arXiv:2602.04123v1 [math.OC] 4 Feb 2026

面向具有对称性的混合整数凸优化的基于变量聚合的透视重构

Junhao Wu[a]、Shaoze Li[b]、Cheng Lu[a,*]、Zhibin Deng[c]、Shu-Cherng Fang[d]

[a]中国华北电力大学经济与管理学院，北京，*102206*，中国[b]达特茅斯学院塞耶工程学院，美国新罕布什尔州汉诺威，*NH 03755*[c]中国科学院大学经济与管理学院，北京，*100190*，中国[d]北卡罗来纳州立大学工业与系统工程系，美国北卡罗来纳州罗利，*NC 27695-7906*

摘要

本文探讨混合整数凸优化问题中颇具挑战性的对称性问题，这类问题常见于机组组合问题等实际应用。尽管已有研究采用变量聚合技术来缓解对称性，但其对收紧相应连续松弛的影响尚未得到充分研究。本文提出一种新的公式，将透视重构方法融入变量聚合框架，从而为具有对称结构的混合整数凸优化问题得到更紧的连续松弛。我们证明，在存在对称性的情况下，与每组聚合变量相关联的可行域凸包可以得到精确刻画。这些结果展现了所提出的重新表述的有效性，并为实现基于变量聚合的混合整数规划公式的紧性奠定了新的理论基础。

关键词： 全局优化、混合整数优化、透视重构、对称性破缺、机组组合问题

*通讯作者。电子邮箱： junnhao_wu@163.com (Junhao Wu), shaoze_li@163.com (Shaoze Li), lucheng1983@163.com (ChengLu), zhibindeng@ucas.edu.cn (Zhibin Deng), fang@ncsu.edu (Shu-Cherng Fang)

1. 引言

现实应用中的决策问题通常建模为混合整数凸优化问题。要在模型精度与计算可解性之间取得平衡，需要谨慎构建公式。开发优化模型的一项重大挑战，是处理问题固有的对称性（Ostrowski，2009；Sherali 和 Smith，2001）。优化中的对称性可定义为一个双射γ： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，它将一个解$\mathbf{x}$ 映射为另一个解 $\gamma(\mathbf{x})$，同时保持目标值和可行性不变。对称性可能降低分支切割算法的效率，因为许多对称解会被重复枚举，从而增加计算量（Clautiaux 和 Ljubić，2025）。

为解决这一问题，研究人员提出了多种方法来消除混合整数规划（MIP）问题中的对称性。这些方法从简单策略到更先进的方法不等。简单策略包括：在对称的备选方案中确定一个代表性解，并添加割平面，排除非代表性解，同时保留代表性解的可行性（Anjos and Vieira, 2017; Bendotti et al., 2021; Danielson, 2021; Friedman, 2007; Hojny and Pfetsch, 2018; Hojny, 2020; Liberti, 2012a,b; Liberti and Ostrowski, 2014）。更先进的方法包括同构剪枝（Margot, 2002, 2003, 2010）和轨道分支（Ostrowski et al., 2011, 2015），它们将分支过程限制在代表性解上。另一种消除对称性的方法是重新表述问题，例如轨道收缩（Fischetti and Liberti, 2012; Fischetti et al., 2017）：该方法将解投影到一个称为“固定空间”的子空间，把每组对称解映射到投影空间中的同一个代表解。作为轨道收缩的扩展，基于变量聚合的重构已被提出用于求解机组组合问题（Knueven et al., 2017），这表明问题重新表述技术有助于处理对称性。

除了对称性之外，另一个关键挑战是为混合整数规划问题，尤其是涉及二元变量的问题，推导出紧的连续松弛。一种有望改善连续松弛的技术是透视重构（Günlük 和 Linderoth，2010），该技术已成功应用于各种涉及二元变量的问题（Castro 等人，2014；Hijazi 等人，2012；Zheng 等人，

2021），包括机组组合问题（Bacci 等人，2023；Frangioni 等人，2009）。Bacci 等人（2023）的近期研究为机组组合问题提出了一种基于透视重构的混合整数规划公式，并证明该公式的连续松弛是紧的，也就是说，它精确表示了单机组组合问题可行解的凸包。

基于这些进展，本文探讨将透视重构技术与变量聚合相结合，为一类混合整数凸优化问题构造新的公式。该混合方法旨在打破对称性，同时确保连续松弛具有紧性。具体而言，我们提出一种基于变量聚合的重新表述，将透视重构用于一类混合整数凸规划问题。我们证明，对于每个聚合变量集，该新公式的连续松弛能够紧密表示可行解的凸包。

本文的主要贡献如下：

- 我们提出一种透视重构，将变量聚合技术融入其中，以处理对称性，同时保持连续松弛的紧性。

- 我们证明，在一些温和条件下，聚合变量的可行解凸包可以由所提出公式的连续松弛精确刻画。

- 我们建立了新的理论结果，为混合整数凸优化问题中基于变量聚合的透视重构的紧性奠定了基础。

本文结构安排如下：第 2 节介绍关键概念和问题表述。第 3 节提出基于变量聚合的透视重构。第 4 节分析连续松弛的紧性。第 5 节和第 6 节分别将理论结果应用于机组组合问题和一般混合整数凸可分规划问题。第 7 节给出计算结果，以验证我们的理论结论；第 8 节总结全文。

在本文余下部分中，我们始终用粗体字母表示矩阵和向量。对于向量 $\mathbf{x}$，我们用 x^j 表示其第 j个元素。对于由 t索引的向量集合$\mathbf{x}_t$ ，我们用 x_t^j 表示$\mathbf{x}_t$的第 j个元素。为避免混淆，我们始终用上标标记向量或矩阵的元素，并用下标标记向量或矩阵序列。我们用 $\mathbb{R}_+$ 表示非负实数集，用$\mathbb{Z}_+$ 表示非负整数集。对于向量集合$\mathbf{x}_s$ （$s \in \mathcal{K}$），我们用$\mathbf{x} := \{\mathbf{x}_s\}_{s\in\mathcal{K}}$ 表示$\mathbf{x}$ 由$\{\mathbf{x}_s\}_{s\in\mathcal{K}}$中的向量拼接而成。我们用 conv(·)表示一个集合的凸包。

2. 问题表述

本节将介绍一类一般的混合整数凸优化问题。为便于描述，我们先给出三个定义，这些定义将在全文中使用。

定义 1. 设 p 为非负整数， $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^d$ 为非空集合，则

$$p \otimes \mathcal{F} := \left\{ \sum_{i=1}^{p} \mathbf{x}_i \mid \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p \in \mathcal{F} \right\}$$

若 $p > 0$，且 $p \otimes \mathcal{F} := \{\mathbf{0}\}$ 若 $p = 0$。

定义 2. 设 $r \in \mathbb{R}_+$ 为非负实数， $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^d$ 为非空集合，则

$$r \odot \mathcal{F} := \{r\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{F}\}$$

若 $r > 0$，且 $r \odot \mathcal{F} := \{\mathbf{0}\}$ 若 $r = 0$。

容易验证：**(i)** 对任意$r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$，均有 $(r_1 r_2) \odot \mathcal{F} = r_1 \odot (r_2 \odot \mathcal{F})$；以及 **(ii)** 当 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{R}^d$的有界闭子集时，集合 $\{(\mathbf{x}\ r) \mid r \in \mathbb{R}_+ \ and \mathbf{x} \in r \odot \mathcal{F}\}$ 是 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中的闭集。

定义 3. 设 $f(\cdot)$ 是一个实值闭凸函数，其有效定义域 $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$ 为闭凸集，则其透视函数为

$$F(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} tf(\mathbf{x}/t), & if\ t > 0\ and\ \mathbf{x}/t \in \mathcal{F}, \\ 0, & if\ t = 0\ and\ \mathbf{x} = \mathbf{0}, \\ +\infty, & otherwise. \end{cases} \tag{1}$$

根据（Rockafellar，1970年，定理 8.2 和推论 8.5.1），我们知道透视函数 F（$\mathbf{x}$ t）的闭包为

$$\mathrm{cl}F(\mathbf{x},t)=\begin{cases}tf(\mathbf{x}/t), & \text{if } t>0 \text{ and } \mathbf{x}/t\in\mathcal{F},\\ f^{\infty}(\mathbf{x}), & \text{if } t=0 \text{ and } \mathbf{x}\in\mathcal{F}^{\infty},\\ +\infty, & \text{otherwise,}\end{cases} \tag{2}$$

其中，$f^{\infty}(\mathbf{x})$ 表示 $f(\mathbf{x})$ 的衰退函数，$\mathcal{F}^{\infty}$ 表示 $\mathcal{F}$ 的衰退锥。关于衰退函数和衰退锥的定义及性质的详细讨论，可参阅（Rockafellar，1970年，第 8 节）。我们注意到，$f^{\infty}(\mathbf{0})=0$。此外，如果 $\mathcal{F}$ 有界，则 $\mathcal{F}^{\infty}=\{\mathbf{0}\}$ 且 $\mathrm{cl}F(\mathbf{x}\ t)=F(\mathbf{x}\ t)$。

现在介绍我们的问题表述。设 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{L}$ 为有限索引集。对于每个 $i\in\mathcal{I}$，我们关联一个 d 维实向量 $\mathbf{x}_i=(x_i^1,x_i^2,\ldots,x_i^d)^{\top}\in\mathbb{R}^d$ 和一个 k 维二进制向量 $\mathbf{y}_i=(y_i^1,y_i^2,\ldots,y_i^k)^{\top}\in\{0,1\}^k$。我们考虑以下一般混合整数凸优化问题：

$$(\mathrm{MICOP})\ \begin{cases}\min\ \displaystyle\sum_{i\in\mathcal{I}} f_i(\mathbf{x}_i,\mathbf{y}_i)\\ \text{s.t.}\ \displaystyle\sum_{i\in\mathcal{I}} g_{il}(\mathbf{x}_i,\mathbf{y}_i)\le b_l,\ l\in\mathcal{L},\\ \qquad (\mathbf{x}_i,\mathbf{y}_i)\in\Omega_i,\ i\in\mathcal{I},\end{cases} \tag{3}$$

