个包含子词 11，而不包含子词 000 的周期点只有点 $(01)^\infty$。与之前一样，我们归纳地构造集合 $\mathcal{W}_2^{000}$，目标是消除所有剩余的周期点。然而，为了确保得到一个非空的、周期稳定但非语言稳定的移位，$\mathcal{W}_2^{000}$ 中的词必须比之前选择得更加谨慎。令 $\mathcal{W}_2^{000} = \{\beta_0, \beta_1, \dots\}$，我们的目标是构造 $\mathcal{W}_2^{000}$中的词，使得对于任意固定的 n，移位

$$\mathcal{X}_3(n) := \{x \in \mathcal{X}_3 \colon \sigma^i(x) \notin [\beta_j] \text{ for all } i \in \mathbb{Z} \text{ and } 0 \leq j \leq n\}$$

其熵不小于 $\frac{1}{2} h_{\mathrm{top}}(\mathcal{H}_3)$，并且词的选取方式使得移位

$$\mathcal{X}_4 := \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{X}_3(n)$$

是周期稳定的，但不是语言稳定的。实现这一点的主要方法是将词 β_i 定义为较长的周期词，其长度经过精心选择，以消除剩余的周期点。

同样，我们归纳地定义词 β_0、β_1，.....，然后对每个 $t \geq 0$，令

$$\mathcal{H}_3(t) = \{x \in \mathcal{H}_3 \colon \sigma^i(x) \notin [\beta_j] \text{ for all } i \in \mathbb{Z} \text{ and } 0 \leq j \leq t\}.$$

注意

$$h_{\mathrm{top}}(\mathcal{X}(t)) \geq h_{\mathrm{top}}(\mathcal{H}(t)) \quad \text{for all } t \geq 0.$$

设 $\mathcal{R}_0$ 为 $\mathcal{X}_3$ 中所有周期点构成的集合。定义

$$\beta_0 = (01)^{100k} = 01010101 \dots 0101$$

其中 k 足够大，使得

(1) 词 $(01)^k$ 不作为子词出现在 y中；(2) $h_{\mathrm{top}}(\mathcal{H}_3(0)) > (1 - 1/4) \cdot h_{\mathrm{top}}(\mathcal{H}_3)$（根据引理 4.5，这是可能的）。

令 $\mathcal{R}_1$ 为 $\mathcal{X}_3(0)$中所有周期点组成的集合。注意，$\mathcal{R}_1$中的点都不含子词 11 或 1001，并且都含有子词 000（在 $\mathcal{X}_3$ 中，唯一不含子词 000 的周期点是点... 0101010101 ...，它被 $\mathcal{X}_3(0)$中的词 β_0 所禁止）。在 $\mathcal{R}_1$的元素中，选取一个最小周期尽可能小的周期点 r_1。选取一个以 000 为前缀的词 x_1，使得 $r_1 = \dots x_1 x_1 x_1 x_1 x_1 \dots$是 r_1的双无限拼接的（一个移位）。选取一个足够大的整数 s_1，使得当我们取 $\beta_1 := x_1^{100 s_1}$时，便有

(1) $x_1^{s_1}$不是 y 的子词；(2) $h_{\mathrm{top}}(\mathcal{H}_3(1)) > (1 - 1/4 - 1/16) \cdot h_{\mathrm{top}}(\mathcal{H}_3)$（根据引理 4.5，这是可能的）。

令 $\mathcal{R}_2$ 为 $\mathcal{X}_3(1)$ 中所有周期点组成的集合。我们继续进行归纳，并假设已经定义了词 β_0、…、β_t，它们都是周期的，长度递增，满足对于某个以 000 为前缀的词 x_i，$\beta_i = x_i^{100s_i}$，且 s_i 足够大，使得 $x_i^{s_i}$ 不是 y 的子词（对所有 $1 \le i \le t$ 均如此）；并且对于所有 $i = 1$、…、t，我们都有

$$h_{\mathrm{top}}(\mathcal{H}_3(i)) > \left(1 - \sum_{j=0}^{i} \frac{1}{4^{j+1}}\right) \cdot h_{\mathrm{top}}(\mathcal{H}_3).$$

