arXiv:2602.04128v1 [math.AG] 4 Feb 2026

# 超几何正规函数三则

MATT KERR

摘要。我们运用霍奇理论方法：(i) 解释 Guillera 和 Zudilin 最近研究的一类数论恒等式；(ii) 描述阿贝尔-雅可比周期函数的弗罗贝尼乌斯对偶；(iii) 在一项秉承 Lefschetz 精神的论证辅助下，为 Golyshev 关于代数超几何的猜想给出新的证明。

## 1. 引言

在其最后一篇已发表的数学著作中，庞加莱研究了与代数曲线铅笔 [Po]相关的雅可比丛的全纯截面。当这些截面沿判别式轨迹表现“正常”（具有“可容许”的对数奇点）时，他证明了它们源自全空间上的一个代数 1-循环。Lefschetz 随后发现，在光滑射影曲面上纤维化一个有理 (1,1) 类会产生这样的正规函数 [Le], ，由此验证了霍奇猜想的一个特例，而当时霍奇分解尚未为人所知。

更一般地，对于光滑拟射影簇之间的光滑射影态射 $\pi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{U}$ ，在$\mathcal{X}_{\mathrm{an}\mathbb{C}}$上的霍奇类与取值于与 $\pi$相关联的广义雅可比丛、定义在$\mathcal{U}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{an}}$上的可容许正规函数之间存在对应。$\mathcal{X}$ 的代数的$K$-群为这类霍奇类提供了自然来源，并且根据Beilinson对霍奇猜想的推广，当$\mathcal{X}$定义在$\mathbb{Q}$上时，它们生成所有这类霍奇类。我们在§2中简要回顾这些概念，并在§5中作稍深入的讨论。

在可明确计算的正规函数实例中，有一些取值于超几何霍奇结构变分的雅可比簇。正如第 3 节所回顾的，这些变分定义在$\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ 上，其皮卡–福克斯方程具有如下形式

$$L_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = \prod_j (D + \mathfrak{b}_j - 1) - z \prod_j (D + \mathfrak{a}_j) \qquad (D := z\tfrac{d}{dz}), \tag{1.1}$$

2000 数学主题分类。14C30,19E15, 33C20.1

因此其周期是（一元）超几何函数。拉马努金恒等式以及涉及超几何函数的函数方程，堪称他最重要的发现。

本文的核心（第 4、6、7 节）是三个数学小品（或概述），展示了“Lefschetz”与“拉马努金”之间的联系。也就是说，我们希望考察 Lefschetz 所发现的基本关系——一个族中的正规函数与全空间上的霍奇类之间的关系——如何为超几何恒等式和函数论带来新的见解。每个小品都由一个简单的问题引发。首先，回顾波赫哈默符号 $[a]_n := a(a+1)\cdots(a+n-1)$。

**Q1**：像下面这样的“颠倒的拉马努金恒等式”源自何处?

$$\sum_{n\geq 1} \frac{10n^2-6n+1}{n^5}\cdot\frac{n!^5(-\frac{1}{4})^n}{[\frac{1}{2}]_n^5} = -28\zeta(3) \tag{1.2}$$

（出自 Guillera [Gu]）以及

$$\sum_{n\geq 1} \frac{5532n^4-5600n^3+2275n^2-425n+30}{n^9}\cdot\frac{n!^9(-\frac{1024}{3125})^n}{[\frac{1}{2}]_n^5[\frac{1}{5}]_n[\frac{2}{5}]_n[\frac{3}{5}]_n[\frac{4}{5}]_n} = -380928\zeta(5) \tag{1.3}$$

（出自 K-C Au [Au]）究竟 源自何处?

**Q2**：“大多数”超几何函数都是超越数。但如果你有一个这样的函数，

$$f = \sum_{n\geq 0}\frac{(30n)!n!}{(15n)!(10n)!(6n)!}z^n$$

它在 $\mathbb{Q}(z)$ 上是代数的，结果发现

$$\exp\left(\int f\frac{dz}{z}\right)$$

也同样是代数的！为什么?

**Q3**：对于卡拉比–丘类型（顶端 Hodge 数为 1）的霍奇结构变分（VHS），正规函数与霍奇线丛的一个截面的庞加莱配对给出一个满足非齐次皮卡–福克斯方程的（多值）准周期 函数 $\mathfrak{V}$ $L\mathfrak{V} = f$。对偶地（见 §7），存在一个到 VHS 的（多值）提升 $\tilde{\nu}$，使得[1] $D\tilde{\nu}$ 是 $f\mu$的常数倍。对于椭圆曲线族的情形， $\mathfrak{V}$ 是附属于一族除子的通常阿贝尔-雅可比积分。这个特殊提升 $\tilde{\nu}$ 是否也有几何解释? 对于超几何族，我们能否计算它?

[1]这里 $D$ 表示 $\nabla_D$，其中 $\nabla$ 是高斯–马宁联络。

**致谢**。 MK 获得了美国国家科学基金会 DMS-2502708 项目和西蒙斯基金会的资助，并感谢 V. Golyshev 与其进行了许多讨论，这些讨论促成了这些想法的形成。他感谢 D. Ak- man、C. Doran、M. Elmi、I. Gaiur、A. Thompson 和 W. Zudilin 的有益交流，也感谢 J. Voight 在华盛顿大学所作的一场精彩演讲。该演讲基于 [DPVZ]，并启发了第一个小品文。

## 2. 正规函数

在此固定一些约定。给定一个光滑射影态射 $\pi$: X $\to$ U（以及 $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$），局部系统 $\mathbb{H}^\ell_\pi := R^\ell\pi_*\mathbb{Q}$ 和 Hodge 旗 F $^\bullet$在 $\mathsf{H}^\ell_\pi := \mathbb{H}^\ell_\pi \otimes \mathsf{O}_\mathcal{U}$上诱导出一个变分霍奇结构 $\mathsf{H}^\ell_\pi$:=(${\mathbb{H}}^\ell_\pi$, F$^\bullet\mathsf{H}^\ell_\pi$, $\nabla$) 及周期映射 P : $\mathsf{U}^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}} \to \Gamma\backslash\mathbb{D} = \Gamma\backslash G(\mathbb{R})/M$。这里， $G$和 $\mathbb{D}$分别是芒福德-泰特群和域； [GGK], $M \leq G(\mathbb{R})$ 是紧的，而 Γ是附属于 $\mathbb{H}^\ell_\pi$的单值化群（或包含该群）。更一般地，H $\subseteq \mathsf{H}^\ell_\pi$ 表示一个子霍奇结构变分；我们只关注在此意义下具有“动机性”的变分。记 $h = (h^{0,\ell}, h^{1,\ell-1}, \ldots, h^{\ell,0})$为 H 的 Hodge 数 $h^{k,\ell-k}$:=rk(Gr$^k$ F H)。用 Q(0) 表示权重为 0、秩为 1 的平凡霍奇结构变分；用 H($p$) 表示权重为 $\ell - 2p$的泰特扭曲，它将局部系统的系数乘以 $(2\pi\mathrm{i})^p$。

给定一个混合霍奇结构（MHS） $V$，令

$$\mathrm{Hg}(V) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{MHS}}(\mathbb{Q}(0), V) \cong V_{\mathbb{Q}} \cap F^0V_{\mathbb{C}} \tag{2.1}$$

为霍奇类的空间。对于负权纯的 $V$，我们记

$$J(V) := \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{MHS}}(\mathbb{Q}(0), V) \cong V_{\mathbb{C}}/(F_0V_{\mathbb{C}} + V_{\mathbb{Q}}) \tag{2.2}$$

表示（有理）雅可比簇。通过取一个扩张，可使(2.2)中的同构具体化

$$0 \to V \to E \to \mathbb{Q}(0) \to 0 \tag{2.3}$$

并将 $1 \in \mathbb{Q}$(0)提升到 $e_{\mathbb{Q}} \in E_{\mathbb{Q}}$ 与 $e_F \in F^0E_{\mathbb{C}}$，使得差$e_{\mathbb{Q}} - e_F$落在 $V_{\mathbb{C}}$ 中。将提升的不确定性商去后，便得到RHS(2.2)中的一个元素。

容许正规函数 $\nu$ ∈ANF$^{\mathcal{U}^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}}}$(**H**($p$))是一个扩张

$$0 \to \mathbf{H} \to \mathbf{E}_\nu \to \mathbf{Q}(-p) \to 0 \tag{2.4}$$

在$\mathcal{U}^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}}$上的容许混合霍奇结构变分范畴中。对 $p$ 进行 Tate扭转 (2.4)，并限制到 $u$ 上的纤维，可得一个形如 (2.3) 的扩张，因而得到 $J(\mathbf{H}(p)|_u)$中的一个元素。这导出雅可比丛$\mathcal{J}$(**H**($p$))的全纯水平截面：$=\mathcal{H}/(F^p\mathcal{H} + \mathbb{H}($ $p$))，定义在$\mathcal{U}^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}}$上，其取值记为 $\nu(u)$。（稍后， $\tilde{\nu}$ 表示 $\nu$ 到$\mathcal{H}$的多值提升。）截面的加法赋予 ANF$^{\mathcal{U}^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}}}$(**H**($p$)) 群结构，该结构与贝尔和所定义的结构一致。

一个代数的（高阶周）循环$\mathcal{Z} \in \mathrm{CH}^p(\mathcal{X}, m)$，在纤维 $X_u \overset{\imath_u}{\hookrightarrow} \mathcal{X}$ 上同调等价于 0，由 $\pi$ 导出一个容许正规函数$\nu_{\mathcal{Z}} \in \mathrm{ANF}_{\mathcal{U}^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}}}(\mathbf{H}(p))$，其中 $\ell = 2p-m-1$。我们可以将$\mathcal{Z}$视为$\mathcal{X} \times (\mathbb{P}^1 \setminus \{1\}, \{0,\infty\})^m$上的余维数为 $p$的相对闭链。取值 $\nu_{\mathcal{Z}}(u)$通过应用阿贝尔-雅可比映射[2] （参见 [KLM]）来定义

$$\mathrm{AJ}^{p,m}_{X_s} \colon \mathrm{CH}^p_{\mathrm{hom}}(X_s, m) \to J(\mathbf{H}(p)|_s) \tag{2.5}$$

到 $Z_u := \imath_u^* \mathcal{Z}$。高阶Chow群享有同构

$$\mathrm{CH}^p(\mathcal{X}, m) \otimes \mathbb{Q} \cong H^{2p-m}_{\mathrm{Mot}}(\mathcal{X}, \mathbb{Q}(p)) \cong \mathrm{Gr}^p_\gamma K^{\mathrm{alg}}_m(\mathcal{X}) \otimes \mathbb{Q}$$

与动机上同调和 $K$-理论同构（因为$\mathcal{X}$ 是光滑的）。我们使用“$K_m$-循环”这一说法来非正式地传达循环类型（包括 $K_0$ “经典”和 $K_{>0}$“高阶”）以及 $m+1$ 在（2.4）中的权间隙。

今后我们限定在以下情形：$\mathcal{U} \subset \mathbb{P}^1$ （坐标为 $z$）是有限集合 $\Sigma$ 的补集，$\dim(\mathcal{X}) = \ell+1$，$\mathbf{H}$ 是 $\ell$级的不可约非常值对象，[3]且$\mathcal{X}, \mathcal{U}$ $\pi$ 在 $\mathbb{Q}$上可定义。为简化公式，我们还将省略使用（ ）$^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}}$。第 1 节中提到的*Lefschetz* 对应采取同构的形式

$$\mathrm{ANF}_{\mathcal{U}}(\mathbf{H}(p)) \xrightarrow[[\cdot]]{\cong} \mathrm{Hg}(H^1(\mathcal{U}, \mathbf{H}(p))) \subseteq \mathrm{Hg}(H^{\ell+1}(\mathcal{X}, \mathbb{Q}(p))) \tag{2.6}$$

由拓扑不变量诱导。*Beilinson-Hodge*猜想（BHC）预言基本类映射（其中 $m = 2p-\ell-1$）

$$\mathrm{cl}^{p,m}_{\pi} \colon \mathrm{CH}^p(\mathcal{X}, m) \to \mathrm{Hg}(H^1(\mathcal{U}, \mathbf{H}(p))) \tag{2.7}$$

是满射。[4] 一般而言，$\mathrm{cl}^{p,m}_{\pi}(\mathcal{Z}) = [\nu_{\mathcal{Z}}]$，因此在我们的情形中，所有正规函数都应来自定义在 $\mathbb{Q}$ 上的循环。

令 $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ and $\mathcal{U} \overset{\jmath}{\hookrightarrow} \mathcal{U}_0 := \mathbb{P}^1 \setminus \Sigma_0$ 为包含映射。记 $\mathrm{IH}^1(\mathcal{U}_0, \mathbf{H})$ 为其底层 $\mathbb{Q}$ 向量空间为 $H^1(\mathcal{U}_0, \jmath_*\mathbb{H})$ 的 Zucker/Saito混合Hodge结构；特别地，$\mathrm{IH}^1(\mathbb{P}^1, \mathbf{H})$ 是纯的（权为 $\ell+1$），并且属于一个正合列

$$0 \to \mathrm{IH}^1(\overset{\text{Ⓐ}}{\mathbb{P}^1}, \mathbf{H}) \to H^1(\mathcal{U}, \mathbf{H}) \to \oplus_{\sigma \in \Sigma} (\overset{\text{Ⓑ}}{H_{\lim,\sigma}})_{T_\sigma}(-1) \to 0 \tag{2.8}$$

