无名称稿件编号（将由编辑插入）

非光滑凸混合整数非线性规划问题的新外逼近算法

Zhou Wei · He-Yi Liu · Bo Zeng

arXiv:2602.04122v1 [math.OC] 4 Feb 2026

收稿日期：日期 / 录用日期：日期

摘要 本文提出一种求解非光滑混合整数非线性规划（MINLP）问题的新型外逼近算法。该方法通过固定整数变量并求解所得的非线性凸子问题来进行。当子问题可行时，利用KKT最优性条件，在最优解处计算目标函数与约束函数的适当次梯度，从而导出有效线性割。引入一个由非线性约束函数定义的新参数，以促进这些割的生成。对于不可行子问题，则求解一个可行性问题，并通过基于KKT的次梯度生成有效线性割，以排除该不可行整数赋值。

通过整合这两类割，构建一个混合整数线性规划（MILP）主问题，并证明其与原始混合整数非线性规划等价。这一等价性支撑了一种新的外逼近算法，该算法保证在有限次迭代后终止。

针对光滑凸混合整数非线性规划问题的数值实验表明，所提出的算法能够产生比经典外逼近法更紧的混合整数线性规划松弛。此外，该方法为生成线性切割提供了一种替代机制，不再仅依赖一阶泰勒展开，并表明外逼近算法的效率很大程度上取决于混合整数非线性规划问题的内在结构。

关键词 外逼近 · 凸混合整数非线性规划 · KKT · 次梯度 ·混合整数线性规划

数学主题分类（2000） 90C11 · 90C25 · 90C30

Zhou Wei 河北省机器学习与计算智能重点实验室 & 数学与信息科学学院，河北大学，中国，保定，071002 电子邮箱：weizhou@hbu.edu.cn He-Yi Liu 数学与信息科学学院，河北大学，中国，保定，071002 电子邮箱：hyliu@stumail.hbu.edu.cn Bo Zeng 工业工程系，匹兹堡大学，美国宾夕法尼亚州匹兹堡，PA 15261 电子邮箱：bzeng@pitt.edu

1. 引言

本研究的主要目标是为非光滑凸混合整数非线性规划开发一种新颖的外逼近法。这包括将凸混合整数非线性规划重构为等价的混合整数线性规划主问题，构建算法框架以求解由此产生的一系列混合整数线性规划松弛，确保收敛至最优解，并最终证明所构造算法能够有限终止。

1.1 混合整数非线性规划问题与求解方法

工程学和科学中遇到的许多优化问题，都在非线性系统中同时涉及离散决策变量和连续决策变量，这类问题被正式描述为混合整数非线性规划（MINLP）问题。此类混合整数非线性规划可在数学上表示如下：

$$(P)\begin{cases}\min\limits_{x,y} \ f(x,y)\\ \text{s.t.} \ \ g_i(x,y)\le 0, i=1,\cdots,m,\\ \qquad x\in X, y\in Y\cap\mathbb{Z}^p.\end{cases}\tag{1.1}$$

其中 $f,g_i:\ \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}(i=1,\cdots,m)$为非线性函数， $X\subseteq\mathbb{R}^n$ 是一个非空有界多面体集，且 $Y\subseteq\mathbb{R}^p$ 是一个多面体集。

混合整数非线性规划为应对广泛的现实优化挑战提供了强有力的框架。其应用遍及众多领域，包括工程学（例如，块布局、过程综合、水网络设计）、金融（投资组合优化）、能源（核反应堆堆芯管理）、医疗保健（癌症治疗规划）以及工业运营（生产计划和石化混合问题）。关于混合整数非线性规划应用的更多细节，请读者参阅文献 [3–6,8,9,21,25] 及其中的参考文献。

众所周知，大多数用于求解凸混合整数非线性规划问题的确定性方法都依赖于分解策略。在这些方法中，通过迭代求解一系列更易处理的子问题来获得最优解。主要的确定性技术包括扩展割平面法（ECP）、扩展支撑超平面法（ESH）、广义 Benders 分解（GBD）、外逼近（OA）以及基于线性规划/非线性规划的分支定界。Westerlund 和 Petterson [29], 提出的 ECP 算法 [29], 将 Kelly 割平面法扩展到凸非线性规划问题，该方法在 [17]中得到发展。随后，Kronqvist 等人 [20] 提出了 ESH 方法，将其作为一种专用于凸混合整数非线性规划的算法。Geoffrion [16], 首次提出的广义 Benders 分解，将 [1] 中较早提出的 Benders 分解方法推广至混合整数线性规划（MILP）。在 GBD 中，主问题被投影到整数变量空间，因此仅以离散变量表示。Duran 和 Grossmann [13], 最初提出了 OA 方法，Fletcher 和 Leyffer [15]进一步阐述了凸混合整数非线性规划的相关性质。Quesada 和 Grossmann [24] 随后将 OA 纳入分支定界框架，通过依次求解线性和非线性子问题来实现求解。这种基于线性规划/非线性规划的分支定界方法维护一棵分支定界树，其中混合整数线性规划主问题会动态

更新。在本文中，我们重点介绍一种用于求解非光滑凸混合整数非线性规划的新 OA 算法。

1.2 文献中关于外逼近的相关研究

本小节回顾了用于求解凸混合整数非线性规划问题的外逼近方法的发展历程。Duran 和 Grossmann [13]于1986年开展的开创性工作，为一类特定的混合整数非线性规划问题建立了原始外逼近框架；这类问题的子问题关于整数变量是仿射的，关于连续变量是凸的。Fletcher 和 Leyffer [15] 于1994年进一步拓展了该方法，使其能够处理具有连续可微函数的凸混合整数非线性规划，同时还在罚函数框架下考虑了非光滑扩展。Kesavan 等人 [18] 于2004年将外逼近的应用扩展至可分非凸混合整数非线性规划，并提出了涉及一系列松弛主问题和非线性子问题的算法。针对非光滑凸混合整数非线性规划，Eronen 和 M¨akel¨a [14] 于2014年提出了一种广义外逼近方法。随后，Wei 和 Ali [27, 28]于2015年基于次梯度和 KKT最优性条件，进一步将外逼近方法拓展至非光滑问题。

近期的改进主要着眼于提升收敛性和鲁棒性。Su 等人 [26] 于2018年将可行性泵整合进外逼近方案，提出了近端OA方法，加快了可行解的生成。Delfino 和 de Oliveira [12] 将外逼近与束方法相结合，用于求解非光滑凸混合整数非线性规划。

Kronqvist Bernal 和 Grossmann [19] 于2020年取得了重要进展：他们借鉴水平方法的思想，将正则化和二阶导数信息高效地纳入外逼近框架。通过对拉格朗日函数进行二阶泰勒展开，他们显著减少了高度非线性问题的迭代次数。DeMauri 等人 [11] 基于二阶展开推导出缩放二次切割，为凸函数提供了更精确的下估计，从而改进了外逼近和部分替代方法。Coey、Lubin 和 Vielma [10] 提出了一种分支定界LP外逼近算法，用于求解重构为混合整数锥问题的凸混合整数非线性规划；Muts、Nowak 和 Hendrix[22]则提出了一种两阶段分解式外逼近算法，通过求解一系列混合整数线性规划子问题，迭代地细化近似。

在 [19], Bernal 等人 [2]于 2022年提出的正则化OA方法直接建立在正则化概念之上，该方法纳入了基于距离度量和拉格朗日近似的新型正则化函数。

1.3 本文的贡献与结构

本文深入研究了用于求解非光滑凸混合整数非线性规划问题的外逼近方法。我们利用可行子问题所得的解，引入了以非线性约束函数及其对应解为基础定义的新参数。随后，将这些参数整合到外逼近框架中，得到一个经严格证明与原始混合整数非线性规划等价的混合整数线性规划主问题。

我们提出的外逼近方法的主要贡献如下：

- 我们的方法不再仅依赖一阶泰勒展开来线性化非线性约束，而是提供了一种灵活性和适应性更强的替代线性化方法。 - 所提出的线性化方案生成的约束能够定义更紧的外逼近多面体，与传统外逼近相比，该多面体对原始非线性可行域的过估计更为贴近。 - 我们的方法明确利用凸混合整数非线性规划中非线性约束的结构信息，表明问题结构对提高求解效率至关重要；这一点在经典外逼近的实现中往往未得到充分利用。

通过这些创新，所提出的 OA 方法提升了凸混合整数非线性规划问题在理论严谨性和计算可处理性方面的表现。

本文的结构安排如下。第 2 节给出本文将用到的一些定义和预备知识。第 3 节针对非光滑凸混合整数非线性规划问题提出一种新的 OA 方法。对于可行子问题，我们利用从 KKT最优性条件推导出的适当次梯度构造有效线性割，并通过非线性约束函数定义的新参数对其进行扩充。对于不可行子问题，我们求解一个可行性问题，选取适当的次梯度，并生成线性割以排除不可行整数解。综合这两种情况，我们建立一个混合整数线性规划主问题，并证明其与原问题等价。基于这一等价关系，我们设计了一种新的 OA 算法，通过求解一系列混合整数线性规划松弛，直至得到原问题的最优解。并证明了该算法有限终止。例 3.1 说明了与经典外逼近相比，所提方法的有效性和优越性能。第 4 节详细介绍新 OA 算法的实现，并使用 MINLPLib 中的测试实例对其与经典外逼近进行数值比较 [7]。本文的结论见第 5 节。