令 $\mathcal{R}_{t+1}$ 为 $\mathcal{X}_3(t)$ 中周期点的集合。注意，$\mathcal{R}_{t+1}$ 非空，因为 $\mathcal{X}_3(t)$ 包含正熵有限型子移位 $\mathcal{H}_3(t)$。在 $\mathcal{R}_{t+1}$ 中的点里，取一个最小周期尽可能小的周期点 r_{t+1}。找一个词 x_{t+1}，使其以 000 为前缀，并且 $r_{t+1} =\!\!= \ldots x_{t+1}x_{t+1}x_{t+1}x_{t+1}x_{t+1}\ldots$ 是 r_{t+1} 的双无限拼接（的一个移位）。选取一个充分大的整数 s_{t+1}，使得如果 $\beta_{t+1} := x_{t+1}^{100s_{t+1}}$，那么 β_{t+1} 比 β_t 长，并且

(1) $x_{t+1}^{s_{t+1}}$ does not occur as a subword of y;
(2) $h_{\mathrm{top}}(\mathcal{H}_3(t+1)) > \left(1 - \sum_{j=0}^{t+1} \frac{1}{4^{j+1}}\right) \cdot h_{\mathrm{top}}(\mathcal{H}_3)$ (by Lemma 4.5, this is possible).

我们还要求 s_{t+1} 具有另一项性质，使我们能够证明所构造的移位是周期稳定的。设 $(\mathcal{Y}_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{X}_3(t)$ 的有限型子移位覆盖。对于任意固定的 $n \in \mathbb{N}$，移位 $\mathcal{Y}_n(t)$ 中含有许多不属于 $\mathcal{X}_3(t)$ 的周期点。然而，对于任意周期点 p，要么 $p \in \mathcal{R}_{t+1}$，要么存在 $n \in \mathbb{N}$，使得 $p \notin \mathcal{Y}_n(t)$。由于 r_{t+1} 在 $\mathcal{R}_{t+1}$ 的所有周期点中具有最小的最小周期，因此存在 N_{t+1}，使得对于所有 $n \ge N_{t+1}$，$\mathcal{Y}_n(t)$ 中所有不属于 $\mathcal{R}_{t+1}$ 的周期点，其最小周期都严格大于 r_{t+1} 的最小周期。选择整数 s_{t+1} 时，我们要求 $\beta_{t+1} = x_{t+1}^{100s_{t+1}}$ 的长度大于 $N_{t+1} + t + 1$。定义 γ_{t+1} 为删去首字母后的 β_{t+1}，并定义 ζ_{t+1} 为删去末字母后的 β_{t+1}。若 $(\mathcal{Y}_n(t+1))_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{X}_3(t+1)$ 的有限型子移位覆盖，我们声称，$\mathcal{Y}_{N_{t+1}}(t+1)$ 中具有可能的最小周期的周期点，与 $\mathcal{Y}_{N_{t+1}+t}(t+1)$ 中具有可能的最小周期的周期点相同。为说明这一点，注意 $\mathcal{Y}_{N_{t+1}}(t+1)$ 中任何具有可能的最小周期且不含子词 β_{t+1} 的周期点，都属于 $\mathcal{Y}_{N_{t+1}+t}(t+1)$。如果我们能证明 γ_{t+1} 和 ζ_{t+1} 都属于 $\mathcal{L}(\mathcal{Y}_{N_{t+1}+t}(t+1))$，那么任何包含子词 β_{t+1} 的周期点 $\mathcal{Y}_{N_t}(t+1)$ 也属于 $\mathcal{Y}_{N_{t+1}+t}(t+1)$，因为其中出现的任何禁词都必须包含子词 β_{t+1}，而 $|\beta_{t+1}| > N_{t+1} + t$。为证明 γ_{t+1} 和 ζ_{t+1} 都属于 $\mathcal{L}(\mathcal{Y}_{N_{t+1}+t}(t+1))$，令 A 为 y 中一条向左延伸、以 1 结尾的半无限射线，并令 Ω 为 y 中一条向右延伸、以 y 开头的半无限射线（其中 $y \in Y$ 是我们在构造开始时固定的 Sturmian 子移位 Y 的元素）。注意，$A\gamma_{t+1}\Omega \in \mathcal{Y}_{N_{t+1}+t}(t+1)$（$A\gamma_{t+1}\Omega \in \mathcal{Y}_{N_{t+1}+t}(t+1)$ 同理），因为它不含子词 11，至多含有两处子词 1001（分别与 A 和 γ_{t+1} 重叠，或与 γ_{t+1} 和 Ω 重叠），且所有子词 000 的出现都位于 γ_{t+1} 内，因此它不含任何此前已列为禁词的子词。最后，我们要求 s_{t+1} 足够大，使得 $|\beta_{t+1}| > 2|\beta_t|$。