其中 $H_{\lim,\,\sigma}$ 是 $z = \sigma$ 处 $\mathbf{H}$ 的极限混合Hodge结构（LMHS），而 $(\ )_{T_\sigma}$ 表示关于 $\sigma$处单值算子的余不变部分。A◯ 中的霍奇类对应于 $K_0$-循环族（$r = 0$ 见（2.7））， B◯ 中的霍奇类则对应于 $K_{>0}$-循环族。对于（2.8）的 Tate扭转，给定的正规函数 $\nu$ 在 $\sigma$ 处是非奇异的，当且仅当 $[\nu]$映射到 B◯ 中相应直和项的零元。在 $\Sigma_0$ 处仅奇异的正规函数定义了一个

[2]此处以及式 (2.7) 中，我们都默认与投影 $\mathbf{H}^\ell_\pi \twoheadrightarrow \mathbf{H}$ 复合。[3]由于 $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{H}^\ell_\pi$，这仅意味着首个 Hodge 数为 $h^{\ell,\,0} \neq 0$。[4]明确地说，我们考虑复代数簇的循环群，不过根据扩张论证，所有霍奇类实际上都可定义在 $\mathbb{Q}$ 上。

子群 ANF$_{\mathcal{U}_0}$（$\mathbf{H}$（$p$））$\cong$ Hg（IH$^1$（$\mathcal{U}_0$,$\mathbf{H}$（$p$））。注意，对于任意光滑完备化$\mathcal{X}\supset\mathcal{X}$，A$\bigcirc$都是 $H^{\ell+1}$（$\mathcal{X}$）的一个直和项。

为了将正规函数与微分方程联系起来，假设$\mathbb{H}$ 在 $z=0$，$h^{\ell,0}=1$ 处具有极大幂单单值（最大幺幺幺幺单值），并令 $\mu\in\Gamma(\mathbb{P}^1,\mathcal{F}_e^\ell)$生成典范延拓Hodge丛$\mathcal{F}_e^\ell\cong\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(h)$，其位于 $\mathbb{P}^1\setminus\{\infty\}$上。我们可以规范化 $\mu$，使其 $\mathbb{Q}$-Betti周期在 $z=0$处的极限为1，并且使得$(2\pi\mathbf{i})^\ell\mu$ 定义在 $\mathbb{Q}$上。令 $L\in\mathbb{Q}\langle D,z\rangle$ 表示次数为 $d$、零化$\mu$的皮卡-福克斯算子。然后对 $\nu\in$ ANF$_{\mathbb{G}_m}(\mathbf{H}(p))$，我们可以关联拟周期

$$\mathfrak{V}(t):=\langle\tilde{\nu}(z),\mu(z)\rangle, \tag{2.9}$$

它是万有覆盖$\mathcal{U}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{an}}$上一个良定义的全纯函数。我们将 [GKS定理5.1]与 [GK定理5.5] 的部分内容总结于

**命题 2.10**。非齐次项 $L\mathfrak{V}=:g$ 是关于 $z$ 的多项式，且 $\deg(g)\le d-h$。此外，若 $\nu$ 在 $0$ 处非奇异，则有 $z\mid g$；若 $\nu=\nu_{\mathcal{Z}}$ 是动机的（其中 $Z$ 定义为/$K\subset\mathbb{Q}$），则 $g\in K[z]$。

## 3. 超几何

接下来我们回顾一类相当普遍的变分结构，它们足够简单，因此可以计算其中的一切：周期、正规函数的拟周期、动机Gamma函数等。对我们而言，它们由一对 $r$ 元组 $\mathfrak{a}=(\mathfrak{a}_1,\ldots\ldots,\mathfrak{a}_r)$ 和 $\mathfrak{b}=(\mathfrak{b}_1,\ldots\ldots,\mathfrak{b}_r)$ 给定，这些元组由有理数构成，且包含于 $(0,1],$，其中 $\mathfrak{b}_r=1$, $\mathfrak{a}_i\neq\mathfrak{b}_j(\forall i,\ j)$，并且

$$Q_\infty(\lambda):=\textstyle\prod_j(\lambda-e^{2\pi\mathbf{i}\mathfrak{a}_j})\ \text{ and }\ Q_0(\lambda):=\prod_j(\lambda-e^{-2\pi\mathbf{i}\mathfrak{b}_j})\ \in\ \mathbb{Q}[\lambda]. \tag{3.1}$$

我们的约定是，超几何变分（HGV）的权 $\ell=\ell_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}}$ 等于其层级，因此 $h^{\ell,\,0}\neq 0$。我们在以下内容中总结来自 [Ka, BH,CG, Fe, RRV,AG] 的贡献

**命题 3.2**。(i) 存在一个秩为-$r$ 可极化*Hodge*结构变分[5]$\mathbf{H}_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}}$ 定义在$\mathbb{P}^1\setminus\{0,1,\infty\}$上，并伴有一个截面[6] $\mu\in\Gamma(\mathbb{P}^1,\ F_e^\ell)$，其对应的皮卡-福克斯算子为（1.1）。在去心单位圆盘$\Delta^*$ 上，它具有如下形式的周期

$$\langle\varepsilon_0^\vee,\mu\rangle=f_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(z):=\sum_{n\ge0}\prod_j\frac{[\mathfrak{a}_j]_n}{[\mathfrak{b}_j]_n}z^n, \tag{3.3}$$

其中$\varepsilon_0^\vee$ 是$\mathbb{H}^\vee_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}|_{\Delta^*}$的截面。

[5]虽然我们的约定是使用有理系数，但这可以定义为一个 $\mathbb{Z}$-PVHS。[6]需要提醒的是：这里我们并未假设 $\mathbb{H}$ 在 $z=0$处具有最大幺幺幺幺单值，尽管这个 $\mu$ 确实有一个周期（3.3）在该处趋于 1，并且在命题(iv)的情形下可以定义在$\mathbb{Q}$ 上。

(ii) *Hodge*数可通过 [RRV, §5] 中的之字形过程确定。特别地， $\ell = 0$ 当且仅当 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ 完全交错；[7] 而如果所有 $\mathfrak{b}_j = 1$，那么 $\ell = r-1$ 和 $h = (1, 1, \ldots, 1)$。

(iii)局部系统 $\mathbb{H}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ 是绝对不可约的，其中 $Q_0$ 和 $Q_\infty$分别是 $T_0$ 和 $T_\infty$ 的特征多项式，且 $\mathrm{rk}(T_1 - id) = 1$。它可定义在 $\mathbb{Z}$上。单值化群 $\Gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ 是有限群，当且仅当 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ 完全交错。否则，其 $\mathbb{Q}$-*Zariski* 闭包（因而芒福德-泰特群也）是 $\mathrm{Sp}_r$ 或 $\mathrm{SO}(h_{even}, h_{odd})$，分别对应 $\ell$ 为奇数或偶数。

(iv) 将 $q_\infty/q_0 = \prod_{i=1}^{a}(\lambda^{-\gamma_i} - 1)/\prod_{i=a+1}^{a+b}(\lambda^{\gamma_i} - 1)$ 写成 $\gamma_1, \ldots, \gamma_a \in \mathbb{Z}_{<0}$和 $\gamma_{a+1}, \ldots, \gamma_{a+b} \in \mathbb{Z}_{>0}$，则 $\mathbf{H}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ 是动机的（在 $\mathbb{Q}$ 上），当 $a = 1$ 或 $a+b$ 为奇数时（等价地，$\ell$ 为偶数）。

**例 3.4.** 勒让德椭圆曲线族 $\pi\colon \mathcal{E} \to \mathbb{P}^1\backslash\{0, 1, \infty\}$具有 $\mathbf{H}^1_\pi \cong \mathbf{H}_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(1,1)}$。

与一个超几何变分相关联的弗罗贝尼乌斯变形 [BV、GZ、Ke]是

$$\Phi(s, z) := \sum_{n \geq 0} \prod_{j=1}^{r} \frac{[s + \mathfrak{a}_j]_n}{[s + \mathfrak{b}_j]_n} z^{s+n}, \tag{3.5}$$

一个级数[8]，满足以下两个方程

$$L\Phi = z^s \textstyle\prod_j (s + \mathfrak{b}_j - 1) \quad \text{and} \quad T_0\Phi = e^{2\pi \mathbf{i} s}\Phi. \tag{3.6}$$

根据 [BV，§3]，，若我们将$\{\mathfrak{b}_j\}_{j=1}^{r}$ 重新标号为$\{b_i\}_{i=1}^{\mathfrak{r}}$，其重数为 $m_i$，则

$$\left\{ \tfrac{\partial^c \Phi}{\partial s^c}(1 - b_i, z) \;\middle|\; i = 1 \ldots, \mathfrak{r} \text{ and } c = 0, \ldots, m_i - 1 \right\} \tag{3.7}$$

给出 $L(\cdot) = 0$ 在 $z = 0$ 处的解的一个基。

下述基本结果使得 HGV 对正规函数的研究极具吸引力：

**命题 3.8。** $\mathrm{ANF}_{\mathbb{G}_m}(\mathbf{H}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(p))$ 恰在一个 $p$ 值时秩为 *1*，其余情况下均为 *0*。

证明。由于 $\mathrm{rk}(T_1 - \mathrm{id}) = 1$，欧拉–庞加莱 [GK, (5.6)] 意味着 $\mathrm{IH}^1(\mathbb{G}_m, \mathbf{H}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}})$ 的秩也为 1。因此，它必定是某个泰特对象 $\mathbf{Q}(-p)$，其中 $p > 0$ 取决于超几何指标 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$。□

注3.9。如果将条件 (3.1) 放宽为 $q_0$，$q_\infty \in K[\lambda]$ 其中 $K/\mathbb{Q}$ 是某个阿贝尔扩张，那么 $\mathbf{H}_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}}$ 是一个 $K$-变分霍奇结构，其外尔限制 $\mathrm{Res}_{K/\mathbb{Q}}(\mathbf{H}_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}})$ 给出一个秩为 $[K{:}\mathbb{Q}].r$的（$\mathbb{Q}$-）变分霍奇结构。有限单值性的条件稍复杂一些，见第 6 节开头。我们将$K = \mathbb{Q}$ 称为平衡情形，将 $K \neq \mathbb{Q}$ 称为不平衡情形。

[7]这意味着，在将 $(0, 1]$ 与 $S^1$ 对应起来（并计入重数）后，任意两个 $\mathfrak{b}_j$ 都由一个 $\mathfrak{a}_i$ 分隔（反之亦然）。[8] 先验上 是形式上的，但它定义了 $\widetilde{\mathcal{U}}^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}} \times (\mathbb{C}\backslash \cup_j \{\mathbb{Z}_{\leq 0} - \mathfrak{b}_j\})$ 上的一个全纯函数。

## 4. 例解 #1：恒等式

考虑 §2 中所述定义在 $U \subset \mathbb{P}^1$ 上的动机变分霍奇结构 H。我们假设权 $\ell = 2q$ 为偶数，所有霍奇数均为 1（因此秩为 $r = 2q+1$），且 $\mathbb{H}$ 在 $z = 0$ 处具有最大幺幺幺幺单值。于是 $H_{\lim}$,0 是 Hodge-Tate 的，其中 $B := (H_{\lim},0)_{T_0}(-1) \cong \mathbb{Q}(-\ell-1)$；将 (2.8) 沿包含映射 $B \to \mathbb{B}$ 拉回，得到一个以 $IH^1(\mathbb{P}^1, H)$ 为被扩张对象、以 $\mathbb{Q}(-\ell-1)$ 为扩张对象的扩张。进一步假设此扩张是分裂的。[9] 那么存在 $\nu \in ANF_{\mathbb{P}^1\setminus\{0\}}(H(\ell+1))$，其中 $[\nu]$ 生成 B；并且（取 §2 末尾所述的 $\mu$）可得到相应的拟周期 $\mathfrak{V} = \tilde{\nu}, \mu$。

接下来令 $z_0 \in U(\mathbb{Q})$ 为一个 **霍奇点**，这意味着存在一个非平凡的霍奇类 $\xi \in Hg(H(q)|_{z_0})$。只要与 $\mu$ 相关联的皮卡-福克斯算子 $L$ 在 $z_0$ 处没有表观奇点，格里菲斯横截性就迫使 $D^j\mu|_{z_0}$ 生成 $Gr^{2q-j}_{\mathcal{F}}\mathcal{H}|_{z_0}$（对于 $j \le 2q$），并且存在一个次数为 $q$ 的多项式 $P$，使得 [10]

$$(P(D)\mu)(z_0) = -(2\pi\mathbf{i})^{-\ell}\xi. \tag{4.1}$$

现在假设一切都是动机的：记 $X = X_{z_0}$,

(i) $\xi = cl^q_X(W)$，其中 $W \in CH^q(X)$，定义在 $K \subset \mathbb{Q}$ 上；以及

(ii) $\nu = \nu_{\mathcal{Z}}$，对于 $\mathcal{Z} \in CH^{\ell+1}(\mathcal{X} \setminus X_0, \ell+1)$（例如，定义在 $\mathbb{Q}$ 上）。