其中，对于每个 $i\in\mathcal{I}$ 和 $l\in\mathcal{L}$，$f_i(\cdot)$ 和 $g_{il}(\cdot)$ 是定义在 $\mathbb{R}^{d+k}$上的闭凸函数，可行集 $\Omega_i\subseteq\mathbb{R}^{d+k}$ 是一个由凸约束和关于$\mathbf{y}_i$分量的二进制约束构成的集合。

此外，我们还说明可行集 Ω_i的结构。在所考虑的问题类别中，假设 Ω_i 有界，并具有以下闭式表示：

$$\Omega_i=\left\{(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbb{R}^{d+k}\ \middle|\ \begin{array}{l}h_{il}(\mathbf{x}_s,y^s)\le d_l,\ l\in\mathcal{H}_{is},\ s\in\mathcal{K}\\ \mathbf{x}=\{\mathbf{x}_s\}_{s\in\mathcal{K}},\ \mathbf{A}_i\mathbf{y}\le\mathbf{b}_i,\ \mathbf{y}\in\{0,1\}^k\end{array}\right\}, \tag{4}$$

其中 $\mathcal{K}:=\{1,\ldots,k\}$，向量 $\mathbf{x}$ 被划分为子向量 $\{\mathbf{x}_s\}_{s\in\mathcal{K}}$；对于每个 $s\in\mathcal{K}$，都存在一个有限指标集 $\mathcal{H}_{is}$，使得对于任意 $l\in\mathcal{H}_{is}$，$h_{il}(\cdot)$ 是定义在变量 $(\mathbf{x}_s,y^s)$ 上的闭凸函数，$\mathbf{A}_i$ 是全幺模矩阵，且$\mathbf{b}_i$ 是一个整数向量。不失一般性，我们

始终假设 $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k \mid \mathbf{A}_i\mathbf{y} \leq \mathbf{b}_i\} \subseteq [0,1]^k$. 。需要提醒读者的是，在 Ω_i 的定义中，全文将通用变量 $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 及其分量 $(\mathbf{x}_s, y^s)$ 与带指标的变量 $(\mathbf{x}_i,\mathbf{y}_i)$ 及其分量 $(\mathbf{x}_{is}, y_i^s)$ 交替使用。

乍看之下，问题 (MICOP) 非常特殊。实际上，公式 (MICOP) 最初受到 Bacci 等人，2023 提出的机组组合问题的基于动态规划的公式启发。我们的目标是将透视重构方法融入机组组合问题的变量聚合框架。随后，我们发现，所得结果可以推广到其他一些问题，例如线性覆盖问题（Agnetis 等人，2009，2012），以及一些一般的可分混合整数凸优化问题（Bretthauer 和 Shetty，2002；Edirisinghe 和 Jeong，2019；Frangioni 等人，2011；Schoot Uiterkamp 等人，2022）。因此，(MICOP) 可视为对 Bacci 等人，2023 提出的机组组合问题的基于动态规划的公式的推广，同时也为上述问题提供了统一的公式。

对于 (MICOP)，如果两个索引 i 和 j 在 $\mathcal{I}$ 中具有相同的目标函数和约束参数（换言之，对于所有 $l \in \mathcal{L}$，$\Omega_i = \Omega j$, $f_i = f_j$，且 $g_{il} = g_{jl}$），则称它们等价。我们将集合 $\mathcal{I}$ 划分为 T 个两两不相交的子集，即 $\mathcal{I} = \bigcup_{t=1}^{T} \mathcal{I}_t$，其中 T 表示不同等价类的数量，而每个集合 $\mathcal{I}_t (t = 1, \ldots, T)$表示同一等价类中的一组索引（机器）。令$\mathcal{T} := \{1, \ldots, T\}$。对于每个等价类 $t \in \mathcal{T}$，将所有 $i \in \mathcal{I}_t$共有的相同集合、目标函数和约束函数分别记为 Ω_t, $f_t(\cdot)$ 和 $g_{tl}(\cdot)$，其中 $l \in \mathcal{L}$，Ω_t 定义如下：

$$\Omega_t = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{d+k} \,\middle|\, \begin{array}{l} h_{tl}(\mathbf{x}_s, y^s) \leq d_l,\ l \in \mathcal{H}_{ts},\ s \in \mathcal{K} \\ \mathbf{x} = \{\mathbf{x}_s\}_{s \in \mathcal{K}},\ \mathbf{A}_t\mathbf{y} \leq \mathbf{b}_t,\ \mathbf{y} \in \{0,1\}^k \end{array} \right\}. \tag{5}$$

采用上述记号，(MICOP) 可重述如下：

$$(\text{SMICOP}) \quad \begin{cases} \min \displaystyle\sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{i \in \mathcal{I}_t} f_t(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) \\ \text{s.t.} \displaystyle\sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{i \in \mathcal{I}_t} g_{tl}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) \leq b_l,\ l \in \mathcal{L}, \\ \quad (\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) \in \Omega_t,\ i \in \mathcal{I}_t,\ t \in \mathcal{T}. \end{cases} \tag{6}$$

本文的主要目标是处理 (SMI-COP) 中存在的对称性。

3. 透视重构与变量聚合的整合

本节通过结合透视重构方法，推导出一种用于处理（SMICOP）中对称性的变量聚合技术。不失一般性地，假设对于所有 $t \in \mathcal{T}$ 和 $l \in \mathcal{L}$，函数 $f_t(\cdot)$ 和 $g_{tl}(\cdot)$ 均为线性函数。在本文的其余部分，我们将聚焦于以下问题：

$$
(\mathrm{P0}) \begin{cases} \min \ \displaystyle\sum_{t\in\mathcal{T}} \sum_{i\in\mathcal{I}_t} \mathbf{c}_t^\top \mathbf{x}_i \\ \text{s.t.} \ \displaystyle\sum_{t\in\mathcal{T}} \sum_{i\in\mathcal{I}_t} \mathbf{a}_{tl}^\top \mathbf{x}_i \le b_l, \ l \in \mathcal{L}, \\ \quad (\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) \in \Omega_t, \ i \in \mathcal{I}_t, \ t \in \mathcal{T}, \end{cases} \tag{7}
$$

其中，对于每个 $t \in \mathcal{T}$ 和 $l \in \mathcal{L}$，$\mathbf{c}_t \in \mathbb{R}^d$ 和 $\mathbf{a}_{tl} \in \mathbb{R}^d$。在（P0）中，所有非线性约束和积分约束均被集中纳入约束（$\mathbf{x}_i$,$\mathbf{y}_i$) $\in \Omega_t$ 中。目标函数和其余约束相对于连续变量 $\mathbf{x}_i$ ($i \in \mathcal{I}$) 均为线性的。实际上，（P0）将（SMICOP）作为一种特殊情形包含在内。关于将（SMICOP）推导为（P0）特殊情形的证明，见《补充材料》的附录 A。

为处理问题 (P0) 中的对称性，我们为每个 $t \in \mathcal{T}$ 定义聚合变量，即

$$
\mathbf{X}_t = \sum_{i\in\mathcal{I}_t} \mathbf{x}_i, \ \mathbf{Y}_t = \sum_{i\in\mathcal{I}_t} \mathbf{y}_i.
$$

利用聚合变量，(P0) 可重构如下：

$$
(\mathrm{P1}) \begin{cases} \min \ \displaystyle\sum_{t\in\mathcal{T}} \mathbf{c}_t^\top \mathbf{X}_t \\ \text{s.t.} \ \displaystyle\sum_{t\in\mathcal{T}} \mathbf{a}_{tl}^\top \mathbf{X}_t \le b_l, \ l \in \mathcal{L}, \\ \quad (\mathbf{X}_t, \mathbf{Y}_t) \in N_t \otimes \Omega_t, \ t \in \mathcal{T}, \end{cases} \tag{8}
$$

其中 $N_t = |\mathcal{I}_t|$。实际上，(P1) 是一种抽象公式，而非

详细公式。正如 Knueven 等人，2017 所讨论的，如果 (P0) 是一个混合整数线性优化问题，其中函数 $h_{tl}(\cdot)$ ($\forall l \in \mathcal{H}_{ts}, \quad s \in \mathcal{K}$) 都是定义在变量 ($\mathbf{x}^s$, y^s) 上的线性函数，那么可以直接利用变量聚合技术推导出 (P1) 的详细公式，以打破问题 (P0) 中的对称性。然而，对于本文所研究的一般混合整数凸优化问题，尤其是可行集具有形式 (4) 的问题，现有的变量聚合技术不足以推导出 $N_t \otimes \Omega_t$ 的闭式表达式。因此，无法获得 (P1) 的详细公式来打破 (P0) 中的对称性。解决这一挑战是本文的一项核心贡献。在本节余下部分，我们将讨论如何推导 $(\mathbf{X}_t, \ \mathbf{Y}_t) \in N_t \otimes \Omega_t$ 的闭式表达式。在推导 (P1) 的闭式表达式之前，我们先给出关于一般非空凸集 $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^d$ 的一些一般性理论结果。

引理 1。 如果 $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个非空凸集且 $r \in \mathbb{Z}_+$，那么 $r \otimes \mathcal{F} = r \odot \mathcal{F}$。

证明。 证明请参见补充材料中的附录 B。 □

现在，我们进一步假设集合 $\mathcal{F}$ 是一个非空有界闭凸集，其定义为

$$\mathcal{F} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid h_l(\mathbf{x}) \leq d_l, \ l \in \mathcal{H}\}, \tag{9}$$

其中， $\mathcal{H}$ 表示一个指标集，并且对于每个 $l \in \mathcal{H}$， $d_l \in \mathbb{R}$ ，函数$h_l(\cdot)$是闭且凸的。于是我们得到以下结果。

定理 1。 设 $\mathcal{F}$ 是如(9) 所定义的非空有界闭凸集，且 $r \in \mathbb{R}_+$，则集合 $r \odot \mathcal{F}$ 可表示为

$$r \odot \mathcal{F} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^d \mid H_l(\mathbf{X}, r) \leq r d_l, \ l \in \mathcal{H}\}, \tag{10}$$