通过归纳，这一过程为所有 $t \geq 1$ 定义了词 β_t。我们定义

$$\mathcal{X}_4 := \bigcap_{t=1}^{\infty} \mathcal{X}_3(t) \tag{16}$$

并声称 $\mathcal{X}_4$ 是周期稳定的、非语言稳定的，并且没有任何周期点。

4.2.6. 的性质 $\mathcal{X}_4$。我们检查在 (16) 中定义的移位 $\mathcal{X}_4$ 的性质，证明它是一个非空、周期稳定但非语言稳定且没有周期点的移位。由周期稳定性可知，$\mathcal{X}_4$ 存在特征测度；而这种测度的存在性既不能由其他判据推出，例如语言稳定性，也不能由周期点的存在性推出。此外，由于 $\mathcal{X}_4$ 没有周期点，我们构造出的特征测度是非原子的。

引理 4.6。 $\mathcal{X}_4$ 是非空的。

证明。根据 $\mathcal{X}_4$ 的定义 (16)，该移位是嵌套移位序列 $\mathcal{X}_3(0) \supset \mathcal{X}_3(1) \supset \mathcal{X}_3(2) \supset \dots$ 的交集。此外，由构造可知

$$h_{\mathrm{top}}(\mathcal{X}_3(t)) \geq h_{\mathrm{top}}(\mathcal{H}_3(t)) > \left(1 - \sum_{j=0}^{t} \frac{1}{4^{j+1}}\right) \cdot h_{\mathrm{top}}(\mathcal{H}_3) > \frac{2}{3} \cdot \log_2(1.512).$$

根据熵的上半连续性，这意味着 $h_{\mathrm{top}}(\mathcal{X}_4) \geq \frac{2}{3} \cdot \log_2(1.512) > 0$，尤其是 $\mathcal{X}_4$ 非空。□

引理 4.7。 $\mathcal{X}_4$ 没有周期点。

证明。由集合 $\mathcal{W}_1$、$\mathcal{W}_2^{11}$、$\mathcal{W}_2^{00}$ 和 $\mathcal{W}_2^{000}$ 的构造可立即得出这一点；这些集合专门用于添加禁词，以消除所有周期点。□

为了证明 $\mathcal{X}_4$ 不是语言稳定的，我们引入一些记号。对于任意$m \in \mathbb{Z}$，令 $L_m \in \{0,1\}^{\{n \in \mathbb{Z}:\ n \leq m\}}$ 为左无限射线 $\{n \in \mathbb{Z}:\ n \leq m\}$ 的 $\{0,1\}$值着色，定义如下：

$$L_m(n) := y(1 + n - m).$$

换言之，L_m 是将 y 限制到集合$\{n \in \mathbb{Z}:\ n \leq 1\}$ 后得到的左无限射线，再对该射线进行移位，使其最右边的边位于 m 而非 1。类似地，令 $R_m \in \{0,1\}^{\{n \in \mathbb{Z}:\ n \geq m\}}$ 为右无限射线 $\{n \in \mathbb{Z}:\ n \geq m\}$ 的 $\{0,1\}$值着色，定义如下：

$$R_m(n) := y(1 + n - m)$$

我们有 $L_m(m) = R_m(m) = 0$，因为 $y(1) = 0$。

对于 $w \in \{0,1\}^*$，我们将 w 的字母从 1 开始编号，这意味着我们将 w 视为函数 $w\colon\ \{1, 2, \dots, |w|\} \to \{0,1\}$。设 $LwR\colon\ \mathbb{Z} \to \{0,1\}$ 为该函数

$$LwR(i) = \begin{cases} L_0(i) & \text{if } i \leq 0; \\ w(i) & \text{if } 1 \leq i \leq |w|; \\ R_{|w|+1}(i) & \text{if } |w| + 1 \leq i. \end{cases}$$