那么，由于 $(2\pi\mathbf{i})^\ell D^j\mu|_{z_0}$ 是 $\mathbb{Q}$-德拉姆的，而 $\xi$ 由 $(2\pi\mathbf{i})^q\delta_W$ 表示，后者是 $K$-德拉姆的，因此 $P$ 必须具有 $K$ 中的系数。（这里 $\delta_W$ 是在 $W$ 上的积分流。）记 $a^W\colon W \to \mathrm{Spec}(K)$ 为结构映射，令 $\alpha$ 表示 $Z := a^W_*(\mathcal{Z}_{z_0}|_W)$ 的像，在

$$AJ^{q+1,2q+1}_{\mathrm{Spec(K)}}\colon \mathrm{CH}^{q+1}(K, 2q+1) \to \mathbb{C}/\mathbb{Q}(q+1). \tag{4.2}$$

将 (4.1) 与提升 $\tilde{\nu}_{\mathcal{Z}}$ 配对，得到一个数

$$\tilde{\alpha} := -(P(D)\mathfrak{V})(z_0) = \left\langle \tilde{\nu}_{\mathcal{Z}}(z_0), \frac{\delta_W}{(2\pi\mathbf{i})^q} \right\rangle \in \mathbb{C} \tag{4.3}$$

投影到 $\alpha$。在 $K = \mathbb{Q}$ 的情形下，由博雷尔定理，$\tilde{\alpha}$必为 $\zeta(q+1)$ 的有理倍数。[11]

**注记 4.4。** 已知许多例子满足 (ii)：例如，若 $\mathcal{X}$ 来自对环面$\mathbb{G}_m^{\ell+1}$上一个温和 Laurent 多项式的等值集作紧化，则$\mathcal{Z}$ 本质上由

---

[9]若下列任一条件成立，则会出现这种情况：**H** 是极端的（即 $ih^1(\mathbb{P}^1,\mathbf{H}) = 0$）；**H**是超几何的（见下文）；或 **H**来自由温和劳朗多项式定义的束的中间上同调 [DK1, §3]。[10]如引言中那样，在将微分算子作用于 $\mathcal{H}$ 的截面时，我们省略“$\nabla$”。[11] 先验地，当 $q+1$ 为奇数时，它也可能属于 $\mathbb{Q}(q+1)$。然而在实际中（当$K = \mathbb{Q}$），LHS(4.3) 将是一个系数为 $\mathbb{Q}$ 的级数，而这是不可能的。

坐标符号$\{x_1,\dots,x_{\ell+1}\}$给出，参见 [GK, §6]。（下文的超几何例子通常以这种方式出现，而且往往很容易用阿达马积证明，见 [同上]。）在此背景下，若 (i) 尚未获知，形如 $(P(D)\mathfrak{V})(z_0) \in \zeta(q+1).\mathbb{Q}$的恒等式可为其提供佐证（其中 $K=\mathbb{Q}$），进而也为 $X_{z_0}$的霍奇猜想提供佐证。

特化到超几何情形，取$\mathbf{H}=\mathbf{H}_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}}$其中$r=\ell+1$且所有 $\mathfrak{b}_j=1$，以及 $L$, $\mu$如 §3 所述。由于权为偶数，$\mathbf{H}$由命题 3.2(iv) 可知是动机的。我们有

$$\mathrm{IH}^1(\mathbb{G}_m,\mathbf{H}) \cong (H_{\lim,0})_{T_0}(-1) \cong \mathbb{Q}(-\ell-1) \tag{4.5}$$

以及命题 3.8 中的 $p=\ell+1$。令 $\nu$ 为秩一群 $\mathrm{ANF}_{\mathbb{P}^1\setminus\{0\}}(\mathbf{H}(\ell+1))$ 的生成元，我们假设它是动机的（见最后一条注记）。由于 $\deg(L)=1=\deg(\mathcal{F}_e^\ell)$, 由命题 2.10

$$L\mathfrak{V}=1 \tag{4.6}$$

经过伽罗瓦下降和缩放之后。

现在，由于 $\mathfrak{a}\subset(0,\,1)$，存在 $\mathfrak{V}$ 关于 $z=\infty$的唯一单值取值。它存在是因为 $\nu$ 在 $\infty$处非奇异，参见 [GKS, §4.2]。它是唯一的，因为 $\mathfrak{V}$ 的歧义属于 $\mu$的周期，而这些周期在该处都不是单值的。记 $w:=\frac{1}{z}$，

$$\hat{L} := L\tfrac{1}{z} = \textstyle\prod_{j=1}^r(D_w+\mathfrak{a}_j) - w(D_w+1)^r \tag{4.7}$$

是与 $z\mu$相关联的皮卡-富克斯算子，并映射 $z\mathfrak{V}\mapsto 1$。注意，$(\mathfrak{a},\ \mathfrak{b})=(\mathfrak{a},\ 1)$ 已被 $(\hat{}\mathfrak{a},\ \hat{}\mathfrak{b})=(1,\ \mathfrak{a}+1)$ 取代，因此相应的弗罗贝尼乌斯变形为

$$\hat{\Phi}(s,w) := \sum_{n\geq 0}\frac{[s+1]_n^r}{\prod_j[s+\mathfrak{a}_j+1]_n}w^{s+n}. \tag{4.8}$$

由 (3.6)（或直接计算）可得

$$\hat{L}\hat{\Phi}(s,w) = w^s\prod_{j=1}^r(s+\mathfrak{a}_j), \tag{4.9}$$

并令 $s=0$，可得

$$\frac{1}{\prod_j\mathfrak{a}_j}\hat{\Phi}(0,w) = \frac{1}{w}\sum_{n\geq 1}\frac{(n!)^r w^n}{n^r\prod_j[\mathfrak{a}_j]_n} \tag{4.10}$$

是关于 $z=\infty$的 $\hat{}L(\cdot)$ 的一个单值解。但 $\hat{}L(\cdot)$ 在那里没有非平凡的单值解，因此 $\hat{}L(z\mathfrak{V}-(4.10))=0$蕴含 $z\mathfrak{V}=(4.10)$。将这一点与前面的论证结合起来可得

**定理 4.11**。 (i) 在 $|z|>1$ 上，唯一的单值提升 $\tilde{\nu}$ 给出

$$\mathfrak{V}(z) := \langle \tilde{\nu}(z), \mu(z) \rangle = \sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^r z^{-n}}{n^r \prod_j [\mathfrak{a}_j]_n}. \tag{4.12}$$

(ii) 设 $z_0 \in \mathbb{Q}$ 是 $\mathbf{H}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ 的一个霍奇点，满足 $|z_0|>1$，且霍奇猜想成立，循环 $W$ 定义在 $\mathbb{Q}$上。则存在一个次数为 $q$ 的多项式 $P\in\mathbb{Q}[T]$ 以及 $\mathsf{k}\in\mathbb{Q}^*$，使得

$$\sum_{n\geq 1} \frac{P(n)(n!)^r z_0^{-n}}{n^r \prod_{j=1}^r [\mathfrak{a}_j]_n} = \mathsf{k}\cdot\zeta(q+1). \tag{4.13}$$

**例 4.14.** Elmi 和 Golyshev [EG] 对超几何变分中的非典型霍奇点进行了计算机搜索。满足 $\mathfrak{b}=\mathbf{1}$ 的少数几个例子包括

- $\mathfrak{a}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ and $z_0=-4$
- $\mathfrak{a}=(\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ and $z_0=-\frac{3125}{1024}$

它们恰好对应于（1.2）和（1.3），这些结果由 [Gu] 和 [Au]通过解析方法证明。

注 4.15. Gross、Kohnen 和 Zagier 的一个猜想 [GKZ]还有一种相关的观点。在模曲线 $Y=Y(\Gamma)$ 上，我们有一族 Picard 秩为 19 $K3$ 的曲面，其上有 $\mathbf{H}=\mathbf{H}^2_{\mathrm{tr}}(h=(1,1,1))$。若$S_4(\Gamma)=\{0\}$，则每个复乘点 $\tau\in Y(\mathbb{Q})$ 都给出一个 $K_1$ 型的正规函数 $\nu_\tau$。与 $\mathcal{H}^{1\,1}_{\mathbb{R}}$, 的一个截面配对，得到 $\mathfrak{G}_\tau$，即一个高阶格林函数。

任取另一个复乘点 $\tau'$。根据 Lefschetz (1,1)， $X_{\tau'}$ 上额外的霍奇类是代数的。若 BHC 成立，则有 $\mathfrak{G}_\tau(\tau')\in\mathbb{Q}\langle\log\ \mathbb{Q}\rangle$，这就是 GKZ 猜想的一个（较弱）版本。Bruinier-Li-Yang 的结果如今已将其证明为定理 [BLY]；这一结果“为 BHC 提供了有力证据”。有关这一论证的参考文献和细节，以及对若干类 $K3$曲面相关 BHC 情形的直接证明，见 [DK2]。

## 5. 重新审视 Lefschetz 对应

在这段简短的间奏中，我们想从两个方面扩展第 §2 节的内容。首先，我们借助 Katz 的“Ur-对象” [Ka] 的混合霍奇模实现进行中间卷积，重新诠释霍奇类与正规函数之间的关系。其次，我们将说明，当变分霍奇结构具有底层的 $\mathbb{Z}$-局部系统时，如何将整性纳入正规函数及其不变量。

我们继续假设 $\mathbb{H}$不可约且非常值；特别地， $\mathbb{H}$ 的固定部分平凡（$\Gamma(\mathcal{U}\ \mathbb{H})=\{0\}$）。取一个光滑完备化$\mathcal{X}\supset\mathcal{X}$，使得 $\pi$ 延拓为 $\pi\colon\ \mathcal{X}\to\mathbb{P}^1$，并令$\mathcal{X}_{t_0}:=$

$\pi^{-1}(\mathcal{U}_0)$ 对任意$\mathcal{U}_0 \supseteq \mathcal{U}$均成立。记 $\kappa\colon\ \mathcal{U} \to \mathbb{G}_m$，$\kappa'\colon\ \mathbb{G}_m \setminus \{1\} \to \mathbb{G}_m$，以及 $\imath\colon\ \{1\} \to \mathbb{G}_m$ 为相应的包含映射。混合霍奇模 $\kappa_{!*}\mathbf{H}$ 的底层（移位的可迫层）为 $\kappa_*\mathbb{H}$，且 $\mathfrak{Ur} := R\kappa'_!\mathbf{Q}$ 处于正合列$0 \to R\imath_*\mathbf{Q} \to \mathfrak{Ur} \to \mathbf{Q}[1] \to 0$中。于是，在 $\mathbb{G}_m$ 上的乘性卷积给出 AVMHS($\mathcal{U}$)中的正合列

$$0 \to \mathbf{H} \to \mathbf{H} * \mathfrak{Ur} \to \mathbf{IH}^1(\mathbb{G}_m, \mathbf{H}) \to 0 \tag{5.1}$$

其中右端项为常数项。中间项在 $z$ 处的纤维可理解为 $H^{\ell+1}(\mathcal{X}_{\mathbb{G}_m}, X_z)$ 的一个 [12] 混合霍奇结构的子商，如 [GKS, 命题 4.15] 所述。

现在，我们可以将任意霍奇类 $\alpha \in \mathrm{Hg}(\mathrm{IH}^1(\mathbb{G}_m, \mathbf{H}(p)))$ 视为一个包含映射

$$\alpha\colon \mathbb{Q}(-p) \hookrightarrow \mathrm{IH}^1(\mathbb{G}_m, \mathbf{H}).$$

对 (5.1) 作拉回，得到一个如 (2.4) 中的正规函数 $\nu$，其中 $[\nu] = \alpha$。因此，*Ur*-卷积 给出了 (2.6) 的逆映射，从而明确了“通过正规函数将霍奇类纤维化”的概念。注意，$\mathrm{IH}^1(\mathbb{G}_m, \mathbf{H})$ 的秩等于 $\Sigma \cap \mathbb{G}_m$ 上单值化余不变量的秩之和；对于超几何霍奇结构变差，该值总是 1，如命题 3.8 所述。

若 $\mathbb{H}$ 有一个底层的 $\mathbb{Z}$-局部系统 $\mathbb{H}_\mathbb{Z}$，我们将 $\mathrm{ANF}_\mathcal{U}(\mathbf{H}(p))_\mathbb{Z} \subset \mathrm{ANF}_\mathcal{U}(\mathbf{H}(p))$ 记作由整霍奇类产生的正规函数。考虑层复形

$$\mathscr{C} = \{\mathcal{H} \xrightarrow{\nabla} \mathcal{H} \otimes \Omega^1_\mathcal{U}\}, \quad \mathscr{F} = \{\mathcal{F}^p\mathcal{H} \xrightarrow{\nabla} \mathcal{F}^{p-1}\mathcal{H} \otimes \Omega^1_\mathcal{U}\}$$
$$\text{and} \quad \mathscr{J} = \mathrm{Cone}\{\mathbb{H}_\mathbb{Z}(p) \oplus \mathscr{F} \to \mathscr{C}\}.$$