2. 预备知识

设 $\mathbb{R}^n$ 为配备内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的欧几里得空间的范数。对于任意子集 $C \subset \mathbb{R}^n$，我们分别用 int(C)、cl(C) 和 conv(C) 表示 C 的内部、闭包和凸包。

设 A 是 $\mathbb{R}^n$ 和 $x \in A$ 的闭凸集。我们用 $T(A,x)$ 表示 A 在 x 处的切锥，其定义如下:

$$T(A,x) := \mathrm{cl}(\mathbb{R}_+(A-x)).$$

因此，当且仅当存在 $v_k \to v$ 和 $t_k \to 0^+$，使得对所有 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $x + t_k v_k \in A$ 时，$v \in T(A,x)$ 成立；其中，$\mathbb{N}$ 表示所有自然数组成的集合。

我们用 $N(A,x)$ 表示 A 在 x 处的法锥，其定义为:

$$N(A,x) := \{\gamma \in \mathbb{R}^n : \langle \gamma, y-x\rangle \le 0 \ \text{ for all } y \in A\}.$$

众所周知,

$$N(A,x) = \{\gamma \in \mathbb{R}^n : \langle \gamma, v\rangle \le 0 \ \text{ for all } v \in T(A,x)\}.$$

设 φ： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 是一个适当的下半连续凸函数，且 $x \in \mathrm{dom}(\varphi)$: $= \{u \in \mathbb{R}^n$: $\varphi(u) < +\infty\}$。我们用 $\partial\varphi(x)$ 表示 φ 在 x 处的次微分，其定义为

$$\partial\varphi(x) := \{\alpha \in \mathbb{R}^n : \langle \alpha, y - x\rangle \leq \varphi(y) - \varphi(x) \ \text{ for all } y \in \mathbb{R}^n\} \tag{2.2}$$

$\partial\varphi(x)$中的每个向量都称为 φ 在 x处的次梯度。

以下引理引自 [27, 命题 2.3] ，并用于我们的分析。

引理 2.1 *Let* ϕ : $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *be a continuous and convex function and supposethat* $(\bar{x}, \bar{y})$ $\in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. *Then for any* $\alpha \in \partial\phi(\cdot, \bar{y})(\bar{x})$ *there exists* $\beta \in \mathbb{R}^p$ *such that*$(\alpha, \beta) \in \partial\phi(\bar{x},$ $\bar{y})$。

以下引理取自 [23, 定理 3.23]。

引理 2.2 *Let* φ_1, φ_2 : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *be proper lower semicontinuous convex functions and* $\bar{x} \in \mathrm{dom}(\varphi_1) \cap \mathrm{int}(\mathrm{dom}(\varphi_2))$. *Then*

$$\partial(\varphi_1 + \varphi_2)(\bar{x}) = \partial\varphi_1(\bar{x}) + \partial\varphi_2(\bar{x}).$$

我们以引自 [30, 定理 2.418]的以下引理结束本节。

引理 2。3 *Let* φ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *be a continuous convex function. Define*

$$\varphi_+(x) := \max\{\varphi(x), 0\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Then φ_+ *is a convex and continuous function and*

$$\partial\varphi_+(x) = [0, 1]\partial\varphi(x)$$

holds for all $x \in \mathbb{R}^n$ *with* φ (x) $= 0$.

3. 凸混合整数非线性规划问题的新OA算法

本节旨在推导一种用于求解非光滑凸混合整数非线性规划问题的新 OA 算法。为构建该算法，我们需要求解非光滑凸非线性规划子问题，并详细说明计算过程，包括选择满足 KKT 条件的非负乘子和次梯度，以及由这些次梯度和非线性约束函数定义的新参数。

本节研究的非光滑凸混合整数非线性规划问题如下:

$$(P)\begin{cases} \min\limits_{x,y} \ f(x, y) \\ \text{s.t.} \ \ g_i(x, y) \leq 0, i = 1, \cdots, m, \\ \qquad x \in X, y \in Y \cap \mathbb{Z}^p. \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 f, g_i: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \cdots, m)$ 是连续凸函数， $X \subseteq \mathbb{R}^n$是非空有界多面体集， $Y \subset \mathbb{R}^p$ 是多面体集。

本节的主要目标是提出一种新的外逼近算法，用于求解式 (3.1) 中的凸混合整数非线性规划问题 (P)。为此，我们将使用投影

将问题 (*P*) 表示为关于 y 变量的问题。对于固定的 $y \in Y \cap \mathbb{Z}^p$，我们考虑以下非线性子问题 $NLP(y)$:

$$NLP(y)\begin{cases}\min\limits_{x} & f(x,y)\\ \text{s.t.} & g_i(x,y)\le 0, i=1,\cdots,m,\\ & x\in X.\end{cases} \tag{3.2}$$

我们将 Y 划分为两个不相交子集:

$$T:=\{y\in Y\cap\mathbb{Z}^p:\ NLP(y)\text{ 可行}\}\text{ 且 }\ S:=\{y\in Y\cap\mathbb{Z}^p:\ NLP(y)\text{ 不可行}\}. \tag{3.3}$$

Throughout this section, we always assume that the following Slater constrain qual-ification holds:

(A1) *For any $y\in T$, there is some $\hat{x}\in X$ such that $g_i(\hat{x},y)<0$ for all $i=1,\cdots,m$.*

3.1 可行非线性子问题。

设 $y_j\in T$。则关于变量 x，$\cdot$，y_j) $g_i(\cdot,\ y_j)$ 是连续凸函数。注意，子问题 $NLP(y_j)$ 是一个凸优化问题，并且由于 X 有界且闭，$NLP(y_j)$ 的最优解存在。因此，我们可以假设 $x_j\in X$ 求解子问题 $NLP(y_j)$。

我们将其记为

$$I(x_j):=\{i: g_i(x_j,y_j)=0\} \tag{3.4}$$

活跃指标集。

根据假设（A1）和 KKT最优性条件，存在非负乘子 $\lambda_{j,\ 1},\ \cdots,\ \lambda_{j,\ m}\ge 0$，使得

$$\begin{cases}0\in\partial f(\cdot,y_j)(x_j)+\sum\limits_{i\in I(x_j)}\lambda_{j,i}\partial g_i(\cdot,y_j)(x_j)+N(X,x_j),\\ \lambda_{j,i}g_i(x_j,y_j)=0, i=1,\cdots,m,\end{cases} \tag{3.5}$$

因此，存在次梯度 $\alpha_j\in\partial f\ \ y_j\ \ x_j\qquad \xi_{j\,i}\in\partial g_i\ \ y_j\ \ x_j\ \ i=(\cdot,\ )(\ )$ 和 $,(\cdot,\ )(\ ),\ ,$ 使得 $1,\cdots\ m$

$$-\alpha_j-\sum_{i=1}^{m}\lambda_{j,i}\xi_{j,i}\in N(X,x_j). \tag{3.6}$$

根据引理2.1，存在 $\beta_j\in\mathbb{R}^p$ 和 $\eta_{j,\ i}\in\mathbb{R}^p,\ \ i=1,\ \cdots,\ m$，使得

$$(\alpha_j,\beta_j)\in\partial f(x_j,y_j)\text{ and }(\xi_{j,i},\eta_{j,i})\in\partial g_i(x_j,y_j), i=1,\cdots,m. \tag{3.7}$$

以下命题有助于通过新 OA 方法对凸混合整数非线性规划问题（P）进行等价重构。

命题 **3 1** *Let $x_j\in X$ solve feasible subproblem $NLP\ y_j$ and subgradient。$(),\ ,\ ,\ ,\ ,(.),$ $\alpha_j\ \xi_{j\,i}\ i=1\ \cdots\ m$ satisfy 3 6 . Then for any $r>0$ one has*

$$\alpha_j^T(x-x_j)\ge 0 \tag{3.8}$$

holds for all $x\in X$ with $g_i(x_j,y_j)+r\xi_{j\ ,i}^T(x-x_j)\le 0, i=1,\cdots,m.$

证明。设 $r>0$ 与 $x\in X$ 使得

$$g_i(x_j,y_j)+r\xi_{j,i}^T(x-x_j)\le 0, i=1,\cdots,m. \tag{3.9}$$

那么 $x-x_j\in T(X, x_j)$，由 (3.6) 可得

$$\Big(\alpha_j+\sum_{i\in I(x_j)}\lambda_{j,i}\xi_{j,i}\Big)^T(x-x_j)\ge 0. \tag{3.10}$$