换言之，LwR 是通过将左无限射线 L_0 与 w 和 $R_{|w|+1}$连接起来而得到的 $\mathbb{Z}$ 的 $\{0,1\}$值着色。根据构造，$LwR(0) = LwR(|w| +$

1) $= 0$，且 LwR 在集合 $\{1, 2, \ldots, |w|\}$ 上的限制为 w。为清楚起见，我们引入一些术语，以描述一个词如何作为子词出现在若干词的连接中。如果 u 是 LwR 的子词，且其所在坐标全部位于集合 $\{i\colon\ i \leq 0\}$内，我们就说 u 出现在 L中。如果 u 所在的坐标全部位于集合$\{i\colon\ i \geq |w|+1\}$内，我们就说 u 出现在 R中。如果 u 所在的坐标全部位于集合$\{1, 2, \ldots, |w|\}$内，我们就说 u 出现在 w中。

引理 4.8. *$\mathcal{X}_4$ 不是语言稳定的。*

顺便一提，这正是我们要用到 $\mathcal{W}_1$ 中定义的词的地方。

证明。 令 $(\mathcal{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为 $\mathcal{X}_4$ 的有限型子移位覆盖，我们证明集合

$$\{n \in \mathbb{N}\colon \mathcal{S}_n \neq \mathcal{S}_{n+1}\}$$

在 $\mathbb{N}$ 中相对稠密。

固定 $n \in \mathbb{N}$。词 $u_n \in \mathcal{W}_1$ 在 $\mathcal{X}_4$ 中是禁用的。令 a_n 为删去最右侧字母后的词 u_n （因此 $|a_n| = |u_n| - 1$）。令 b_n 为删去最左侧字母后的词 u_n （同样有 $|b_n| = |u_n| - 1$）。我们证明 $a_n,\ b_n \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_4)$。由此可得 $u_n \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_{|a_n|}) = \mathcal{L}(\mathcal{S}_{|u_n|-1})$, 但 $u_n \notin \mathcal{L}(\mathcal{S}_{|u_n|})$; 因此$\mathcal{S}_{|u_n|-1} \neq \mathcal{S}_{|u_n|}$。 由于 $\{|u_n|\colon\ n \in \mathbb{N}\}$ 是 $\mathbb{N}$ 的稠密间隔子集, 因此 $\mathcal{X}_4$ 不是语言稳定的。于是我们只需证明 $a_n,\ b_n \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_4)$。

为证明 $a_n \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_4)$，我们证明 $La_nR \in \mathcal{X}_4$ （类似的论证可证明 $Lb_nR \in \mathcal{X}_4$，因此我们也有 $b_n \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_4)$）。要验证 $La_nR \in \mathcal{X}_4$，我们需要确认 $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2^{11} \cup \mathcal{W}_2^{000} \cup \mathcal{W}_2^{00}$ 中没有任何元素是 La_nR 的子词。