积分雅可比簇$\mathcal{H}/(F^p\mathcal{H} + \mathbb{H}_\mathbb{Z}(p))$ 的全纯拟水平截面于是由 $\mathrm{NF}_\mathcal{U}(\mathbf{H}(p))_\mathbb{Z} := \mathbb{H}^0(\mathscr{J})$ 给出，其中 $\mathbb{H}^0$ 的连接同态产生

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{NF}_\mathcal{U}(\mathbf{H}(p))_\mathbb{Z} & \xrightarrow{(\delta,[\cdot])} & \mathbb{H}^1(\mathscr{F}) \oplus H^1(\mathcal{U}, \mathbb{H}_\mathbb{Z}(p)) \\ & \searrow^{0} & \downarrow \\ & & \mathbb{H}^1(\mathscr{C}) \cong H^1(\mathcal{U}, \mathbb{H}_\mathbb{C}), \end{array} \tag{5.2}$$

其中，无穷小不变量 [13] $\delta\nu$ 由 $\nabla\tilde{\nu}$ 计算得出。对角线为零，是因为长正合列中的两个映射复合所致；这表达了 $[\nu]$ 是一个霍奇类这一事实。

[12] 在 $\mathbb{H} = R^\ell\pi_*\mathbb{Q}_\mathcal{X}$ 的情况下，它就是除以幻上同调$\oplus_{\sigma\in\Sigma\cap\mathbb{G}_m}\ker\{H^{\ell+1}(X_\sigma) \to H^{\ell+1}{}_{\lim\sigma}\}$所得的商。一般情况下，我们也可以写作 $(\mathbf{H} * \mathfrak{Ur})_z = \mathrm{IH}^1(\mathbb{G}_m, \{z\}; \mathbf{H})$。[13] 通常通过使用边缘同态，将 $\delta\nu$ 映射到 $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{H}^1_\nabla(\mathscr{F}))$，从而定义它。对于我们的应用而言，这一区别并不重要。

容许正规函数具有精细化的无穷小不变量和拓扑不变量。记 $\jmath\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}_0$, $\bar{\jmath}\colon \mathcal{U} \to \mathbb{P}^1$，以及 $\bar{\jmath}^0\colon \mathcal{U}_0 \hookrightarrow \mathbb{P}^1$；以 $t_\sigma$ 表示 $\sigma \in \Sigma$ 处的一个局部坐标，并令 $D_\sigma = \frac{t_\sigma}{2\pi\mathbf{i}} \frac{d}{dt_\sigma}$。将（$\mathcal{H}$, $\nabla$）延拓到 $\overline{\mathbb{P}^1\setminus}$上的上部[14]典范延拓（$\mathcal{H}^e, \nabla^e$），可通过要求对每个 $\sigma$，$\nabla_{D_\sigma}$ 的特征值属于 $[0,1)$ 来得到。对数复形的类似论证（用 $\langle\cdot\rangle$ 表示对数极点）

$$\mathscr{C}^e := \{\mathcal{H}^e \xrightarrow{\nabla^e} \mathcal{H}^e \otimes \Omega^1_{\mathbb{P}^1}\langle\Sigma\rangle\},\quad \mathscr{F}^e := \{\mathcal{F}^p\mathcal{H}^e \to \mathcal{F}^{p-1}\mathcal{H}^e \otimes \Omega^1_{\mathbb{P}^1}\langle\Sigma\rangle\},$$
$$\text{and}\quad \mathscr{J}^e := \mathrm{Cone}\{R\bar{\jmath}_*\mathbb{H}_\mathbb{Z}(p) \oplus \mathscr{F}^e \to \mathscr{C}^e\}$$

得到精细化的（$\delta$, $[\cdot]$）。要点在于，根据可容许性，$\nabla\tilde{\nu}$可经由$\mathcal{H}^1_\nabla(\mathscr{F}^e)$分解（例如参见 [KP, §2.11]）。

对于在 $\Sigma \cap \mathcal{U}_0$, 上无奇点的正规函数，可进一步将 $R\bar{\jmath}_*\mathbb{H}_\mathbb{Z}(p)$替换为（$R\bar{\jmath}^0_*$）$\jmath_*\mathbb{H}_\mathbb{Z}(p)$，并将 $\mathscr{C}^e$ 替换为由$\mathcal{U}_0$ 上局部 $L^2$ 的截面构成的子复形$\mathscr{C}^e$（ $\Sigma \cap \mathcal{U}_0$ 上；$\mathscr{F}^e$的情形类似）。根据 [Zu], ， $L^2$ 条件仅局部影响$\mathcal{H}^e$ 的幺幂部分，其上 $\nabla_{D_\sigma}$ 的特征值属于 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$。记$\mathcal{V}^e_\sigma$ 为此部分，记$\mathcal{W}_\bullet$ 为以 $\ell$为中心的权重单值化滤过，我们对（ $\mathscr{C}^e_{\mathcal{U}_0}$）使用子复形

$$\{\mathcal{W}_\ell\mathcal{V}^e_\sigma + t_\sigma\mathcal{V}^e_\sigma\} \to \{\mathcal{W}_{\ell-2}\mathcal{V}^e_\sigma + t_\sigma\mathcal{V}^e_\sigma\} \otimes \Omega^1\langle\sigma\rangle.$$

这给出一个图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{ANF}_{\mathcal{U}_0}(\mathbf{H}(p))_\mathbb{Z} & \xrightarrow{(\delta,[\cdot])} & \mathbb{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{F}^e_{\mathcal{U}_0}) \oplus \mathrm{IH}^1(\mathcal{U}_0, \mathbb{H}_\mathbb{Z}(p)) \\ & \searrow^{0} & \downarrow \\ & & \mathrm{IH}^1(\mathcal{U}_0, \mathbb{H}_\mathbb{C}). \end{array} \tag{5.3}$$

对于 $\sigma \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathcal{U}_0$, ， 留数映射

$$\mathrm{Res}_\sigma\colon \mathrm{Hg}(\mathrm{IH}^1(\mathcal{U}_0, \mathbb{H}_\mathbb{Z}(p))) \to \mathrm{Hg}((H_{\lim,\sigma})_{T_\sigma}(p-1)) \tag{5.4}$$

计算奇点类

$$\mathrm{sing}_\sigma(\nu) = \mathrm{Res}_\sigma([\nu]) \underset{\otimes\mathbb{Q}}{=} \mathrm{Res}_\sigma(\delta\nu). \tag{5.5}$$

我们注意到，(5.4) 是由更具几何意义的留数映射$H^{\ell+1}(\mathcal{X}_{\mathcal{U}_0}) \to H_\ell(X_\sigma)(\overline{-\ell-1})$诱导的。

[14]下典范延拓（$\mathcal{H}_e$, $\nabla_e$）将在 §6 中简要使用，它将 $[0,1)$ 替换为（$-1$, $0$]。

## 6. 小插曲 #2：代数性

设 $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\subset(0,1]\cap\mathbb{Q}$ 满足 $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}=\emptyset$, $\mathfrak{b}_r=1$，并记 $m$ 为分母的最小公倍数。给定任意与 $m$ 互素的 $k\in\mathbb{Z}\cap[0,m]$，我们考虑数对 $k\mathfrak{a}$、$k\mathfrak{b}$，其中 $\cdot$ 取 $(0,1]$ 中的部分。记 $K\subseteq\mathbb{Q}(\zeta_m)$ 为由 $q_0,q_\infty$ 的系数生成的域，由此得到 $s=[K:\mathbb{Q}]$ 个互不相同的超几何共轭 $f_1=f,f_2,\ldots,f_s$，它们属于 $f:=f_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$。如果对于上述每个 $k$，$k\mathfrak{a}$ 和 $k\mathfrak{b}$ 在单位圆上交错排列，那么与 $f$ 相关联的（不可约）超几何局部系统 $\mathbb{V}=\mathbb{V}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ 的单值化群是有限的，且定义在 $\mathsf{O}_K$ [上（BH，定理 3.5 和 4.8]）。它对应一个等平凡的 $\mathsf{O}_K$-变分霍奇结构 V，其权和层级均为零。

特别地，$f$ 自身具有有限单值性。根据黎曼存在定理，它在 $\mathbb{C}(z)$上是代数的；由于它在 0 处具有有理的幂级数系数，因此它在 $\mathbb{Q}(z)$上也是代数的。也就是说，我们有一个定义仿射曲线的绝对不可约多项式 $P\in\mathbb{Q}[z,y]$，其正规化完备化是$f$的最小存在域。这是一个定义在$\mathbb{Q}$上的（光滑、不可约）曲线覆盖 $\mathcal{X}\xrightarrow{\pi}\mathbb{P}^1_z$，并且在{0、1、$\infty$}处分歧；同时还有一个函数 $f\in\mathbb{Q}(\mathcal{X})$（即 $y$），它在$\mathcal{X}^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}}$上是 $f$的定义良好的亚纯延拓。由于 $f_j$ 的单值化彼此是伽罗瓦共轭，存在域相同，因此我们也有 $f_j\in\mathbb{Q}(\mathcal{X})=\mathbb{Q}(f,z)$。

超几何函数 $f$ 是阶乘型的，如果它可以写成以下形式：$\sum_{n\geq 0}\frac{(a_1n)!\cdots}{(a_un)!}\frac{(b_1n)!\cdots}{(b_vn)!}(cz)^n$。众所周知，这等价于满足 (3.1) 且 $K=\mathbb{Q}$ [DR1] 的平衡情形。在这种情形下，Golyshev 猜想了以下结果（见 [Za]），Delaygue 和 Rivoal [DR1, 定理 2]，以及 Bostan[Bo, 推论 2.3] 使用 $p$-进分析证明了其中的第一条结论。我们改用正规函数给出霍奇理论证明，从而得到完整结果：[15]

**定理6.1**。设 $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ 平衡且完全交错，并且 $f=f_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(z)$。则 $F:=\exp(\int f\frac{dz}{z})$ 在 $\mathbb{Q}(z)$上是代数的；更确切地说，我们有 $F\in\mathbb{Q}(f,z)$。

证明。令 $\tilde{R}^0\pi_*\mathbb{Z}_{\mathcal{X}}$为 $\mathcal{U}=\mathbb{P}^1\setminus\{0,1,\infty\}$ 上表示纤维的约化（无迹）$H^0$ 的局部系统。超几何局部系统 $\mathbb{H}_{\mathbb{Z}}\subseteq\tilde{R}^0\pi_*\mathbb{Z}_{\mathcal{X}}$ 构成一个权重为 0 的等平凡 $\mathbb{Z}$-变分霍奇结构 $\mathbf{H}$。除去

[15]在 [DR1] 中仅证明了对某个 $m\in\mathbb{N}$有 $F^m\in\mathbb{Q}(f,z)$。注意，为使该陈述有意义，需要对积分常数以及 $F$ 在$\mathcal{X}$ 上的扩张作出某种选择，而证明隐式地提供了这些选择。

挠元后，[16] 我们有

$$\mathrm{IH}^1(\mathbb{P}^1\backslash\{0\},\mathbf{H}(1))\cong\mathrm{IH}^1(\mathbb{G}_m,\mathbf{H}(1))\cong\mathbb{Z}(0);$$

特别是，前两个霍奇结构的秩为一。这正是关键的观察：尽管$\mathcal{X}$ 可能具有亏格 $>0$ （例如参见 [Ko]），而 $H^1(\mathcal{X})$可能包含非平凡的扩张，但始终存在这个霍奇类。我们指出， $\mathbb{H}$ 的秩 $r$ 总是小于 $\pi$的映射次数，并且通常小得[17] 多；我们将 $\pi$的映射次数记为 $d$。我们将分三步说明如何从这个霍奇类得到一个正规函数。

**步骤 1：德拉姆**。记$\mathcal{U}=\mathbb{P}^1\backslash\{0,1,\infty\}\overset{\jmath}{\hookrightarrow}\mathcal{U}_0=\mathbb{P}^1\backslash\{0\}\overset{\bar{\jmath}^0}{\hookrightarrow}\mathbb{P}^1$。由于 $\mathbb{H}$在每个穿孔点处的单值化都是有限的，与$R\bar{\jmath}^0_*\jmath_*\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ 拟同构的德拉姆复形为

$$\mathscr{C}^e_{\mathcal{U}_0}:=\{\mathcal{H}^e\to\mathcal{H}'_e\otimes\Omega^1_{\mathbb{P}^1}\langle 0\rangle\}. \tag{6.2}$$

这里，$\mathbf{H}^e$ 是到 $\mathbb{P}^1$的通常上典范延拓，而 $\mathbf{H}'_e$ 在 $\{1,\infty\}$ 处是下典范延拓，在 $\{0\}$ 处是上典范延拓。（这不过是将 §5 末尾的复形特化到我们当前情形。）因此，我们有 $\mathbb{H}^1(\mathbb{P}^1,\mathscr{C}^e\mathbf{U}_0)\cong\mathbf{IH}^1(\mathbf{U}0,\mathbb{H}_{\mathbb{C}})$，而子复形 $\mathscr{F}^e_{\mathcal{U}_0}:=(\mathbf{H}'_e\otimes\Omega^1_{\mathbb{P}^1}0)[-1]$的 $\mathbb{H}^1$ 计算出 $F^1\mathbf{IH}^1(\mathbf{U}0,\mathbb{H}_{\mathbb{C}})=\mathbf{IH}^1(\mathbf{U}0,\mathbb{H}_{\mathbb{C}})\cong\mathbb{C}$。此外，直接分析[18] 可得 $\Gamma(\mathbb{P}^1,\mathbf{H}'_e\otimes\Omega^1_{\mathbb{P}^1}0)\to\Omega^1(\mathbf{X})$ $X_0$，其中$X_0=\pi^{-1}(0)$ 是一个有限点集。