将 $\lambda_{j,i}$ 乘以 (3.9) 左侧，(3.5) 得到

$$\sum_{i=1}^m r\lambda_{j,i}\xi_{j,i}^T(x-x_j)\le 0$$

因此，根据 (3.10)，(3.8) 成立。证明完毕。 □

下面的命题可由命题 3.1 立即推出。

命题 3.2 *Let $x_j\in X$ solve feasible subproblem $NLP\ y_j$ and subgradients。( ) $\alpha_j\ \xi_{j\,i}\ i=1\cdots m$ satisfy 3.6. Let $r>0$ be fixed. Consider the following linear , , (, ,) (.)programming LP(r, y_j):*

$$LP(r,y_j)\begin{cases}\min\limits_x\ f(x_j,y_j)+\alpha_j^T(x-x_j)\\ \text{s.t. } g_i(x_j,y_j)+r\xi_{j,i}^T(x-x_j)\le 0, i=1,\cdots,m,\\ \quad x\in X.\end{cases} \tag{3.11}$$

Then x_j is an optimal solution to LP(r, y_j) with the optimal value f(x_j, y_j)。

不同于处理凸混合整数非线性规划问题的经典 OA，我们针对可行非线性子问题的情况引入了一个新参数 ρ_j，并将证明该参数能够产生有效线性割，并在求解混合整数线性规划松弛时得到更好的解（见示例 3.1）。

我们用以下符号表示

$$J(x_j):=\{1,\cdots,m\}\backslash I(x_j). \tag{3.12}$$

如果 $J(x_j)\ne\emptyset$，则设

$$\Pi_j:=\max_{i\in J(x_j)}\max_{(x,y)\in X\times(Y\cap\mathbb{Z}^p)}\left\{(\xi_{j,i},\eta_{j,i})^T\begin{pmatrix}x-x_j\\ y-y_j\end{pmatrix}\right\}. \tag{3.13}$$

我们按如下方式选择一个参数 $\rho_j>0$：

$$\rho_j:=\begin{cases}\dfrac{-\max\limits_{i\in J(x_j)}g_i(x_j,y_j)}{\Pi_j}, \text{ if } J(x_j)\ne\emptyset,\Pi_j>0,\\ 1, \qquad\qquad \text{otherwise.}\end{cases} \tag{3.14}$$

注 3.1 *It is noted that Π_j refers to computing fintely many MILP problems. Further, for each $i \in J\ (x_j) \neq \emptyset$, we consider the following problem:*

$$\mathrm{P}_i \begin{cases} \max\ (\xi_{j,i}, \eta_{j,i})^T \begin{pmatrix} x - x_j \\ y - y_j \end{pmatrix} \\ \text{s.t. } x \in X, y \in \mathrm{conv}(Y \cap \mathbb{Z}^p). \end{cases} \tag{3.15}$$

We denote by Υ_i the optimal value of P_i. Then it is easy to verify that

$$\Pi_j = \max_{i \in J(x_j)} \Upsilon_i.$$

Each problem P_i refers to the convex hull of $Y \cap \mathbb{Z}^p$ and it is impractical to compute conv($Y \cap \mathbb{Z}^p$) *in general. However, for some cases with the speical structure (i.e. Y is the integral polyhedron), it may be easy to get Π_j by solving finitely many problems* P_i *given in* 3 15 . (.)

为了对式 (3.1) 中的凸混合整数非线性规划问题进行等价重构，我们考虑以下混合整数线性规划问题:

$$\begin{cases} \min\limits_{x,y,\theta} \ \theta \\ \text{s.t. } \ f(x_j, y_j) + (\alpha_j, \beta_j)^T \begin{pmatrix} x - x_j \\ y - y_j \end{pmatrix} \leq \theta \quad \forall y_j \in T, \\ \qquad g_i(x_j, y_j) + \rho_j (\xi_{j,i}, \eta_{j,i})^T \begin{pmatrix} x - x_j \\ y - y_j \end{pmatrix} \leq 0 \ \ \forall i, \ \forall y_j \in T, \\ \qquad x \in X, y \in T, \theta \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.16}$$

以下定理旨在证明式 (3.1) 中给出的凸混合整数非线性规划问题 (P) 与式 (3.16) 中提出的混合整数线性规划等价。该结果至关重要，因为它为构造用于求解问题 (P) 的新 OA 算法提供了理论保证。

定理 3。**1** *The MILP problem of* (3.16) *is equivalent to convex MINLP problem*(P) *of* (3.1) *in the sense that both problems have the same optimal value and the optimal solution $\bar{x}\ \bar{y}$ to problem P corresponds to the optimal solution $\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{\theta}$ to* (,) ( ) (,) (.) (,) *problem of* 3 16 *with $\bar{\theta} = f\ \bar{x}\ \bar{y}$.*

证明。假设 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\theta})$ 是问题 (3.16) 的混合整数线性规划的最优解，且 (x_{j_0}, y_{j_0}) 是问题 (3.1) 的凸混合整数非线性规划问题 (P) 的解。我们需要证明 $\bar{\theta} = f(x_{j_0}, y_{j_0})$。

我们假设，对于某个 $y_{j_1} \in T$， $\bar{y} = y_{j_1}$。那么

$$f(x_{j_1}, y_{j_1}) + (\alpha_{j_1}, \beta_{j_1})^T \begin{pmatrix} \bar{x} - x_{j_1} \\ 0 \end{pmatrix} \leq \bar{\theta} \tag{3.17}$$

and

$$g_i(x_{j_1}, y_{j_1}) + \rho_j (\xi_{j,i}, \eta_{j,i})^T \begin{pmatrix} \bar{x} - x_{j_1} \\ 0 \end{pmatrix} \leq 0, i = 1, \cdots, m.$$

由此和命题 3.1 可知 $\alpha_{j_1}^T (\bar{x} - x_{j_1}) \geq 0$，并由 (3.17) 得到

$$\bar{\theta} \geq f(x_{j_1}, y_{j_1}) \geq f(x_{j_0}, y_{j_0})$$

（第二个不等式成立是因为 (x_{j_0}, y_{j_0}) 是 P 的最优解。）

接下来证明 $\bar{\theta} \leq f(x_{j_0}, y_{j_0})$。为此，只需证明 (x_{j_0}, y_{j_0}) 满足关于 g_i in (3.16) 的所有约束。由此可知，根据 f 的凸性，$(x_{j_0}, y_{j_0}, f(x_{j_0}, y_{j_0}))$ 对问题 (3.16) 可行，因而 consequently $\theta \leq f(x_{j_0}, y_{j_0})$。

设 $y_j \in T$。我们只需考虑 $\rho_j > 0$ 的情形。首先断言

$$g_i(x_j, y_j) + \rho_j(\xi_{j,i}, \eta_{j,i})^T \begin{pmatrix} x_{j_0} - x_j \\ y_{j_0} - y_j \end{pmatrix} \leq 0, \ \forall i \in I(x_j). \tag{3.18}$$

反设存在 $i \in I(x_j)$，使得

$$g_i(x_j, y_j) + \rho_j(\xi_{j,i}, \eta_{j,i})^T \begin{pmatrix} x_{j_0} - x_j \\ y_{j_0} - y_j \end{pmatrix} > 0$$

因此

$$(\xi_{j,i}, \eta_{j,i})^T \begin{pmatrix} x_{j_0} - x_j \\ y_{j_0} - y_j \end{pmatrix} > 0$$

（得益于 $i \in I(x_j)$ 和 $\rho_j > 0$）。因此，由 g_i 的凸性可得

$$g_i(x_{j_0}, y_{j_0}) \geq g_i(x_j, y_j) + (\xi_{j,i}, \eta_{j,i})^T \begin{pmatrix} x_{j_0} - x_j \\ y_{j_0} - y_j \end{pmatrix} = (\xi_{j,i}, \eta_{j,i})^T \begin{pmatrix} x_{j_0} - x_j \\ y_{j_0} - y_j \end{pmatrix} > 0,$$

这与 $g_i(x_{j_0}, y_{j_0}) \leq 0$ 矛盾。这意味着 (3.18) 成立。

令 $k \in J(x_j)$。根据 (3.14) 中 ρ_j 的选取，可得

$$\begin{aligned} & g_k(x_j, y_j) + \rho_j(\xi_{j,k}, \eta_{j,k})^T \begin{pmatrix} x_{j_0} - x_j \\ y_{j_0} - y_j \end{pmatrix} \\ = \ & g_k(x_j, y_j) + \frac{-\max\limits_{i \in J(x_j)} g_i(x_j, y_j)}{\Pi_j} (\xi_{j,k}, \eta_{j,k})^T \begin{pmatrix} x_{j_0} - x_j \\ y_{j_0} - y_j \end{pmatrix} \\ \leq \ & g_k(x_j, y_j) + \Big(- \max_{i \in J(x_j)} g_i(x_j, y_j) \Big) \\ \leq \ & 0 \end{aligned}$$

由此以及 (3.18) 可知，(x_{j_0}, y_{j_0}) 满足关于 (3.16) 中 g_i 的所有约束。因此 $\bar{\theta} = f(x_{j_0}, y_{j_0})$。证明完毕。□

Theorem 3.2 Our method departs from the classical OA approach for convex MINLPs. Theorem 3.1 proves the validity of the resulting linear cut and shows that its incorporation yields a tighter polyhedral approximation of the nonlinear feasible region within the MILP relaxation. This tightening effect is empirically demonstrated in Example 3.1.