断言1：如果 $w \in \mathcal{W}_1$，那么 w 不会作为子词出现在 La_nR 中。反证，假设 w 作为子词出现在 La_nR 中。由于 $w \in \mathcal{W}_1$，这个词的前缀和后缀都是 11。由于 11 不会作为子词出现在 y 中，我们知道 11 不会出现在 L 中，也不会出现在 R中。根据构造（La_nR）(0) $= (La_nR)(|w| + 1) = 0$，因此， La_nR 中出现 11 的位置必定完全位于 a_n 内（换言之，它不能与 L和 a_n 或a_n 和 R部分重叠）。同理， w 的后缀 11 必定出现在 a_n 中，这意味着 w 是 a_n 的子词。因此 $|w| \leq |a_n|$。但是，对于某个 $m \in \mathbb{N}$ 和 $|a_n| = |u_n| - 1$，有 $w = u_m$，因此 $m < n$。这意味着 $|w| \leq |u_n| - 4 = |a_n| - 3$。但在第4.2.2节的构造中，11 仅在位置 (1)、(2) 和 (3) 处作为子词出现在 u_n 中。因为 $|w| \geq 6$， w 的前缀 11 必定出现在 a_n 的前缀 111 中，而 w 的后缀 11 必定出现在 a_n 的后缀 11（如果 u_n 以 0111 结尾）或后缀 111（如果 u_n 以 01111 结尾）中。因此 $|w| \geq |a_n| - 2$; 矛盾。

断言*2*：如果 $w \in \mathcal{W}_2^{11}$，那么 w 不会出现在 La_nR。与断言1的证明一样，由于 w 以 11 开头并以 11 结尾， w 在 La_nR 中的任何出现都必须位于a_n之内。因此，由于 a_n 是 u_n的子词，词 w 必定作为子词出现在u_n中。回想一下， $\mathcal{W}_2^{11}$中的词都是周期的，以词 11 开头，并且将其周期重复至少 100 次。因此，如果 w 是 u_n的子词，那么 u_n 中至少有 100 处彼此分离的位置，以子词形式出现 11。但在第4.2.2节的构造中，词 11 仅在位置 (1)、(2) 和 (3) 处作为 u_n 的子词出现。因此， w 不可能作为 u_n 的子词出现，也就不可能作为 La_nR的子词出现。

命题 3：如果 $w \in \mathcal{W}_2^{00}$，那么 w 不会出现在 La_nR中。我们再次用反证法，假设 w 确实出现在 La_nR中。回想一下，根据第 4.2.4 节中 w 的构造，存在一个以 00 开头的词 α_i ，以及一个足够大的参数$\ell_i \in \mathbb{N}$ ，使得 $\alpha_i^{\ell_i}$不会作为 y的子词出现。于是$w = \alpha_i^{100\ell_i}$00。由于 $\alpha_i^{\ell_i}$不是 y的子词，它也不是 L 或R的子词。因此，如果 w 出现在 La_nR 中，那么 w 中出现在 L 中的最长前缀长度小于 $|w|/100$ ，而 w 中出现在 R 中的最长后缀长度小于$|w|/100$。因此，长度至少为 $98|w|/100$ 的 w 的子词会作为 a_n的子词出现。由于 a_n 是 u_n的子词，长度至少为 $98|w|/100$ 的 w 的子词会作为 u_n的子词出现。回想一下， u_n 有一个前缀 111 和一个后缀 111，但如果从 u_n中去掉这两部分，剩下的子词就是 y的子词。由于 w 中有一个长度至少为 $98|w|/100$ 的子词，作为 u_n的子词出现，因此 w 中有一个长度至少为 $92|w|/100$ 的子词，会作为 y的子词出现。特别是，这意味着 $\alpha_i^{\ell_i}$会作为 y的子词出现；矛盾。

命题 4：如果 $w \in \mathcal{W}_2^{000}$，那么 w 不会出现在 La_nR 中。词 000 不会作为子词出现在 y 中，因此它也不会作为子词出现在 L 或 R 中。由于 a_n 以词 11 开头和结尾，因此 La_nR 中不存在与 L 和 a_n 或 a_n 和 R 部分重叠的 000。最后，000 不会作为子词出现在 a_n 中，因为 a_n 是 u_n 的子词，而 u_n 分解为 $u_n = 111\gamma111$ ，其中 γ 是 y 的子词。因此，000 不会作为子词出现在 La_nR 中。于是，如果 000 是 w 的子词，那么 w 就不可能是 La_nR 的子词。 $\mathcal{W}_2^{000}$ 中唯一不含子词 000 的词是词 $\beta_0 =$(01)^{100k}，其中 $k \in \mathbb{N}$ 足够大，使得 (01)^k 不会作为子词出现在 y 中。类似于对 $\mathcal{W}_2^{00}$ 中的词所作的论证，如果 β_0 出现在 La_nR 中，那么 β_0 中一个长度至少为 $98|\beta_0|/100$ 的子词必定会作为子词出现在 u_n 中，因此 β_0 中一个长度至少为 $92|\beta_0|/100$ 的子词也会是 y 的子词。特别地，(01)^k 会是 y 的子词；矛盾。