根据 [BH]，，超几何 D-模在 0、1 和 $\infty$处的指标分别为 $\{1-\mathfrak{b}_i\}_{i=1}^r$、$\{0,1,2,\dots,r-1,-\frac{1}{2}\}$ 和 $\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^r$。这给出了$f$的所有解析延拓的局部指数。此外，$f|_{\mathcal{X}}$可以解释为 H 在 U 上一个（定义良好的）截面，而“函数的单值化”则源于将此截面与 $\mathbb{H}^\vee_{\mathbb{Z}}$的（多值）截面配对。因此我们看到，在 $\mathbb{P}^1$上，$\tilde{f}$ 给出了扩张 $\mathbf{H}''_e$ 的一个截面，该扩张在 0 处由 $\mathbf{H}^e$ 给出，在 1 处由 $\mathbf{H}_e$ 给出，在 $\infty$处由 $\mathbf{H}^e$ 给出（但在 $\infty$处没有单值化特征值为1的部分）。由此可得，$\tilde{f}\frac{dz}{z}$ 属于 $\Gamma(\mathbb{P}^1,\mathbf{H}'_e\otimes\Omega^1_{\mathbb{P}^1}0)$，因而是 $\Omega^1(\mathbf{X})_{X_0}$的一个元素，它给出了生成 $\mathbf{IH}^1(\mathbf{U}_0,\mathbf{H}(1))$ 的霍奇类的一个倍数。就目前所知，这个倍数可能是复数。对于 [DR1]，的定理，我们需要证明它是有理数；若要得到完整结果，

[16]这里有个棘手之处：$\mathbf{IH}^1(\mathbb{P}^1\backslash\{0\}\ \mathbb{H}_{\mathbb{Z}}(1))$ 的自由部分的生成元，通常会映射为 $\mathbf{IH}^1(\mathbb{G}_m,\mathbb{H}_{\mathbb{Z}}(1))$ 的自由部分生成元的一个非平凡整数倍。见下文步骤 3。[17] 根据 [RV]，，§1 中 $Q^2$ 的例子（带有 $r=8$）具有 $d=483840$。[18]$\mathcal{X}$ 必须具有阶为 $k$ 的分歧，才能使 $\tilde{f}$ 的局部指数为 $-\frac{a}{k}^a$（$a\in(0,k)\cap\mathbb{Z}$），而 $t_\sigma^{-k}dt_\sigma$ 会在这样的点提升为全纯微分形式。

或许可以尝试证明它是整数，但事实并非如此。我们将证明，它是 $\mathrm{IH}^1(\mathbb{G}_m, \mathbf{H}(1))$ 的一个整数生成元 。

步骤 2：整性。由于超几何 D-模中只有一个解在 0 附近是单值的，因此，相对于某个基，单值化群确实由整数矩阵表示时，该解必须是其中的一员（参见 [BH，定理 3.5]）。因此，从 $z = 0$ 出发并返回其邻域的任意单值化都会将 $f =: g_1$ 映至 $\sum_{i=1}^r a_i g_i$，其中 $g_i$ 的局部指数为 $1 - \mathfrak{b}_i$，且$a_i \in \mathbb{Z}$ $(\forall i)$。由于 $g_i(0) = 0$，对于 $i > 1$，我们可推得，$f$ 在 $X_0$ 上的限制定义了 $\mathbf{X}$ 上的一个除子 $\varepsilon_0$，其系数为 $\mathbb{Z}$，且定义在 $\mathbb{Q}$ 上。由于 $f(0) = 1$，这些系数中有一个为 $1$，而$\tilde{f}^{\frac{dz}{z}}$ 沿着一条环绕 $X_0$ 中该点、位于 $\mathbf{X} \setminus X_0$ 上的回路 $\ell_0 \subset$ 的周期为 $2\pi\mathbf{i}$。因此，$\tilde{f}^{\frac{dz}{z}}$ 至少属于 $\mathrm{IH}^1(\mathbf{U}0, \mathbb{H}(1)) = \mathrm{IH}^1(\mathbb{G}_m, \mathbb{H}(1))$。

记 $\mathcal{X} \xrightarrow{\kappa} \mathbb{G}_m \xrightarrow{\bar{\kappa}^0}$、$\to$ 和 $\infty := \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$ 及 $\jmath' := \bar{\kappa}^0 \circ \kappa$ 为包含映射。下一段中我们将证明，$\tilde{f}^{\frac{dz}{z}}$ 可提升至 $\mathrm{IH}^1(\mathbb{G}_m, \mathbb{H}_{\mathbb{Z}}(1)) = H^1(\mathbb{G}_m, \kappa_* \mathbb{H}_{\mathbb{Z}}(1))$。由于它在 0 处的留数为 $\varepsilon_0$，它将生成该群的自由部分。这个提升还意味着 $\tilde{f}^{\frac{dz}{z}}|_{\mathcal{X} \setminus (X_0 \cup X_\infty)}$ 的所有周期都属于 $\mathbb{Z}(1)$。但由于 $\tilde{f}^{\frac{dz}{z}}$ 沿 $X_\infty$光滑，且在 $H^0(X_\infty, \mathbb{Z})$ 中的留数均为零，根据局部化，$\tilde{f}^{\frac{dz}{z}}|_{\mathcal{X} \setminus X_0}$ 的所有周期都属于$\mathbb{Z}(1)$，从而在 $H^1(\mathbf{X} \setminus X_\infty, \mathbb{Z}(1))$ 中给出一个上同调类。

考虑应用于层$\kappa_* \mathbb{H}_{\mathbb{Z}}(1)$的 $\bar{\kappa}^0_*$ 的 Leray 谱序列。由于 $H^2(\mathcal{U}_\infty, \jmath'_* \mathbb{H}_{\mathbb{Z}}(1)) = \{0\}$，这就成为一个阿贝尔群的正合列

$$0 \to \mathrm{IH}^1(\mathcal{U}_\infty, \mathbb{H}_{\mathbb{Z}}(1)) \to \mathrm{IH}^1(\mathbb{G}_m, \mathbb{H}_{\mathbb{Z}}(1)) \xrightarrow{\mathrm{Res}_0} (H_{\mathbb{Z}})_{T_0} \to 0, \tag{6.3}$$

其中 $(H_{\mathbb{Z}})_{T_0} = \mathbb{Z}\langle\varepsilon_0\rangle \oplus$ 是挠元（与 $\mathfrak{b}_r = 1 \neq$ 其他 $\mathfrak{b}_j$ 的情况相同）。因此存在一个上同调类 $\alpha \in \mathrm{IH}^1(\mathbb{G}_m, \mathbb{H}_{\mathbb{Z}}(1))$，使得 $\mathrm{Res}_0(\alpha) = \varepsilon_0$。在 (6.3) $\otimes \mathbb{Q}$ 中，根据欧拉–庞加莱公式和 $\tilde{f}^{\frac{dz}{z}} \xrightarrow{\mathrm{Res}} \varepsilon_0$，$\mathrm{IH}^1(\mathcal{U}infty, \mathbb{H}(1)) = \{0\}$。由此立即可知，$\alpha$ 在交换图 (6.3) $\to$ (6.3)$\otimes\mathbb{Q}$ 中映至 $\tilde{f}^{\frac{dz}{z}}$，如所述。我们指出，$\tilde{f}^{\frac{dz}{z}}$ 不能进一步以整系数提升到$\mathcal{U}_0$，因为在

$$0 \to \mathrm{IH}^1(\mathcal{U}_0, \mathbb{H}_{\mathbb{Z}}(1)) \to \mathrm{IH}^1(\mathbb{G}_m, \mathbb{H}_{\mathbb{Z}}(1)) \to (H_{\mathbb{Z}})_{T_\infty} \to 0 \tag{6.4}$$

最后一项中（以及 $\varepsilon_0$ 因此在其中的像）是非平凡的挠元。

**步骤 3：正规函数**。由步骤 2 的结果可知，$\tilde{f}^{\frac{dz}{z}}$ 表 $H^1$中的一个上同调类 $H^1(\mathcal{X} \setminus X_0, \mathbb{Z}(1))$，因此显然，$\exp(\int \tilde{f}^{\frac{dz}{z}})$ 给出了一个良定义函数 $F \in \mathbb{C}(\mathcal{X})$，其除子为 $(F) = \varepsilon_0$。不过，如果我们将 $F$ 构造为一个正规

函数，便能获得更多信息。事实上，Ur-卷积 (5.1) 给出了一个典范的生成元

$$\nu \in \mathrm{ANF}_{\mathbb{G}_m}(\mathbf{H}(1))_{\mathbb{Z}}/\mathrm{tors.} \cong \mathbb{Z}. \tag{6.5}$$

我们可以将 $\nu$ 视为左侧的一个截面

$$\mathcal{H}/\mathbb{H}_{\mathbb{Z}}(1) \xrightarrow[\exp]{\cong} \mathbb{H}_{\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{O}^*,$$

并定义 $\tilde{F} := \exp(\nu)$。现在，$[\nu]$ 和 $[\tilde{f}^{dz}_z]$ 表示 $\mathbb{H}^1(\mathbb{G}_m, \mathbb{H}_{\mathbb{Z}}(1))$ 中的同一个上同调类，因此根据 (5.5)，$\mathrm{sing}_\sigma([\nu]) = \mathrm{Res}_\sigma([\tilde{f}^{dz}_z]) = \varepsilon_0$ 对于 $\sigma = 0$ 成立，而对于 $\sigma = 1$则为零。在 $\infty$ 处，情况更加微妙：$\tilde{f}^{dz}_z$ 无法在 (6.4) 中提升，这表明存在一个挠类 $\mathrm{sing}_\infty([\nu])$，它对应于 $\tilde{F}$ 在 $X_\infty$ 中取单位根值，而不是具有 $F|_{X_\infty} \equiv 1$。无论如何，通过 (5.3)，$\otimes \mathbb{Q}$，$\delta\nu = \nabla\tilde{\nu} = \mathrm{dlog}(\tilde{F})$ 经过 $\mathbb{H}^1(\mathscr{F}^e\mathcal{U}_0)$ 分解；因此，$\mathrm{dlog}(\tilde{F})$ 是 $\Omega^1(\mathcal{X})\langle\overline{X_0}\rangle$ 中的一个元素，表示与 $\tilde{f}^{dz}_z$ 相同的上同调类。因此，它们作为 1-形式相等。

这种论证方式的关键优势在于，由于 $F$ 是 $\mathbb{H}_{\mathbb{Z}} \otimes \mathsf{O}^* \subseteq \tilde{R}^0\pi_*\mathbb{Z}_{\mathcal{X}} \otimes \mathsf{O}^*_{\mathcal{U}}$的截面，乘法迹必满足 $\pi^\times_* F \equiv 1$。此外，(5.5)再次给出 $(F) = \mathrm{Res}_{x_0}(\mathrm{dlog}(F)) = \varepsilon_0$。这两个关于 $F$ 的性质在 $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ 作用下保持不变，因此通过扩张并特化，我们可以假设 $F \in L(\mathsf{X})$ 属于数域 $L \supseteq \mathbb{Q}(\zeta_d)$。对于任意 $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/Q)$，都有 $({}^\sigma F) = {}^\sigma(F) = {}^\sigma\varepsilon_0 = \varepsilon_0$ （因为 $\varepsilon_0$ 定义在带有 $\mathbb{Z}$-系数的 $\mathbb{Q}$ 上），因此 ${}^\sigma F/F =: c_\sigma \in L$ 是一个常数。由于 $\pi^\times_* {}^\sigma\tilde{F} = {}^\sigma\pi^\times_*\tilde{F} \equiv 1$、$c^d_\sigma = 1$ 和 $c_\sigma \in L^\times$；所以 $\{c_\sigma\}$ 在平凡群 $H^1(\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})\ L^\times)$ 中定义了一个 1-余循环。因此它来自某个 $\gamma \in L$，满足 ${}^\sigma\gamma/\gamma = c_\sigma\ (\forall\sigma)$；将 $F$ 替换为 $F/\gamma$后，它便在 $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ 作用下保持不变，从而成为 $\mathbb{Q}(\mathsf{X}) = \mathbb{Q}(f, z)$ 的一个元素。□

注记 6.6. 也可以论证，$F$的正确确定是由从 $\pi$ 在$z = 1$上的分歧点出发进行积分所给出的。作为不变截面，$\lim_{z=1}\nu$ 在$\mathcal{H}^e|_{z=1}$的秩-一非幺幂部分中的分量必为2-挠元。因此 $F = \pm 1$ 在这些分歧点处，而这些分歧点整体定义在 $\mathbb{Q}$上。于是我们可以选取其中一个，并在该处将 $F$ 规范化为 $+1$；在此意义下，我们在0的一个邻域上有$F = \exp(\int_1 \tilde{f}^{dz}_z)$。这也与上文步骤 3 中的$\mathrm{sing}_1([\nu]) = 0$ 相一致。