3.2 不可行非线性子问题。

设 $y_l \in S$。则子问题 $NLP(y_l)$不可行。为构造该算法，有必要生成有效线性割，以排除此类不可行整数解 y_l。为此，我们考虑如下非线性可行性问题 $F(y_l)$：

$$F(y_l)\begin{cases}\min\limits_{x,u} \sum\limits_{i=1}^{m} u_i \\ \text{s.t. } g_i(x,y_l) \le u_i, i=1,\cdots,m \\ \quad u_i \ge 0, i=1,\cdots, \\ \quad x \in X, u \in \mathbb{R}^m.\end{cases} \tag{3.19}$$

对任意 i，我们记 $\varphi_i(x) := \max\{g_i(x,y_l), 0\}$，对每个 x_l。注意 X 有界且闭，因此可假设 $x_l \in X$ 求解问题 $F(y_l)$。于是可以验证， x_l 也是如下非线性问题 $F(y_l)'$ 的最优解：

$$F(y_l)'\begin{cases}\min\limits_{x} \sum\limits_{i=1}^{m} \varphi_i(x) \\ \text{s.t. } x \in X.\end{cases}$$

然后，利用KKT最优性条件与引理 2.2，可得

$$0 \in \partial\Big(\sum_{i=1}^{m}\varphi_i\Big)(x_l) + N(X,x_l) = \sum_{i=1}^{m}\partial\varphi_i(x_l) + N(X,x_l). \tag{3.20}$$

我们将 $\{1,\cdots,m\}$ 划分为三个不相交子集

$$\begin{cases} I(x_l) := \{i \in \{1,\cdots,m\} : g_i(x_l,y_l) = 0\}, \\ I^{<}(x_l) := \{i \in \{1,\cdots,m\} : g_i(x_l,y_l) < 0\}, \\ I^{>}(x_l) := \{i \in \{1,\cdots,m\} : g_i(x_l,y_l) > 0\}. \end{cases} \tag{3.21}$$

利用 g_i 的连续性与引理 2.3，可以验证

$$\partial\varphi_i(x_l) = \begin{cases} \{0\}, & i \in I^{<}(x_l), \\ [0,1]\partial g_i(\cdot,y_l)(x_l), & i \in I(x_l), \\ \partial g_i(\cdot,y_l)(x_l), & i \in I^{>}(x_l). \end{cases} \tag{3.22}$$

Set

$$\lambda_{l,i} = 0, \text{ if } i \in I^{<}(x_l) \text{ and } \lambda_{l,i} = 1, \text{ if } i \in I^{>}(x_l). \tag{3.23}$$

由此，根据（3.22），存在非负乘子 $\lambda_{l,\,i} \in [0,1]$，$i \in I(x_l)$ 和 $\xi_{l,\,i} \in \partial g_i(\cdot,\ y_l)(x_l)$ $i = 1,\ \cdots,\ m$，使得

$$-\sum_{i=1}^{m}\lambda_{l,i}\xi_{l,i} \in N(X,x_l). \tag{3.24}$$

根据引理2.1，存在 $\xi_{l,\,i} \in \partial g_i(\cdot,\ y_l)(x_l)$、$\eta_{l,\,i} \in \mathbb{R}^p$，$i = 1,\ \cdots,\ m$，使得

$$(\xi_{l,i},\eta_{l,i}) \in \partial g_i(x_l,y_l), i = 1,\cdots,m. \tag{3.25}$$

以下命题表明，可以利用次梯度（$\xi_{l,\,i}$，$\eta_{l,\,i}$）生成有效线性割，以排除不可行整数解 y_l。

命题 **3 3** *Let $x_l \in X$ solve nonlinear problem $F\ y_l{}'$ and take nonnegative*。( ), *multipliers $\lambda_{l\ i}$ and subgradients $\xi_{l\ i}\ \eta_{l\ i}\quad i = 1\ \cdots\ m$ satisfying* 3 23 , 3 24 *and* (, , ,), , (.) (.) (3.25). *Then the following constraints:*

$$\begin{cases} g_i(x_l, y_l) + (\xi_{l,i}, \eta_{l,i})^T \begin{pmatrix} x - x_l \\ y - y_l \end{pmatrix} \leq 0, i = 1, \cdots, m, \\ x \in X, y \in Y \cap \mathbb{Z}^p. \end{cases} \tag{3.26}$$

could exclude the infeasible integer variable y_l.

证明。注意到子问题 $NLP(y_l)$ 不可行，因此 $F(y_l)$ 的最优值为正；也就是说,

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x_l) > 0.$$

反设存在 $\hat{x} \in X$，使得 $(\hat{x}, y_l)$ 满足 (3.26) 的约束，即为可行解。那么

$$g_i(x_l, y_l) + \xi_{l,i}^T(\hat{x} - x_l) \leq 0, \quad \forall i = 1, \cdots, m. \tag{3.27}$$

根据 (3.24)，可得

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_{l,i} \xi_{l,i}^T(\hat{x} - x_l) \geq 0$$

将 $\lambda_{l,i}$ 与 (3.27) 相乘，可得

$$\begin{aligned} 0 &\geq \sum_{i=1}^{m} \lambda_{l,i} g_i(x_l, y_l) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_{l,i} \xi_{l,i}^T(\hat{x} - x_l) \\ &= \sum_{i \in I^>(y_l)} \lambda_{l,i} g_i(x_l, y_l) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_{l,i} \xi_{l,i}^T(\hat{x} - x_l) \\ &\geq \sum_{i \in I^>(y_l)} \lambda_{l,i} g_i(x_l, y_l) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x_l) > 0 \end{aligned}$$

（最后一个等号由 $\lambda_{l,i}$ 的选取可得），这就产生了矛盾。证毕。□

3.3 新OA算法的构造

为构造求解式（3.1）中凸混合整数非线性规划问题（P）的新 OA 算法，需要对问题（P）进行等价重构，因此需要结合可行与不可行非线性子问题。根据定理3.1和命题 3.3，我们得到以下定理，可将式（3.1）中的凸混合整数非线性规划问题（P）重构为等价的混合整数线性规划主问题。该结果从理论上保证了构造相应的新 OA 算法来求解问题（P）。

定理 3.2 *For any $y_j \in T$ let $x_j \in X$ solve feasible subproblem $NLP\ y_j$ and subgradient $\alpha_j\ \beta_j$, $\xi_{j\,i}\ \eta_{j\,i}\ \ i = 1 \cdots m$ satisfy 3.6 and 3.7 and select a parameter ρ_j as 3.14 and for any $y_l \in S$ let $x_l \in X$ solve nonlinear feasibility problem, $F\ y_l$ and subgradients $\xi_{l\,i}\ \eta_{l\,i}\ \ i = 1 \cdots m$ satisfying 3.24 and 3.25. Consider the following MILP master program (MP):*

$$(MP)\begin{cases} \min\limits_{x,y,\theta}\ \theta \\ \text{s.t.}\quad f(x_j,y_j) + (\alpha_j,\beta_j)^T \begin{pmatrix} x-x_j \\ y-y_j \end{pmatrix} \le \theta \quad \forall y_j \in T, \\ \qquad g_i(x_j,y_j) + \rho_j(\xi_{j,i},\eta_{j,i})^T \begin{pmatrix} x-x_j \\ y-y_j \end{pmatrix} \le 0, \forall i, \forall y_j \in T, \\ \qquad g_i(x_l,y_l) + (\xi_{l,i},\eta_{l,i})^T \begin{pmatrix} x-x_l \\ y-y_l \end{pmatrix} \le 0, \forall i,\ \forall y_l \in S, \\ \qquad x \in X, y \in Y \cap \mathbb{Z}^p, \theta \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.28}$$

Then master program (MP) is equivalent to the convex MINLP problem (P) of (3.1) in the sense that both problems have the same optimal value and that the optimal solution $\bar{x}\ \bar{y}$ to problem (P) corresponds to the optimal solution $\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{\eta}$ to (MP), with $\bar{\theta} = f\ \bar{x}\ \bar{y}$.