其中， $H_l(\cdot, \ \cdot)$ 表示 $h_l(\cdot)$ 关于 $l \in \mathcal{H}$ 的透视函数。

证明。 证明请参见补充材料中的附录 C。 □

回到 (P1)，我们考虑约束（$\mathbf{X}_t, \ \mathbf{Y}_t$） $\in N_t \otimes \Omega_t$ 对 $t \in \mathcal{T}$ 的闭式表达式。为简化记号，我们暂时忽略 Ω_t 的下标 t ，并考虑由下列一般形式定义的集合 $\Omega \in \mathbb{R}^{d+k}$

通过以下一般形式:

$$\Omega = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{d+k} \,\middle|\, \begin{array}{l} h_l(\mathbf{x}_s, y^s) \le d_l,\ l \in \mathcal{H}_s,\ s \in \mathcal{K} \\ \mathbf{x} = \{\mathbf{x}_s\}_{s\in\mathcal{K}},\ \mathbf{A}\mathbf{y} \le \mathbf{b},\ \mathbf{y} \in \{0,1\}^k \end{array} \right\}. \tag{11}$$

其中，对于每个 $s \in \mathcal{K}$ 和 $l \in \mathcal{H}_s$，函数 $h_l(\cdot)$ 是闭凸的，且 $\hat{} {}^{-} d_l \in \mathbb{R}$。对于每个 $l \in \mathcal{H}_s$，令 $h_l(\mathbf{x}_s) := h_l(\mathbf{x}_s, 1)$ 和 $h_l(\mathbf{x}_s) := h_l(\mathbf{x}_s, 0)$。注意，$\hat{} {}^{-} h_l(\cdot)$ 和 $h_l(\cdot)$ 均为凸函数，因为 $h_l(\cdot, \cdot)$ 是凸函数。我们还定义以下两个凸集:

$$\Lambda_s = \{\mathbf{x}_s \,|\, \hat{h}_l(\mathbf{x}_s) \le d_l,\ l \in \mathcal{H}_s\}, \text{ and } \Gamma_s = \{\mathbf{x}_s \,|\, \bar{h}_l(\mathbf{x}_s) \le d_l,\ l \in \mathcal{H}_s\}. \tag{12}$$

利用这些记号，集合 Ω 可重新表述为

$$\Omega = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \,\middle|\, \begin{array}{l} \mathbf{x}_s \in y^s \otimes \Lambda_s + (1 - y^s) \otimes \Gamma_s, s \in \mathcal{K} \\ \mathbf{x} = \{\mathbf{x}_s\}_{s\in\mathcal{K}},\ \mathbf{A}\mathbf{y} \le \mathbf{b},\ \mathbf{y} \in \{0,1\}^k \end{array} \right\}. \tag{13}$$

$\hat{} {}^{-}$ $\hat{} {}^{-}$对于每个 $l \in \mathcal{H}_s$，令 H_l 和 $\bar{H}_l$ 分别为 h_l 和 h_l 的透视函数。于是，根据式 (13)、引理 1 和定理 1，集合 Ω 可重新表述为

$$\Omega^{\text{per}} := \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \,\middle|\, \begin{array}{l} \hat{H}_l(\mathbf{w}_s, y^s) \le y^s d_l,\ l \in \mathcal{H}_s,\ s \in \mathcal{K} \\ \bar{H}_l(\mathbf{z}_s, 1 - y^s) \le (1 - y^s) d_l,\ l \in \mathcal{H}_s,\ s \in \mathcal{K} \\ \mathbf{x}_s = \mathbf{w}_s + \mathbf{z}_s,\ s \in \mathcal{K} \\ \mathbf{x} = \{\mathbf{x}_s\}_{s\in\mathcal{K}},\ \mathbf{A}\mathbf{y} \le \mathbf{b},\ \mathbf{y} \in \{0,1\}^k \end{array} \right\}. \tag{14}$$

Ω^{per} 的公式可视为 Ω 的透视重构，其中使用了式 (11) 中给出的公式。

Then, 我们得到如下结果。

定理 2. 设Ω 是按(13)所定义的非空集合。则对于任意$r \in \mathbb{Z}_+$，有

$$r \otimes \Omega = \Omega^{agg} := \left\{ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \,\middle|\, \begin{array}{l} \mathbf{X}_s \in Y^s \odot \Lambda_s + (r - Y^s) \odot \Gamma_s,\ s \in \mathcal{K} \\ \mathbf{X} = \{\mathbf{X}_s\}_{s\in\mathcal{K}},\ \mathbf{A}\mathbf{Y} \le r\mathbf{b},\ \mathbf{Y} \in \{0,1,\ldots,r\}^k \end{array} \right\}. \tag{15}$$

证明。证明请见补充材料中的附录D。 □

根据式（15），Ω^{agg} 的闭式表达还可进一步表示为

$$\Omega^{\text{agg}} = \left\{ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \left| \begin{array}{l} \hat{H}_l(\mathbf{W}_s, Y^s) \le Y^s d_l,\ l \in \mathcal{H}_s,\ s \in \mathcal{K} \\ \bar{H}_l(\mathbf{Z}_s, r - Y^s) \le (r - Y^s) d_l,\ l \in \mathcal{H}_s,\ s \in \mathcal{K} \\ \mathbf{X}_s = \mathbf{W}_s + \mathbf{Z}_s,\ s \in \mathcal{K} \\ \mathbf{X} = \{\mathbf{X}_s\}_{s \in \mathcal{K}},\ \mathbf{A}\mathbf{Y} \le r\mathbf{b},\ \mathbf{Y} \in \{0, 1, \ldots, r\}^k \end{array} \right. \right\}. \quad (16)$$

现在，我们建立 (P1) 的闭式表达。对于每个 $l \in \mathcal{H}_{ts}$，令 $\hat{H}_{tl}$ 和 $\bar{H}_{tl}$ 分别为 h_{tl} 和 h_{tl} 的透视函数。根据定理 2，可以推导出 (P1) 的闭式表达如下：

$$\text{(P-agg)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \min & \displaystyle\sum_{t \in \mathcal{T}} \mathbf{c}_t^\top \mathbf{X}_t \\ \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{t \in \mathcal{T}} \mathbf{a}_{tl}^\top \mathbf{X}_t \le b_l,\ l \in \mathcal{L}, \\ & \mathbf{X}_t = \{\mathbf{X}_{ts}\}_{s \in \mathcal{K}},\ t \in \mathcal{T}, \\ & \mathbf{X}_{ts} = \mathbf{W}_{ts} + \mathbf{Z}_{ts},\ s \in \mathcal{K},\ t \in \mathcal{T}, \\ & \hat{H}_{tl}(\mathbf{W}_{ts}, Y_t^s) \le Y_t^s d_{tl},\ s \in \mathcal{K},\ l \in \mathcal{H}_{ts},\ t \in \mathcal{T}, \\ & \bar{H}_{tl}(\mathbf{Z}_{ts}, N_t - Y_t^s) \le (N_t - Y_t^s) d_{tl},\ s \in \mathcal{K},\ l \in \mathcal{H}_{ts},\ t \in \mathcal{T}, \\ & \mathbf{A}_t \mathbf{Y}_t \le N_t \mathbf{b}_t,\ \mathbf{Y}_t \in \{0, 1, \ldots, N_t\}^k,\ t \in \mathcal{T}. \end{array} \right. \quad (17)$$

我们将 (P-agg) 称为 (P0) 的聚合重构。推导 (P-agg) 的技术融合了透视重构和变量聚合的方法，因此称为基于变量聚合的透视重构。该方法可以有效打破 (P0) 中的对称性。

我们注意到，如果 $h_{tl}(\cdot)$ 是凸二次函数，则二者均

$$\hat{H}_{tl}(\mathbf{W}_{ts}, Y_t^s) \le Y_t^s d_{tl} \quad \text{and} \quad \bar{H}_{tl}(\mathbf{Z}_{ts}, N_t - Y_t^s) \le (N_t - Y_t^s) d_{tl}$$

是二阶锥可表示的（Frangioni and Gentile，2009；Günlük and Linderoth，2010）。因此，如果原问题（P0）是混合整数凸二次优化问题，那么（P-agg）可以表述为混合整数二阶锥优化问题。

4. 所提出的重新表述的紧性

在相关文献中，已有研究表明，透视重构技术能够显著提高混合整数凸优化问题连续松弛的紧性。研究基于变量聚合的透视重构技术是否具有相同的效果是很有意义的。在本节中，我们研究所提出的重新表述（P-agg）的连续松弛的紧性。我们首先证明，在一些温和的假设下，$N_t \otimes \Omega_t$ 的凸包可以由公式（16）中给出的公式的连续松弛定义。然后，我们进一步比较（P0）的各种公式的连续松弛的紧性。

4.1. 聚合公式的凸包

本节中，我们推导集合 $N_t \otimes \Omega_t$的凸包。为简单起见，我们省略下标 t ，并将Ω_t 记为Ω。考虑在(16)中定义的集合Ω^{agg} ˜，其连续松弛记为Ω^{agg}，定义如下

$$\tilde{\Omega}^{\text{agg}} = \left\{ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \middle| \begin{array}{l} \hat{H}_l(\mathbf{W}_s, Y^s) \le Y^s d_l,\ l \in \mathcal{H}_s,\ s \in \mathcal{K} \\ \bar{H}_l(\mathbf{Z}_s, r - Y^s) \le (r - Y^s) d_l,\ l \in \mathcal{H}_s,\ s \in \mathcal{K} \\ \mathbf{X}_s = \mathbf{W}_s + \mathbf{Z}_s,\ s \in \mathcal{K} \\ \mathbf{X} = \{\mathbf{X}_s\}_{s \in \mathcal{K}},\ \mathbf{A}\mathbf{Y} \le r\mathbf{b} \end{array} \right\}. \tag{18}$$

˜本节的一个主要理论结果是证明conv($r \otimes \Omega$) $= \Omega^{\text{agg}}$。

我们首先考虑集合Ω^{per}，其连续松弛记为˜Ω^{per}，定义如下

$$\tilde{\Omega}^{\text{per}} = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \middle| \begin{array}{l} \hat{H}_l(\mathbf{w}_s, y^s) \le y^s d_l,\ l \in \mathcal{H}_s,\ s \in \mathcal{K} \\ \bar{H}_l(\mathbf{z}_s, 1 - y^s) \le (1 - y^s) d_l,\ l \in \mathcal{H}_s,\ s \in \mathcal{K} \\ \mathbf{x}_s = \mathbf{w}_s + \mathbf{z}_s,\ s \in \mathcal{K} \\ \mathbf{x} = \{\mathbf{x}_s\}_{s \in \mathcal{K}},\ \mathbf{A}\mathbf{y} \le \mathbf{b} \end{array} \right\}. \tag{19}$$

我们假设以下条件成立：

˜**假设 1：** Ω^{per} 包含一个相对内点解。

于是我们得到以下两个引理：

˜**引理2**。 在假设 *1* 下，我们有 *conv*(Ω) $= \Omega^{per}$。

证明。 证明请参见补充材料中的附录 E。 □

引理 3. 设 $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^d$ 为非空有界闭集， r 为非负整数，则有 $conv(r \otimes \mathcal{F}) = r \otimes conv(\mathcal{F})$。

证明。 证明请参见补充材料中的附录 F。 □

现在，我们给出主要理论结果，表明连续~松弛 Ω^{agg} 是紧的。

~定理 3. 在假设 *1* 下，对于任意 $r \in \mathbb{Z}_+$，有 $\Omega^{agg} = conv(r \tilde{\otimes} \Omega) = r \odot \Omega^{per}$.