**例 6.7.** 最简单的例子已经很有趣：令 $r = 1$、$\mathfrak{a} = \frac{1}{2}$ 和 $\mathfrak{b} = 1$。超几何“周期函数”为

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{[\frac{1}{2}]_n}{n!} z^n = \frac{1}{\sqrt{1-z}} \tag{6.8}$$

并且 $\overline{\mathcal{X}}$ 由 $P(z,y) = y^2 - zy^2 - 1$ 定义。指数积分为

$$F(z) = \exp\left(\int_1 \frac{dz}{z\sqrt{1-z}}\right) = \frac{1-\sqrt{1-z}}{1+\sqrt{1-z}} \tag{6.9}$$

因此 $\tilde{F} = \frac{y-1}{y+1}$ —正规函数对应于

$$\log(F) = \log\left(\frac{z}{4}\right) + \sum_{n>0}\binom{2n}{n}\frac{z^n}{4^n n}. \tag{6.10}$$

它在有理点 $z = \frac{4}{N}$（其中 $N > 5$，且 $N$（$N$ =4）为无平方因子的数）处的特化，在狄利克雷类数公式的背景下具有意义：对于 $K_N := \mathbb{Q}(\sqrt{N(N-4)})$。事实上，$F(\frac{4}{N})$ 是一个基本单位，而 $-\log F(\frac{4}{N})$ 是狄利克雷调节子，因此

$$\log F(\tfrac{4}{N}) = 2\frac{\zeta'_{K_N}(0)}{h_{K_N}}. \tag{6.11}$$

注 6.12。有人或许会问，更一般的平衡超几何周期中的 $\int \frac{dz}{z}$ 究竟“插值”了哪些算术量。即便是像

$$r(t) = \log(t) + \sum_{n>0}\binom{2n}{n}^2\frac{t^n}{n}$$

这也涉及椭圆曲线（族）的 $K_2$ 的 Bloch-Kato 猜想 [dJDGK]；而在卡拉比–丘三维簇族中，则可以用更复杂的超几何表达式行列式来检验 Bloch-Beilinson 猜想[GK]。我不知道 Lefschetz 是否曾预见到正规函数会被用于实验性地验证算术几何中的猜想，但事实证明，它们是不可或缺的工具。

转向非平衡情形，我们有如下结果，该结果也由 Delaygue–Rivoal 证明 [DR2，定理 2]。

**定理 6.13**。令 $\{f_j\}_{j=1}^s$ 为与 $f = f_1$ 共轭的超几何级数的完整集合。那么对任意 $\alpha \in \mathcal{O}_K$，

$$F_\alpha := \exp\left(\sum_j \sigma_j(\alpha)\int_1 f_j\frac{dz}{z}\right) \in \overline{\mathbb{Q}}(f,z);$$

以及 $F_1 \in \mathbb{Q}(f,z)$。

证明。我们考虑 $\mathbb{Z}$-变分霍奇结构 $\mathrm{Res}^{\mathcal{O}_K/\mathbb{Z}}\mathbf{V} =: \mathbf{H} \subset R^0\pi_*\mathbb{Z}_{\mathcal{X}}$，它具有如下性质：$\mathbf{H}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathcal{O}_K = \oplus_{j=1}^s \mathbf{V}_j$，其中 $\mathbf{V}_j$ 取遍

不同的共轭 $\mathbf{V}_{\langle k_j\mathfrak{a}\rangle,\langle k_j\mathfrak{b}\rangle}$ 以及 $s=[K\colon\mathbb{Q}]$。$j^{\text{th}}$ 共轭$\mathcal{D}$-模的局部指数为[19]

$$\{1-\langle k_j\mathfrak{b}\rangle\},\ \{0,1,\dots,r-2,\textstyle\sum_i(\langle k_j\mathfrak{b}_i\rangle-\langle k_j\mathfrak{a}_i\rangle)-1\},\ \text{and}\ \{\langle k_j\mathfrak{a}_i\rangle\};$$

而最后一个证明的逻辑表明，$\tilde{f}_j\frac{dz}{z}$ 属于 $\Gamma(\Omega^{\prime}_{j,e}\otimes\Omega^1_{\mathbb{P}^1}\langle 0\rangle)\to\Omega^1(\mathcal{X})\langle X_0\rangle$。此外，由于 $f$ 是一个 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-局部解系统的局部基元素，我们有 $f|_{X_0}$ 定义了一个系数在 $\mathcal{O}_K$ 中的除子 $\mathsf{e}_0$（在 $K$ 上）。选取 $\mathcal{O}_K$ 的一个基 $\{\theta_\ell\}$，我们可以将 $\mathsf{e}_0=$ 写成：$\sum_\ell\theta_\ell\varepsilon_{0\ell}$，其中 $\varepsilon_{0\ell}$ 是某些 $\mathbb{Z}$-除子（定义在 $K$ 上）。

现在，函数 $f_j$ 并非伽罗瓦共轭，但它们所生成的局部系统的单值化是伽罗瓦共轭的。记 $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})=\{\sigma_j\}$，在此意义下我们有 $\mathbb{V}_j={}^{\sigma_j}\mathbb{V}_1$，其中 0 处的不变整数生成元被送到 0 处的不变整数生成元。因此我们有 $\mathsf{e}_j:=f_j|_{X_0}=\mathrm{Res}^{X_0}(\tilde{f}_j\frac{dz}{z})=\sum_\ell\sigma_j(\theta_\ell)\varepsilon_{0\ell}$，它不是一个具有 $\mathbb{Q}$- 系数的除子。所以它不能写成微分形式 $\mathrm{dlog}(F_j)$，其中 $F_j\in\mathbb{C}(\mathcal{X})$，并且 $\exp(\int\tilde{f}_k\frac{dz}{z})$ 是超越数。另一方面，若对任意 $\alpha\in\mathcal{O}_K$ 令 $\mathfrak{f}_\alpha:=\sum_j\sigma_j(\alpha)f_j$，则 $D_\alpha:=\sum_j\sigma_j(\alpha)\mathsf{e}_j=\sum_\ell(\sum_j\sigma_j(\alpha\theta_\ell))\varepsilon_{0\ell}$ 是一个 $\mathbb{Z}$-除子。

此外，我们断言 $\mathfrak{f}_\alpha\frac{dz}{z}$ 是一个整数霍奇类。事实上，根据欧拉–庞加莱公式，$\mathrm{IH}^1(\mathbb{G}_m,\mathbb{V})$ 是一个秩为一的 $\mathcal{O}_K$-模，其霍奇类型为 $(-1,-1)$，因此模去挠元后

$$\mathrm{IH}^1(\mathbb{G}_m,\mathbb{H}_{\mathbb{Z}}(1))=\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_K/\mathbb{Z}}\mathrm{IH}^1(\mathbb{G}_m,\mathbb{V}(1))\cong\mathcal{O}_K(0)\cong\mathbb{Z}(0)^{\oplus s}.$$

由于 $\tilde{\mathfrak{f}}_\alpha\frac{dz}{z}\in\Gamma(\mathcal{H}^{\prime}_e\otimes\Omega^1_{\mathbb{P}^1}\langle 0\rangle)\cong\mathrm{IH}^1(\mathbb{P}^1\backslash\{0\}\ \mathbb{H}_{\mathbb{C}})$ 的留数为整数，该断言可按上文步骤 2 得证。将 (5.1) 沿着此霍奇类到 $\mathrm{IH}^1(\mathbb{G}_m,\mathbb{H}(1))$ 的包含映射拉回，便得到一个正规函数 $\nu_\alpha$。与前面一样，$F_\alpha=\exp(\nu_\alpha)\in\mathbb{C}(\mathcal{X})$ 有 $(F_\alpha)=D_\alpha$，且定义在 $\mathbb{Q}$ 上。

最后，注意到

$$^{\sigma}D_\alpha=\textstyle\sum_\ell(\sum_j\sigma\sigma_j(\alpha\theta_\ell))\,{}^{\sigma}\varepsilon_{0\ell}=\sum_\ell(\sum_j\sigma_j(\alpha\theta_\ell))\,{}^{\sigma}\varepsilon_{0\ell}$$

不必等于 $D_\alpha$，因为 $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ 作用于 $\varepsilon_{0\ell}$ 的支撑。更确切地说，在 $\mathcal{X}$上方的点 $(y,z)=(f,z)=(\beta,0)$（其中 $\beta\in\mathcal{O}_K$），$\mathsf{e}_j$ 的系数是 $\sigma_j(\beta)$，而 $D_\alpha$ 的系数是 $\sum_j\sigma_j(\alpha.\sigma(\beta))$，对于一般的 $\alpha$，二者并不相同。然而，若 $\alpha=1$，我们看到 $D_\alpha$ 是不变的，因而如前所述，$F_1\in\mathbb{Q}(\mathcal{X})$。□

[19]Note that $\sum_i(\langle k_j\mathfrak{b}_i\rangle-\langle k_j\mathfrak{a}_i\rangle)-1>-1$ since $\langle k_j\mathfrak{b}_r\rangle=1$ and the $\langle k_j\mathfrak{b}\rangle$, $\langle k_j\mathfrak{a}\rangle$ are totally interlaced.

## 7. 片段 #3：拟周期

与正规函数 $\nu$ 在 $\mathcal{U} \subset \mathbb{P}^1$ 上相关联的混合霍奇结构变分 $\mathbf{E}_\nu$ 具有一个对偶扩张

$$0 \to \mathbf{Q}(p-\ell) \to \mathbf{E}_\nu^\vee(-\ell) \to \mathbf{H} \to 0 \tag{7.1}$$

借助 $\mathbf{H}^\vee(-\ell) \cong \mathbf{H}$。实际上，拟周期 $\mathfrak{V}$ 将 $\mu$到 $F^0\mathcal{E}_\nu^\vee$的（Hodge）提升，与（$\mathbb{Q}$-Betti）提升的 1 到 $\mathbb{E}_\nu(p)$配对，其中后者见式（2.4），因此它是扩张（7.1）的一个周期。式（2.4）本身的周期，则通过将正规函数到 $\mathcal{H}$ 的提升 $\tilde{\nu}$ 与 $\mathbb{H}$的一个（$\mathbb{Q}$-Betti）截面配对得到。

从微分角度看，$\mathfrak{V}$ 的行为由命题 2.10 描述。我们继续沿用该命题中的假设，并为方便起见，假设 $\mathbf{H}$的 Hodge 数全为 1，$\mathbb{H}$ 在 $z=0$处具有最大幺幺幺幺单值，在 $\Sigma \cap \mathbb{G}_m$处具有皮卡-勒夫谢茨单值，且 $\deg(L) = |\Sigma \cap \mathbb{G}_m|$.[20]若 $R$ 是消去多项式 $g$的算子，则 $RL$消去$\mathfrak{V}$，于是我们可以将 $\mathcal{E}_\nu^\vee \cong \mathcal{D}/\mathcal{D}(RL)$ 识别为一个 $\mathcal{D}$-模。这提示了弗罗贝尼乌斯对偶识别 $\mathcal{E}_\nu \cong \mathcal{D}/\mathcal{D}(LR^\dagger)$，我们不禁想知道是否存在某个被 $LR^\dagger$ 消去的提升 $\tilde{\nu}$。

为将这个问题置于背景之中，回顾一下，任意两个到$\mathcal{H}$ 的（局部）提升 $\tilde{\nu}$ and$\tilde{\nu}'$ 相差一个局部系统 $\mathbb{H}(p)$ 的截面 $\gamma$，以及一个$\mathcal{H}$的截面 $\eta$ of$F^p$。由于后者按类型与 $\mu$ 的配对为零，因此 $\mathfrak{V}$ 的两个版本相差一个周期，而该周期会被皮卡-福克斯算子$L$消去。这使得 $g := L\mathfrak{V}$ 与提升的选择无关。另一方面，如果我们在局部对这些提升应用 $D$，它会消去 $\gamma$，但会将 $\eta$ 映为$\mathcal{H}$的一个截面。因此，这个截面取决于提升；我们必须以某种方式对提升加以限制，才能对 $D\tilde{\nu}$ 作出判断。根据 [GK 定理 5.5]，关键是选择 $\tilde{\nu}$，使无穷小不变量 $\delta\nu$ 的相应代表不仅属于 $F^{p-1}\mathcal{H}$，还属于最高霍奇滤子分量 $F^\ell\mathcal{H}$：

**命题 7.2**。局部处处存在一种提升 $\tilde{\nu}$ 的选择，除 $\mathbb{H}(p)$外唯一，使得

$$D\tilde{\nu} = \mathsf{Q}_0(2\pi\mathbf{i})^\ell g\mu \tag{7.3}$$

其中 $g := L\mathfrak{V}$ 且 $\mathsf{Q}_0 \in \mathbb{Q}^*$。

为简单起见，设 $g = \mathbf{k}z^a$，并将 $\omega = (2\pi\mathbf{i})^\ell\mu$ 记作 $\mathbb{Q}$-德拉姆微分形式。于是 $R = D\frac{1}{z^a}$ 和 $R^\dagger = \frac{1}{z^a}D$，从而我们得到对偶的混合齐次皮卡-福克斯方程

$$D\frac{1}{z^a}L\mathfrak{V} = 0 \quad \text{and} \quad L\frac{1}{z^a}D\tilde{\nu} = 0 \tag{7.4}$$