注3.3 *The KKT conditions play an important role in the equivalent reformulation of MINLP problem (P) and it is noted that subgradients if not satisfying KKT, conditions may be insufficient for this equivalent reformulation (cf. [27, Example 3.1]).*

基于定理 3.2，我们构造了一种新的OA算法。该算法迭代求解在（3.28）中定义的松弛主问题（MP），从而确保收敛到（3.1）中原问题 (P) 的最优解。

At iteration k, subsets T^k and S^k are defined as follows:

$$T^k := T \cap \{y_1, \cdots, y_k\} \ \text{ and } \ S^k := S \cap \{y_1, \cdots, y_k\}. \tag{3.29}$$

Exactly one of the following cases occurs:

(a) *$y_k \in T^k$: Solve subproblem $NLP(y_k)$ and denote by x_k the optimal solution. Solve the following optimization problem $OP(x_k,\ y_k)$:*

$$\textit{Find}\ \begin{bmatrix} (\alpha_k,\beta_k) \\ (\xi_{k,i},\eta_{k,i}) \\ \lambda_{k,i} \in \mathbb{R} \end{bmatrix} \textit{such that}\ \begin{cases} -\alpha_k - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_{k,i}\xi_{k,i} \in N(X,x_k), \\ (\alpha_k,\beta_k) \in \partial f(x_k,y_k), \\ (\xi_{k,i},\eta_{k,i}) \in \partial g_i(x_k,y_k), i = 1,\cdots,m, \\ \lambda_{k,i} \ge 0, i = 1,\cdots,m. \end{cases} \tag{3.30}$$

Obtain subgradients $\alpha_k\ \beta_k$ and $\xi_{k\,i}\ \eta_{k\,i}$ for all $i = 1 \cdots m$. Select a parameter, $\rho_k > 0$ as said in 3.14.

(b) *$y_k \in S^k$: Solve $F(y_k)$ and denote the solution by x_k. Solve the following optimization problem Sub-$OP(x_k,\ y_k)$:*

$$\textit{Find}\ \begin{bmatrix} (\xi_{k,i},\eta_{k,i}) \\ \lambda_{k,i} \in \mathbb{R} \end{bmatrix} \textit{such that}\ \begin{cases} -\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_{k,i}\xi_{k,i} \in N(X,x_k), \\ (\xi_{k,i},\eta_{k,i}) \in \partial g_i(x_k,y_k),\ i = 1,\cdots,m, \\ \lambda_{k,i} = 0, \quad \textit{if}\ g_i(x_k,y_k) < 0, \\ \lambda_{k,i} = 1, \quad \textit{if}\ g_i(x_k,y_k) > 0, \\ \lambda_{k,i} \in [0,1], \ \textit{if}\ g_i(x_k,y_k) = 0. \end{cases} \tag{3.31}$$

Obtain subgradients $(\xi_{k,i}, \eta_{k,i})$ *for all* $i = 1, \cdots, m$.

令 $UBD^k := \min\{f(x_j, y_j) : y_j \in T^k\}$. 考虑以下松弛主问题 $MP(T^k, S^k)$:

$$MP(T^k,S^k)\begin{cases}\min\limits_{x,y,\theta}\ \theta\\ \text{s.t.}\ \ \theta < UBD^k\\ \qquad f(x_j,y_j)+(\alpha_j,\beta_j)^T\begin{pmatrix}x-x_j\\ y-y_j\end{pmatrix}\le\theta\ \ \forall y_j\in T^k,\\ \qquad g_i(x_j,y_j)+\rho_j(\xi_{j,i},\eta_{j,i})^T\begin{pmatrix}x-x_j\\ y-y_j\end{pmatrix}\le 0,\ \forall i,\ \forall y_j\in T^k,\\ \qquad g_i(x_l,y_l)+(\xi_{l,i},\eta_{l,i})^T\begin{pmatrix}x-x_l\\ y-y_l\end{pmatrix}\le 0,\ \forall i,\ \forall y_l\in S^k,\\ \qquad x\in X, y\in Y\cap\mathbb{Z}^p, \theta\in\mathbb{R}.\end{cases} \tag{3.32}$$

所提出的用于求解松弛主问题$MP(T^k, S^k)$的新 OA 算法如下所述。

算法 1 (新OA算法)

1: 初始化。给定一个初始 $y_0 \in Y$**，设** $T^0 = S^0 := \emptyset$, $UBD^0 := \infty$**，并令**$k := 1$**2: 对于** $k = 1, 2, \cdots$**，执行 3: 如果** $y_k \in T$**，则 4: 求解子问题** $NLP(y_k)$**，并将其解记为** x_k**求解 (3.30) 中的** $OP(x_k, y_k)$**，并得到次梯度** (α_k, β_k), $(\xi_{k,i}, \eta_{k,i})$ **在 (3.14) 中选取一个参数** $\rho_j > 0$ **。设** $T^k := T^{k-1} \cup \{y_k\}$, $S^k := S^{k-1}$**，并令** $UBD^k := \min\{UBD^{k-1}, f(x_k, y_k)\}$**5: 否则 6: 求解** $F(y_k)$**，并将其解记为** x_k**求解 (3.31) 中的** $Sub\text{-}OP(x_k, y_k)$**，并得到次梯度** $(\xi_{k,i}, \eta_{k,i})$ **设** $S^k := S^{k-1} \cup \{y_k\}$, $T^k := T^{k-1}$**，并令** $UBD^k := UBD^{k-1}$**7: 结束 if 8: 求解松弛问题** $MP(T^k, S^k)$**，并得到一个新的整数** y_{k+1}**设** $k := k + 1$**，并返回第 3 行 9: 结束 for**

下面的定理旨在证明算法 1 在有限时间内具有收敛性。

定理 3。**3** *Suppose that the cardinality of* $Y \cap \mathbb{Z}^p$ *is finite. Then either problem*(P *of* 3 1 *is infeasible or Algorithm 1 terminates in a finite number steps at an*) (.) ( ) *optimal value of problem* P .

证明。我们首先证明，任何整数变量都不会被生成超过一次。基于此，算法 1 的有限终止性源于 $Y \cap \mathbb{Z}^p$ 的有限基数。

在第 k 次迭代中，我们断言： *if*$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\theta})$ *solves* $MP(T^k, S^k)$ *then* $\bar{y} \notin T^k \cup S^k$.

令 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\theta})$ 为 $MP(T^k, S^k)$ 的解。于是，由命题 3.3 可得 $\bar{y} \notin S^k$，因此只需证明 $\bar{y} \notin T^k$。反设对某个 $y_{j_k} \in T^k$，有 $\bar{y} = y_{j_k}$。则 $(\bar{x}, y_{j_k}, \bar{\theta})$ 对于 $MP(T^k, S^k)$ 是可行的，因此有

$$\bar{\theta} < UBD^k \leq f(x_{j_k}, y_{j_k}), f(x_{j_k}, y_{j_k}) + \alpha_{j_k}^T (x - x_{j_k}) \leq \bar{\theta}, \tag{3.33}$$

and

$$g_i(x_{j_k}, y_{j_k}) + \rho_{j_k} \xi_{j_k,i}^T (\bar{x} - x_{j_k}) \leq 0, \ i = 1, \cdots, m.$$

由此以及命题 3.1 可知

$$\alpha_{j_k}^T (\bar{x} - x_{j_k}) \geq 0$$

因此，(3.33) 得出 $f(x_{j_k}, \ y_{j_k}) \leq \bar{\theta}$，这与 $\bar{\theta} < f(x_{j_k}, \ y_{j_k})$ 矛盾。因此该结论成立。

现在我们可以假设算法 1 在某个 k 的第 k 步终止。此时，松弛问题 $MP(T^k, S^k)$ 不可行。为完成证明，尚需证明问题 (P) 的最优值可以达到。

令 r^* 表示 (3.1) 中问题 (P) 的最优值。则 $r^* \leq UBD^{k-1}$。我们需要考虑两种情况：

(a) $r^* = UBD^{k-1}$：这意味着对于某个 $y_j \in T^{k-1}$，有 $r^* = f(x_j, \ y_j)$。(b) $r^* < UBD^{k-1}$：则 $y_k \in T^k$（否则，$y_k \in S^k$，$UBD^k = UBD^{k-1}$ 根据算法 1 可知，因此 $MP(T^k, \ S^k)$ 可行，矛盾）。这意味着子问题 $NLP(y_k)$ 可行，因此 $r^* \leq f(x_k, \ y_k)$。我们断言 $r^* = f(x_k, \ y_k)$（否则，$f(x_k, \ y_k) > r^*$，因此 $r^* < UBD^k$，这意味着 $MP(T^k, \ S^k)$ 可行，矛盾）。

因此，情形 (a) 和 (b) 表明，问题 (P) 的最优值可以达到。□

3.4 与凸 MINLP 的经典 OA 比较

在本小节中，我们比较了所提出的新 OA 与经典 OA 在求解目标函数和约束函数均连续可微的凸混合整数非线性规划问题时的表现。

Assume that $f, g_i (i = 1, \cdots, m)$ *appearing in* (3.1) *are continuously differentiable.*

用于求解凸混合整数非线性规划问题（如问题 (3.1)）的经典 OA 算法，通过将混合整数非线性规划问题重构为等价的混合整数线性规划主问题来运行。具体而言，该算法利用一阶泰勒展开，然后求解一系列混合整数线性规划松弛，逐步收敛到混合整数非线性规划问题的最优解。下一节将详细介绍这种经典方法与我们提出的新 OA 算法之间的主要区别。

由于函数 f、g_i、$i = 1$、$\cdots$、m 均可微，因此可以用函数 f、g_i 的梯度替换算法 1 中的次梯度。与算法 1 相比，这将得到一个更简单的新 OA 算法，用于求解 (3.1) 中的凸混合整数非线性规划问题。

At iteration k, *let subsets* T^k *and* S^k *are defined as said in* (3.28).