证明。 证明请参见补充材料中的附录 G。 □

众所周知，借助透视重构，可以推导出若干混合整数凸集的凸包（如第 1 节所述）。然而，在现有文献中，透视重构从未与变量聚合技术相结合。在本文中，我们首次将二者结合起来，并研究其对聚合公式连续松弛的影响。

4.2. 各种公式的紧性结果

我们进一步讨论各种公式的连续松弛之间的关系。在前面的章节中，我们介绍了两种公式：原始形式 (P0) 和聚合公式 (P-agg)。除这两种公式外，由于集合 Ω_t 可以利用 (14) 重新表述为 Ω_t^{per} ，我们可以推导出 (P0) 的如下透视重构：

$$
\text{(P-per)} \quad \begin{cases} \min \displaystyle\sum_{t\in\mathcal{T}} \sum_{i\in\mathcal{I}_t} \mathbf{c}_t^\top \mathbf{x}_i \\ \text{s.t.} \displaystyle\sum_{t\in\mathcal{T}} \sum_{i\in\mathcal{I}_t} \mathbf{a}_{tl}^\top \mathbf{x}_i \le b_l,\ l \in \mathcal{L}, \\ \mathbf{x}_i = \{\mathbf{x}_{is}\}_{s\in\mathcal{K}},\ i \in \mathcal{I}_t,\ t \in \mathcal{T}, \\ \mathbf{x}_{is} = \mathbf{w}_{is} + \mathbf{z}_{is},\ s \in \mathcal{K},\ i \in \mathcal{I}_t,\ t \in \mathcal{T}, \\ \hat{H}_{tl}(\mathbf{w}_{is}, y_i^s) \le y_i^s d_l,\ \bar{H}_{tl}(\mathbf{z}_{is}, 1-y_i^s) \le (1-y_i^s) d_l, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad s \in \mathcal{K},\ l \in \mathcal{H}_{ts},\ i \in \mathcal{I}_t,\ t \in \mathcal{T}, \\ \mathbf{A}_t \mathbf{y}_i \le \mathbf{b}_t,\ \mathbf{y}_i \in \{0,1\}^k,\ i \in \mathcal{I}_t,\ t \in \mathcal{T}. \end{cases} \tag{20}
$$

本小节的主要目的是比较 (P0)、(P-per) 和 (P-agg) 的连续松弛的紧性。对于 (P0)，其连续松弛给出如下

$$\begin{cases} \min \ \sum_{t\in\mathcal{T}}\sum_{i\in\mathcal{I}_t} \mathbf{c}_t^\top \mathbf{x}_i \\ \text{s.t.} \ \sum_{t\in\mathcal{T}}\sum_{i\in\mathcal{I}_t} \mathbf{a}_{tl}^\top \mathbf{x}_i \le b_l, \ l\in\mathcal{L}, \\ \quad\ (\mathbf{x}_i,\mathbf{y}_i)\in\mathcal{C}_t, \ i\in\mathcal{I}_t, \ t\in\mathcal{T}, \end{cases} \tag{21}$$

其中 $\mathcal{C}_t$ 表示 Ω_t 在其原始形式下的连续松弛，即在不使用透视重构的情况下按 (11) 定义的连续松弛，表示为

$$\mathcal{C}_t = \left\{ (\mathbf{x},\mathbf{y}) \,\middle|\, \begin{array}{l} h_{tl}(\mathbf{x}_s, y^s) \le d_{tl}, \ l\in\mathcal{H}_{ts}, \ s\in\mathcal{K} \\ \mathbf{x} = \{\mathbf{x}_s\}_{s\in\mathcal{K}}, \ \mathbf{A}_t\mathbf{y} \le \mathbf{b}_t \end{array} \right\}. \tag{22}$$

使用第 4.1 节中定义的记号，(P- per) 的连续松弛可表示为

$$\begin{cases} \min \ \sum_{t\in\mathcal{T}}\sum_{i\in\mathcal{I}_t} \mathbf{c}_t^\top \mathbf{x}_i \\ \text{s.t.} \ \sum_{t\in\mathcal{T}}\sum_{i\in\mathcal{I}_t} \mathbf{a}_{tl}^\top \mathbf{x}_i \le b_l, \ l\in\mathcal{L}, \\ \quad\ (\mathbf{x}_i,\mathbf{y}_i)\in\tilde{\Omega}_t^{\text{per}}, \ i\in\mathcal{I}_t, \ t\in\mathcal{T}, \end{cases} \tag{23}$$

而 (P-agg) 的连续松弛可表示为

$$\begin{cases} \min \ \sum_{t\in\mathcal{T}} \mathbf{c}_t^\top \mathbf{X}_t \\ \text{s.t.} \ \sum_{t\in\mathcal{T}} \mathbf{a}_{tl}^\top \mathbf{X}_t \le b_l, \ l\in\mathcal{L}, \\ \quad\ (\mathbf{X}_t,\mathbf{Y}_t)\in\tilde{\Omega}_t^{\text{agg}}, \ t\in\mathcal{T}. \end{cases} \tag{24}$$

我们用 LB$^{(\cdot)}$ 表示通过问题 (·) 的连续松弛计算出的下界。接下来的结果将说明三个公式 (P0)、(P- per) 和 (P-agg) 的紧性。

定理 4。关于 *(P0)*、*(P-per)* 和 *(P-agg)* 的连续松弛的紧性，我们有 $LB^{(P\text{-}agg)} = LB^{(P\text{-}per)} \ge LB^{(P0)}$。

证明。 证明请参见补充材料中的附录H。 □

我们的理论结果表明，通过将透视重构与变量聚合技术相结合以推导(P-agg)，不仅可以打破对称性，还可以显著提高连续松弛的紧性。

5. 应用于机组组合问题

电力系统中的机组组合问题旨在确定一组发电机组 $\mathcal{I}$ 在一段时间 $\mathcal{M}:=\{1,\ldots,n\}$ 内的运行状态和发电功率，以使总运行成本最小。文献中已提出多种针对该问题的混合整数规划公式（Knueven 等人，2020）。其中最广为人知的一种公式是经典三分段公式（Rajan 和 Takriti，2005）。然而，由于爬坡约束，经典三分段公式不满足 (P0) 的结构，因此变量聚合重构方法并不适用。因此，我们考虑另一种称为基于动态规划的公式，该公式由 Bacci 等人（2023）提出。为使本文内容完整，我们简要介绍基于动态规划的公式。更多详情请参阅 Bacci 等人（2023）。

在基于动态规划的公式中，发电机组可以有两种运行状态：开机和停机。为了构造满足最小开停机时间约束的有效状态序列，为每台发电机组 $i\in\mathcal{I}$ 引入一个图$G_i=\{\mathcal{N}_i,\mathcal{A}_i\}$ 。节点集$\mathcal{N}_i$ 包含两种类型的节点：对于每个 $j\in\mathcal{M}$，都有 ON_{ij} 和 OFF_{ij}，此外还有两个特殊节点：源节点 S_i 和汇节点 D_i。集合 $\mathcal{A}_i$ 包含两种类型的弧：一种是开机弧（ON arc），$(OFF_{ih},\ ON_{ir})$，表示发电机组在时间段 h 开机，并保持开机状态直至时间段 r。另一种是停机弧（OFF arc），$(ON_{ih},\ OFF_{ir})$，表示发电机组从时间段 $h+1$ 停机至时间段 $r-1$。节点 S_i 和 D_i 也与（或由）一些合适的节点相连，以定义开机弧和停机弧。

给定图 $G_i=\{\mathcal{N}_i,\mathcal{A}_i\}$，发电机组 i 的有效状态序列可表示为从 S_i 到 D_i 的一条路径。然后，引入向量 $\mathbf{y}_i\in\{0,1\}^{k_i}$，其中 $k_i=|\mathcal{A}_i|$，且 $\mathbf{y}_i$ 的每个元素都与 $\mathcal{A}_i$ 中的一条弧相关联。令 $\mathcal{K}_i:=\{1,\ldots,k_i\}$。元素 $s\in\mathcal{K}_i$ 同时对 $\mathbf{y}_i$ 的元素及其关联弧进行索引。然后，从 S_i 到 D_i 的一条路径可表示为

使用网络流表述 $\mathbf{E}_i\mathbf{y}_i = \delta_i$，其中 $\mathbf{E}_i$ 是图 G_i 的节点-弧关联矩阵，$\delta_i \in \{0,1\}^{|\mathcal{N}_i|}$ 中的每个元素都与一个节点相关联； δ_i 的所有元素均为零，除了分别对应源节点和汇节点的元素 $\delta_{S_i} = -1$ 和 $\delta_{D_i} = 1$。值得注意的是，$\mathbf{E}_i$ 是一个全幺模矩阵。