[20]这些附加假设意味着弗罗贝尼乌斯对偶 $L^\dagger$ 就是 $L$ 它本身。参见[Ke，第7]节。另请注意，我们可以直接取 $R = D\frac{1}{g}$，如下文所示。

其中 $\tilde{\nu}$ 取作命题7.2中的形式。

在本节余下部分，我们集中讨论一个非常经典的特殊情形：其中 $\mathbf{H}$ 是带截面（$\ell = 1$）的椭圆曲线相对极小族$\{X_z\}$在 $H^1$ 上的变分霍奇结构，而 $\nu \in \mathrm{ANF}_{\mathbb{P}^1}(\mathbf{H}(1))$（$p = 1$）是由全空间$\mathcal{X}$ 上的除子$\mathcal{W}$ 所诱导的阿贝尔–雅可比映射族，其限制 $W_z := \mathcal{W} \cdot X_z$ 到光滑纤维上满足 $\deg(W_z) = 0$。（注意，$\mathrm{Q}_0^{-1}$是 $z = 0$上半稳定奇异纤维的分支数。）

为迫使存在唯一的此类正规函数，我们考虑满足$\mathrm{ih}^1(\mathbb{P}^1, \mathbb{H}) = 1$的族。此处的选项为：

（i）5条半稳定奇异纤维；（ii）3条半稳定与1条非半稳定；或（iii）1条半稳定与2条非半稳定。

现在，我们还希望在命题 2.10 中有 $\deg(L) = 2$ and $h = 1$，从而迫使 $g = \mathrm{k}z$，其中某个 $\mathrm{k} \in \mathbb{Q}^*$ ($a = 1$ 见 (7.4))。这与 (i) 不相容，而 (iii) 则与我们的其他假设不相容。利用 Herfurtner列表 [He 的表 3], ，我们发现 (ii) 对应 17 种 Kodaira 纤维类型构型（模去二次扭曲）。其中有几种与模族密切相关（例如通过扭曲），但由于其 Mordell–Weil群的秩为 1，因此并非严格意义上的模对象。

这 4 个权重为 1、秩为 2 的超几何 $\mathbb{Q}$-变分霍奇结构，在 $\mathfrak{b} = (1,\ 1)$ 时具有 $\mathfrak{a} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$、$(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3})$、$(\frac{1}{4},\ \frac{3}{4})$ 和 $(\frac{1}{6},\ \frac{5}{6})$，并分别由具有奇异纤维构型 $\mathrm{I}_4\mathrm{I}_1\mathrm{I}_1^*$、$\mathrm{I}_3\mathrm{I}_1\mathrm{IV}^*$、$\mathrm{I}_2\mathrm{I}_1\mathrm{III}^*$ 和 $\mathrm{I}_1\mathrm{I}_1\mathrm{II}^*$ 的椭圆曲面实现。后三者经过 2:1 基变换和二次扭曲后，给出 Herfurtner族中的 5 个。例如，$(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ 族的二重覆盖是 $\Gamma_1(4)$ 对应的椭圆模曲面的二次扭曲，而它所支撑的正规函数已在 [GK, §10] 中明确描述。这里我们聚焦于 $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ 族，并描述其基变换所支撑的非挠截面（或正规函数）。

**例 7.5.** 令 $\varphi := (x-y)(1+x^{-1})(1+y^{-1})$ 的牛顿多边形为$\Delta$，$\mathbf{P} := \mathbb{P}_\Delta$ 为 6 次德尔佩佐曲面，并令$\mathbf{P} \times \mathbb{P}^1 \supset \mathcal{X} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^1_z$ 为将水平集 $\overline{\varphi = z^{-1}}$ 紧化到$X_z$后得到的极小光滑族。奇异纤维为 $\mathrm{I}_6$ ($z = 0$)、$2\,\mathrm{I}_1$ ($z = \pm 3\sqrt{3}$) 和 IV ($z = \infty$)。取

$$\omega_z := \mathrm{Res}_{X_z}\left(\frac{\frac{dx}{x} \wedge \frac{dy}{y}}{1 - z\varphi}\right) \in \Omega^1(X_z),$$

在 $z=0$ 处沿消失圈 $\alpha$ 的周期为[21]

$$\begin{aligned}\Pi(z) &= \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\alpha_z}\omega_z = \sum_{n\geq 0} z^n[\varphi^n]_{\text{const.}}\\ &= \sum_{m\geq 0}\frac{3m!}{m!^3}(-z^2)^m = {}_2F_1\left(\begin{smallmatrix}\frac{1}{3},\frac{2}{3}\\ 1\end{smallmatrix}\middle|-27z^2\right).\end{aligned} \tag{7.6}$$

记 $\mathfrak{z}=-27z^2$，因此皮卡-福克斯算子为

$$\begin{aligned}L &= D_{\mathfrak{z}}^2 - \mathfrak{z}(D_{\mathfrak{z}}+\tfrac{1}{3})(D_{\mathfrak{z}}+\tfrac{2}{3})\\ &= \tfrac{1}{4}\left\{D_z^2 + 27z^2(D_z+\tfrac{2}{3})(D_z+\tfrac{4}{3})\right\},\end{aligned} \tag{7.7}$$

其关于 $z$ 的次数为 2。对于 $\Gamma_1(3)$，存在一个显式的主模 $\mathbf{H}$，在该主模下，$\Pi_0(\mathfrak{z}) := {}_2F_1\left(\begin{smallmatrix}\frac{1}{3},\frac{2}{3}\\ 1\end{smallmatrix}\middle|\mathfrak{z}\right)$ 拉回为 $A(q) := \Pi_0(\mathbf{H}(q)) \in M_1(\Gamma_1(3))$，参见 [DK1, 第 10.10] 例。

现在有 6 个“常值”截面，包括 $(x,y)=(-1,0)$，它们通过将 $\mathbf{P}\setminus\mathbb{G}_m^2$ 的分量与 $X_z$ 相交而得到。这些截面的差产生挠正规函数。相反，考虑除子 $\mathcal{W}\in Z^1(\mathcal{X})$，其纤维为

$$W_z = \mathcal{W}\cdot X_z = 2\left[\left(\tfrac{1+z}{1-z},\tfrac{2z}{1-z}\right)\right] - 2\left[(-1,0)\right], \tag{7.8}$$

并令 $\nu=\nu_{\mathcal{W}}\in \mathrm{ANF}_{\mathbb{P}^1}(\mathbf{H}(1))_{\mathbb{Z}}$。它在局部由一个差 $e_{\mathbb{Z}}-e_F$ 给出，如（2.3）所示，其中：

- $e_{\mathbb{Z}}(z)$ 由 $2\pi\mathbf{i}\delta_{\Gamma_z}$ 表示，其中 $\Gamma_z$ 一条以 $W_z$ 和 $\delta_{(\cdot)}$ 积分流为边界的 1-链；并且
- $e_F(z)$ 由第三类微分表示，使得将 $d$ 视为一个流时得到 $2\pi\mathbf{i}\delta_{W_z}$。

因此我们看到，$\mathfrak{V}=\langle 2\pi\mathbf{i}\delta_{\Gamma_z}-e_F(z)\,\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\omega_z\rangle = \int_{\Gamma_z}\omega_z$ 正是经典的阿贝尔-雅可比积分。根据命题 2.10，必有

$$L\mathfrak{V} = \mathsf{k}z = \frac{\mathbf{i}\mathsf{k}}{3\sqrt{3}}\mathfrak{z}^{\frac{1}{2}} \tag{7.9}$$

对某个 $\mathsf{k}$；若 $\mathsf{k}\neq 0$，则 $\nu$ 是非挠元。（这个想法至少可以追溯到 Manin 关于莫德尔猜想的开创性论文 [Ma]。）

为计算 $\mathsf{k}$，我们计算 $\mathfrak{V}(z)$ 在 $z=0$ 附近的幂级数的若干项。设 $\Omega_z = \frac{dx}{x}\wedge\frac{dy}{1-z\varphi}$，$P_z$ 是 $\mathbb{C}\setminus\mathbf{i}\overline{\mathbb{R}_{\leq 0}}$ 上从 $-1$ 到 $\frac{1+z}{1-z}$ 的一条路径，

[21] 通过对贝蒂变形 $\sum_{n\geq 0}\frac{\Gamma(n+s+\frac{1}{3})\Gamma(n+s+\frac{2}{3})\Gamma(1+3)\Gamma(2+3)\Gamma(n+s+1)_2}{}z^{n+s}$ 关于 $s$ 求导，令 $s=0$，再乘以 3，即可计算 $\mathbb{H}_{\mathbb{Z}}^{\vee}$ 的一个补生成元上的周期。参见 [Ke，附录 A]。

$C_z := \Gamma_z \times \{|y| = \epsilon\}$（固定 $1 \gg \epsilon > 0$），且 $\Gamma_z := (P_z \times \{|y| < \epsilon\}) \cap X_z$。那么对于 $|z| \ll \epsilon$，$\mathfrak{V}(z)$ 可表示为

(7.10)

$$2\int_{\Gamma_z} \mathrm{Res}_{X_z}(\Omega_z) = \frac{2}{2\pi\mathbf{i}}\int_{C_z}\Omega_z = 2\int_{-1}^{\frac{1+z}{1-z}} \sum_k [\varphi^k]_{y\text{-const}} z^k \frac{dx}{x}$$

$$= 2\int_{-1}^{\frac{1+z}{1-z}} \left(1 + (x + x^{-1})z + (x^2 - 2x - 6 - 2x^{-1} + x^{-2})z^2 + \cdots\right)\frac{dx}{x}.$$

将被积函数的各项展开至 $z^5$，并将 $\frac{1+z}{1-z}$ 在结果中展开为幂级数，(7.10) 变为

$$-2\pi\mathbf{i} + 12z + 12\pi\mathbf{i}z^2 - 140z^3 - 180\pi\mathbf{i}z^4 + \tfrac{12012}{5}z^5 + \cdots. \tag{7.11}$$

我们可以通过添加一份 $\alpha_z$ 来修改 $\Gamma_z$，最终得到

$$\mathfrak{V}(z) = 12z - 140z^3 + \tfrac{12012}{5}z^5 - \cdots. \tag{7.12}$$

应用 $L$，我们发现 $\mathbf{k} = 3$。

确定了 k 之后，有一种方法可以得到 $\mathfrak{V}$ 的所有 幂级数系数。对于超几何参数 $\mathfrak{z}$ 中的变分霍奇结构，弗罗贝尼乌斯变形 (3.5) 为 $\Phi(s, \mathfrak{z}) = \sum_{n\geq 0} \frac{[s+\frac{1}{3}]_n[s+\frac{2}{3}]_n}{[s+1]_n^2}\mathfrak{z}^{s+n}$，而 (3.6) 给出 $L\Phi(\frac{1}{2}, \mathfrak{z}) = \mathfrak{z}^{\frac{1}{2}}/4$。由于关于 0 在 $z$ 中存在唯一的单值且在 0 处消失的 (7.9) 解，而 (7.12) 和 $\frac{4\mathbf{i}}{\sqrt{3}}\Phi(\frac{1}{2}, \mathfrak{z})$ 都符合这一描述，因此我们必有

$$\begin{aligned}\mathfrak{V}(z) &= \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{3}}\sum_{n\geq 0}\frac{[\frac{5}{6}]_n[\frac{7}{6}]_n}{[\frac{1}{2}]_{n+1}^2}\mathfrak{z}^{n+\frac{1}{2}} \\ &= 12\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(6n+1)!\,n!^3}{3n!2n!(2n+1)!^2}z^{2n+1},\end{aligned} \tag{7.13}$$

这与 (7.12) 的计算项相符。

最后，对应于 $\mathfrak{V}$ 的这一选取、关于 $z = 0$ 的提升 $\tilde{\nu}$ 必须以微分形式 ($\mathsf{Q}_0 = \frac{1}{6}$, $g = 3z$) 满足 (7.3)$^-$

$$D_z\tilde{v} = \frac{1}{2}z\omega \quad\Longleftrightarrow\quad \tilde{\nu} = \frac{1}{2}\int_0 \omega dz. \tag{7.14}$$

于是 $\langle\alpha, \tilde{\nu}\rangle$ 与 $\langle\beta, \tilde{\nu}\rangle$ 给出 $\mathbf{E}_\nu$ 的扩张周期，例如

$$\langle\alpha, \tilde{\nu}\rangle = \frac{2\pi\mathbf{i}}{2}\int_0 \Pi(z)dz = \pi\mathbf{i}\sum_{m\geq 0}\frac{(-1)^m}{2m+1}\frac{3m!}{m!^3}z^{2m+1}. \tag{7.15}$$