(a) If $y_k \in T^k$, then solve subproblem $NLP(y_k)$ and denote by x_k the optimal solution.Set

$$\Pi_k := \max_{i\in J(x_k)} \max_{(x,y)\in X\times(Y\cap\mathbb{Z}^p)} \left\{ \nabla g_i(x_k,y_k)^T \begin{pmatrix} x-x_j \\ y-y_j \end{pmatrix} \right\}.$$

and select a parameter $\rho_k > 0$ as follows:

$$\rho_k := \begin{cases} \dfrac{-\max\limits_{i\in J(x_k)} g_i(x_k,y_k)}{\Pi_k}, \text{ if } J(x_k)\neq\emptyset, \Pi_k \geq 0, \\ 1, \qquad\qquad \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.34}$$

(b) If $y_k \in S^k$, then solve nonlinear feasibility problem $F(y_k)$ and denote by x_k the optimal solution.

设 $UBD^k := \min\{f(x_j, y_j) : y_j \in T^k\}$。我们考虑以下混合整数线性规划松弛 $\widetilde{MP}^k$：

$$\widetilde{MP}^k \begin{cases} \min\limits_{x,y,\theta} \theta \\ \text{s.t. } \theta < UBD^k \\ \quad f(x_j,y_j) + \nabla f(x_j,y_j)^T \begin{pmatrix} x-x_j \\ y-y_j \end{pmatrix} \leq \theta \ \ \forall y_j \in T^k, \\ \quad g_i(x_j,y_j) + \rho_j \nabla g_i(x_j,y_j)^T \begin{pmatrix} x-x_j \\ y-y_j \end{pmatrix} \leq 0, \ \forall i, \ \forall y_j \in T^k, \\ \quad g_i(x_l,y_l) + \nabla g_i(x_l,y_l)^T \begin{pmatrix} x-x_l \\ y-y_l \end{pmatrix} \leq 0, \ \forall i, \ \forall y_l \in S^k, \\ \quad x\in X, y\in Y\cap\mathbb{Z}^p, \theta\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.35}$$

针对式 (3.1) 的凸混合整数非线性规划问题，所提出的新 OA 算法如下：

算法2 （凸混合整数非线性规划的新 OA 算法）

1：初始化。给定一个初始 $y_0 \in Y$，设置 $T^0 = S^0 := \emptyset$, $UBD^0 := \infty$，并令$k := 1$ 2：对于 $k = 1, 2, \cdots$，执行以下操作：3：如果 $y_k \in T$，则 4：求解子问题 $NLP(y_k)$，并将其解记为 x_k。按式 (3.34) 选择一个参数 $\rho_k > 0$ 。设置 $T^k := T^{k-1} \cup \{y_k\}$, $S^k := S^{k-1}$，并令 $UBD^k := \min\{UBD^{k-1}, f(x_k, y_k)\}$5：否则 6：求解 $F(y_k)$，并将其解记为 x_k。设置 $S^k := S^{k-1} \cup \{y_k\}$, $T^k := T^{k-1}$，并令 $UBD^k := UBD^{k-1}$7：结束 if 语句 8：求解 $\widetilde{MP}^k$ 并得到一个新的整数 y_{k+1}。设置 $k := k + 1$ 并返回第 3 行 9：结束 for 循环

令 $UBD^k := \min\{f(x_j, y_j) : y_j \in T^k\}$。我们考虑以下混合整数线性规划松弛 MP^k:

$$MP^k \begin{cases} \min\limits_{x,y,\theta} \ \theta \\ \text{s.t.} \ \ \theta < UBD^k \\ \qquad f(x_j,y_j) + \nabla f(x_j,y_j)^T \begin{pmatrix} x-x_j \\ y-y_j \end{pmatrix} \le \theta \ \ \forall y_j \in T^k, \\ \qquad g_i(x_j,y_j) + \nabla g_i(x_j,y_j)^T \begin{pmatrix} x-x_j \\ y-y_j \end{pmatrix} \le 0, \ \forall i, \ \forall y_j \in T^k, \\ \qquad g_i(x_l,y_l) + \nabla g_i(x_l,y_l)^T \begin{pmatrix} x-x_l \\ y-y_l \end{pmatrix} \le 0, \ \forall i, \ \forall y_l \in S^k, \\ \qquad x \in X, y \in Y \cap \mathbb{Z}^p, \theta \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.36}$$

凸混合整数非线性规划问题 (3.1) 的经典 OA 算法如下所示:

算法3 （凸混合整数非线性规划的 OA 算法）

1: 初始化。给定一个初始 $y_0 \in Y$，令 $T^0 = S^0 := \emptyset$, $UBD^0 := \infty$，并令 $k := 1$
2: **对于** $k = 1, 2, \cdots$, **do**
3: **如果** $y_k \in T$ **则**
4: 求解子问题 $NLP(y_k)$，并将解记为 x_k
令 $T^k := T^{k-1} \cup \{y_k\}$, $S^k := S^{k-1}$ 以及 $UBD^k := \min\{UBD^{k-1}, f(x_k, y_k)\}$
5: **else**
6: 求解 $F(y_k)$，并将解记为 x_k
令 $S^k := S^{k-1} \cup \{y_k\}$, $T^k := T^{k-1}$ 以及 $UBD^k := UBD^{k-1}$
7: **结束如果**
8: 求解 MP^k 并获得一个新的整数 y_{k+1}
设置 $k := k+1$ 并返回第 3 行
9: **结束循环**

算法2和算法3的区别仅在于引入了新参数 ρ_j。然而，这一看似微小的增补在几个关键方面带来了根本不同的方法。不同于完全依赖一阶泰勒展开的经典外逼近算法，我们的方法构造有效线性割，将问题重新表述为一个等价的混合整数线性规划。参数ρ_j 能够生成多样化的混合整数线性规划松弛，从而对原始非线性可行域产生更紧的多面体逼近。通过明确利用约束函数 g_i 的结构信息，我们的算法能够适应具体问题，超越通用的一阶线性化方法。

例3.1 考虑以下凸混合整数非线性规划问题:

$$\begin{cases} \min\limits_{x,y} & \dfrac{x^2}{10} - \dfrac{y}{4.5} + 2 + 0.001y^2 \\ \text{s.t.} & \dfrac{x^2}{20} + y \le 20, \\ & \dfrac{(x-1)^2}{40} - y \le -4, \\ & 0.275y^{1.5} - 10(x+0.1)^{0.5} \le 0, \\ & 0 \le x \le 20, \\ & 0 \le y \le 20, y \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{3.37}$$

优化过程从初始点（x_0, y_0）＝（1,4）出发，得到最优解（x^*, y^*）＝（1.9752,14），最优目标值为 $f^* = -0.5249$。

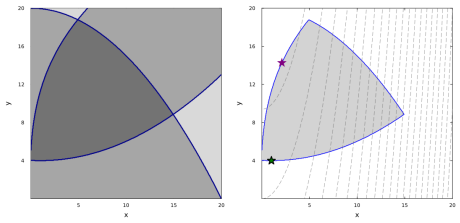


图1：左图显示了问题(3.37)各约束所定义的可行域。右图显示了整数松弛可行域（即不考虑整数限制的区域）、目标函数的等高线、问题的最优解（★），以及初始点（★）。

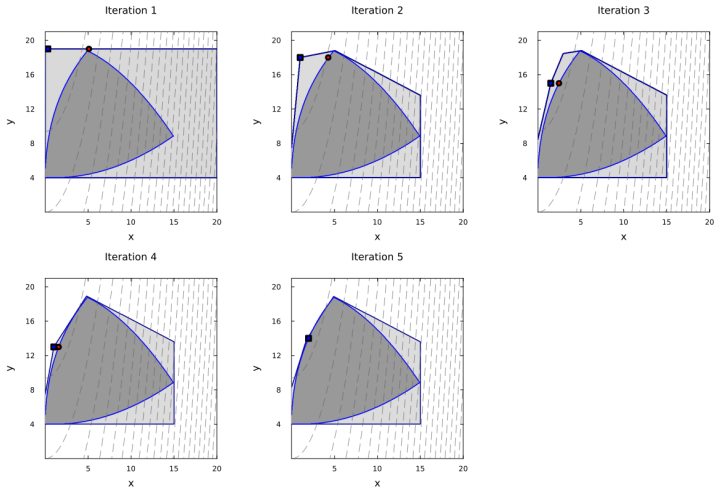


图2：将 OA 算法应用于问题 (3.37) 会产生多次迭代，图中展示了算法的进展，每幅图对应一次迭代。图中深灰色区域表示由非线性约束定义的可行域，浅灰色区域表示由生成的切割平面得到的外逼近。方形点（■）表示通过混合整数线性规划主问题得到的解，圆形点（●）表示通过非线性规划子问题得到的解。