集合 $\mathcal{K}_i$ 被划分为两个子集$\mathcal{K}_i^+$和 $\mathcal{K}_i^-$，它们分别表示开机弧和停机弧的子集。注意，对于停机弧，发电机组处于关闭状态，功率固定为零。因此，我们只需确定与开机弧相关的各时间段内的功率。设 $s \in \mathcal{K}_i^+$，其相关时间段为从 h 到 r。引入向量$\mathbf{x}_{is} \in \mathbb{R}^n$，表示发电机组在从 h 到 r这些时间段内的功率输出，而其他时间段内的功率输出固定为零。集合 Λ_{is} 定义为功率的一些物理限制，包括最小和最大功率限制、启动和停机限制以及爬坡限制。此外，$\mathbf{d}$ 表示整个时域内的系统负荷。

最后，每台发电机组 $i \in \mathcal{I}$ 的总成本可表示为 $\mathbf{c}_i^\top \mathbf{y}_i + \sum_{s\in\mathcal{K}_i} f_{is}(\mathbf{x}_{is})$，其中 $\mathbf{c}_i$ 表示固定运行成本，而$f_{is}(\mathbf{x}_{is})$表示可变运行成本，通常是可分离凸二次函数。具体而言，当 $s \in \mathcal{K}_i^-$时，$\mathbf{c}_i$ 中的元素 c_{is} 等于启动成本。另一方面，当 $s \in \mathcal{K}_i^+$时，元素 c_{is} 等于 $\tau_s \hat{c}_i$，其中 $\hat{c}_i$ 表示发电机 i的最低运行成本，而 τ_s 表示与开机弧相关的时间间隔长度。显然，对于每个 $s \in \mathcal{K}_i^+$，我们可以通过引入辅助变量 z_{is}，将总成本$f_{is}(\mathbf{x}_{is})$中的非线性部分移至约束中，使集合 Λ_{is} 进一步包含约束 $f_{is}(\mathbf{x}_{is}) \le z_{is}$ 和 $z_{is} \le z_{is} \le \bar{z}_{is}$，其中 $z_{is} = \min_{\mathbf{x}_{is}\in\Lambda_{is}} f_{is}(\mathbf{x}_{is})$ 和 $\bar{z}_{is} = \max_{\mathbf{x}_{is}\in\Lambda_{is}} f_{is}(\mathbf{x}_{is})$。

根据上述描述，机组组合问题可以表示为

表述如下:

$$
(\mathrm{UC})\ \begin{cases} \min \ \displaystyle\sum_{i\in\mathcal{I}} \left(\mathbf{c}_i^\top \mathbf{y}_i + \sum_{s\in\mathcal{K}_i^+} z_{is} \right) \\ \text{s.t.} \ \displaystyle\sum_{i\in\mathcal{I}} \sum_{s\in\mathcal{K}_i^+} \mathbf{x}_{is} = \mathbf{d}, \\ \qquad (\widetilde{\mathbf{x}}_i, \mathbf{y}_i) \in \Omega_i = \left\{ (\widetilde{\mathbf{x}}_i, \mathbf{y}_i) \left| \begin{array}{l} \mathbf{x}_{is} \in y_i^s \otimes \Lambda_{is} + (1-y_i^s) \otimes \Gamma_{is}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad s \in \mathcal{K}_i^+ \\ \widetilde{\mathbf{x}}_i = \{\mathbf{x}_{is}, z_{is}\}_{s\in\mathcal{K}_i^+}, \ \mathbf{E}_i \mathbf{y}_i = \delta_i, \\ \mathbf{y}_i \in \{0,1\}^{k_i} \end{array} \right. \right\}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i \in \mathcal{I}, \end{cases} \tag{25}
$$

其中，对每个 $i \in \mathcal{I}$ 和 $s \in \mathcal{K}_i^+$，$\Gamma_{is} := \{\mathbf{0}\}$ 。显然，(UC) 是 (P0) 的一个特例。因此，(P0) 的透视重构 (P-per) 可应用于 (UC)。我们将 (UC) 的透视重构记为 (UC-per)，其完整公式见补充材料附录 I。值得指出的是，(UC-per) 正是 Bacci 等人（2023）提出的基于动态规划的公式。

对于涉及若干相同发电机组的情况，我们将 $\mathcal{I}$划分为 T 个子集，使得 $\mathcal{I} = \cup_{t=1}^{T} \mathcal{I}_t$，其中每个子集代表一组具有相同初始状态的相同发电机组。由于对于每个$i \in \mathcal{I}$，$\mathbf{E}_i$ 是全幺模的，且 δ_i 是整数向量，因此可将基于变量聚合的重构（P-agg）应用于（UC）。我们用（UC-agg）表示（UC）的基于变量聚合的公式，其完整公式见补充材料附录 I。

根据定理 4，对于公式 (UC-agg)，不仅可以打破对称性，而且连续松弛下界也可以非常紧。这些优势可能显著提升混合整数规划求解器的性能。

6. 在可分离混合整数凸优化问题中的应用

(P0) 的另一个特例是混合整数可分凸规划问题

$$
(\mathrm{SP})\ \begin{cases} \min\ \displaystyle\sum_{i\in\mathcal{I}} (f_i(x_i) + c_i y_i) \\ \text{s.t.}\ \displaystyle\sum_{i\in\mathcal{I}} g_{il}(x_i) \le d_l,\ l \in \mathcal{L}, \\ \qquad l_i y_i \le x_i \le u_i y_i,\ y_i \in \{0,1\},\ i \in \mathcal{I}, \end{cases} \tag{26}
$$

其中 $c_i, l_i, u_i \in \mathbb{R}$，所有函数 $f_i(\cdot)$ 和 $g_{il}(\cdot)$ 对于 $i \in \mathcal{I}$ 均为单变量凸函数，并且 $d_l \in \mathbb{R}$ 对于 $l \in \mathcal{L}$。我们指出，（Agnetis 等人，2009；Frangioni 等人，2011）中的若干重要问题均为 (SP) 的特例。此外，若对所有 $i \in \mathcal{I}$ 均有 $c_i = 0$ 且 $l_i = 0$，则该问题可化为连续可分优化问题，而该问题在文献中已得到广泛研究（Bretthauer 和 Shetty，2002；Edirisinghe 和 Jeong，2019；Schoot Uiterkamp 等人，2022年）。如（Agnetis 等人，2012）所指出的，在直线覆盖问题等某些实际应用中，(SP) 会自然产生对称性。基于该对称结构，我们将集合 $\mathcal{I}$ 划分为 $\mathcal{I} = \bigcup_{t=1}^{T} \mathcal{I}_t$，其中每个 $\mathcal{I}_t$ 表示一个等价类，并将 (SP) 重新表述如下：

$$
\begin{cases} \min\ \displaystyle\sum_{t\in\mathcal{T}} \sum_{i\in\mathcal{I}_t} (z_i + c_t y_i) \\ \text{s.t.}\ \displaystyle\sum_{t\in\mathcal{T}} \sum_{i\in\mathcal{I}_t} w_{il} \le d_l,\ l \in \mathcal{L}, \\ \qquad f_t(x_i) \le z_i,\ l_t y_i \le x_i \le u_t y_i,\ y_i \in \{0,1\},\ i \in \mathcal{I}_t,\ t \in \mathcal{T}, \\ \qquad g_{tl}(x_i) \le w_{il},\ i \in \mathcal{I}_t,\ t \in \mathcal{T},\ l \in \mathcal{L}. \end{cases} \tag{27}
$$

对于任意 $i \in \mathcal{I}$，我们使用 $\tilde{\mathbf{x}}_i := \{x_i, \{w_{il}\}_{l\in\mathcal{L}}, z_i\}$ 表示一个向量，其各个分量由 x_i、$\{w_{il}\}_{l\in\mathcal{L}}$ 和 z_i组成。对于任意 $t \in \mathcal{T}$，我们定义集合

$\Gamma_t := \{\mathbf{0}\}$，并定义 Λ_t 如下：

$$\Lambda_t = \left\{ \widetilde{\mathbf{x}}_i \;\middle|\; \begin{array}{l} g_{tl}(x_i) \le w_{il},\ l \in \mathcal{L} \\ l_t \le x_i \le u_t \\ f_t(x_i) \le z_i \\ \underline{z}_t \le z_i \le \bar{z}_t \\ \underline{w}_{tl} \le w_{il} \le \bar{w}_{tl},\ l \in \mathcal{L} \end{array} \right\}, \tag{28}$$

其中 $\underline{w}_{tl} = \min^{x_i \in [l_t, u_t]} g_{tl}(x_i)$、$\bar{w}_{tl} = \max^{x_i \in [l_t, u_t]} g_{tl}(x_i)$、$z_t = \min_{x_i \in [l_t, u_t]} f_t(x_i)$ 和 $\bar{z}_t = \max_{x_i \in [l_t, u_t]} f_t(x_i)$。利用上述记号，我们可以将问题 (27) 重新表述如下：

$$\begin{cases} \min \displaystyle\sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{i \in \mathcal{I}_t} (z_i + c_t y_i) \\ \text{s.t.} \displaystyle\sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{i \in \mathcal{I}_t} w_{il} \le d_l,\ l \in \mathcal{L}, \\ \quad \widetilde{\mathbf{x}}_i := \{x_i, \{w_{il}\}_{l \in \mathcal{L}}, z_i\},\ (\widetilde{\mathbf{x}}_i, y_i) \in \Omega_t,\ i \in \mathcal{I}_t,\ t \in \mathcal{T}, \end{cases} \tag{29}$$

其中 $\Omega_t := \{(\widetilde{\mathbf{x}}_i,\ y_i) \mid \widetilde{\mathbf{x}}_i \in y_i \otimes \Lambda_t + (1 - y_i) \otimes \Gamma_t,\ \ y_i \in \{0, 1\}\}$。容易验证，(29) 是 (P0) 的一个特例。因此，可将针对 (P0) 的重新表述 (P-per) 和 (P-agg) 应用于 (29)。我们分别用 (SP-per) 和 (SP-agg) 表示将 (P-per) 和 (P-agg) 应用于 (29) 所得的重新表述，其完整公式见《补充材料》附录 J。下一节将展示这三种重新表述的数值性能。

7. 计算实验

本节评估所提出的基于变量聚合的透视重构技术的计算性能。为此，我们针对三类问题开展实验：（i）机组组合问题，（ii）直线覆盖问题，以及（iii）一般的可分混合整数凸二次规划问题。