由于这四种情况涵盖了所有元素 $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2^{11} \cup \mathcal{W}_2^{000} \cup \mathcal{W}_2^{00}$，证明至此完成。□

引理 4.9。 $\mathcal{X}_4$ 是周期稳定的。

证明。设 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{X}_4$ 的有限型子移位覆盖。回顾一下，

$$\mathcal{X}_4 = \bigcap_{t=0}^{\infty} \mathcal{X}_3(t)$$

其中 $\mathcal{X}_3$(0) $\supset \mathcal{X}_3$(1) $\supset \cdots \supset \mathcal{X}_3$(t) $\supset \ldots$。按照第 4.2.5 节的记号，回顾一下，对于任意 t，($\mathcal{Y}_n$(t))$_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{X}_3$(t)的有限型子移位覆盖，并且 N_t 是一个参数，其构造满足：$\mathcal{Y}_{N_t}$(t)中最小周期为 $\mathcal{Y}_{N_t+t}$的周期点集合与t(t)中最小周期为 $k \in \mathbb{N}$的周期点集合相同。此外，对于任意 $\mathcal{X}_3$,$t + k$，移位 $\mathcal{X}_3$(t)是通过禁用词 $\beta_{t+1}, \beta_{t+2}, \ldots, \beta_{t+k}$从 $|\beta_{t+j}| > 2^j|\beta_t|$ ($j > 0$)中得到的；根据构造，对于所有 $t \in \mathbb{N}$， M_t 。对于每个 $\mathcal{Y}_{N_t}$，令 M_t 为 $\mathcal{X}_3$中任一周期点的最小周期。注意，$t - 1$也是 M_t ($\mathcal{X}_3$)中任一周期点的最小周期，并且t($\mathcal{X}_3$)中周期为$t - 1$的周期点集合严格小于 β_t ($\mathcal{X}_3$)中的对应集合（因为在定义t($\{M_t\}_{t=1}^{\infty}$)时， t 经过专门构造，以排除其中一个周期点）。因此，序列 $M_{t+1} > M_t$单调不减并趋于无穷。对于任意满足 M_t 的 $\mathcal{X}_3$值，$t - 1$()中所有周期为的周期点

都包含 β_t 作为子词。令 $\{t_r\}_{r=1}^{\infty}$ 为一个子序列，使得对于所有 $r \geq 1$， $M_{t_r} < M_{t_r+1}$ 。那么对于任意 r，我们知道

(1) $\mathcal{X}_3(t_r - 1)$ 中任意周期点可能具有的最小周期为 M_{t_r}；(2) $\mathcal{X}_3(t_r - 1)$ 中所有周期为 M_{t_r} 的周期点都包含子词 β_{t_r} ；(3) $\mathcal{X}_3(t_r - 1)$ 中所有周期为 M_{t_r} 的周期点都属于 $\mathcal{Y}_{N_{t_r}}(t_r)$，也属于$\mathcal{Y}_{N_{t_r}+t_r}(t_r)$；(4) $\mathcal{X}_3(t_r)$ 中所有周期点的周期都严格大于 M_{t_r}；(5) 对所有 $j > 0$， $|\beta_{t_r+j}| > 2^j|\beta_{t_r}|$ 。