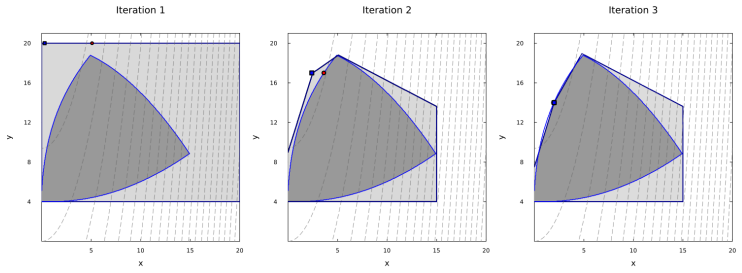


图3：该图展示了使用新 OA 算法求解问题 (3.37) 的迭代过程，格式与图2相同。

对比图2与图3可以看出，求解问题（3.37）时，新OA算法所需的迭代次数少于原始OA算法。效率的提升可归因于图4所示的第二次迭代。在该步骤中，新OA算法生成的切平面剔除了主问题可行域内两个可行但非最优的点，即 $y = 15$ 和 $y = 13$。通过剔除这些点，上界（上界）与下界（下界）之间的间隙被缩小，从而加强了割并提高了算法的整体收敛速度。

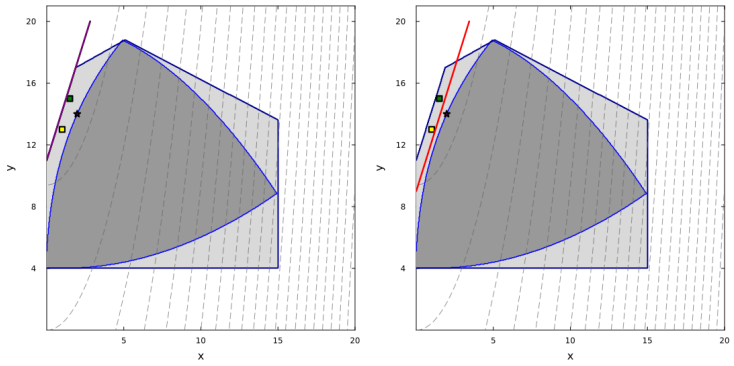


图4：左图显示了外逼近算法在第二次迭代期间生成的一条割线（）。右图显示了新OA算法在第二次迭代期间生成的一条割线（），其中 $\rho_2 = 2.3464/12.8289 \approx 0.1829$ 。

图中的黄色方形点（）表示当$y = 13$时的可行点，绿色方形点（■）表示当 $y = 15$时的可行点。紫色星形点（★）表示该问题的最优解。此处采用图2中的格式。

4. 数值结果

本节对所研究的两种算法——外逼近算法和新 OA算法——进行性能比较。我们采用了来自 MINLPLib [7]的 30 个测试实例进行比较。所选实例均满足以下标准：它们是包含整数变量和连续变量的凸优化问题，具有全局最优目标值，在目标函数或约束中至少包含一个非线性项，并且求解难度各不相同。所有计算实验均在相同的硬件条件下进行，具体使用 Intel Core i5-12500H 处理器（运行频率为 2.50 GHz）和 16.0 GB 内存。为实现终止，并与标准 MINLP 实践保持一致，我们同时采用绝对最优性容差（ϵ）和相对最优性容差（ϵ_{rel}）。当满足以下任一条件时，搜索过程将终止：

$$f(\bar{x}, \bar{y}) - LB \leq \epsilon \quad \text{or} \quad \frac{f(\bar{x}, \bar{y}) - LB}{|f(\bar{x}, \bar{y})| + 10^{-10}} \leq \epsilon_{\text{rel}}$$

此处， LB 表示当前下界， UB 表示当前上界， $\bar{x}$， $\bar{y}$表示在搜索过程中确定的最佳可行解。这些容差的数值分别设置为 $\epsilon = 10^{-5}$ 和 $\epsilon_{\text{rel}} = 10^{-3}$。此外，为限制算法的整体执行时间，为每个问题实例设置了900次的最大迭代次数限制。表1详细列出了每个问题的连续变量数、离散变量数、迭代次数和运行时间。对于未能成功运行的实例，迭代次数和运行时间均以符号“—”表示。在测试集中的一个实例上，OA算法未能在0.1%的最优性间隙内求得解，而新OA算法成功求解了该实例。此外，对比结果表明

新OA算法在16个实例中所需的迭代次数少于OA算法。即使对于迭代次数相当或略高的实例，新OA算法仍表现出更高的时间效率，充分验证了其在提升整体求解效率方面的有效性。为进一步突出新OA算法相较于OA算法的优势，下一节将基于两个具体的数值示例进行详细分析。

对于实例 `cvxnonsepnormcon30`，迭代效率显著提升：迭代次数从 OA算法的 551 次降至 98 次，求解时间缩短了 49.5%，有效降低了计算成本。

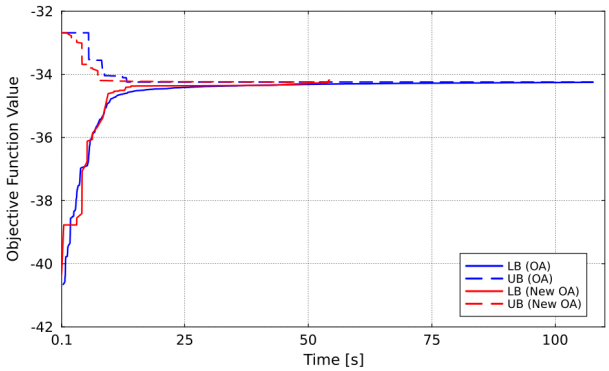


图 5：实例 cvxnonsep normcon30 的上界（UB）和下界（LB）随计算时间变化的曲线，由 OA 和新 OA优化算法求解。

对于实例 `cvxnonseppsig20`，新OA算法同样表现出色，仅需 50 次迭代和 3.90 秒即可达到 0.1% 的最优性间隙。与 OA算法（128 次迭代，7.95 秒）相比，新OA算法减少了 78 次迭代，并将求解时间缩短了 4.05 秒。

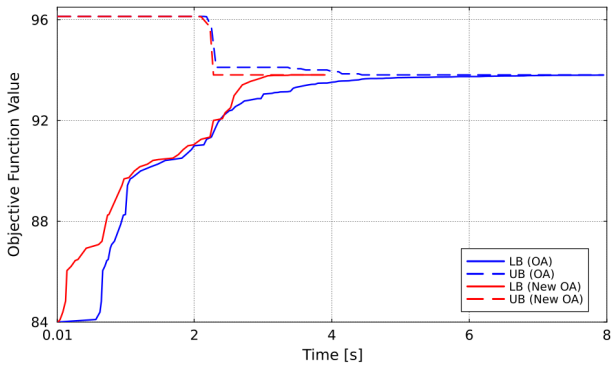


图6：实例 cvxnonsep psig20 的上界（UB）和下界（LB）随计算时间变化的曲线，该实例由 OA 和新 OA 优化算法求解。-

表1：OA算法与新OA算法的比较。

实例（# 离散变量，# 连续变量，# 约束）	解算法	优化值	迭代次数	时间（秒）
clay0203m (18, 12, 54)	OA	41573.26	10	7.82
	新 OA		8	6.46
clay0204hfsg (32, 132, 234)	OA	6545.00	2	2.80
	新 OA		2	0.42
clay0204m (32, 20, 90)	OA	6545.00	6	3.55
	新 OA		4	1.29
clay0303m (21, 12, 66)	OA	26669.10	16	7.23
	新 OA		16	3.79
cvxnonsep 范数约束20 (10, 10, 1)	OA	-21.75	122	16.10
	新 OA		100	4.33
cvxnonsep normcon30 (15, 15, 1)	OA	-34.24	551	107.59
	新 OA		98	54.28
cvxnonsep normcon40 (20, 20, 1)	OA	-32.63	168	147.18
	新 OA		193	137.96
cvxnonsep nsig20 (10, 10, 1)	OA	80.95	133	8.62
	新 OA		120	4.42
cvxnonsep nsig30 (15, 15, 1)	OA	130.63	487	81.92
	新 OA		491	58.03
cvxnonsep nsig40 (20, 20, 1)	OA	133.96	824	351.27
	新 OA		389	104.68