对于每种问题类型，我们比较多种公式，以评估所提出方法的有效性。比较时采用两项关键性能指标：

- 计算效率——通过每种公式在求解过程中消耗的总计算时间以及探索的分支定界节点数量来衡量。

该指标反映了所提出的重新表述在打破问题对称性和提高求解器效率方面的效果。

- 连续松弛的紧性——根据每种公式的连续松弛所得到的下界及其与全局最优值之间的相对间隙进行评估，定义如下：

$$\text{relative gap} := \frac{|\text{OPT} - \text{LB}_{(\cdot)}|}{|\text{OPT}|},$$

其中，OPT 为全局最优值，$\text{LB}_{(\cdot)}$ 是相应公式的连续松弛所提供的下界。

所有计算实验均在一台配备 Intel(R) Core(TM) Ultra 5 125H 3.60 GHz 处理器和 32GB RAM 的个人电脑上进行。我们通过 Python 接口使用 Gurobi 12.0.0 求解优化问题。为确保比较公平且一致，所有实验的线程数均固定为 1，并为每个实例设置 1200 个 CPU 秒的时间限制。这些设置使我们能够一致地比较不同公式的性能，并严格检验所提出的重构技术在不同问题类型中的优势。

7.1. 机组组合问题

我们首先在机组组合问题上评估所提出的方法。该问题是电力系统中的一个基础问题，其中经常会遇到多个相同发电机组。本研究采用 Ostrowski 的基准测试集（Knueven 等人，2017），该测试集专为评估含相同机组的机组组合问题的求解效率而设计。测试集包含 20 个实例，每个实例均通过复制 Kazarlis 等人（1996）中描述的部分发电机组构建而成。有关测试实例参数的更多详情，请参见 Knueven 等人（2017）的第五节。

为评估所提出的基于变量聚合的透视重构（UC-agg）的有效性，我们将其性能与两种公式进行比较：（i）（UC-per）：等价于基于动态规划的

公式，该公式由（Bacci 等，2023）提出；（ii）经典的三箱公式（ Rajan 和 Takriti，2005），该公式因性能出色而广受认可。

在我们的实验中，三箱公式和 (UC-per) 公式均严格遵循 (Bacci 等人，2023) 所述的实现方式。需要强调的是，我们提出的 (UC-agg) 公式不同于 (Knueven 等人，2017) 提出的基于聚合的公式，因为我们的公式采用透视重构技术直接处理凸二次成本函数，而不是依赖分段线性近似。

每个算例均使用 Gurobi 求解，MIPGap 容差为 10^{-4}，与 (Bacci 等人，2023) 一致。计算结果列于表1，报告的问题编号 (ID)、发电机组总数 (Tol)、相同机组的平均数量 (Rep)、计算时间（秒）(Time) 以及探索的分支定界节点数 (Nodes)。此外，短横线“–”表示求解器未能在 1200 秒的时限内求解该算例。

表1：Ostrowski 的实例的计算结果

ID	Tol	Rep	三箱		(UC-per)		(UC-agg)	
			Time	节点	Time	节点	Time	节点
1	28	3.5	161.7680	27895.0	–	–	0.9930	155.0
2	35	4.4	22.8720	3818.0	–	–	8.7300	1037.0
3	44	5.5	16.3280	1240.0	–	–	4.1920	615.0
4	45	5.6	17.9650	1882.0	–	–	6.9180	1604.0
5	49	6.1	23.5750	1953.0	–	–	3.6530	818.0
6	50	6.3	25.8940	1433.0	–	–	22.4200	2235.0
7	51	6.4	35.5750	3422.0	–	–	7.9650	871.0
8	51	6.4	28.5230	2016.0	–	–	11.1330	3113.0
9	52	6.5	30.2800	2510.0	–	–	19.6580	9610.0
10	54	6.8	56.8100	3289.0	–	–	14.8550	2253.0
11	132	16.5	–	–	–	–	8.2180	1270.0
12	156	19.5	45.4530	876.0	631.3040	1.0	17.7150	1046.0
13	156	19.5	60.9420	844.0	650.4190	2023.0	35.8030	75.0
14	165	20.6	37.7060	303.0	314.3900	1.0	1.5860	31.0
15	167	20.9	214.0810	5896.0	–	–	26.1850	3014.0
16	172	21.5	24.2450	158.0	631.7160	1.0	20.7230	1.0
17	182	22.8	58.1690	629.0	954.1220	163.0	0.7040	1.0
18	182	22.8	163.9320	3418.0	–	–	8.9430	1322.0
19	183	22.9	152.0440	3057.0	–	–	8.4260	1783.0
20	187	23.4	119.3980	2251.0	674.6270	1.0	0.9210	1.0

从表1可以明显看出，所提出的（UC-agg）公式显著优于其他方案。具体而言：使用（UC-agg）时，所有实例均可在36秒内求解。相比之下，3-bin 公式有五个实例需要超过100秒，另有一个实例未能在

表2：Ostrowski实例的不同基于连续松弛的下界与相对间隙

ID	三箱	(UC-per)	(UC-agg)	最优值
1	$3.8390 \times 10^6 (1.9559 \times 10^{-3})$	$3.8437 \times 10^6 (7.1776 \times 10^{-4})$	$3.8437 \times 10^6 (7.1777 \times 10^{-4})$	3.8465×10^6
2	$4.8265 \times 10^6 (1.9291 \times 10^{-3})$	$4.8311 \times 10^6 (7.7341 \times 10^{-4})$	$4.8311 \times 10^6 (7.7340 \times 10^{-4})$	4.8348×10^6
3	$5.1345 \times 10^6 (1.7396 \times 10^{-3})$	$5.1424 \times 10^6 (2.1523 \times 10^{-4})$	$5.1424 \times 10^6 (2.1523 \times 10^{-4})$	5.1435×10^6
4	$4.8028 \times 10^6 (1.4567 \times 10^{-3})$	$4.8081 \times 10^6 (3.6100 \times 10^{-4})$	$4.8081 \times 10^6 (3.6100 \times 10^{-4})$	4.8098×10^6
5	$5.4016 \times 10^6 (2.3316 \times 10^{-3})$	$5.4137 \times 10^6 (1.0374 \times 10^{-4})$	$5.4137 \times 10^6 (1.0376 \times 10^{-4})$	5.4142×10^6
6	$4.4132 \times 10^6 (4.2960 \times 10^{-3})$	$4.4310 \times 10^6 (2.7486 \times 10^{-4})$	$4.4310 \times 10^6 (2.7487 \times 10^{-4})$	4.4322×10^6
7	$5.8485 \times 10^6 (1.2884 \times 10^{-3})$	$5.8546 \times 10^6 (2.3323 \times 10^{-4})$	$5.8546 \times 10^6 (2.3326 \times 10^{-4})$	5.8560×10^6
7	$5.1801 \times 10^6 (2.6380 \times 10^{-3})$	$5.1925 \times 10^6 (2.3667 \times 10^{-4})$	$5.1925 \times 10^6 (2.3667 \times 10^{-4})$	5.1938×10^6
9	$5.6293 \times 10^6 (2.5132 \times 10^{-3})$	$5.6425 \times 10^6 (1.6992 \times 10^{-4})$	$5.6425 \times 10^6 (1.6991 \times 10^{-4})$	5.6435×10^6
10	$5.0743 \times 10^6 (4.3465 \times 10^{-3})$	$5.0952 \times 10^6 (2.5269 \times 10^{-4})$	$5.0952 \times 10^6 (2.5269 \times 10^{-4})$	5.0965×10^6
11	$1.5865 \times 10^7 (1.3122 \times 10^{-3})$	$1.5883 \times 10^7 (2.1014 \times 10^{-4})$	$1.5883 \times 10^7 (2.0992 \times 10^{-4})$	1.5886×10^7
12	$1.7253 \times 10^7 (1.3102 \times 10^{-3})$	$1.7274 \times 10^7 (1.0274 \times 10^{-4})$	$1.7274 \times 10^7 (1.0278 \times 10^{-4})$	1.7276×10^7
13	$1.6927 \times 10^7 (1.7760 \times 10^{-3})$	$1.6954 \times 10^7 (1.4674 \times 10^{-4})$	$1.6954 \times 10^7 (1.4671 \times 10^{-4})$	1.6957×10^7
14	$2.0200 \times 10^7 (1.6584 \times 10^{-3})$	$2.0233 \times 10^7 (3.0053 \times 10^{-5})$	$2.0233 \times 10^7 (3.0057 \times 10^{-5})$	2.0234×10^7
15	$1.7375 \times 10^7 (2.7703 \times 10^{-3})$	$1.7421 \times 10^7 (1.3432 \times 10^{-4})$	$1.7421 \times 10^7 (1.3433 \times 10^{-4})$	1.7424×10^7
16	$1.9552 \times 10^7 (1.1183 \times 10^{-3})$	$1.9574 \times 10^7 (8.4627 \times 10^{-5})$	$1.9574 \times 10^7 (8.4628 \times 10^{-5})$	1.9575×10^7
17	$1.9712 \times 10^7 (2.2026 \times 10^{-3})$	$1.9755 \times 10^7 (4.4694 \times 10^{-5})$	$1.9755 \times 10^7 (4.4712 \times 10^{-5})$	1.9756×10^7
18	$1.9623 \times 10^7 (2.0091 \times 10^{-3})$	$1.9661 \times 10^7 (1.0774 \times 10^{-4})$	$1.9661 \times 10^7 (1.0774 \times 10^{-4})$	1.9663×10^7
19	$2.0159 \times 10^7 (1.5809 \times 10^{-3})$	$2.0188 \times 10^7 (1.4108 \times 10^{-4})$	$2.0188 \times 10^7 (1.4108 \times 10^{-4})$	2.0191×10^7
20	$1.9742 \times 10^7 (1.9517 \times 10^{-3})$	$1.9779 \times 10^7 (7.3945 \times 10^{-5})$	$1.9779 \times 10^7 (7.3954 \times 10^{-5})$	1.9781×10^7