此类表达式对于计算阿达马乘积循环的调节子是必需的，例如 [GK, §10], ，并且与计算族中的霍奇理论高度配对有关。□

在本节余下部分，我们将说明如何在全空间上写出一个 1-流，以表示命题 7.2 中的提升 $\tilde{\nu}$。这是一个局部计算，需要将提升的 $e_F$ 部分"形式上明确化"。因此，我们只需使用周期比$\tau \in \mathfrak{H}$ 和 $q = e^{2\pi \mathbf{i}\tau}$ 作为局部基参数。我们用 $E_q = \mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{C}/\mathbb{Z}\langle \mathbf{1}, \tau\rangle$ 表示椭圆纤维，其坐标为 $t = e^{2\pi \mathbf{i}u}$。除子$\mathcal{W}$ 在局部由 $\sum_j m_j[t_j]$表示，其中有 $\sum_j m_j = 0$，而 $t_j$ 则视为 $q$ 的函数（取值于 $\mathbb{C}^*$，而不只是 $E_q$）。记 $\mathcal{E} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$ 为去心圆盘 $0 < |q| < 1$的某个单连通子集上的全空间。计算很直接，大部分留给读者完成。

微分形式

$$\hat{\omega}(t) := \mathrm{dlog}(1-t) + \sum_{n>0} \mathrm{dlog}\{(1-q^n t)(1-q^n t^{-1})\} \tag{7.16}$$

在 $E_q$ 上未定义，因为 $\hat{\omega}(t/q) - \hat{\omega}(t) = \mathrm{dlog}(-t/q)$。这个组合

$$\hat{\omega}_{\mathcal{W}}(t) := \textstyle\sum_j m_j \, \hat{\omega}(t/t_j) \tag{7.17}$$

在 $E_q$ 上变得定义良好（因为 $\sum m_j = 0$），但在 $\mathcal{E}$ 上并非如此，因为

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{\mathcal{W}}(t/q) - \hat{\omega}_{\mathcal{W}}(t) &= -\textstyle\sum_j m_j \mathrm{dlog}(t_j) \\ &= -\left(D_q \textstyle\sum_j m_j \log(t_j)\right) \frac{dq}{q} =: -f(q)\frac{dq}{q}. \end{aligned}$$

将 $\hat{\omega}_{\mathcal{W}}$ 替换为

$$\tilde{\omega}_{\mathcal{W}} := \hat{\omega}_{\mathcal{W}}(t) - \frac{\log|t|}{\log|q|} \sum_j m_j \, \mathrm{dlog}(t_j) \tag{7.18}$$

这样便修正了这一点：$\tilde{\omega}_{\mathcal{W}}$ 是 $A^1(\mathcal{E})\langle\mathcal{W}\rangle$ 上定义良好的微分形式。然而，它有一个缺陷：作为一个流，

$$d[\tilde{\omega}_{\mathcal{W}}] \equiv 2\pi\mathbf{i}\delta_{\mathcal{W}} - \mathrm{dlog}|t| \wedge \frac{f(q)}{\log|q|}\frac{dq}{q}$$

直到 $\pi^*$ 的像。我们希望第二项沿纤维方向（$t$-方向）是全纯的。

考虑将 $\mathrm{dlog}(t) = 2\pi\mathbf{i}\, du$（在纤维上）提升到

$$\widetilde{\mathrm{dlog}(t)} = \mathrm{dlog}(t) - \frac{\log|t|}{\log|q|}\mathrm{dlog}(q)$$

在 $\mathcal{E}$ 上。它有 $d[\widetilde{t}\,\mathrm{dlog}(\,)] = -\frac{\mathrm{dlog}|t|\log|q|}{} \wedge \mathrm{dlog}(q)$，因此

$$\Omega_{\mathcal{W}} := \tilde{\omega}_{\mathcal{W}} - f(q)\,\widetilde{\mathrm{dlog}(t)} \tag{7.19}$$

满足 $d[\Omega_{\mathcal{W}}] = 2\pi\mathbf{i}\delta_{\mathcal{W}} + (D_q f)\mathrm{dlog}(t) \wedge \mathrm{dlog}(q)$。

取一个以 $\mathcal{W}$ 为边界的 $\mathcal{E}$ 上的 3-链，我们可以将其解释为

$$\hat{\nu} := \hat{\omega}_{\mathcal{W}} - f(q)\,\mathrm{dlog}(t) - 2\pi\mathbf{i}\delta_{\Gamma} \tag{7.20}$$

作为纤维上的相对（$d_{\mathrm{rel}}$-闭）1-流。令 $\tilde{\nu}$ 为其在 $\mathcal{H}$ 中的上同调类。为计算 $\delta\nu = \nabla\tilde{\nu}$，我们将 $d$ 应用于 $\mathcal{E}$ 上 $\hat{}\nu$ 的一个提升：即应用于 $\Omega_{\mathcal{W}} - 2\pi\mathbf{i}\delta_{\Gamma}$。由此得到 $(D_q f)\,\mathrm{dlog}(t) \wedge \mathrm{dlog}(q)$，因此我们得出

$$D_q\tilde{\nu} = (D_q f)\,\mathrm{dlog}(t) \tag{7.21}$$

属于 $F^1\mathcal{H}^1$。我们已经证明

**命题 7.22**。 命题 *7.2* 中提升的正确选取方式是，在每个纤维上令 $e_F$ 为格林流 $\hat{}\omega_{\mathcal{W}} - f(q)\frac{dt}{t}$。

回到 (7.3)，若 $\omega = F(q)\,\mathrm{dlog}(t)$，且 $z = Z(q)$，其中 $F(q) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\Pi(Z(q))$，则 $D_z\tilde{\nu} = \frac{D_z f}{\Pi}\omega$。因此，对某个常数 $c$，有 $D_z f = cg\Pi$，并且 $f = \int cg\Pi\frac{dz}{z}$。这看起来与 (7.15) 相似，果然，直接计算或根据 (7.21) 推理可得 $\int_{\alpha}\hat{}\nu = 2\pi\mathbf{i}f$。

在例 7.5 的情形中，有一件事格外引人入胜。像之前一样，将 $\mathfrak{z} = \mathsf{H}(q)$写作主模，并令 $A(q) = \Pi_0(\mathsf{H}(q))$，则存在某个常数 $\mathsf{C}$

$$D_{\mathfrak{z}}\tilde{\nu} = C\mathfrak{z}^{\frac{1}{2}}\omega \quad \Longrightarrow \quad D_q\tilde{\nu} = C\frac{D_q\mathsf{H}}{\sqrt{\mathsf{H}}}A\frac{dt}{t}.$$

因此 $D_q\langle\tilde{\nu}, du\rangle = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\langle\tilde{\nu}, \alpha\rangle$ 并且

$$D_q^2\langle\tilde{\nu}, du\rangle = \tfrac{1}{2\pi\mathbf{i}}D_q\langle\tilde{\nu}, \alpha\rangle = \tfrac{1}{2\pi\mathbf{i}}\langle D_q\tilde{\nu}, \alpha\rangle$$

一方面是 $\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\langle(D_q f)\frac{dt}{t}, \alpha\rangle = D_q f$，另一方面则是 $C^{D_q}\mathsf{HH}A\cdot\sqrt{\mathsf{H}}$，它是 $\Gamma_1(3)$ 上的权 3 模形式乘以“二次扭曲”$\sqrt{\mathsf{H}}$。这使得 $\langle\tilde{\nu}, du\rangle$ 成为一个扭曲的艾希勒积分，而拟周期

$$\mathfrak{V} = \langle\tilde{\nu}, \tfrac{1}{2\pi\mathbf{i}}\omega\rangle = A\langle\tilde{\nu}, du\rangle$$

它与一个权 1 模形式的乘积。尽管 $\mathfrak{V}$只是一个经典的阿贝尔-雅可比映射，但这恰好呼应了 [DK1] 和 [BKV]中对高阶正规函数和费曼积分的分析。

## 参考文献


[AG] A. Abdelraouf 和 G. Gugiatti，《超几何局部系统的实现》，即将发表。

[Au] K-CAu, *Wilf-Zeilberger* 种子与非平凡超几何恒等式，arXiv:2312.14051。

[BH] F. Beukers and G. Heckmann，超几何函数的单值化 ${}_nF_{n-1}$，Invent. Math. 95 (1989), 325-354.

[BKV] S. Bloch、M. Kerr 和 P. Vanhove，通过高阶正规函数表示的一个费曼积分，Compositio Math. 151 (2015), 2329-2375.[BV] S. Bloch 和 M. Vlasenko，伽马函数、单值化与弗罗贝尼乌斯常数，CNTP 15 (2021), no. 1, 91-147.[Bo] A. Bostan，若干代数函数的算术刻画及对 Golyshev 一项代数性预测的新证明，IMRN 2025 (2025), no. 4, 1-6.[BLY] J. Bruinier、Y. Li 和 T. Yang，θ积分的变形与 Gross-Zagier 猜想，Forum Math. Sigma 13:Paper Np. e54, 59, 2025.[CG] A. Corti 和 V. Golyshev，超几何方程与加权射影空间，Sci. China Math. 54 (2011), no. 8, 1577-1590.[dJDGK] R. de Jeu、N. Dummigan、V. Golyshev 和 M. Kerr，Bloch-Kato猜想的 2 部分及不可整除性结果，关于 $K_2$ 某些椭圆曲线的[DR1] É. Delaygue 和 T. Rivoal，关于阿贝尔问题与高斯同余，IMRN 2024 (2024), no. 5, 4301-4327.[DR2] É. Delaygue 和 T. Rivoal，数域上的阿贝尔问题、高斯同余与 Cartier 同余，arXiv:2501.16281v2.[DPVZ] L. Dembélé、A. Panchishkin、J. Voight 和 W. Zudilin，特殊超几何动机及其 $L$函数：Asai识别，Exp. Math. 31 (2022), no. 4, 1278-1290.[DK1] C. Doran 和 M. Kerr，环面超曲面的代数 $K$K理论，Commun. Number Theory Phys. 5 (2011), no. 2, 397-600.[DK2] C. Doran 和 M. Kerr，关于高阶格林函数的一则注记，arXiv:2509.02382.[EG] M. Elmi 和 V. Golyshev，私人通信.[Fe] R. Fedorov，超几何微分算子与抛物希格斯丛的霍奇结构变分，IMRN (2018), no. 18, 5583-5608.[GGK] M. Green、P. Griffiths 和 M. Kerr，《芒福德-泰特群与域：几何与算术》，Annals of Math Studies, No. 183，普林斯顿大学出版社，2012.[GK] V. Golyshev 和 M. Kerr，卡拉比–丘动机的算术与移动高阶调节子，预印本，arXiv:2409.19549.[GKS] V. Golyshev、M. Kerr 和 T. Sasaki，阿佩里扩张，J. London Math. Soc. 109 (2024), no. 1, e12825.[GZ] V. Golyshev 和 D. Zagier，皮卡格秩为一的 Fano 三维簇的伽马猜想证明，Izv. Math. 80 (2016), no. 1, 24-49.[GKZ] B. Gross、W. Kohnen 和 D. Zagier，海格纳点及$L$级数的导数 II，Math. Ann. 278 (1987), 497-562.[Gu] J. Guillera，10 个扩展拉马努金型级数的超几何恒等式，The Ramanujan Journal 15 (2008), 219-234.[He] S. Herfurtner，具有四个奇异纤维的椭圆曲面，Math. Ann. 291 (1991), no. 2, 319-342.[Ka] N. Katz，《指数和与微分方程》，Annals of Math Studies 第 124 卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1990 年.[Ke] M. Kerr，幺幂扩张与微分方程（据 Bloch-Vlasenko），CNTP 16 (2022), no. 4, 801-849.

[KLM] M. Kerr、J. Lewis 和 S. Müller-Stach，高阶*Chow*群的阿贝尔-雅可比映射，《组合数学》142（2006），374-396。[KP] M. Kerr 和 G. Pearlstein，对具有对数增长函数的指数级历史回顾，载于《分层空间的拓扑》，数学科学研究所出版物第58卷，剑桥大学出版社，纽约，2011，281-374。[Ko] M. Kontsevich，“代数超几何级数新进展”，2021年1月在高等科学研究所的报告，笔记见 https://indico.math.cnrs.fr/event/7040/contributions/5971/attachments/3177/4186/cap2021-Kontsevich.pdf。[Le] S. Lefschetz，《位置分析与代数几何》，Gauthier-Villars，巴黎，1924。[Ma] Y. Manin，函数域上代数曲线的有理点，美国数学学会译丛，第二辑，第50卷（1966），189-234。[Po] H. Poincaré，论代数曲面上的曲线，《高等师范学校科学年刊》27（1910），55-108；以及论代数曲面上的曲线，《柏林数学学会会刊》10（1911），28-55。[RRV] D. Roberts 和 F. Rodriguez Villegas，超几何动机，《美国数学会通报》69（2022），第6期，914-929。[RV] F. Rodriguez Villegas，阶乘型有理数比与代数超几何函数，arXiv:0701362。[Za] D. Zagier，微分方程的算术与拓扑，载于《欧洲数学大会论文集（柏林，2016年7月18—22日，Mehrman 和 Skutella 编）》，欧洲数学会，2018，717-776。[Zu] S. Zucker，退化系数下的霍奇理论： $L_2$ 庞加莱度量中的上同调，《数学年刊》109（1979），第3期，415-476。

圣路易斯华盛顿大学数学系，美国密苏里州圣路易斯 63130电子邮件：
matkerr@wustl.edu