设 p 是 $\mathcal{X}_3(t_r - 1)$ 中周期为 M_{t_r} 的周期点。虽然 p 必须包含子词 β_{t_r}，但我们断言，对于任意 $j > 0$，它都不包含子词 β_{t_r+j} 。由于 $|\beta_{t_r}| > N_{t_r} + t_r$，由此以及 $p \in \mathcal{Y}_{N_{t_r}+t_r}(t_r)$ 可知$p \in X_{N_{t_r}}$ 且 $p \in X_{N_{t_r}+t_r}$。另一方面， $X_{N_{t_r}}$ 中每个最小周期为 M_{t_r}的周期点都必须属于 $\mathcal{X}_3(t_r - 1)$，因为 $\mathcal{Y}_{N_{t_r}}(t_r)$ 是 $X_{N_{t_r}}$ 的子集。因此，只要我们能证明这一断言，就可得出结论： $X_{N_{t_r}}$ 中具有可能的最小周期的周期点与 $X_{N_{t_r}+t_r}$ 中的周期点相同。由于 $\{t_r\}_{r=1}^{\infty}$ 严格递增，因此 $\mathcal{X}_4$ 是周期稳定的。因此，我们只需证明p 不包含任何形如 β_{t_r+j} 的词，其中 $j > 0$。如前所述， p 确实包含子词 β_{t_r}。此外， $|\beta_{t_r}| > |M_{t_r}|$（ p的最小周期）。根据构造，$|\beta_{t_r+j}| > 2^j|\beta_{t_r}|$ ，因此，如果 p 也包含子词 β_{t_r+j} ，那么 β_{t_r+j} 本身就会包含子词 β_{t_r} 。但是， β_{t_r+j} 是子移位$\mathcal{X}_3($ $t_r + j$)语言中的一个词，而 β_{t_r} 是 $\mathcal{X}_3(t_r + j)$ 中的禁词；这就产生了矛盾。我们得出结论，对于任意 $j > 0$， β_{t_r+j} 都不可能是 p 的子词。□

4.3. 具有非平凡自同构群的此类系统的构造。在第4.2节中，我们构造了一个符号系统示例 (X, T)，它具有以下性质：

(i) (X, T) 是周期稳定的；(ii) (X, T) 不是语言稳定的；(iii) (X, T) 没有周期点。

(X, T) 的重要之处在于，根据定理1.1，它具有一个特征测度；而其他原因（例如语言稳定或具有周期点）并不能表明这种测度的存在。然而，(X, T) 的自同构群是什么尚不清楚。例如，如果 Aut(X) 是可平均的，那么根据克雷洛夫-博戈柳博夫定理，特征测度的存在性便可得到保证。为考察这种可能性，我们展示如何利用 (X, T) 构造一个系统 (Z, T)，使其保留 (X, T) 的性质 ((i))–((iii))，并且具有非顺从自同构群。具体而言，若 (X, T) 表示在第4.2节中构造的系统（定义见(16)），而 (Y, T) 表示两个符号上的全移位，我们将证明子移位 $Z = X \times Y$ 具有以下性质：

(i) (Z, T) 是周期稳定的；(ii) (Z, T) 不是语言稳定的；(iii) (Z, T) 没有周期点；(iv) Aut(Z) 包含一个由两个生成元生成的自由群（因此尤其不是可平均的）。

4.3.1. （Z,T）没有周期点。根据构造，系统（X, T）没有周期点；而且，由于 Z 中的任何周期点都会投影到 X 中的一个周期点，因此（ Z, T ）中没有周期点。

4.3.2. **(Z,T) 不是语言稳定的。**令 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 表示 X 的有限型子移位覆盖，并令 $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 表示 Z 的有限型子移位覆盖。由于全移位 (Y,T) 没有禁词，因此对于所有 $n\in\mathbb{N}$，都有 $Z_n = X_n \times Y$。由于系统 (X,T) 不是语言稳定的，这就意味着 (Z,T) 也不是语言稳定的。

4.3.3. **(Z,T) 是周期稳定的。**令 p_n 表示有限型子移位覆盖中 (X,T) 的第 n 个子移位 (X_n,T) 中任意周期点的最小周期，并令 $P_n(X)$ 表示 X_n 中周期为 p_n 的周期点集合。由于 (X,T) 是周期稳定的，给定 $k\geq 1$，存在某个 $n\in\mathbb{N}$，使得 $P_n(X) = P_{n+k}(X)$。那么，如果 $x\in P_n$ 且 $y\in Y$ 是一个不动点，则点 $(x,y)\in Z$ 的周期为 p_n，因此 Z_n 有周期为 p_n 的周期点。此外，周期点 $(x',y')\in Z_n$ 的周期不可能小于 p_n，否则 $x'\in X_n$ 的周期就会小于 p_n。因此，p_n 是 Z_n 中任意周期点的最小周期。