注：括号外和括号内的数字分别表示下界和相对间隙。

时限内求解。此外，对于（UC-per）公式，只有六个实例能在1200秒内求解。这是因为与其他公式相比，它包含更多二元变量。这些结果凸显了（UC-agg）在高效消除对称性和提供紧连续松弛方面的有效性。

为进一步评估松弛紧性，我们在表2中比较了各公式连续松弛的下界、最优值及其相对间隙。可以观察到，（UC-agg）与（UC-per）得到的下界基本相同（在数值精度范围内），且二者均显著紧于3-bin公式。这些数值结果印证了我们在定理4中建立的理论结论，确认了所提出的基于变量聚合的透视重构的紧性。

7.2. 直线覆盖问题

接下来，我们考察直线覆盖问题，该问题由（Agnetis 等人，2009）提出，随后由（Frangioni 等人，2011；Agnetis 等人，2012）进行了研究。该问题涉及选择一组传感器并确定其位置，以覆盖长度为 d 的线段（例如道路、河流或管道）。如果某个传感器 $i \in \mathcal{I}$ 覆盖长度为 x_i 的线段，则相关成本为 d ，其

中， c_i 表示设置成本， $a_i x_i^2$ 为二次运营成本。目标是选择传感器并分配覆盖长度，以最小化总成本。采用混合整数二次规划公式作为

$$(\mathrm{LC}) \begin{cases} \min \sum_{i \in \mathcal{I}} \left(a_i x_i^2 + c_i y_i \right) \\ \text{s.t.} \sum_{i \in \mathcal{I}} x_i = d, \\ \quad 0 \le x_i \le u_i y_i,\ y_i \in \{0,1\},\ i \in \mathcal{I}, \end{cases} \tag{30}$$

其中 y_i 是一个二元变量，表示是否选择该传感器， $u_i > 0$表示传感器 i能够覆盖的最大半径。

由于(LC)是可分离凸二次优化的一个特例，透视重构(SP-per)和所提出的基于变量聚合的重构(SP-agg)均适用。我们将所得公式分别记为(LC-per)和(LC-agg)。

计算测试实例按照(Frangioni 等人，2011)中所述的流程生成。具体而言：(i) 每个 a_i 从 $[n, C_{\max}]$中均匀采样，其中 n 为传感器总数， $C_{\max}$ 从 $\{10n, 20n, 30n\}$中随机选取；(ii) 每个 c_i 为$\{1, \ldots, n\}$中的随机整数；(iii) 所有上界 u_i 以及直线长度 d 均设为1。在我们的实验中，考虑 $n = 18000$ 个传感器。为引入对称性，先生成前 T 个传感器的参数，然后复制 N 次，且 $T = n/N$。我们对 $N \in \{10, 15, 20, 30, 50\}$的五种设置进行测试，每种设置生成五个随机实例。

所有实例均使用 Gurobi 求解，并将 MIPGap 容差设置为10^{-6} （因为 (LC-per) 和 (LC-agg) 的连续松弛间隙已低于 10^{-4}）。此外，针对与每组相同传感器相关联的二元变量引入对称性破除不等式，对每个集合 $\mathcal{I}_t$ 强制 $y_1 \ge y_2 \ge \ldots \ge y_{N_t}$：$= \{1, \ldots, N_t\}$。这些改进同时应用于 (LC) 和 (LC-per)，并将结果与 (LC-agg) 进行比较。计算结果汇总于表 3，其中每一行报告五个随机生成实例的平均计算时间和平均分支定界节点数。

从表 3 可以看出，(LC-per) 和 (LC-agg) 的效率都明显高于 (LC)，这证实了透视

重构在缩小松弛间隙方面的有效性。此外，(LC-agg) 的表现始终优于 (LC-per)，表明通过聚合打破对称性还能带来额外收益。

为评估松弛的紧性，我们在表4中记录了每种公式的平均下界、平均最优值和平均相对间隙。结果表明，(LC-agg) 与 (LC-per) 同样紧，而且二者产生的下界都显著高于 (LC)，进一步验证了所提方法的优势。

表 3：直线覆盖问题随机生成测试实例的计算结果

$(T,\ N)$	(LC)		(LC-per)		(LC-agg)	
	Time	节点	Time	节点	Time	节点
(1800,10)	48.6778	2.6	6.3282	2.6	0.6100	1.4
(1200,15)	48.0874	4.6	4.8298	5.2	0.2598	2.6
(900,20)	53.5290	8.6	4.9538	6.2	0.2112	2.2
(600,30)	68.7288	4.2	5.6392	9.8	0.2182	1.8
(360,50)	92.3584	6.8	6.2186	18.4	0.1606	3.4

表4：直线覆盖问题实例的不同平均下界和平均相对间隙

$(T,\ N)$	(LC)	(LC-per)	(LC-agg)	最优值
(1800,10)	472.20(8.59×10^{-1})	3389.77(1.46×10^{-4})	3389.77(1.46×10^{-4})	3390.33
(1200,15)	482.22(8.73×10^{-1})	3859.27(1.52×10^{-4})	3859。27(1.52×10^{-4})	3859.97
(900,20)	455.73(8.78×10^{-1})	3949.70(3.78×10^{-5})	3949.70(3.78×10^{-5})	3949.87
(600,30)	439。07(8.59×10^{-1})	3423.62(7.31×10^{-5})	3423.62(7.31×10^{-5})	3424.01
(360,50)	502。20(9.06×10^{-1})	5699.58(2.59×10^{-4})	5699。58(2.59×10^{-4})	5701.62

7.3. 可分混合整数凸二次优化问题

我们进一步在一个可分离混合整数凸二次优化问题上评估所提出的方法，该问题是 (SP) 的一个特例。问题表述如下：

$$
(\mathrm{SQP})\quad \begin{cases} \min \displaystyle\sum_{i\in\mathcal{I}} \left(a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i y_i\right) \\ \text{s.t.} \displaystyle\sum_{i\in\mathcal{I}} (a_{li} x_i^2 + b_{li} x_i) \le d_l,\ l = 1, \ldots, m-1, \\ \displaystyle\sum_{i\in\mathcal{I}} x_i = d_m, \\ l_i y_i \le x_i \le u_i y_i,\ y_i \in \{0,1\},\ i \in \mathcal{I}, \end{cases} \tag{31}
$$

其中 a_i, $b_i \geq 0$, l_i, u_i, $c_i \in \mathbb{R}$ 对于 $i \in \mathcal{I}$, $d_l \in \mathbb{R}$ 对于 $l = 1, \ldots, m$, 以及a_{li}, $b_{li} \geq 0$ 对于 $i \in \mathcal{I}$和 $l = 1, \ldots, m$。该公式包含 $m-1$个可分离凸二次约束和一个线性等式约束，后者用于防止生成平凡测试实例。

第6节中介绍的两种重新表述，包括 (SP-per) 和 (SP- agg)，均适用于 (SQP)，在此分别记为 (SQP-per) 和 (SQP-agg)。对于基线 (SQP) 和 (SQP-per)，针对每个集合$\mathcal{I}_t := \{1, \ldots, N_t\}$ 加入了形式为 $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_{N_t}$ 的破除对称性不等式，以提升计算性能。

测试实例按照 (Luo等人，2023年) 第6.2节所述的分布生成，并作了修改，以纳入二元变量和多个可分离凸二次约束：(i) 对每个 i，参数 a_i和 c_i 分别从 $[0,1]$,和 b_i 中抽样，$[2,5]$,；(ii) 变量界设为 $[l_i, u_i] = [-1, 1]$; (iii) 随机生成一个可行解 $\hat{\mathbf{x}}$，其中每个 $\hat{x}_i$ 均从 $[-1,1]$中抽取；(iv) 对每个 $l \in \{1, \ldots, m-1\}$，参数a_{li} 和 b_{li} 分别从 $[0,2]$ 和 $[0,5]$, 中抽样，并将相应的 d_l设为通过 $d_l = \sum_{i \in \mathcal{I}} (a_{li} \hat{x}_i^2 + b_{li} \hat{x}_i)$确保可行；(v) 将 d_m设为 $\sum_{i \in \mathcal{I}} \hat{x}_i$。

与第7.2节相同，变量总数设为 $n = 18000$，其中 $m = 4$、$N \in \{10, 15, 20, 30, 50\}$ 和 $T = n/N$。参数（a_i, b_i）首先对前 T 个元素随机生成，然后复制 N 次以引入对称结构。对于每种设置，随机生成五个实例，并使用 Gurobi 求解器求解，求解器设置与第7.2节保持一致。

表5总结了计算时间和枚举节点数。结果清楚地表明，(SQP-agg) 的表现显著优于另外两种公式，在计算时间和分支定界节点数方面均大幅减少。这些结果进一步证实，所提出的重新表述在处理对称性和提高求解效率方面是有效的。

表6报告了各公式的平均下界和相对间隙。结果表明，(SQP-agg) 和 (SQP-per) 的连续松弛取得了相当的下界（在数值容差范围内），且二者都显著优于原始 (SQP) 公式所得到的下界。这一结果进一步印证了第6节的理论结论。

在这三类问题中，所提出的基于变量聚合的

透视重新表述始终优于不采用变量聚合的经典透视重新表述，尤其是在大型对称实例上。

表5：混合整数可分二次优化问题的计算结果

$(T,\ N)$	(SQP)		(SQP-per)		(SQP-agg)	
	Time	节点	Time	节点	Time	节点
(1800，10)	124.8916	9.0	17.8260	3.0	1.2414	1.0
(1200，15)	120.0990	13.2	21.6206	99.6	0.6068	1.0
(900，20)	153.0214	43.0	30.0326	17.8	0.5786	1.0
(600，30)	174.5346	94.0	56.5870	49.8	0.3554	1.0
(360，50)	313.3260	93.0	65.3550	31.6	0.4192	5.8