续见下页

表1：外逼近算法与新OA算法的比较。

实例（# 离散变量，# 连续变量，# 约束）	解算法	优化值	迭代次数	时间(s)
cvxnonsep pcon20 (10, 10, 1)	OA	-21.51	54	12.37
	新 OA		51	1.36
cvxnonsep pcon30 (15, 15, 1)	OA	-35.99	140	17.71
	新 OA		50	4.72
cvxnonsep pcon40 (20,20,1)	OA	-46.60	262	52.36
	新 OA		258	34.82
cvxnonsep psig20 (10,10,0)	OA	93.81	128	7.95
	新 OA		50	3.90
cvxnonsep psig30 (15,15,0)	OA	79.00	330	48.69
	新 OA		330	31.13
ex4 (25,11,30)	OA	-8.06	3	0.45
	新 OA		3	0.19
ex1223b (4,3,9)	OA	4.58	5	3.62
	新 OA		5	0.96
ex1223 (4,7,13)	OA	4.58	6	2.14
	新 OA		5	0.16
fac1 (6,16,18)	OA	160912612.40	4	1.75
	新 OA		4	0.99
fac2 (12,54,33)	OA	331837498.20	–	–
	新 OA		7	1.35
flay02h (4,42,51)	OA	37.95	2	0.91
	新 OA		2	0.86
flay02m (4,10,11)	OA	37.95	2	0.69
	新 OA		1	0.06
flay03h (12,110,144)	OA	48.99	8	3.61
	新 OA		9	0.83
flay03m (12,14,24)	OA	48.99	8	1.29
	新 OA		7	0.97
flay04m (24,18,42)	OA	54.41	29	7.93
	新 OA		21	3.96
syn30m (30, 70, 167)	OA	138.16	7	5.25
	新 OA		4	2.88
synthes2 (5, 6, 14)	OA	73.04	3	0.36
	新 OA		3	0.19

下页继续

表1：外逼近算法与新OA算法的比较。

实例（# 个离散变量，# 个连续变量，# 个约束）	解算法	优化值	迭代次数	时间(s)
synthes3 (8, 9, 23)	OA	68.01	4	1.56
	新 OA		4	0.61
sssd18-06 (126, 24, 66)	OA	397992.29	16	16.51
	新 OA		17	13.26
sssd12-05 (75,20,52)	OA	281408.64	11	7.50
	新 OA		10	2.72

因此，基于边界收敛趋势以及表1中的实验数据，显然新 OA显著提升了原始OA算法在求解混合整数非线性规划问题时的性能。具体而言，对于测试用例 `cvxnonsepnormcon40`、`cvxnonsep nsig30`、`flay03h`和`sssd18-06`，新OA算法尽管需要更多的迭代次数，但计算时间显著减少。这表明，在保持相同求解容差的同时，改进后的算法获得了更高的计算效率，从而更快地完成求解过程。这些结果证实了新OA算法的实际有效性。

5. 结束语

本文提出了一种用于凸混合整数非线性规划问题的新型OA方法。该方法的核心是将原始混合整数非线性规划重新表述为等价的混合整数线性规划主问题，并且与传统外逼近相比，混合整数线性规划松弛能够生成更紧的多面体区域来逼近非线性可行域。

一项关键创新是在（3.14）中引入由可行子问题推导出的新参数 ρ_j 。通过策略性地将这些参数纳入混合整数线性规划松弛，新 OA 算法得以构造，并能生成比经典外逼近更紧的线性近似。数值实验表明，所提出的新 OA 方法可能比经典外逼近更高效，因为它生成的松弛问题能够更贴近原始非线性可行域。

这种效率源于一种生成有效线性割的替代机制，它不再局限于依赖标准的一阶泰勒展开。采用问题特定参数表明，有效利用混合整数非线性规划的内在结构，对 OA 算法的性能也至关重要。

参考文献

1. J. F. Benders. 求解混合变量规划问题的分区过程。*Numer. Math.*，4(1):238–252，1962年。

2. D. E. Bernal、Z. Peng、J. Kronqvist 和 I. E. Grossmann。凸混合整数非线性规划外逼近算法的替代正则化方法。 *J. Global Optim.*，84:807–842，2022年。 3. L. T. Biegler 和 I. E. Grossmann。优化回顾。 *Comput. Chem. Eng.*，28(8):1169–1192，2004年。 4. P. Bonami 和 M. A. Lejeune。随机约束和整数约束下投资组合优化问题的精确求解方法。 *Oper. Res.*，57(3):650–670，2009年。 5. F. Boukouvala、R. Misener 和 C. A. Floudas。混合整数非线性规划（MINLP）和约束无导数优化（CDFO）中的全局优化进展。 *Eur. J. Oper. Res.*，252(3):701–727，2016年。 6. C. Bragalli、C. D'Ambrosio、J. Lee、A. Lodi 和 P. Toth。供水管网的最优设计：一种实用的混合整数非线性规划方法。 *Optimization and Engineering*，13(2):219–246，2012年。 7. M. R. Bussieck 、 A. S. Drud 和 A. Meeraus。MINLPLib？混合整数非线性规划测试模型集合。 *INFORMS Journal on Computing* 15 1 114 119, 。 2003

8. W. Cao 和 G. J. Lim。癌症治疗规划的优化模型。载于 *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science* 。 Wiley Online Library，2011年。 9. I. Castillo、J. Westerlund、S. Emet 和 T. Westerlund。不等面积区块布局设计问题的优化：混合整数线性规划与混合整数非线性规划优化方法的比较。 *Comput. Chem. Eng.*，30(1):54–69，2005年。 10. C. Coey、M. Lubin 和 J. P. Vielma。利用锥证书对混合整数凸优化问题进行外逼近。 *Math. Program. Comput.*，12:249–293，2020年。 11. M. De Mauri、J. Gillis、J. Swevers 和 G. Pipeleers。一种近端点外逼近算法。 *Comput. Optim. Appl.*，77(3):755–777，2020年。 12. A. Delno 和 W. de Oliveira。非光滑凸混合整数非线性规划问题的外逼近算法。 *Optimization*，67(6):797–819，2018年。 13. M. A. Duran 和 I. E. Grossmann。一类混合整数非线性规划的外逼近算法。 *Math. Program.*，36(3):307–339，1986年。 14. V.-P. Eronen、M. M. M¨akel¨a 和 T. Westerlund。将扩展切平面法和外逼近法推广至非光滑凸混合整数非线性规划问题。 *Optimization*，63(7):1057–1073，2014年。 15. R. Fletcher 和 S. Leyffer。通过外逼近求解混合整数非线性规划。 *Math. Program.*，66(1):327–349，1994年。 16. A. M. Geoffrion。广义Benders分解。 *J. Optim. Theory Appl.*，10(4):237–260，1972年。 17. Jr. James E. Kelley。求解凸规划的割平面法。 *J. Soc. Ind.* 。 *Appl. Math.* 8 4 703 712, 1960

18. P. Kesavan、R. J. Allgor、E. P. Gatzke 和 P. I. Barton。可分离非凸混合整数非线性规划的外逼近算法。 *Math. Program.*，100(3):517–535，2004年。 19. J. Kronqvist、D. E. Bernal 和 I. E. Grossmann。在凸混合整数非线性规划外逼近中使用正则化和二阶信息。 *Math. Program.*，180(1):285–310，2020年。 20. J. Kronqvist、A. Lundell 和 T. Westerlund。凸混合整数非线性规划的扩展支撑超平面算法。 *J. Global Optim.*，64(2):249–272，2016年。 21. R. Misener 和 C. A. Floudas。混合池问题的进展：建模、全局优化和计算研究。 *Applied and Computational Mathematics* 8 1 3 22, 。 2009

22. P. Muts、I. Nowak 和 E. M. Hendrix。用于凸混合整数非线性规划的基于分解的外逼近算法。 *J. Global Optim.*，77(4):1–22，2020年。 23. R. R. Phelps。 *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability*， *Lecture Notes in Mathematics*第1364卷。施普林格，纽约，1989年。 24. I. Quesada 和 I. E. Grossmann。用于凸混合整数非线性规划优化问题的基于线性规划/非线性规划的分支定界算法。 *Comput. Chem. Eng.*，16(10–11):937–947，1992年。 25. A. Quist 、 R. Van Geemert 、 J. Hoogenboom 、 T. ´Illes 、 C. Roos 和 T. Terlaky。非线性优化在反应堆堆芯燃料换料中的应用。 *Annals of Nuclear Energy*，26(5):423–448，1999年。 26. L. Su、L. Tang、D. E. Bernal 和 I. E. Grossmann。凸混合整数非线性规划的改进二次割。 *Comput. Chem. Eng.*，109:77–95，2018年。

27. Z. Wei 和 M. M. Ali。凸混合整数非线性规划问题及一种外逼近算法。 *J. Global Optim.*, 63(2):213–227, 2015年。28. Z. Wei 和 M. M. Ali。一类具有部分可微性的凸混合整数非线性规划问题的外逼近算法。

J. Optim. Theory. , ( ): – 。29.

Appl. 167 2 644 652, 2015

T. Westerlund 和 F. Pettersson。求解凸混合整数非线性规划问题的扩展切平面法。 *Comput. Chem. Eng.*, 19:131–136, 1995。30. C. Z˘alinescu。 *Convex Analysis in General Vector Spaces*。世界科学出版社, 新加坡, 2002年。