若 $(x,y)\in Z_n$ 是某个周期为 p_n 的周期点，则 $x\in X_n$ 与 $y\in Y$ 均为周期的，且各自的周期整除 p_n。由于 p_n 是 X_n 中任一周期点的最小周期，故 x 的周期为 p_n。因此，Z_n 中周期为 p_n 的周期点集合等于所有满足 $x\in P_n(X)$ 且 $y\in Y$ 的周期整除 p_n 的点 (x,y) 的集合。类似地，Z_{n+k} 中周期为 p_n 的周期点集合也是所有满足 $x\in P_{n+k}(X) = P_n(X)$ 且 $y\in Y$ 的周期整除 p_n 的点 (x,y) 的集合。（我们注意到，由于 Y 是全移位，对第二个坐标没有进一步限制。）因此可得 (Z,T) 是周期稳定的。

4.3.4. **Aut(Z) 包含两个生成元上的自由群。**我们有 $\mathrm{Aut}(Z)$ 包含 $\mathrm{Aut}(X)\times\mathrm{Aut}(Y)$ 作为子群。由于 $\mathrm{Aut}(Y)$ 包含两个生成元上的自由群，故 $\mathrm{Aut}(Z)$ 亦然（从而不可平均）。

References

[1] R. Bowen. Anosov 微分同胚的平衡态与遍历理论。数学讲义，第 **470** 卷。Springer-Verlag，柏林—纽约，1975 年。

[2] V. Cyr and B. Kra *Monatsh. Math.* . 语 **201** 2023 659 701
言稳定子移位的特征测度。（），–。[3] V. Cyr, B. Kra, and S. Petite. 移位的强逼近与特征测度问题。*Math. Z.* **309** (2025)，第 1 期，论文编号 1，共 28 页。[4] N. Pytheas Fogg. 动力系统、算术与组合学中的代换。V. Berth´e、S. Ferenczi、C. Mauduit 和 A. Siegel 编。数学讲义，1794。
Springer-Verlag，柏林，2002 年。[5] J. Frisch, B. Seward, and A. Brandon. 没有特征测度的极小子动力系统与极小流。*Forum Math. Sigma* **12** (2024)，论文编号 e58，共 10 页。

[6] J. Frisch and O. Tamuz. 符号动力系统的特征测度。 *Ergodic Theory Dynam. Systems* **42** 2022 5, 1655 1661 （），
第 – 期。[7] S. Kadyrov. 遍历理论中 Parry 测度的有效唯一性与例外集。*Monatsh. Math.* **178** (2015)，第 2 期，237–249。[8] D. Lind. 有限型移位的扰动。

SIAM J. Discrete Math. **2** 1989 3, , 350 365
（），第 – 期。[9] W. Parry. 内禀马尔可夫链。*Trans. Amer. Math. Soc.* **112** (1964)，55–66。
[10] W. Parry and M. Pollicott. 双曲动力系统的 ζ 函数与周期轨道结构。*Astérisque* 第 187-188 期（1990），268 页。[11] F. Garcia-Ramos and R. Pavlov. 子移位的延拓集与最大熵测度。
J. Lond. Math. Soc，**100**，第 3 期（2019），1013–1033。[12] N. Ramsey. 子移位多词扰动的熵界。*Ergodic Theory Dy-* *nam. Systems* **44** 2024 2, 665 673 （），
第 – 期。[13] H. Wielandt. 不可约非负矩阵。*Math. Z.* **52** (1950)，642–648。

Department of Mathematics, Tufts University, 177 College Avenue, Medford, MA 02155Department of Mathematics, Bucknell University, 1 Dent Drive, Lewisburg, PA17837Department of Mathematics, Northwestern University, 2033 Sheridan Road, Evanston,IL 60208Department of Mathematics, University of Denver, 2390 S. York Street, Denver,CO 80210