表6：混合整数可分离二次优化问题的不同平均下界和平均相对间隙

$(T,\ N)$	(SQP)	(SQP-per)	(SQP-agg)	最优值
(1800,10)	$-2717.94(1.81\times10^{-1})$	$-2341.67(2.12\times10^{-7})$	$-2341.67(2.53\times10^{-7})$	-2341.67
(1200,15)	$-2548.69(2.24\times10^{-1})$	$-2145.47(2.54\times10^{-7})$	$-2145.47(2.21\times10^{-7})$	-2145.47
(900,20)	$-2256.39(3.20\times10^{-1})$	$-1853.64(3.48\times10^{-7})$	$-1853.64(1.17\times10^{-7})$	-1853.64
(600,30)	$-3050.22(8.11\times10^{-1})$	$-2645.61(5.03\times10^{-7})$	$-2645.61(1.12\times10^{-7})$	-2645.61
(360,50)	$-2863.20(6.52\times10^{-1})$	$-2431.03(1.80\times10^{-6})$	$-2431.03(2.00\times10^{-6})$	-2431.03

8. 结论

本文提出了一种新颖的基于变量聚合的透视重构方法，用于解决混合整数凸优化问题中的对称性问题。其关键创新在于引入透视函数，以精确刻画聚合变量的可行域。通过将透视重构技术与变量聚合相结合，我们构建了一种强有力的新公式，不仅能够处理对称性，还能增强连续松弛的紧性，从而获得高质量的下界。

我们的主要理论贡献，是在所提出的公式下，精确刻画每组聚合变量可行域的凸包。我们证明，聚合公式的连续松弛能够恢复该凸包，从而确保紧性，并强化基于变量聚合的重构的理论基础。对不同重新表述所得下界进行比较分析，进一步证实了我们方法所实现的优越性能。

大量计算实验验证了所提出重构技术的实际有效性。结果表明显著-

的改进既体现在连续松弛界质量的提升上，也体现在打破问题对称性的能力上。这些综合优势使分支定界算法的性能显著提升，使用Gurobi时求解器效率的大幅提高即是明证。

总体而言，本研究通过提出一种理论严谨且计算高效的对称性处理方法，推动了混合整数凸优化领域的发展。所提出的重新表述有望改进一系列具有对称结构的现实优化问题的求解方法。

致谢

本研究得到国家自然科学基金项目（编号：12171151、T2293774）以及中央高校基本科研业务费项目（编号：E2ET0808X2）的资助。

参考文献

Agnetis, A., Grande, E., Mirchandani, P.B., Pacifici, A., 2009。用可变半径圆盘覆盖线段。《计算机与运筹学》36，1423–1436。https://doi.org/10.1016/j.cor.2008.02.013。

Agnetis, A., Grande, E., Pacifici, A., 2012。采用延迟成本函数的需求分配。《数学规划》132，277–294。https://doi.org/10.1007/s10107-010-0398-y。

Anjos, M.F., Vieira, M.V.C., 2017. 设施布局问题的数学优化方法：现状与未来研究方向。《欧洲运筹学杂志》261, 1–16. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2017.01.049.

Bacci, T., Frangioni, A., Gentile, C., Tavlaradis-Gyparakis, K., 2023. 带有爬坡约束的机组组合问题的新型混合整数非线性规划公式。《运筹学》72, 2153–2167. https://doi.org/10.1287/opre.2023.2435.

Bendotti, P., Fouilhoux, P., Rottner, C., 2021年. 完整（子）轨道多胞体的轨道多胞体固定及其在机组组合问题中的应用. 《数学

规划》. 186, 337–372. https://doi.org/10.1007/s10107-019-01457 - 1. Bretthauer, K.M., Shetty, B., 2002. 非线性背包问题——算法与应用. 《欧洲运筹学杂志》 138, 459–472. https: // doi.org/10.1016/S0377-2217(01)00179-5. Castro, J., Frangioni, A., Gentile, C., 2014. 带L2距离的CTA问题的透视重构. 《运筹学》 62, 891–909. https: //doi.org/10.1287/opre.2014.1293. Clautiaux, F., Ljubić, I., 2025. 整数线性规划的过去五十年：聚焦近期实践进展. 《欧洲运筹学杂志》 324, 707–731. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2024.11.018. Danielson, C., 2021年. 对称优化的基本域：构造与搜索. 《SIAM优化杂志》 31, 1827–1849. https: //doi.org/10.1137/20M1331627. Edirisinghe, C., Jeong, J., 2019. 不定多约束可分离二次优化：大规模高效求解. 《欧洲运筹学杂志》 278, 49–63. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2019.04.004. Fischetti, M., Liberti, L., 2012. 轨道收缩, 载于: Mahjoub, A.R., Markakis, V., Milis, I., Paschos, V.T. (编), 国际组合优化研讨会, Springer, 柏林, 海德堡. 第48–58页. https://doi.org/10.1007/978-3-642-32147-4_6. Fischetti, M., Liberti, L., Salvagnin, D., Walsh, T., 2017. 轨道收缩：理论与应用. 《离散应用数学》 222, 109–123. https: // doi.org/10.1016/j.dam.2017.01.015. Frangioni, A., Gentile, C., 2009. 透视松弛重新表述的计算比较：二阶锥规划与割平面. 《运筹学快报》 37, 206–210. https://doi.org/10.1016/j.orl.2009.02.003. Frangioni, A., Gentile, C., Grande, E., Pacifici, A., 2011. 投影透视重构及其在设计问题中的应用. 《运筹学》 59, 1225–1232. https://doi.org/10.1287/opre.1110.0930.

Frangioni, A., Gentile, C., Lacalandra, F., 2009. 用于机组组合问题的更紧致近似混合整数线性规划公式。《IEEE电力系统汇刊》24, 105–113. https://doi.org/10.1109/TPWRS.2008.2004744. Friedman, E.J., 2007. 具有对称性的整数规划的基本域，载于：Dress, A., Xu, Y., Zhu, B.（编），组合优化与应用国际会议，Springer，柏林、海德堡。第146–153页。https://doi.org/10.1007/978-3-540-73556-4_17. Günlük, O., Linderoth, J., 2010. 含指示变量的混合整数非线性规划的透视重构。《数学规划》124, 183–205. https://doi.org/10.1007/s10107-010-0360-z.

Hijazi, H., Bonami, P., Cornuéjols, G., Ouorou, A., 2012. 具有“开/关”约束的混合整数非线性规划。《计算与优化应用》52，537–558。https://doi.org/10.1007/s10589-011-9424-0.

Hojny, C., 2020. 装箱、划分与覆盖对称背包。《离散应用数学》283, 689–717。https://doi.org/10.1016/j.dam.2020.03. 002.

Hojny, C., Pfetsch, M.E., 2018. 与对称性处理相关的多面体。《数学规划》175，197–240。https://doi.org/10.1007/s10107 -018-1239-7.

Kazarlis, S.A., Bakirtzis, A.G., Petridis, V., 1996. 一种用于机组组合问题的遗传算法求解方法。IEEE Trans. Power Syst. 11, 83–92. https://doi.org/10.1109/59.485989. Knueven, B., Ostrowski, J., Watson, J.P., 2017. 在机组组合中利用相同的发电机。IEEE Trans. Power Syst. 33, 4496–4507. https://doi.org/10.1109/TPWRS.2017.2783850. Knueven, B., Ostrowski, J., Watson, J.P., 2020. 关于机组组合问题的混合整数规划公式。INFORMS J. Comput. 32, 857–876. https://doi.org/10.1287/ijoc.2019.0944. Liberti, L., 2012a. 数学规划中的重新表述：自动对称性检测与利用。《数学规划》131, 273–304. ht tps://doi.org/10.1007/s10107-010-0351-0.

Liberti, L., 2012b. 数学规划中的对称性，载于：Lee, J., Leyffer, S.（编），《混合整数非线性规划》，Springer，纽约，NY，页码 263–283。https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1927-3_9. Liberti, L., Ostrowski, J., 2014. 数学规划的基于稳定子的对称性破缺约束。《全球优化杂志》60, 183–194. https: //doi.org/10.1007/s10898-013-0106-6. Luo, H.Z., Zhang, X.Y., Wu, H.X., Xu, W.Q., 2023. 带一个二次约束和盒约束的可分离非凸二次规划的有效算法。《计算与优化应用》86, 199–240. https://doi.org/10.1 007/s10589-023-00485-0. Margot, F., 2002. 分支割中的通过同构剪枝。《数学规划》94, 71–90. https://doi.org/10.1007/s10107-002-0358-2. Margot, F., 2003. 利用对称整数线性规划中的轨道。《数学规划》98, 3–21. https://doi.org/10.1007/s10107-003-0394-6. Margot, F., 2010. 整数线性规划中的对称性，载于：Jünger, M., Liebling, T.M., Naddef, D., Nemhauser, G.L., Pulleyblank, W.R., Reinelt, G., Rinaldi, G., Wolsey, L.A.（编），《整数规划50年（1958—2008）：从早期发展到最新成果》，Springer，柏林，海德堡，页码 647–686。https://doi.org/10.1007/978-3-540-68279 -0_17. Ostrowski, J., 2009. 整数规划中的对称性。利哈伊大学，伯利恒，PA。Ostrowski, J., Anjos, M.F., Vannelli, A., 2015. 面向结构化对称性的修正轨道分支及其在机组组合中的应用。《数学规划》150, 99–129. https://doi.org/10.1007/s10107-014-0812-y. Ostrowski, J., Linderoth, J., Rossi, F., Smriglio, S., 2011. 轨道分支。《数学规划》126, 147–178. https://doi.org/10.1007/s10107-009 -0273-x. Rajan, D., Takriti, S., 2005. 带启动成本的机组组合问题的最小启停多面体。技术报告 RC23628。IBM。阿蒙克，NY。

Rockafellar, R.T., 1970年。《凸分析》。普林斯顿大学出版社，美国新泽西州普林斯顿。https://doi.org/10.1515/9781400873173。Schoot Uiterkamp, M.H.H., Gerards, M.E.T., Hurink, J.L., 2022年。关于一类资源分配问题的约简。《INFORMS J. Comput.》34，1387–1402。https://doi.org/10.1287/ijoc.2021.1104。Sherali, H.D., Smith, J.C., 2001年。通过对称性考量改进离散模型表示。《Manage. Sci.》47，1396–1407。https://doi.org/10.1287/mnsc.47.10.1396.10265。Zheng, X.J., Pan, Y.T., Hu, Z.L., 2021年。半连续二次约束二次规划的透视重构。《INFORMS J. Comput.》33，163–179。https://doi.org/10.1287/ijoc.2019.0925。